目　录

第一章　代数、三角公式与初等函数

第二章 初等几何图形的计算与作图

第三章 代数方程

第四章 矩阵·行列式·线性方程组

第五章 微分学

第六章 积分学

第七章 解析几何与微分几何

第八章 矢量算法与场论初步·张量算法与黎曼几何初步

第九章 抽象代数·线性空间·泛函分析

第十章 复变函数

第十一章　傅立叶级数与积分变换

第十二章　特殊函数

第十三章 常微分方程

第十四章　偏微分方程

第十五章 积分方程

第十六章　概率统计与随机过程

第十七章 误差理论与实验数据处理

第十八章　最优化方法

第十九章 有限元法

第二十章 初等数论

第二十一章　集论与一般拓扑学

附表

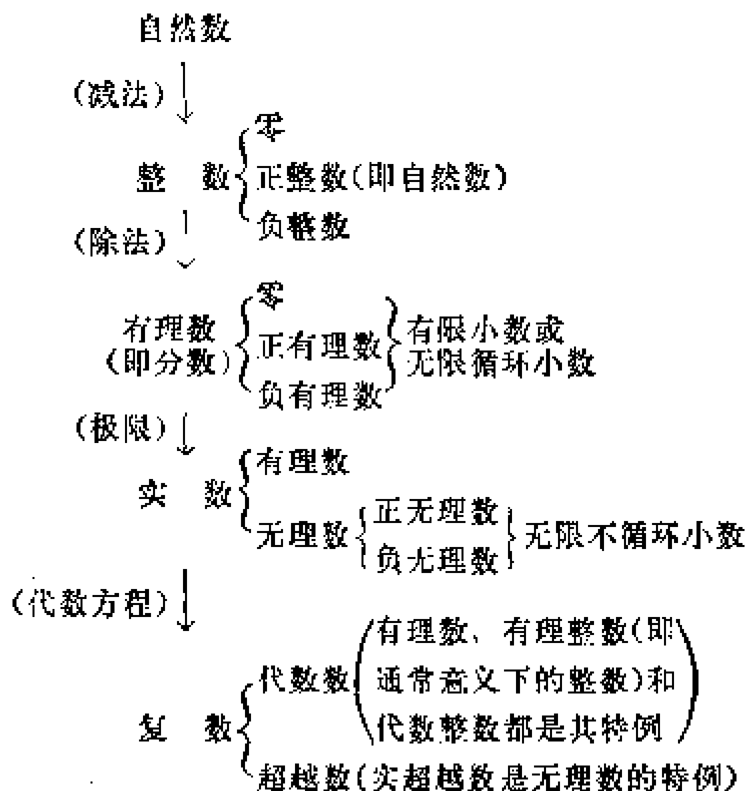
第一章　代数、三角公式与初等函数

这里收集和整理了初等代数(代数方程部分见第三章)、平面三角与球面三角的一些常用公式，同时也介绍了一些常见的初等函数(一个实自变量)的简单性质与图形，所以本章基本上包括了中等学校里的代数学和三角学的主要内容.

§1　代数公式

一、数的扩张、分类及其基本运算规则

1. 数的扩张与分类表



2. 实数四则运算规则

[加减法规则]　同号两数相加，绝对值相加，符号与加数同；异号两数相加，绝对值相减(大的减小的)，符号与绝对值大的加数同；任何实数和零相加，等于实数本身. 减法是加法的逆运算，两个数相减只要把减数变成同它符号相反的数，即可按加法规则运算.

［乘除法规则］　同号两数相乘，绝对值相乘，符号为正；异号两数相乘，绝对值相乘，符号为负；任何数与零相乘等于零；任何数与1相乘等于它自己．除法是乘法的逆运算，同号两数相除，绝对值相除，符号为正；异号两数相除，绝对值相除，符号为负；任何数除以1等于它自己；零除以任何不等于零的数等于零；零不能做除数．

［四则混合运算规则］　先乘除，后加减；先括号内，后括号外．

3．数的三个基本运算律

［交换律］　$a+b=b+a$　　$ab=ba$

［结合律］　$(a+b)+c=a+(b+c)$　　$(ab)c=a(bc)$

［分配律］　$(a+b)c=ac+bc$

4．乘方与开方

［乘方］　n个数a相乘

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}}=a^n$$

称为a的n次(乘)方，又称为a的n次幂．a称为幂底数，n称为幂指数．

从乘法的符号规则直接得出乘方的符号规则：正数的任何次方为正数；负数的偶次方为正数；负数的奇次方为负数；零的任何次方为零．

规定不等于零的数的零次方等于1，即$a^0=1$，$a\neq 0$．

［开平方］　若$a^2=b$，则a称为b的平方根，记为$a=\pm\sqrt{b}$，求平方根的运算称为开平方．开平方的一般方法用下面例子说明．

例　求316.4841的平方根．

解　第一步，先将被开方的数，从小数点位置向左右每隔两位用逗号“，”分段，如把数316.4841分段成3,16.48,41．第二步，找出第一段数字的初商，使初商的平方不超过第一段数字，而初商加1的平方则大于第一段数字．本例中第一段数字为3，初商为1，因为$1^2=1<3$，而$(1+1)^2=4>3$．第三步，用第一段数字减去初商的平方，并移下第二段数字，组成第一余数，在本例中第一余数为216．第四步，找出试商，使(20×初商＋试商)×试商不超过第一余数，而［20×初商＋(试商＋1)］×(试商＋1)则大于第一余数．第五步，把第一余数减去(20×初商＋试商)×试商，并移下第三段数字，组成第二余数，本例中试商为7，第二余数为2748．依此法继续做下去，直到移完所有的段数．若最后余数为零，则开方运算告结束．若余数永远不为零，则只能取某一精度的近似值．第六步，定小数点位置，平方根小数点位置应与被开方数的小数点位置对齐．本例的算式

如下：

$$\begin{array}{r|l} & 1\ \ 7.\ 7\ \ 9 \\ & \sqrt{3,16.48,41} \\ & 1\cdots\cdots\cdots\cdots 1^2 \\ \hline 20\times1=20 & 2\ 16\cdots\cdots\cdots 第一余数 \\ +7 & \\ 27 & 1\ 89\cdots\cdots\cdots 27\times7 \\ \hline 20\times17=340 & 27\ 48\cdots\cdots 第二余数 \\ +7 & \\ 347 & 24\ 29\cdots\cdots 347\times7 \\ \hline 20\times177=3540 & 3\ 19\ 41\cdots 第三余数 \\ +9 & \\ 3549 & 3\ 19\ 41\cdots 3549\times9 \\ \hline & 0 \end{array}$$

［开立方］ 若 $a^3=b$，则 a 称为 b 的立方根，记为 $a=\sqrt[3]{b}$，求立方根的运算称为开立方.

一个数的平方根和立方根可从"平方根表"和"立方根表"中查到.

5. 实数进位制

［进位制的基与数字］ 任一正数可表为通常意义下的有限小数或无限小数，各数字的值与数字所在的位置有关，任何位置的数字当小数点向右移一位时其值扩大 10 倍，当小数点向左移一位时其值缩小 10 倍. 例如

$$173.246=1\times10^2+7\times10+3+2\times10^{-1}+4\times10^{-2}+6\times10^{-3}$$

一般地，任一正数 a 可表为

$$\begin{aligned} a&=a_na_{n-1}\cdots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\cdots \\ &=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0 \\ &\quad+a_{-1}\times10^{-1}+a_{-2}\times10^{-2}+\cdots \end{aligned}$$

这就是 10 进数，记作 $a_{(10)}$，数 10 称为进位制的基，式中 a_i 在 $\{0,1,2,\cdots,9\}$ 中取值，称为 10 进数的数字. 显然没有理由说进位制的基不可以取其他的数. 现在取 q 为任意大于 1 的正整数当作进位制的基，于是就得到 q 进数表示

$$\begin{aligned} a_{(q)}&=a_na_{n-1}\cdots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\cdots \\ &=a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}+\cdots+a_1q+a_0+a_{-1}q^{-1}+a_{-2}q^{-2}+\cdots \end{aligned} \tag{1}$$

式中数字 a_i 在 $\{0,1,2,\cdots,q-1\}$ 中取值，$a_na_{n-1}\cdots a_1a_0$ 称为 q 进数 $a_{(q)}$ 的整数部分，记作$[a_{(q)}]$，$a_{-1}a_{-2}\cdots$称为 $a_{(q)}$ 的分数部分，记作$\{a_{(q)}\}$. 常用进位制，除

10 进制外，还有 2 进制、8 进制、16 进制等，其数字如下

2 进制　0, 1

8 进制　0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

16 进制　0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$

[2, 8, 16 进制的加法与乘法表]

2 进制加法表

+	0	1
0	0	1
1	1	10

2 进制乘法表

×	0	1
0	0	0
1	0	1

8 进制加法表

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	00	01	02	03	04	05	06	07
1	01	02	03	04	05	06	07	10
2	02	03	04	05	06	07	10	11
3	03	04	05	06	07	10	11	12
4	04	05	06	07	10	11	12	13
5	05	06	07	10	11	12	13	14
6	06	07	10	11	12	13	14	15
7	07	10	11	12	13	14	15	16

8 进制乘法表

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	00	00	00	00	00	00	00	00
1	00	01	02	03	04	05	06	07
2	00	02	04	06	10	12	14	16
3	00	03	06	11	14	17	22	25
4	00	04	10	14	20	24	30	34
5	00	05	12	17	24	31	36	43
6	00	06	14	22	30	36	44	52
7	00	07	16	25	34	43	52	61

16 进制加法表

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$
1	01	02	03	04	05	06	07	08	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10
2	02	03	04	05	06	07	08	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11
3	03	04	05	06	07	08	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12
4	04	05	06	07	08	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13
5	05	06	07	08	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14
6	06	07	08	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14	15
7	07	08	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14	15	16
8	08	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14	15	16	17
9	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\bar{0}$	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\bar{1}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$1\bar{0}$
$\bar{2}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$1\bar{0}$	$1\bar{1}$
$\bar{3}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$1\bar{0}$	$1\bar{1}$	$1\bar{2}$
$\bar{4}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$1\bar{0}$	$1\bar{1}$	$1\bar{2}$	$1\bar{3}$
$\bar{5}$	$0\bar{5}$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$1\bar{0}$	$1\bar{1}$	$1\bar{2}$	$1\bar{3}$	$1\bar{4}$

16 进制乘法表

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
0	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
1	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	$0\bar{0}$	$0\bar{1}$	$0\bar{2}$	$0\bar{3}$	$0\bar{4}$	$0\bar{5}$
2	00	02	04	06	08	$0\bar{0}$	$0\bar{2}$	$0\bar{4}$	10	12	14	16	18	$1\bar{0}$	$1\bar{2}$	$1\bar{4}$
3	00	03	06	09	$0\bar{2}$	$0\bar{5}$	12	15	18	$1\bar{1}$	$1\bar{4}$	21	24	27	$2\bar{0}$	$2\bar{3}$
4	00	04	08	$0\bar{2}$	10	14	18	$1\bar{2}$	20	24	28	$2\bar{2}$	30	34	38	$3\bar{2}$
5	00	05	$0\bar{0}$	$0\bar{5}$	14	19	$1\bar{4}$	23	28	$2\bar{3}$	32	37	$3\bar{2}$	41	46	$4\bar{1}$
6	00	06	$0\bar{2}$	12	18	$1\bar{4}$	24	$2\bar{0}$	30	36	$3\bar{2}$	42	48	$4\bar{4}$	54	$5\bar{0}$
7	00	07	$0\bar{4}$	15	$1\bar{2}$	23	$2\bar{0}$	31	38	$3\bar{5}$	46	$4\bar{3}$	54	$5\bar{1}$	62	69
8	00	08	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	00	09	12	$1\bar{1}$	24	$2\bar{3}$	36	$3\bar{5}$	48	51	$5\bar{0}$	63	$6\bar{2}$	75	$7\bar{4}$	87
$\bar{0}$	00	$0\bar{0}$	14	$1\bar{4}$	28	32	$3\bar{2}$	46	50	$5\bar{0}$	64	$6\bar{4}$	78	82	$8\bar{2}$	96
$\bar{1}$	00	$0\bar{1}$	16	21	$2\bar{2}$	37	42	$4\bar{3}$	58	63	$6\bar{4}$	79	84	$8\bar{5}$	$9\bar{0}$	$\bar{0}5$
$\bar{2}$	00	$0\bar{2}$	18	24	30	$3\bar{2}$	48	54	60	$6\bar{2}$	78	84	90	$9\bar{2}$	$\bar{0}8$	$\bar{1}4$
$\bar{3}$	00	$0\bar{3}$	$1\bar{0}$	27	34	41	$4\bar{4}$	$5\bar{1}$	68	75	82	$8\bar{5}$	$9\bar{2}$	$\bar{0}9$	$\bar{1}6$	$\bar{2}3$
$\bar{4}$	00	$0\bar{4}$	$1\bar{2}$	$2\bar{0}$	38	46	54	62	70	$7\bar{4}$	$8\bar{2}$	$9\bar{0}$	$\bar{0}8$	$\bar{1}6$	$\bar{2}4$	$\bar{3}2$
$\bar{5}$	00	$0\bar{5}$	$1\bar{4}$	$2\bar{3}$	$3\bar{2}$	$4\bar{1}$	$5\bar{0}$	69	78	87	96	$\bar{0}5$	$\bar{1}4$	$\bar{2}3$	$\bar{3}2$	$\bar{4}1$

[8-2, 16-2 数字转换表]

8 进数	0	1	2	3	4	5	6	7
2 进数	000	001	010	011	100	101	110	111

16 进数	0	1	2	3	4	5	6	7
2 进数	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
16 进数	8	9	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
2 进数	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

[各种进位制的相互转换]

1° $q\to 10$ 转换　适用通常的 10 进数四则运算规则，根据公式(1)，可以把 q 进数 $a_{(q)}$ 转换为 10进数表示，例如

$$743_{(8)}=7\times 8^2+4\times 8+3=448+32+3=483_{(10)}$$

$$1011.101_{(2)}=1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2+1+1\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}$$

$$=11.625_{(10)}$$

2° $10\to q$ 转换　转换时必须分为整数部分和分数部分进行。

对于整数部分其步骤是：

(1) 用 q 去除$[a_{(10)}]$，得到商和余数.

(2) 记下余数作为 q 进数的最后一个数字.

(3) 用商替换$[a_{(10)}]$的位置重复(1)和(2)两步，直到商等于零为止。

对于分数部分其步骤是：

(1) 用 q 去乘 $\{a_{(10)}\}$.

(2) 记下乘积的整数部分作为 q 进数的分数部分的第一个数字.

(3) 用乘积的分数部分替换 $\{a_{(10)}\}$ 的位置，重复(1)和(2)两步，直到乘积变为整数为止，或直到所需要的位数为止．例如

$$103.118_{(10)}=147.074324\cdots_{(8)}$$

整数部分的草式

```
8| 103 |7
 ------
 | 12 |4
 ------
    1
```

分数部分的草式

```
 .118 |8
 .944 |
------|
7.552 |
------|
4.416 |
------|
3.328 |
------|
2.624 |
------|
4.992 |
```

3°　$p\to q$转换　通常情况下其步骤是：$a_{(p)}\to a_{(10)}\to a_{(q)}$。如果$p$，$q$是同一数$s$的不同次幂，其步骤是：$a_{(p)}\to a_{(s)}\to a_{(q)}$。例如，8进数$127.653_{(8)}$转换为16进数时，由于$8=2^3$，$16=2^4$，所以$s=2$，其步骤是：首先把8进数的每个数字根据8-2转换表转换为2进数(三位一组)

$$127.653_{(8)}=001\ 010\ 111.110\ 101\ 011_{(2)}$$

然后把2进数的所有数字从小数点起(左和右)每四位一组分组，从16-2转换表中逐个记下对应的16进数的数字，即

$$127.653_{(8)}=0101\ 0111.1101\ 0101\ 1000_{(2)}=57.\bar{3}58_{(16)}$$

二、复数

1. 复数的概念

[实部与虚部·模与辐角·共轭复数]　复数z一般表示为$z=a+ib$，其中$i=\sqrt{-1}$称为虚数单位，a和b均为实数，分别称为z的实部和虚部，记为$a=\operatorname{Re} z$，$b=\operatorname{Im} z$。

两个复数只有当实部和虚部分别相等时才相等。

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$称为复数z的模。

$\operatorname{Arg} z=\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{b}{a}$称为复数$z$的辐角，所以，一个复数有无穷多个辐角，但其中一个叫做主辐角，记为$\arg z$，它满足

$$0\leqslant \arg z<2\pi$$

并有

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$z=a+ib$与$\bar{z}=a-ib$互为共轭复数。

[虚数单位的乘方]

$$i=\sqrt{-1}\qquad i^2=-1\qquad i^3=-i\qquad i^4=1$$

$$i^{4n+1}=i \qquad i^{4n+2}=-1 \qquad i^{4n+3}=-i \qquad i^{4n}=1$$

2. 复数的表示法

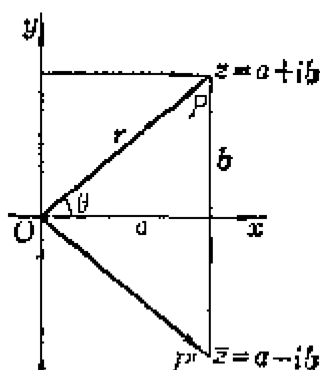


图　1.1

［坐标表示法］　复数 $z=a+ib$ 可与直角坐标 (a,b) 建立一一对应(图 1.1).

［矢量表示法］　把 a, b 视为矢量 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴和 y 轴上的投影，则矢量 $\overrightarrow{OP}$(图 1.1) 可表示复数 $z=a+ib$, 与 P 点关于 x 轴对称的点记为 P', 矢量 $\overrightarrow{OP'}$ 表示共轭复数 $\bar{z}=a-ib$.

［三角表示法］　$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

［指数表示法］　$z=|z|e^{i\theta}=re^{i\theta}$

3. 复数的运算

［代数式运算］

$$(a+ib)\pm(c+id)=(a\pm c)+i(b\pm d)$$

$$(a+ib)\times(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$$

$$(a+ib)\div(c+id)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

［三角式运算］　设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) \qquad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

则

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$$z_1^n=r_1^n(\cos n\theta_1+i\sin n\theta_1)$$

当 $r_1=1$ 时，得 $(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)^n=\cos n\theta_1+i\sin n\theta_1$，这个公式叫做德·莫弗公式.

$$z_1^{\frac{1}{n}}=r_1^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta_1+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta_1+2k\pi}{n}\right) \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

［指数式运算］　设

$$z_1=r_1e^{i\theta_1} \qquad z_2=r_2e^{i\theta_2}$$

则

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$z^n=r^ne^{in\theta} \qquad z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

三、数列与简单级数

1. 数列与级数的概念

依照某种规则排列着的一列数

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

称为数列，记作$\{a_n\}$. 若把这一列数用和号联接起来:

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

它称为级数，记作$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. a_n称为该数列或相应级数的通项(或称为一般项).

2. 等差数列与等差(算术)级数

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ \cdots \quad (d\text{ 为常数})$$

称为公差为d的等差数列. 与等差数列相应的级数称为等差级数，又称算术级数.

通项公式　$a_n=a_1+(n-1)d$

前n项和　$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

等差中项　$a_k=\dfrac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} \quad (k>1)$

3. 等比数列与等比(几何)级数

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ a_1q^3,\ \cdots \quad (q\text{ 为常数})$$

称为公比为q的等比数列. 与等比数列相应的级数称为等比级数，又称几何级数.

通项公式　$a_n=a_1q^{n-1}$

前n项和　$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$

等比中项　$a_k=\pm\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}} \quad (a_{k-1}a_{k+1}>0)$

无穷递减等比级数的和　$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}=\dfrac{a_1}{1-q} \quad (|q|<1)$

4. 算术-几何级数

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd)q^k=\frac{a-[a+(n-1)d]q^n}{1-q}+\frac{dq(1-q^{n-1})}{(1-q)^2} \quad (n\geqslant 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a+kd)q^k=\frac{a}{1-q}+\frac{dq}{(1-q)^2}\quad(|q|<1)$$

5. 调和级数

1° 若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots$为等差级数，则$a+b+c+\cdots$称为调和级数．调和中项为

$$b=\frac{2ac}{a+c}$$

2° 设A,G,H分别为某两个数的等差中项、等比中项和调和中项，则

$$AH=G^2$$

6. 高阶等差级数

设有一数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots \tag{1}$$

如果接连地从它的后一项减去前一项，那末就得到原数列(1)的第一次差构成的数列

$$a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1},\ \cdots \tag{2}$$

再接连地将(2)的后一项减去前一项，又得到数列(1)的第二次差构成的数列．依此类推：

	a_1		a_2		a_3		a_4	$\cdots$
第一次差		$d_1=\Delta a_1$		Δa_2		Δa_3		$\cdots$
第二次差			$d_2=\Delta^2 a_1$		$\Delta^2 a_2$		$\cdots$	
第三次差				$d_3=\Delta^3 a_1$		$\cdots$		

$$\cdots\cdots$$

式中

$$\Delta^k a_i=\Delta^{k-1}a_{i+1}-\Delta^{k-1}a_i$$

如果做了r次，数列(1)的每个第r次差都相等，那末以后各次差都等于零，则称数列(1)为r阶等差数列．与这样的数列相应的级数称为r阶等差级数．一阶等差级数也就是通常的算术级数．

设(1)是r阶等差数列，并设d_1为(1)的第一次差构成的数列的首项，d_2为(1)的第二次差构成的数列的首项，…，d_r为(1)的第r次差构成的数列的首项，则有

通项公式 $(n>r)$

$$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}d_2+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{r!}d_r$$

前 n 项和

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2!}d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}d_2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{(r+1)!}d_r$$

7. 某些级数的部分和

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

$$1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

$$1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

$$1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n = \begin{cases} \frac{1}{2}(n+1), & n\text{ 为奇数} \\ -\frac{n}{2}, & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^3-2^3+3^3-\cdots+(-1)^{n-1}n^3 = \begin{cases} \frac{1}{4}(2n-1)(n+1)^2, & n\text{ 为奇数} \\ -\frac{1}{4}n^2(2n+3), & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$1^4-2^4+3^4-\cdots+(-1)^{n-1}n^4 = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)(n^2+n-1)$$

$$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$$

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$\sum_{j=1}^{n}j(j+1)\cdots(j+k)=\frac{1}{k+2}\frac{(n+k+1)!}{(n-1)!}$$

$$\sum_{j=1}^{n}j(j+1)^2=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

$$\sum_{j=1}^{n}j(j+1)^2(j+2)=\frac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$$

$$\sum_{j=1}^{n}j(n^2-j^2)=\frac{1}{4}n^2(n^2-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}2^j j(j+1)=2^{n+1}(n^2-n+2)-4$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{(j+1)(j-1)}=\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2j-1)(2j+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(3j-2)(3j+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)}=\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(3j-2)(3j+1)(3j+4)}=\frac{1}{24}-\frac{1}{6(3n+1)(3n+4)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{2j-1}{j(j+1)(j+2)}=\frac{3}{4}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{j+2}{j(j+1)(j+3)}=\frac{29}{36}-\frac{1}{n+3}-\frac{3}{2(n+2)(n+3)}-\frac{4}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{j2^{j-1}}{(j+1)(j+2)}=\frac{2^n}{n+2}-\frac{1}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2 4^j}{(j+1)(j+2)}=\frac{2}{3}+\frac{(n-1)4^{n+1}}{3(n+2)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{j+2}{j(j+1)2^j}=1-\frac{1}{(n+1)2^n}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{2j+3}{j(j+1)3^j}=1-\frac{1}{(n+1)3^n}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}2^j}{[2^j+(-1)^j][2^{j+1}+(-1)^{j+1}]}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}\right]$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b(b+1)\cdots(b+j-1)}{a(a+1)\cdots(a+j-1)}=\frac{1}{b-a+1}\left[\frac{b(b+1)\cdots(b+n)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}-b\right]$$

四、乘法与因式分解公式

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ （n 为正整数）

$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$ （n 为偶数）

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$ （n 为奇数）

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

五、分式

1. 分式运算

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b} \qquad \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (a>0,\ b>0)$$

2. 部分分式

任一既约真分式(分子与分母没有公因子，分子次数低于分母次数)都可唯一地分解成形如$\frac{A}{(x-a)^l}$或$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^l}$$\left(其中\frac{p^2}{2}-q<0\right)$的基本真分式之和，其运算称为部分分式展开．若为假分式(分子次数不低于分母次数)，应先化为整式与真分式之和，然后再对真分式进行部分分式展开．部分分式的各个系数可以通过待定系数法来确定．下面分几种不同情况介绍．

设
$$N(x)=n_0+n_1x+n_2x^2+\cdots+n_rx^r$$
$$G(x)=g_0+g_1x+g_2x^2+\cdots+g_sx^s$$

[线性因子重复]

1° $$\frac{N(x)}{(x-a)^m}=\frac{A_0}{(x-a)^m}+\frac{A_1}{(x-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_{m-1}}{x-a}$$

式中$N(x)$的最高次数$r\leqslant m-1$；$A_0, A_1, \cdots, A_{m-1}$为待定常数，可由下式确定：

$$A_0=[N(x)]_{x=a}, \qquad A_k=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^kN(x)}{dx^k}\right]_{x=a} \quad (k=1, 2, \cdots, m-1)$$

2° $$\frac{N(x)}{x^mG(x)}=\frac{A_0}{x^m}+\frac{A_1}{x^{m-1}}+\cdots+\frac{A_{m-1}}{x}+\frac{F(x)}{G(x)}$$

式中$A_0, A_1, \cdots, A_m$为待定常数，可由下式确定：

$$A_0=\frac{n_0}{g_0}, \quad A_j=\frac{1}{g_0}\left(n_j-\sum_{i=0}^{j-1}A_ig_{j-i}\right) \qquad (j=1, 2, \cdots, m-1)$$

$$F(x)=f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots+f_kx^k, \quad k\leqslant s-1$$

其系数f_j与m有关，由下表确定：

m	$f_j \quad (j=0,1,2,\cdots,k;\ k\leqslant s-1)$
1	$f_j=n_{j+1}-A_0g_{j+1}$
2	$f_j=n_{j+2}-(A_0g_{j+2}+A_1g_{j+1})$
3	$f_j=n_{j+3}-(A_0g_{j+3}+A_1g_{j+2}+A_2g_{j+1})$
⋮	…………………
m	$f_j=n_{j+m}-\sum\limits_{i=0}^{m-1}A_ig_{j+m-i}$

例 $\dfrac{x^2+1}{x^3(x^2-3x+6)}=\dfrac{A_0}{x^3}+\dfrac{A_1}{x^2}+\dfrac{A_2}{x}+\dfrac{f_1x+f_0}{x^2-3x+6}$

解 依上述公式算出

$$A_0=\frac{n_0}{g_0}=\frac{1}{6}\qquad A_1=\frac{1}{g_0}(n_1-A_0g_1)=\frac{1}{6}\left[0-\frac{1}{6}\times(-3)\right]=\frac{1}{12}$$

$$A_2=\frac{1}{g_0}(n_2-A_0g_2-A_1g_1)=\frac{1}{6}\left[1-\frac{1}{6}\times1-\frac{1}{12}\times(-3)\right]=\frac{13}{72}$$

此时 $m=3$,

$$f_0=n_3-(A_0g_3+A_1g_2+A_2g_1)=0-\left[\frac{1}{6}\times0+\frac{1}{12}\times1+\frac{13}{72}\times(-3)\right]=\frac{33}{72}$$

$$f_1=n_4-(A_0g_4+A_1g_3+A_2g_2)=0-\left(0+0+\frac{13}{72}\times1\right)=-\frac{13}{72}$$

所以得到

$$\frac{x^2+1}{x^3(x^2-3x+6)}=\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{12x^2}+\frac{13}{72x}+\frac{-13x+33}{72(x^2-3x+6)}$$

3° $$\frac{N(x)}{(x-a)^mG(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^m}+\frac{A_1}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-2}}+\cdots+\frac{A_{m-1}}{x-a}+\frac{F(x)}{G(x)}$$

作变换 $y=x-a$, 则 $N(x)=N_1(y)$, $G(x)=G_1(y)$, 上式变为

$$\frac{N_1(y)}{y^mG_1(y)}=\frac{A_0}{y^m}+\frac{A_1}{y^{m-1}}+\frac{A_2}{y^{m-2}}+\cdots+\frac{A_{m-1}}{y}+\frac{F_1(y)}{G_1(y)}$$

用上述1°, 2°的方法确定出 $A_0, A_1, \cdots, A_{m-1}$ 和 $F_1(y)$, 再将 $y=x-a$ 代回. 也可按下式来确定系数 $A_0, A_1, \cdots, A_{m-1}$:

$$A_k=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{N(x)}{G(x)}\right)\right]_{x=a}\quad(k=0,1,2,\cdots,m-1)$$

［线性因子不重复］

1°　$$\frac{N(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

式中 $N(x)$ 的最高次数 $r\leqslant 2, a\neq b\neq c$; A,B,C 为待定常数,可由下式确定:

$$A=\left[\frac{N(x)}{(x-b)(x-c)}\right]_{x=a}\qquad B=\left[\frac{N(x)}{(x-a)(x-c)}\right]_{x=b}$$

$$C=\left[\frac{N(x)}{(x-a)(x-b)}\right]_{x=c}$$

2°　$$\frac{N(x)}{(x-a)(x-b)G(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{F(x)}{G(x)}\qquad(a\neq b)$$

式中多项式 $F(x)$ 的最高次数 $k\leqslant s-1$; A,B 为待定常数,用下式确定:

$$A=\left[\frac{N(x)}{(x-b)G(x)}\right]_{x=a}\qquad B=\left[\frac{N(x)}{(x-a)G(x)}\right]_{x=b}$$

A,B 确定后,再用等式两边多项式同次项系数必须相等的法则来确定 $F(x)$ 的各项系数。

例　$$\frac{x^2+3}{x(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{f_1x+f_0}{x^2+2x+4}$$

解　依上述公式算得

$$A=\left[\frac{x^2+3}{(x-2)(x^2+2x+4)}\right]_{x=0}=-\frac{3}{8}$$

$$B=\left[\frac{x^2+3}{x(x^2+2x+4)}\right]_{x=2}=\frac{7}{24}$$

把 A,B 代入原式,通分并整理后得

$$x^2+3=\left(f_1-\frac{3}{8}+\frac{7}{24}\right)x^3+\left(f_0-2f_1+\frac{7}{12}\right)x^2+\left(\frac{7}{6}-2f_0\right)x+3$$

比较等式两边同次项系数得

$$f_0=\frac{7}{12}\qquad f_1=\frac{1}{12}$$

所以有

$$\frac{x^2+3}{x(x-2)(x^2+2x+4)}=-\frac{3}{8x}+\frac{7}{24(x-2)}+\frac{x+7}{12(x^2+2x+4)}$$

［高次因子］

$$\frac{N(x)}{(x^2+h_1x+h_0)G(x)}=\frac{a_1x+a_0}{x^2+h_1x+h_0}+\frac{F(x)}{G(x)}$$

$$\frac{N(x)}{(x^2+h_1x+h_0)^2G(x)}=\frac{a_1x+a_0}{(x^2+h_1x+h_0)^2}+\frac{b_1x+b_0}{x^2+h_1x+h_0}+\frac{F(x)}{G(x)}$$

$$\frac{N(x)}{(x^3+h_2x^2+h_1x+h_0)G(x)}=\frac{a_2x^2+a_1x+a_0}{x^3+h_2x^2+h_1x+h_0}+\frac{F(x)}{G(x)}$$

…………………………

[计算系数的一般方法]

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{N(x)}{G(x)H(x)L(x)}=\frac{A(x)}{G(x)}+\frac{B(x)}{H(x)}+\frac{C(x)}{L(x)}+\cdots$$

1° 等式两边乘以 $D(x)$ 化为整式，各项按 x 的同次幂合并，然后列出未知系数的方程组，解出而得.

2° 等式两边乘以 $D(x)$ 化为整式，再把 x 用简单的数值(如 $x=0,1,-1$ 等)代入，然后列出未知系数的方程组，解出而得.

六、比例

1° 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (或写为 $a:b=c:d$)，a,b,c,d 都不等于零，则

$ad=bc$ （交叉积） $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ （反比）

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ （更比） $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ （合比）

$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ （分比） $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ （合分比）

2° 若 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$，则

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\cdots+\lambda_nb_n}=\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}$$

式中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组任意的常数，$b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都不等于零.

3° 若 y 与 x 成正比，(记作 $y\propto x$)，则

$$y=kx \qquad k\text{ 为比例常数}$$

若 y 与 x 成反比$\left(\text{记作 } y\propto\frac{1}{x}\right)$，则

$$y=\frac{k}{x} \qquad k\text{ 为比例常数}$$

若 y 与 x 成正比，y 与 z 也成正比(即 $y\propto x$, $y\propto z$)，则 x 与 z 成正比，即

$$x=kz \qquad (x\propto z)$$

且 y 与 xz 成正比，即

$$y=kxz \qquad (y\propto xz)$$

七、根式

1. 根式的概念

[方根与根式]　数a的n次方根是指求一个数，它的n次方恰好等于a。a的n次方根记为$\sqrt[n]{a}$（n为大于1的自然数）。作为代数式，$\sqrt[n]{a}$称为根式，n称为根指数，a称为根底数。在实数范围内，负数不能开偶次方，一个正数开偶次方有两个方根，其绝对值相同，符号相反。

[算术根]　正数的正方根称为算术根，零的算术根规定为零。

[基本性质]　由方根的定义，有

$$(\sqrt[n]{a})^n=a=\sqrt[n]{a^n}$$

2. 根式运算

[乘积的方根]　乘积的方根等于各因子同次方根的乘积；反过来，同次方根的乘积等于乘积的同次方根，即

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\quad(a\geqslant0,b\geqslant0)$$

[分式的方根]　分式的方根等于分子、分母同次方根相除，即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad(a\geqslant0,b>0)$$

[根式的乘方]　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\quad(a\geqslant0)$

[根式化简]

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}\quad(a\geqslant0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}\quad(a>0)$$

$$\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

$$(a>0,b>0,a\neq b,c\geqslant0,d\geqslant0)$$

$$\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

$$(a>0,b>0,a\neq b,c\geqslant0,d\geqslant0)$$

[同类根式及其加减运算]　根指数和根底数都相同的根式称为同类根式，只有同类根式才可用加减运算加以合并。

八、不等式

1. 简单不等式

1° 若$a>b$，则

$$a\pm c>b\pm c \qquad c-a<c-b$$

$$ac>bc \qquad \frac{a}{c}>\frac{b}{c} \qquad (c>0)$$

$$ac<bc \qquad \frac{a}{c}<\frac{b}{c} \qquad (c<0)$$

$$a^n>b^n \qquad (n>0, a>0, b>0)$$

$$a^n<b^n \qquad (n<0, a>0, b>0)$$

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b} \qquad (n\text{为正整数}, a>0, b>0)$$

2° 若 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，且b、d同号，则

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

2. 有关绝对值的不等式

1° 若$a, b, \cdots, k$为任意复数，则

$$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$$

$$|a\pm b\pm\cdots\pm k|\leqslant|a|+|b|+\cdots+|k|$$

2° 若a, b为任意复数，则

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$$

3° 若$|a|\leqslant b, b>0$，则

$$-b\leqslant a\leqslant b \quad \text{特别有} \quad -|a|\leqslant a\leqslant|a|$$

4° 若$|a|\geqslant b, b>0$，则

$$a\geqslant b \quad \text{或} \quad a\leqslant -b$$

3. 有关三角函数、指数函数、对数函数的不等式

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad (0<x<\pi)$$

$$\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x>1-\frac{1}{2}x^2 \qquad (-\infty<x<\infty, x\neq 0)$$

$$\sin x>x-\frac{1}{6}x^3 \qquad (x>0)$$

$$\operatorname{tg} x>x+\frac{1}{3}x^3 \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\pi<\frac{\sin\pi x}{x(1-x)}<4$ $\left(0<x<1, x\neq\frac{1}{2}\right)$

$e^x>1+x$ $(x\neq0)$

$e^x<\frac{1}{1-x}$ $(x<1, x\neq0)$

$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ (n 为自然数, $x>0$)

$e^{\frac{x}{1-x}}>\frac{1}{1-x}$ $(x\neq0)$

$\frac{x}{1+x}<1-e^{-x}$ $(x>-1, x\neq0)$

$e^{\frac{x}{1+x}}<1+x$ $(x>-1, x\neq0)$

$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $(x>-1, x\neq0)$

特别取 $x=\frac{1}{n}$ (n 为自然数), 有

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

$\ln x\leqslant x-1$ $(x>0)$

$x<-\ln(1-x)<\frac{x}{1-x}$ $(x<1, x\neq0)$

$\ln x\leqslant n(x^{\frac{1}{n}}-1)$ $(n>0, x>0)$

$\ln\sec x<\frac{1}{2}\sin x\cdot\operatorname{tg}x$ $\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$

$(1+x)^a>1+x^a$ $(a>1, x>0)$

(以下各式变数 z 为复数)

$|\cos z|<2$ $(|z|<1)$

$|\sin z|<\frac{6}{5}|z|$ $(0<|z|<1)$

$|e^z-1|<e^{|z|}-1<|z|e^{|z|}$ $(z\neq0)$

$\frac{1}{4}|z|<|e^z-1|<\frac{7}{4}|z|$ $(0<|z|<1)$

$|\ln(1+z)|<-\ln(1-|z|)$ $(0<|z|<1)$

4. 某些重要不等式

[算术平均值与几何平均值不等式]

1° 几个数的算术平均值的绝对值不超过这些数的均方根, 即

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

等号只当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立。

2° 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 均为正数，则它们的几何平均值不超过算术平均值，即

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

等号只当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立。

3° 对 n 个正数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 的加权平均值 $\dfrac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$，有

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}\leqslant\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

等号只当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立。

4° 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 为正数，又 $\alpha<0<\beta$，则有

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

[柯西不等式] 设 a_i, $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

等号只当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 时成立。这个不等式表明一个角(取实数值)的余弦值总是小于1的，或者说二矢量内积小于二矢量长度之积。

[赫尔德不等式]

1° 设 a_i, b_i, $\cdots$, l_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 为正数，又 α, β, $\cdots$, λ 为正数，且 $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}b_i^{\beta}\cdots l_i^{\lambda}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\beta}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}l_i\right)^{\lambda}$$

等号只当 $\dfrac{a_k}{\sum a_i}=\dfrac{b_k}{\sum b_i}=\cdots=\dfrac{l_k}{\sum l_i}$ 时成立。

2° 设 a_i、b_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 为正数，又 $k>0$, $k\neq1$, k' 与 k 共轭，即 $\dfrac{1}{k'}+\dfrac{1}{k}=1$，或 $(k-1)(k'-1)=1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\qquad(k>1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} \qquad (k<1)$$

等号只当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时成立.

［闵可夫斯基不等式］ 设 a_i, $b_i>0$ ($i=1, 2, \cdots, n$), 又 $r>0$, $r\neq 1$, 则

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (r>1)$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right\}^{\frac{1}{r}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (r<1)$$

等号只当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时成立. 当 $r=2$ 时, 此不等式也称为三角形不等式, 它表明三角形两边之和大于第三边.

［契贝谢夫不等式］ 设 $a_i>0$, $b_i>0$ ($i=1, 2, \cdots, n$). 若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, 且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$, 或 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$, 且 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$, 则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 而 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$, 则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

［詹生不等式］ 设 $a_i>0$ ($i=1, 2, \cdots, n$), 且 $0<r<s$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

［伯努利不等式］ 设 $a>1$, 自然数 $n>1$, 则

$$a^n>1+n(a-1)$$

特别令 $a=b^{\frac{1}{n}}$ ($b>1$), 则

$$b^{\frac{1}{n}}-1<\frac{b-1}{n}$$

5. 二次不等式解法

$ax^2+bx+c>0$ ($a\neq 0$)的解 (设 $\Delta=b^2-4ac$)

a \ Δ 解	Δ>0	Δ=0	Δ<0
a>0	$x>\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x<\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x\neq-\frac{b}{2a}$	$-\infty<x<\infty$
a<0	$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}<x<\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	无解	无解

九、阶乘、排列与组合

1. 阶乘

[阶乘的定义] 设 n 为自然数，则

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$$

称为 n 的阶乘. 并且规定 $0!=1$. 又定义

$$(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}=1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1),\quad (-1)!!=0$$

$$(2n)!!=2^n n!=2\cdot4\cdot6\cdots(2n),\quad 0!!=0$$

[斯特林公式]

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}\qquad(0<\theta<1)$$

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\qquad(\text{当 } n \text{ 充分大})$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n-1}\right)$$

[阶乘有限和公式]

$$\sum_{j=1}^{n} j!j=(n+1)!-1$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{(j+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2+j-1}{(j+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{j2^j}{(j+2)!}=1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!(n-j)!}=\frac{2^n}{n!}$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{n(n+j-1)!}{(j!)^2(n-j)!}=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{(2j+1)!!}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2n+1)!!}\right]$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(2j-1)!!}{(2j+2)!!}=\frac{1}{2}-\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$$

2. 排列

[选排列] 从 n 个不同的元素中，每次取出 k 个($k\leqslant n$)不同的元素，按一定的顺序排成一列，称为选排列．其排列种数为

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

[全排列] 从 n 个不同的元素中，每次取出 n 个不同的元素，按一定的顺序排成一列，称为全排列．其排列种数为

$$P_n=A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

[有重复的排列] 从 n 个不同的元素中，每次取出 k 个元素($k\leqslant n$)，允许重复，这种排列称为有重复的排列．其排列种数为

$$\bar{A}_n^k=n^k \qquad \bar{A}_n^n=n^n$$

[不尽相异元素的全排列] 如果在 n 个元素中，有 n_1 个元素彼此相同，又有 n_2 个元素彼此相同，…，又有 n_m 个元素彼此相同($n_1+n_2+\cdots+n_m=n$)，那末这 n 个元素的全排列称为不尽相异元素的全排列．其排列种数为

$$A_{n(n_1,n_2,\cdots,n_m)}^n=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$$

[环状排列] 从 n 个不同元素中，每次取出 k 个元素，仅按元素之间的相对位置而不分首尾地围成一圈，这种排列法称为环状排列．其排列种数为

$$A_n^{\circledast}=\frac{A_n^k}{k}$$

3. 组合

[通常意义下的组合] 从 n 个不同的元素中，每次取出 k 个不同的元素，不管其顺序合并成一组，称为组合．其组合种数为

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad \left(C_n^k\text{ 也记作}\binom{n}{k}\right)$$

并且规定 $C_n^0=1$.

［多组组合］ 把 n 个不同的元素分成 m 组，第 i 组有 n_i 个不同的元素，即 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$，这样分组的种数为

$$C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_m}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$$

通常意义下的组合是其特例.

［有重复的组合］ 从 n 个不同元素中，每次取出 k 个元素，允许重复，不管其顺序合并成一组，这种组合称为有重复的组合，其组合种数为

$$C_n^{\bar{k}}=C_{n+k-1}^k$$

［组合公式］

$$C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}=\frac{k+1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}=\frac{k+1}{n-k}C_n^{k+1}=\frac{n}{n-k}C_{n-1}^k$$

$$C_n^k=C_n^{n-k}$$

$$C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$$

$$C_{n+1}^k=\sum_{j=0}^{k}C_{n-j}^{k-j}$$

$$C_{n+k+1}^{n+1}=\sum_{j=0}^{k}C_{n+j}^n$$

$$C_{m+n}^k=\sum_{j=0}^{k}C_m^jC_n^{k-j}$$

$$\sum_{j=0}^{n}C_n^j=2^n$$

$$(-1)^kC_{n-1}^k=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_n^j$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^jC_{2n+1}^j=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\sum_{j=0}^{n}jC_n^j=n2^{n-1}$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}jC_n^j=0$$

$$\sum_{j=0}^{n}j^2C_n^j=2^{n-2}n(n+1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 C_n^j = 2^{n-3} n^2 (n+3)$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1} C_n^j = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} C_n^j = -\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{2j+1} C_n^j = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j (C_n^j)^2 = \begin{cases} (-1)^m \dfrac{(2m)!}{(m!)^2}, & n=2m \\ 0, & n=2m+1 \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{n} j (C_n^j)^2 = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$$

$$\sum_{j=0}^{n-k} C_n^j C_n^{k+j} = C_{2n}^{n-k} = \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!}$$

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j C_m^j = C_{n+m}^n$$

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} = 2^{n-1}$$

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2j+1} = 2^{n-1}$$

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j} = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^j C_n^{2j+1} = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}$$

$$\sum_{j=0}^{n}(n-2j)^2C_n^j=n2^n$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(n-2j)^2C_n^j=\begin{cases}0, & n\neq 2\\ 8, & n=2\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n}C_{a+j-1}^j=\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!}-1$$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{a+j}C_n^j=\frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}\qquad(a\neq 0,\ -1,-2,\ \cdots,\ -n)$$

$$C_n^{n_1,n_2,\cdots,n_m}\leqslant m^n\qquad(n=n_1+n_2+\cdots+n_m,\ 1\leqslant m\leqslant n)$$

十、杨辉三角形与多项式定理

[二项式定理]

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k$$

式中 n 为正整数，C_n^k 称为二项系数.

[杨辉三角形]　我国南宋时期数学家杨辉在他所著的《详解九章算法》(1261年)中记载着有关二项系数的研究．在二项式定理中，当 n 分别取 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 时，其二项系数表示成图 1.2，即所谓“杨辉三角形”．法国人帕斯卡也有类似结果(1650年)，故外国书刊中称之为“帕斯卡三角形”，但比杨辉晚了近四百年．

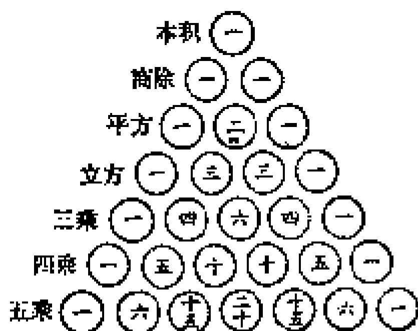


图　1.2

[多项式定理]

$$(a+b+\cdots+f)^n=\sum_{p+q+\cdots+s=n}\frac{n!}{p!q!\cdots s!}a^pb^q\cdots f^s$$

和式中每一数组$(p,\ q,\ \cdots,\ s)$对应一项，这个数组满足 $0\leqslant p\leqslant n, 0\leqslant q\leqslant n, \cdots, 0\leqslant s\leqslant n, p+q+\cdots+s=n$，$\Sigma$ 是对于所有这样的数组求和.

十一、数学归纳法与抽屉原理

[数学归纳法]　对于包含整数 n 的公式，即从某一整数起对后面所有整数

n都成立的公式，有时可用数学归纳法来证明．其步骤如下：

1° 验证n取第一个值n_0时(如$n_0=0$，1或2等)公式成立．

2° 假定当$n=k$时公式成立，验证当$n=k+1$时公式也成立．

因为公式当$n=n_0$时成立，所以由2°可知，当$n=n_0+1$时公式也成立；再由2°可知，当$n=n_0+1+1=n_0+2$时公式也成立，如此继续推下去可知，对一切大于n_0的整数n公式都成立．

[抽屉原理] $n+1$个物体放人n个抽屉里，至少有一个抽屉有两个以上的物体，这个原理称为抽屉原理，它在证明某些存在性定理时很有用．抽屉原理分以下三种形式：

1° $n+1$个元素分成n组，必有一组至少包含两个元素．

2° m个元素分成n组($m>n$为正整数)，必有一组至少包含$\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$个元素($[x]$表示$x$的整数部分)．

3° 无限多个元素分成有限组，必有一组包含无限多个元素．

§2　初等函数及其数值计算

一、函数的概念与分类

[函数与反函数] 设D是给定的一个数集．若有两个变量x和y，当变量x在D中取某个特定值时，变量y依确定的关系f也有一个确定的值，则称y是x的函数．f称为D上的一个函数关系，记为$y=f(x)$，x称为自变量，y称为因变量．当x取遍D中各数，对应的y构成一数集R，D称为定义域或自变数域，R称为值域或因变数域．反过来，若把y视为自变量，x视为因变量，用y写出x的表达式：$x=\varphi(y)$，则称$y=f(x)$与$x=\varphi(y)$互为反函数．

[实变函数与复变函数] 当自变数域为实数域时，函数称为实变函数．当自变数域为复数域时，函数称为复变函数．

[一元函数与多元函数] 只有一个自变量的函数称为一元函数．有两个或两个以上自变量的函数称为多元函数．

[显函数与隐函数] 因变量可以由自变量用数学式子直接表示出来的函数称为显函数．若函数关系包含在一个方程式或一组方程式中，自变量与因变量无明显区分，则称为隐函数．

[简单函数与复合函数] 若y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数，$u=\varphi(x)$，则y称为x的复合函数，u称为中间变量，记作$y=f[\varphi(x)]$．无中间变

量的函数称为简单函数.

[有界函数与无界函数] 若存在两个数 $m, M(m\leqslant M)$, 使 $m\leqslant f(x)\leqslant M$, 对定义域上的任意 x 都成立, 则称 $f(x)$ 为定义域上的有界函数, m 为其下界, M 为其上界. 若这样的数 m 和 M 至少有一个不存在, 则称 $f(x)$ 为定义域上的无界函数.

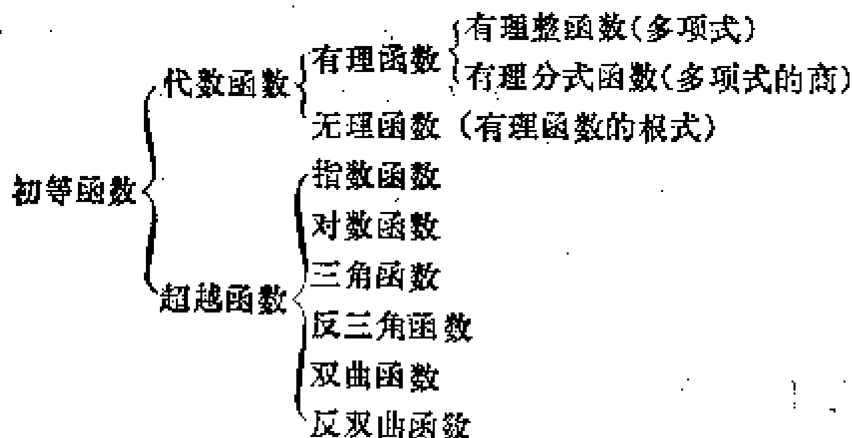
[单调函数与非单调函数] 若对于区间 $[a, b]$ 中的任意 $x_1>x_2$ 有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ [或 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$], 则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 中的递增函数(或递减函数). 递增函数和递减函数通称为单调函数. 不是递增(或递减)的函数称为非单调函数.

[奇函数与偶函数] 若对于定义域中的任意 x 恒有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 若对于定义域中的任意 x 恒有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

[周期函数与非周期函数] 若有一实数 $T\neq 0$, 使对定义域中的任意 x 恒有 $f(x+T)=f(x)$, 则 $f(x)$ 称为以 T 为周期的周期函数; 否则称 $f(x)$ 为非周期函数.

[单值函数与多值函数] 若对于自变量 x 的一个值, 因变量 y 有一个而且只有一个值与其对应, 则称 y 为 x 的单值函数. 若对于自变量 x 的一个值, 与其对应的 y 值不止一个, 则称 y 为 x 的多值函数.

[初等函数] 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数通称为"基本初等函数". 凡是由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次的复合步骤而构成, 并能用一个数学式子表示的函数都属于初等函数.



二、幂函数与有理函数

[定义] 形如 $y=x^a$ 的函数称为幂函数, 式中 a 为任意实常数.

x 的多项式

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

（a_0，a_1，…，a_n 为常数，n 为自然数）

称为有理整函数．

两个多项式的商

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

称为有理分式函数．

有理整函数和有理分式函数通称为有理函数，有时用符号 $R(x)$ 表示．

［幂函数的图形与特征］

方程与图形	特　　征
$y=x^a$　（$a>0$） （$a=5$，$a=2$，$a=1$，$a=\frac{1}{2}$，$a=\frac{1}{5}$）	曲线通过点 (0, 0) 和 (1, 1)；当 $x>1$ 时，a 越大曲线上升越快． 当 a 为偶数，函数为偶函数，在区间 $(0,\infty)$ 中为递增函数，在区间 $(-\infty,0)$ 中为递减函数． 当 a 为奇数，函数为奇函数和递增函数．
$y=x^a$　（$a<0$） （$a=-\frac{1}{5}$，$a=-\frac{1}{2}$，$a=-1$，$a=-2$，$a=-5$）	曲线通过点 (1, 1)． 当 a 为负偶数，函数为偶函数，在区间 $(-\infty,0)$ 中为递增函数，在区间 $(0,\infty)$ 中为递减函数． 当 a 为负奇数，函数为奇函数和递减函数．

三、指数函数与对数函数

［定义］　形如 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$, $-\infty<x<\infty$) 的函数称为指数函数．

当 $a=e$ 时，为书写方便，有时把 e^x 记作 $\exp x$，把 $e^{f(x)}$ 记作 $\exp\{f(x)\}$，等等．

在函数关系式 $x=a^y$ 中 ($a>0$, $a\neq1$, $0<x<\infty$)，若把 x 视为自变量，y 视

为因变量，则称 y 是以 a 为底的 x 的对数函数，x 称为真数，记作 $y=\log_a x$. 指数函数和对数函数互为反函数.

〔函数图形与特征〕

方程与图形	特征
指数函数 $y=a^x\ (a>0)$	曲线与 y 轴相交于点 $A(0,1)$. 渐近线为 $y=0$.
对数函数 $y=\log_a x\ (a>0)$	曲线与 x 轴相交于点 $A(1,0)$. 渐近线为 $x=0$.

〔指数运算法则〕

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$(a^m)^n=a^{mn}\qquad (ab)^m=a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a^m}{b^m}\right)\qquad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}\qquad a^0=1\quad (a\neq 0)$$

〔对数的性质与运算法则〕 在下面的公式中，假设 $a>0$，同时所遇到的函数都假设是在定义域里讨论的.

零与负数没有对数　　$\log_a a=1$

$\log_a 1=0$　　$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$　　$\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$

对数恒等式　$a^{\log_a y}=y$　　换底公式　$\log_a y=\frac{\log_b y}{\log_b a}$

$\log_a b\cdot\log_b a=1$

[常用对数与自然对数]

1° 常用对数：以 10 为底的对数称为常用对数，记作

$$\lg x=\log_{10} x$$

2° 自然对数：以 $e=2.718281828459\cdots$ 为底的对数称为自然对数，记作

$$\ln x=\log_e x$$

3° 常用对数与自然对数的关系：

$$\lg y=M\ln y,\qquad \ln y=\frac{1}{M}\lg y$$

式中 M 称为模数，

$$M=\lg e=0.434294481903\cdots$$

$$\frac{1}{M}=\ln 10=2.30258509299\cdots$$

4° 常用对数首数求法：

若真数大于 1，则对数的首数为正数或零，其值比整数位数少 1.

若真数小于 1，则对数的首数为负数，其绝对值等于真数首位有效数字前面“0”的个数(包括小数点前的那个“0”).

对数的尾数由对数表查出.

四、平面三角函数与反三角函数

1. 角的度量与换算

[角度制与弧度制]

1° 整个圆周的 $\frac{1}{360}$ 的弧称为含有 1 度的弧，而 1 度的弧所对的圆心角称为 1 度的角. 1 度等于 60 分(记作 $1°=60'$)，1 分等于 60 秒(记作 $1'=60''$). 这种用度来度量角的方法称为角度制.

2° 把等于半径长的弧称为含有 1 弧度的弧，而 1 弧度的弧所对的圆心角

称为1弧度的角，这种用弧度来度量角的方法称为弧度制.

［度与弧度的换算］ 弧度与度的关系是

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\theta}{180}$$

式中θ与α分别表示同一角的度数与弧度数.

度与弧度换算表 I

弧 度 (r)	度 (°)	分 (′)	秒 (″)
1	57.29577951	3437.746771	206264.8063
0.017453293	**1**	**60**	**3600**
0.0002908882	0.016666667	**1**	**60**
0.0000048481	0.000277778	0.016666667	**1**

1r≈57°17′44.806″. 表中黑体数字为精确值.

度与弧度换算表 II

度	360°	180°	90°	60°	45°	30°
弧 度	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

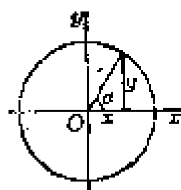
［祖率(圆周率)π］ 圆的周长与直径的比值称为圆周率，用π表示. 由于我国古代南朝的数学家祖冲之在计算圆周率方面取得辉煌成就，因而圆周率也常称为祖率.

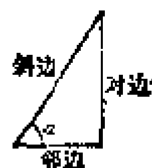
$$\pi=3.141592653589793\cdots$$

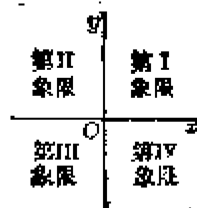
祖冲之算出π的值为$3.1415926<\pi<3.1415927$.

2. 三角函数的定义

［三角函数的定义和符号变化］





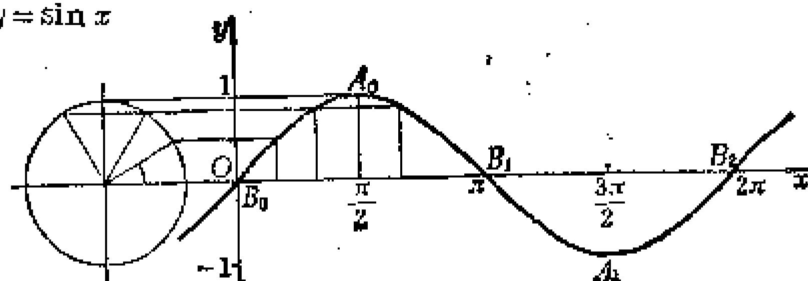


名称		正弦	余弦	正切	余切	正割	余割
定义		$\sin\alpha=\frac{对边}{斜边}=\frac{y}{r}$	$\cos\alpha=\frac{邻边}{斜边}=\frac{x}{r}$	$\operatorname{tg}\alpha=\frac{对边}{邻边}=\frac{y}{x}$	$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{邻边}{对边}=\frac{x}{y}$	$\sec\alpha=\frac{斜边}{邻边}=\frac{r}{x}$	$\csc\alpha=\frac{斜边}{对边}=\frac{r}{y}$
符号与增减变化	I	+↑	+↓	+↑	+↓	+↑	+↓
	II	+↓	−↓	−↑	−↓	−↑	+↑
	III	−↓	−↑	+↑	+↓	−↓	−↑
	IV	−↑	+↑	−↑	−↓	+↓	−↓

[三角函数的图形与特征]

标准正弦曲线

$y=\sin x$



周期：$T=2\pi$

与 x 轴交点(同拐点)：

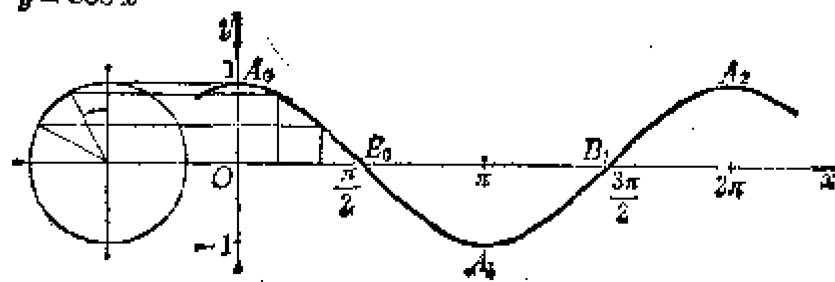
$$B_k(k\pi,0),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

极值点(极大点或极小点)：

$$A_k\left((k+\frac{1}{2})\pi,(-1)^k\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

余弦曲线

$y=\cos x$



周期：$T=2\pi$

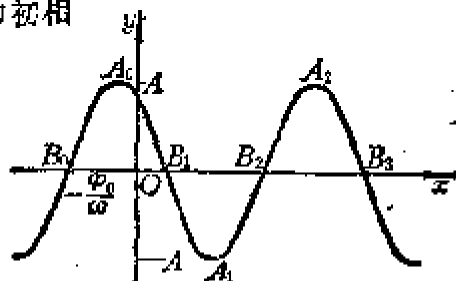
与 x 轴交点(同拐点)：$B_k\left((k+\frac{1}{2})\pi,\ 0\right)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

极值点：$A_k(k\pi,(-1)^k)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

一般正弦曲线

$$y=A\sin(\omega x+\varphi_0)$$

式中 $A>0$ 为振幅，ω 为角频率，φ_0 为初相



同时，$y=A\cos(\omega x+\varphi_1)$ 也属于一般正弦曲线$\left(设\ \varphi_0=\varphi_1+\frac{\pi}{2}，可化为 A\sin(\omega x+\varphi_1+\frac{\pi}{2})\right)$

周期：$T=\frac{2\pi}{\omega}$

与 x 轴交点(同拐点)：

$$B_k\left(\frac{k\pi-\varphi_0}{\omega},0\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

极值点：

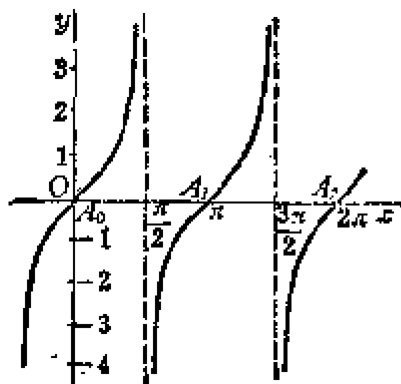
$$A_k\left(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi-\varphi_0}{\omega},\quad(-1)^kA\right)$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

它是将标准正弦曲线在 y 轴方向上伸长 A 倍，在 x 轴方向上压缩 ω 倍，并向左平移 $\frac{\varphi_0}{\omega}$ 一段距离而得到。

正切曲线

$$y=\operatorname{tg}x$$



周期：$T=\pi$

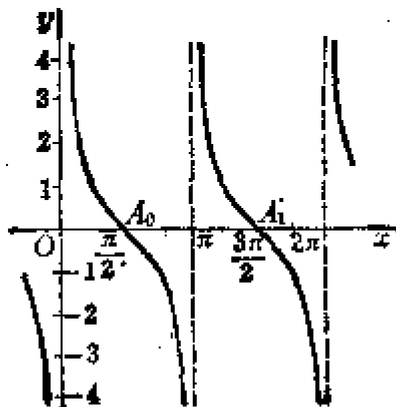
与 x 轴交点(同拐点)：

$A_k(k\pi,0)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，该点切线斜率为 1。

渐近线：$x=(k+\frac{1}{2})\pi$

余切曲线

$$y=\operatorname{ctg}x$$



周期：$T=\pi$

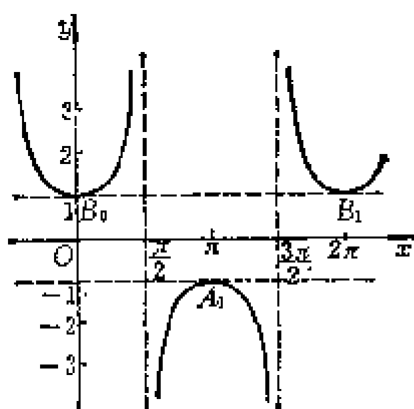
与 x 轴交点(同拐点)：

$A_k\left((k+\frac{1}{2})\pi,\ 0\right)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，该点切线斜率为 -1。

渐近线：$x=k\pi$

正割曲线

$y=\sec x$



周 期：$T=2\pi$

极大点：$A_k((2k+1)\pi,-1)$

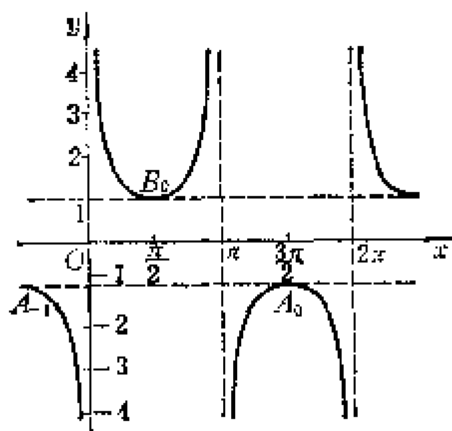
极小点：$B_k(2k\pi,1)$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

渐近线：$x=(k+\frac{1}{2})\pi$

余割曲线

$y=\csc x$



周 期：$T=2\pi$

极大点：$A_k\left((2k+\frac{3}{2})\pi,-1\right)$

极小点：$B_k\left((2k+\frac{1}{2})\pi,\ 1\right)$

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

渐近线：$x=k\pi$

3. 特殊角的三角函数值

φ 度	φ 弧度	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\mathrm{tg}\,\varphi$	$\mathrm{ctg}\,\varphi$	$\sec\varphi$	$\csc\varphi$
0	$0_{\mp 0}$	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$
15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
18	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5}+1$
22.5	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{4-2\sqrt{2}}$	$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

度	弧度	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$\sec\varphi$	$\csc\varphi$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
36	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5}-1$	$\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
54	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5}-1$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
67.5	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$\sqrt{4-2\sqrt{2}}$
72	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5}+1$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$
75	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
90	$\frac{\pi}{2}_{\mp 0}$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
180	$\pi_{\mp 0}$	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\pm\infty$

表中$\frac{\pi}{2}_{\mp 0}$表示$\varphi\to\frac{\pi}{2}\mp 0$,(即左、右极限).一个锐角的余角的三角函数值等于这个角的余三角函数值,例如 $\cos 75^\circ=\sin 15^\circ$, $\operatorname{tg} 72^\circ=\operatorname{ctg} 18^\circ$, $\csc 67.5^\circ=\sec 22.5^\circ$.

4. 三角函数基本关系和公式

［诱导公式］

三角函数的诱导公式表

角＼函数	sin	cos	tg	ctg	sec	csc
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$
$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$2\pi\pm\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$
$n\pi\pm\alpha$	$\pm(-1)^n\sin\alpha$	$(-1)^n\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$(-1)^n\sec\alpha$	$\pm(-1)^n\csc\alpha$

表中 n 为整数.

［基本关系］

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　　$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$　　$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$　　$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$　　$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$

$\sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha=1$　　$\csc^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha=1$

三角函数的相互关系表

	$\sin\alpha=x$	$\cos\alpha=x$	$\mathrm{tg}\,\alpha=x$	$\mathrm{ctg}\,\alpha=x$	$\sec\alpha=x$	$\csc\alpha=x$
$\sin\alpha=$	x	$\pm\sqrt{1-x^2}$	$\pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos\alpha=$	$\pm\sqrt{1-x^2}$	x	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\pm\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
$\mathrm{tg}\,\alpha=$	$\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\pm\sqrt{x^2-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha=$	$\pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\sqrt{x^2-1}$
$\sec\alpha=$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\pm\sqrt{1+x^2}$	$\pm\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\pm\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\csc\alpha=$	$\frac{1}{x}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\pm\sqrt{1+x^2}$	$\pm\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

例如，若 $\sin\alpha=x$，则 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-x^2}$.

[加法公式]

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\mp1}{\mathrm{ctg}\,\beta\pm\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma)&=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\\&\quad+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\&=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\mathrm{ctg}\beta\,\mathrm{ctg}\gamma\\&\quad+\mathrm{ctg}\gamma\,\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-1)\\&=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta+\gamma)&=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\\&\quad-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\\&=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1-\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)\\&=-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\gamma-\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta\,\mathrm{ctg}\gamma)\end{aligned}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma}{1-\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\beta\,\mathrm{ctg}\gamma-\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\gamma}{\mathrm{ctg}\beta\,\mathrm{ctg}\gamma+\mathrm{ctg}\gamma\,\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-1}$$

[和差与积互化公式]

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha\pm\mathrm{ctg}\,\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

[倍角公式]

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sec 2\alpha = \frac{\sec^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$$

$$\csc 2\alpha = \frac{1}{2}\sec\alpha\csc\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$$

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$$

$$\sin n\alpha = n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \cdots$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha + \cdots$$

式中 n 为正整数.

[半角公式]

下列公式中根号所取符号与等号左边的符号一致.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\sec\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{2\sec\alpha}{\sec\alpha+1}}$$

$$\csc\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{2\sec\alpha}{\sec\alpha-1}}$$

[降幂公式]

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$$

$$\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)$$

$$\sin^{2n}\alpha=\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}C_{2n}^{k}\cos(2n-2k)\alpha+\frac{1}{2}C_{2n}^{n}\right]$$

$$\sin^{2n+1}\alpha=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}C_{2n+1}^{k}\sin(2n-2k+1)\alpha$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)$$

$$\cos^4\alpha=\frac{1}{8}(3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)$$

$$\cos^{2n}\alpha=\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{k}\cos(2n-2k)\alpha+\frac{1}{2}C_{2n}^{n}\right]$$

$$\cos^{2n+1}\alpha=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{k}\cos(2n-2k+1)\alpha$$

以上式中的 n 为正整数.

[三角函数有限和公式]

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sin\frac{j\pi}{n}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{(2j-1)\pi}{n}=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{(2j-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sin\frac{2j^2\pi}{n}=\frac{\sqrt{n}}{2}\left(1+\cos\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\cos\frac{2j^2\pi}{n}=\frac{\sqrt{n}}{2}\left(1+\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}\right)-1$$

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ctg}^2\frac{j\pi}{2n+1}=\frac{1}{3}n(2n-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ctg}^2\frac{(2j-1)\pi}{4n}=n(2n-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sec^2\frac{(4j-3)\pi}{4n}=2n^2$$

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}\csc^2\frac{j\pi}{n}=\begin{cases}\frac{1}{6}(n^2-1), & n\text{ 为奇数}\\ \frac{1}{6}(n^2-4), & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\csc^2\frac{(2j-1)\pi}{2n}=\begin{cases}\frac{1}{2}(n^2-1), & n\text{ 为奇数}\\ \frac{1}{2}n^2, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{2n}\csc^2\frac{j\pi}{2n+1}=\frac{4}{3}n(n+1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname{tg}^4\frac{j\pi}{2n+1}=\frac{1}{3}n(2n+1)(4n^2+6n-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ctg}^4\frac{j\pi}{2n+1}=\frac{1}{45}n(2n-1)(4n^2+10n-9)$$

5. 反三角函数定义

[反三角函数的定义域与主值范围]

函数	主值记号	定义域	主值范围
反正弦	若 $x=\sin y$，则 $y=\mathrm{arc}\sin x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$
反余弦	若 $x=\cos y$，则 $y=\mathrm{arc}\cos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$
反正切	若 $x=\mathrm{tg}\, y$，则 $y=\mathrm{arc\,tg}\, x$	$-\infty<x<\infty$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$
反余切	若 $x=\mathrm{ctg}\, y$，则 $y=\mathrm{arc\,ctg}\, x$	$-\infty<x<\infty$	$0<y<\pi$
反正割	若 $x=\sec y$，则 $y=\mathrm{arc}\sec x$	$x\leqslant -1$，$x\geqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$
反余割	若 $x=\csc y$，则 $y=\mathrm{arc}\csc x$	$x\leqslant -1$，$x\geqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$

一般反三角函数与主值的关系为

$$\mathrm{Arc}\sin x=n\pi+(-1)^n\mathrm{arc}\sin x$$

$$\mathrm{Arc}\cos x=2n\pi\pm\mathrm{arc}\cos x$$

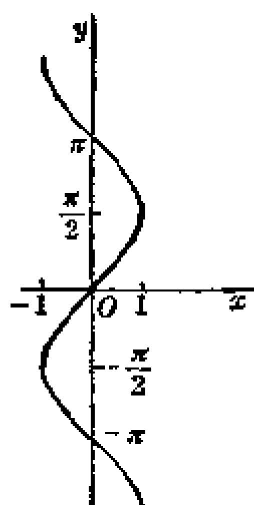
$$\mathrm{Arc\,tg}\, x=n\pi+\mathrm{arc\,tg}\, x$$

式中 n 为任意整数.

[反三角函数的图形与特征]

反正弦曲线

$y=\mathrm{arc}\sin x$

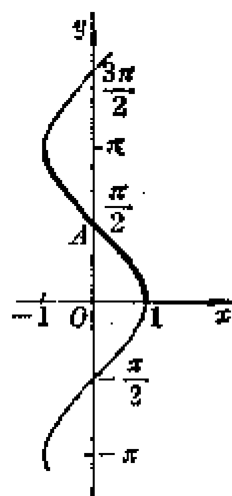


拐点(同曲线对称中心)：

$O(0,0)$，该点切线斜率为 1

反余弦曲线

$y=\mathrm{arc}\cos x$

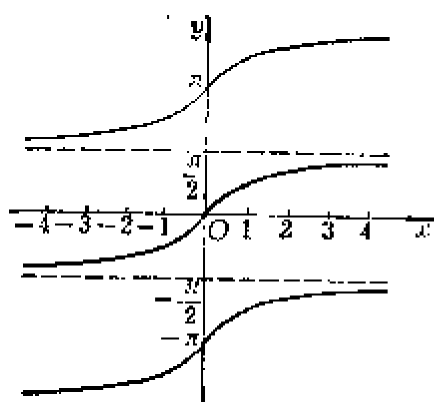


拐点(同曲线对称中心)：

$A(0,\frac{\pi}{2})$，该点切线斜率为 -1

反正切曲线

$y=\operatorname{arc\,tg} x$

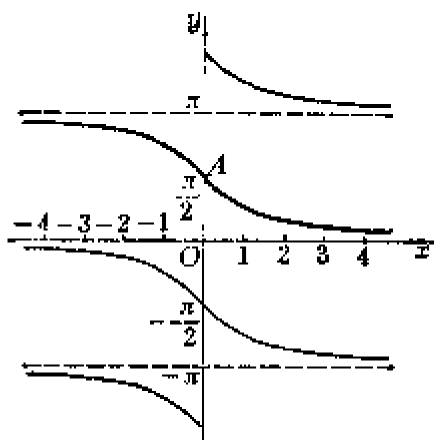


拐点(同曲线对称中心)：$O(0,0)$，该点切线斜率为 1

渐近线：$y=\pm\frac{\pi}{2}$

反余切曲线

$y=\operatorname{arc\,ctg} x$



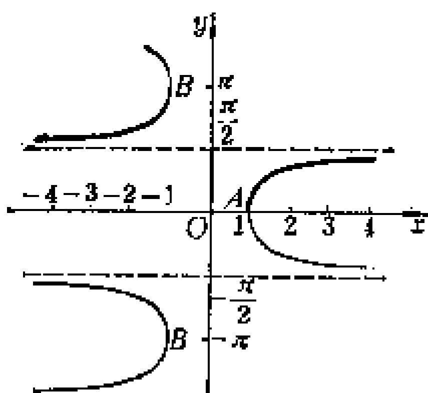
拐点：$A(0,\ \frac{\pi}{2})$，该点切线斜率为 -1

曲线对称中心：$A(0,\ \frac{\pi}{2})$

渐近线：$y=0$，$y=\pi$

反正割曲线

$y=\operatorname{arc\,sec} x$

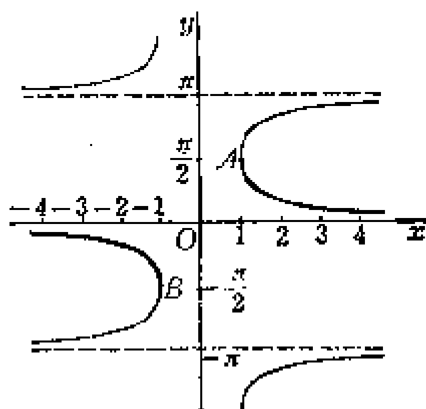


顶点：　$A(1,0)$，$B(-1,\pi)$

渐近线：$y=\frac{\pi}{2}$

反余割曲线

$y=\operatorname{arc\,csc} x$



顶点：　$A(1,\frac{\pi}{2})$，$B(-1,-\frac{\pi}{2})$

渐近线：$y=0$

6. 反三角函数的相互关系与基本公式

[反三角函数的相互关系]

$\operatorname{arc\,sin} x=$	$\operatorname{arc\,cos} x=$	$\operatorname{arc\,tg} x=$	$\operatorname{arc\,ctg} x=$
$-\operatorname{arc\,sin}(-x)$	$\pi-\operatorname{arc\,cos}(-x)$	$-\operatorname{arc\,tg}(-x)$	$\pi-\operatorname{arc\,ctg}(-x)$
$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,cos} x$	$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,sin} x$	$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg} x$	$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x$
$\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}$ *	$\operatorname{arc\,sin}\sqrt{1-x^2}$ *	$\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *
$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ *	$\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *	$\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ *	$\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$ *	$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ *

带有 * 号者只当 x 为正值时适用.

[反三角函数基本公式]

$\operatorname{arc\,sin} x+\operatorname{arc\,sin} y=$	$\operatorname{arc\,sin} x-\operatorname{arc\,sin} y=$
$\operatorname{arc\,sin}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ $(xy\leqslant 0$ 或 $x^2+y^2\leqslant 1)$	$\operatorname{arc\,sin}(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$ $(xy\geqslant 0$ 或 $x^2+y^2\leqslant 1)$
$\pi-\operatorname{arc\,sin}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ $(x>0,y>0,x^2+y^2>1)$	$\pi-\operatorname{arc\,sin}(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$ $(x>0,y<0,x^2+y^2>1)$
$-\pi-\operatorname{arc\,sin}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ $(x<0,y<0,x^2+y^2>1)$	$-\pi-\operatorname{arc\,sin}(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$ $(x<0,y>0,x^2+y^2>1)$

$\operatorname{arc\,cos} x+\operatorname{arc\,cos} y=$	$\operatorname{arc\,cos} x-\operatorname{arc\,cos} y=$
$\operatorname{arc\,cos}(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ $(x+y\geqslant 0)$	$-\operatorname{arc\,cos}(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ $(x\geqslant y)$
$2\pi-\operatorname{arc\,cos}(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ $(x+y<0)$	$\operatorname{arc\,cos}(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ $(x<y)$

$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=$	$\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} y=$
$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$ $(xy<1)$	$\operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}$ $(xy>-1)$
$\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$ $(x>0,xy>1)$	$\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}$ $(x>0,xy<-1)$
$-\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$ $(x<0,xy>1)$	$-\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}$ $(x<0,xy<-1)$

$2\,\mathrm{arc}\sin x=$		$2\,\mathrm{arc}\cos x=$	
$\mathrm{arc}\sin(2x\sqrt{1-x^2})$	$\left(\lvert x\rvert\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\mathrm{arc}\cos(2x^2-1)$	$(0\leqslant x\leqslant 1)$
$\pi-\mathrm{arc}\sin(2x\sqrt{1-x^2})$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 1\right)$	$2\pi-\mathrm{arc}\cos(2x^2-1)$	$(-1\leqslant x<0)$
$-\pi-\mathrm{arc}\sin(2x\sqrt{1-x^2})$	$\left(-1\leqslant x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$		
$2\,\mathrm{arc\,tg}\,x=$		$\cos(n\,\mathrm{arc}\cos x)=$	
$\mathrm{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$	$(\lvert x\rvert<1)$	$\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}$	
$\pi+\mathrm{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$	$(\lvert x\rvert>1)$		$(n\geqslant 1)$
$-\pi+\mathrm{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$	$(x<-1)$		

7. 三角形基本定理

［正弦定理］

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

式中R为$\triangle ABC$的外接圆半径(图 1.3)。

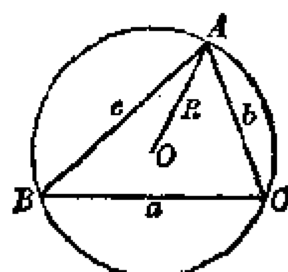


图 1.3

［余弦定理］

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

［勾股定理］ 在直角三角形(C为直角)中，勾方加股方等于弦方(图 1.4)，即

$$a^2+b^2=c^2$$

勾股定理也称商高定理，外国书刊中称毕达哥拉斯定理.

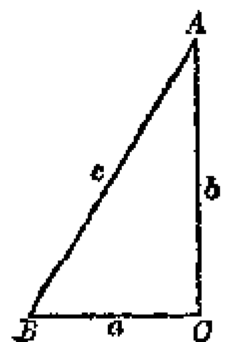


图 1.4

［正切定理］

$$\mathrm{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\mathrm{ctg}\frac{C}{2}$$

或

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}=\frac{a+b}{a-b},\quad \frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}=\frac{b+c}{b-c},\quad \frac{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}}=\frac{c+a}{c-a}$$

[半角与边长的关系公式]

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}},\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\qquad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}},\qquad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

式中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径，且

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{S}{p}=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

式中 S 为 $\triangle ABC$ 的面积。

8. 斜三角形解法

已知元素	其他元素的求法	
一边 a 及两角 B,C	$A=180°-(B+C)$，$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$	
两边 a,b 及夹角 C	$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$，$\sin A=\frac{a\sin C}{c}$，$\sin B=\frac{b\sin C}{c}$	
三边 a,b,c	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 或用半角与边长的关系公式先求出 $\frac{A}{2}$，$\frac{B}{2}$，$\frac{C}{2}$，即得 A,B,C	
两边 a,b 及其中一边的对角 A	$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$ $C=180°-(A+B)$ $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$	$b\sin A<a$ 时，有两解 $b\sin A>a$ 时，无解 $b\sin A=a$ 时，有一解

五、球面三角

1. 球面三角有关名称及性质

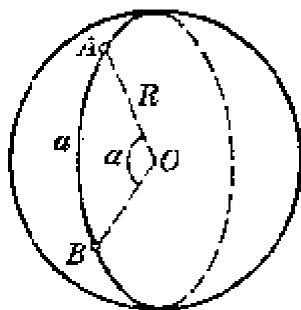


图 1.5

[大圆] 用一通过球心O的平面截球，在球表面所得的截线称为大圆，其半径等于球的半径R（图1.5）.

[大圆弧长] 连接球面上两点A，B的最短线是通过A,B的大圆上较短的弧$\overset{\frown}{AB}$，其圆心角为α（以弧度计），则$\overset{\frown}{AB}$弧长$a=R\alpha$.

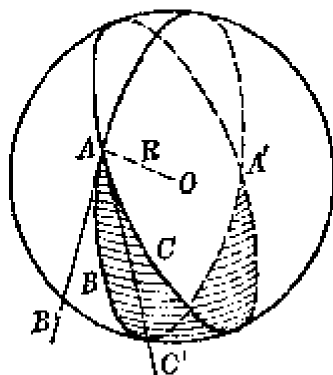


图 1.6

[两大圆弧夹角] 两大圆弧的交点A上的相应大圆的切线（AB'，AC'）间的夹角称为这两大圆弧的夹角，它也可用两平面OAB和OAC所构成的二面角来度量(图1.6).

[球面二角形面积] 球面二角形 $ABA'C$ 的面积(图1.6阴影部分)$S_A=2R^2A$(A 为两大圆弧夹角，单位是弧度).

[球面三角形的球面角超(或球面角过剩)] 三个大圆在球面上可构成几个球面三角形，我们只考虑三边和小于π的那些三角形.

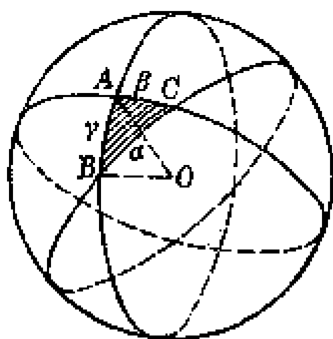


图 1.7

设α,β,γ为三条边（即三段大圆弧长，以球半径R为度量单位），A，B，C为三个角（即三段大圆弧的两两夹角，图1.7）. 球面三角形的三个角之和一定大于180°，其差$\delta=A+B+C-\pi$叫球面角超（单位弧度），$\delta>0$.

$$\sin\frac{\delta}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

式中 $p=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$.

[球面三角形面积] 球面三角形ABC(图1.7阴影部分)的面积$S=R^2\delta$.

2. 球面三角形基本定理与公式

[正弦定理]

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

[余弦定理]

边：$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$

角：$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha$

[余切定理]

边：$\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta=\cos\beta\cos C+\operatorname{ctg}A\sin C$

角：$\operatorname{ctg}A\sin B=\operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma-\cos B\cos\gamma$

[正切定理]

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

[五元素公式]

边：$\sin\alpha\cos B=\cos\beta\sin\gamma-\sin\beta\cos\gamma\cos A$

角：$\sin A\cos\beta=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos\alpha$

[半角公式]

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}{\sin p\sin(p-\alpha)}}$$

式中 $p=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$.

[半边公式]

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}}$$

式中 $P=\frac{1}{2}(A+B+C)$.

[德兰布-高斯公式]

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},\qquad \sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},\qquad \cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

[耐普尔公式]

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}},\qquad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}},\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}$$

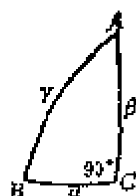
3. 球面三角形解法

[一般球面三角形计算公式]

已知元素	求解公式
三边: α,β,γ	$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-\alpha)}{m}$, $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-\beta)}{m}$, $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\sin(p-\gamma)}{m}$ 式中 $m=\sqrt{\frac{\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}{\sin p}}$, $p=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$
三角: A,B,C	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos(P-A)}{M}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\cos(P-B)}{M}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos(P-C)}{M}$ 式中 $M=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}{-\cos P}}$ $P=\frac{1}{2}(A+B+C)$
两边及夹角: α,β,C	由 $\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\\ \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\end{cases}$ 解出 A,B. $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$

已知元素	求 解 公 式
两角及夹边: A,B,γ	由 $\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\end{cases}$ 解出 α,β. $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$
两边及一对角: α,β,A	$\sin B=\dfrac{\sin\beta\sin A}{\sin\alpha}$ $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$ $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{A+B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}}$
两角及一对边: A,B,α	$\sin\beta=\dfrac{\sin B\sin\alpha}{\sin A}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{A+B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta+\alpha}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}}$ $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

[球面直角三角形计算公式]



已知元素	求 解 公 式	已知元素	求 解 公 式
斜边及一角: γ, A	$\sin\alpha=\sin\gamma\sin A$ $\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\gamma\cos A$ $\mathrm{ctg}B=\cos\gamma\,\mathrm{tg}A$	两直角边: α,β	$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$ $\mathrm{ctg}A=\mathrm{ctg}\alpha\sin\beta$ $\mathrm{ctg}B=\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\beta$
一直角边及其对角: α, A	$\sin\beta=\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}A$ $\sin\gamma=\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}$ $\sin B=\dfrac{\cos A}{\cos\alpha}$	斜边及一直角边: γ,α	$\cos\beta=\dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$ $\sin A=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ $\cos B=\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\gamma$
一直角边及其邻角: α, B	$\mathrm{tg}\beta=\sin\alpha\,\mathrm{tg}B$ $\mathrm{ctg}\gamma=\mathrm{ctg}\alpha\cos B$ $\cos A=\cos\alpha\sin B$	两角: A, B	$\cos\alpha=\dfrac{\cos A}{\sin B}$ $\cos\beta=\dfrac{\cos B}{\sin A}$ $\cos\gamma=\mathrm{ctg}A\,\mathrm{ctg}B$

计算时，应尽量利用含未知元素的正切(或余切)的公式，应避免采用正弦的公式. 计算结果可代入正弦定理公式进行验算.

六、双曲函数

1. 双曲函数的定义、图形与特征

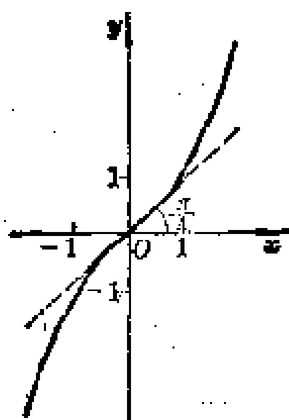
[双曲函数定义]

函数	双曲正弦 $\mathrm{sh}\,x$	双曲余弦 $\mathrm{ch}\,x$	双曲正切 $\mathrm{th}\,x$	双曲余切 $\mathrm{cth}\,x$	双曲正割 $\mathrm{sech}\,x$	双曲余割 $\mathrm{csch}\,x$
定义	$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	$\dfrac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{sh}\,x}=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$

[双曲函数的图形与特征]

双曲正弦曲线

$y=\operatorname{sh}x$



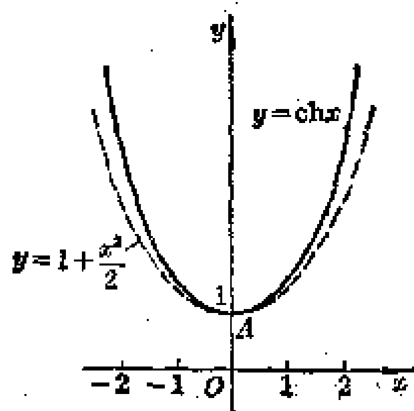
曲线关于原点对称.

拐点(同曲线对称中心):

$O(0,0)$,该点切线斜率为1

双曲余弦曲线

$y=\operatorname{ch}x$

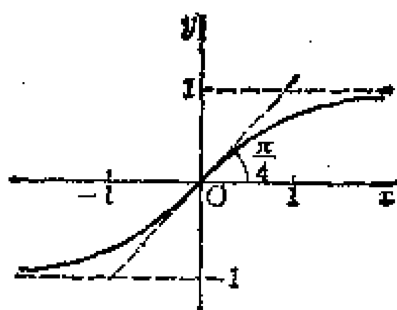


曲线关于y轴对称.

顶点(同极小值点): $A(0,1)$

双曲正切曲线

$y=\operatorname{th}x$



曲线关于原点对称.

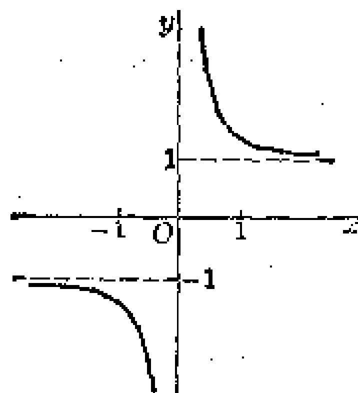
拐点(同曲线对称中心):

$O(0,0)$,该点切线斜率为1

渐近线: $y=\pm 1$

双曲余切曲线

$y=\operatorname{cth}x$



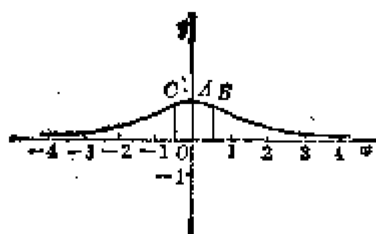
曲线关于原点对称.

不连续点: $x=0$

渐近线: $x=0$, $y=\pm 1$

双曲正割曲线

$y=\operatorname{sech} x$



曲线关于 y 轴对称.

顶点(同极大点): $A(0,1)$

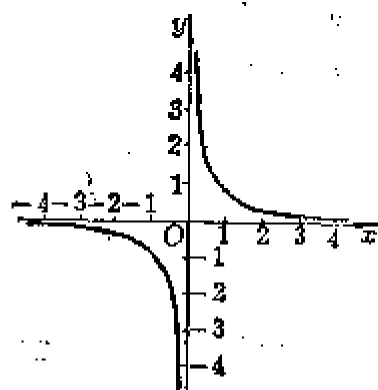
拐点: $B\left(\operatorname{Ar}\operatorname{th}\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$C\left(-\operatorname{Ar}\operatorname{th}\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

渐近线: $y=0$

双曲余割曲线

$y=\operatorname{csch} x$



曲线关于原点对称.

不连续点: $x=0$

渐近线: $x=0$, $y=0$

2. 双曲函数的相互关系和基本公式

[双曲函数的相互关系]

	$\operatorname{sh} x=a$	$\operatorname{ch} x=a$	$\operatorname{th} x=a$	$\operatorname{cth} x=a$	$\operatorname{sech} x=a$	$\operatorname{csch} x=a$
$\operatorname{sh} x=$	a	$\sqrt{a^2-1}$	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\frac{1}{a}$
$\operatorname{ch} x=$	$\sqrt{1+a^2}$	a	$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$
$\operatorname{th} x=$	$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$	a	$\frac{1}{a}$	$\sqrt{1-a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
$\operatorname{cth} x=$	$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$	$\frac{1}{a}$	a	$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$	$\sqrt{1+a^2}$
$\operatorname{sech} x=$	$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\frac{1}{a}$	$\sqrt{1-a^2}$	$\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$	a	$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
$\operatorname{csch} x=$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\sqrt{a^2-1}$	$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	a

$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\operatorname{th} x,\qquad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\operatorname{cth} x,\qquad \operatorname{th} x \operatorname{cth} x=1$

$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,\qquad \operatorname{sech}^2 x+\operatorname{th}^2 x=1,\qquad \operatorname{cth}^2 x-\operatorname{csch}^2 x=1$

[双曲函数基本公式]

和差的双曲函数

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th}(x\pm y)=\frac{\operatorname{th} x\pm\operatorname{th} y}{1\pm\operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

$$\operatorname{cth}(x\pm y)=\frac{1\pm\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x\pm\operatorname{cth} y}$$

双曲函数的和差

$$\operatorname{sh} x\pm\operatorname{sh} y=2\operatorname{sh}\frac{x\pm y}{2}\operatorname{ch}\frac{x\mp y}{2}$$

$$\operatorname{ch} x+\operatorname{ch} y=2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{th} x\pm\operatorname{th} y=\frac{\operatorname{sh}(x\pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}$$

$$\operatorname{cth} x\pm\operatorname{cth} y=\pm\frac{\operatorname{sh}(x\pm y)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}$$

倍 元 公 式

$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{sh} 3x=3\operatorname{sh} x+4\operatorname{sh}^3 x$$

$$\operatorname{ch} 2x=\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x$$

$$\operatorname{ch} 3x=4\operatorname{ch}^3 x-3\operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th} 2x=\frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$$

$$\operatorname{cth} 2x=\frac{1+\operatorname{cth}^2 x}{2\operatorname{cth} x}$$

半　元　公　式

$$\operatorname{sh}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{2}}\qquad\begin{pmatrix}x>0,\ \text{取正号}\\x<0,\ \text{取负号}\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{ch}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x+1}{2}}$$

$$\operatorname{th}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{sh}x}=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x+1}$$

$$\operatorname{cth}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}=\frac{\operatorname{ch}x+1}{\operatorname{sh}x}$$

德·莫弗公式

$$(\operatorname{ch}x\pm\operatorname{sh}x)^n=\operatorname{ch}nx\pm\operatorname{sh}nx\qquad(n\text{ 为正整数})$$

8. 反双曲函数的定义、图形与特征

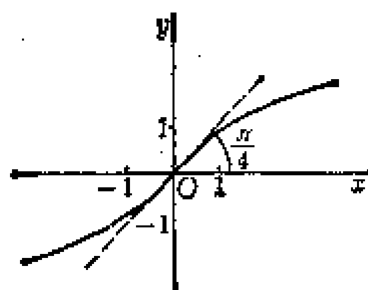
[反双曲函数的定义及其对数表达式]

函　数	记　号	对数表达式	
反双曲正弦	若 $x=\operatorname{sh}y$，则 $y=\operatorname{Ar\,sh}x$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	
反双曲余弦	若 $x=\operatorname{ch}y$，则 $y=\operatorname{Ar\,ch}x$	$\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$(x\geqslant 1)$
反双曲正切	若 $x=\operatorname{th}y$，则 $y=\operatorname{Ar\,th}x$	$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$(\lvert x\rvert<1)$
反双曲余切	若 $x=\operatorname{cth}y$，则 $y=\operatorname{Ar\,cth}x$	$\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$(\lvert x\rvert>1)$
反双曲正割	若 $x=\operatorname{sech}y$，则 $y=\operatorname{Ar\,sech}x$	$\pm\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$	$(0<\lvert x\rvert\leqslant 1)$
反双曲余割	若 $x=\operatorname{csch}x$，则 $y=\operatorname{Ar\,csch}x$	$\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$	$(x\neq 0)$

〔反双曲函数的图形与特征〕

反双曲正弦曲线

$y=\mathrm{Ar\,sh}\,x$



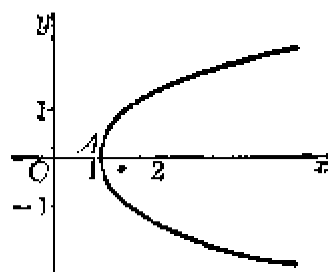
曲线关于原点对称.

拐点(同曲线对称中心):

$O(0,0)$,该点切线斜率为 1

反双曲余弦曲线

$y=\mathrm{Ar\,ch}\,x$

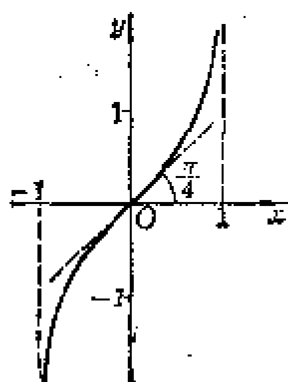


曲线关于 x 轴对称.

顶点: $A(1,0)$

反双曲正切曲线

$y=\mathrm{Ar\,th}\,x$



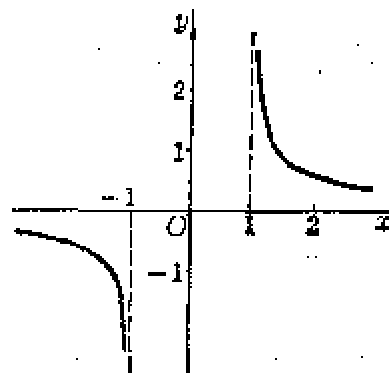
曲线关于原点对称.

拐点(同曲线对称中心):

$O(0,0)$,该点切线斜率为 1

反双曲余切曲线

$y=\mathrm{Ar\,cth}\,x$



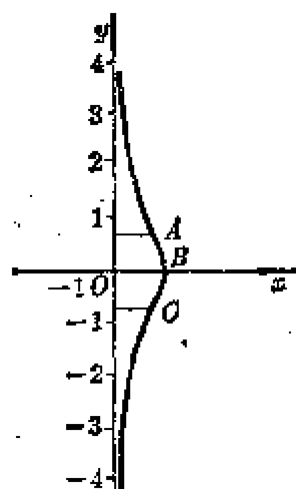
曲线关于原点对称.

不连续点: $x=\pm1$

渐近线: $y=0, x=\pm1$

反双曲正割曲线

$y = \mathrm{Ar\,sech}\,x$



曲线关于 x 轴对称.

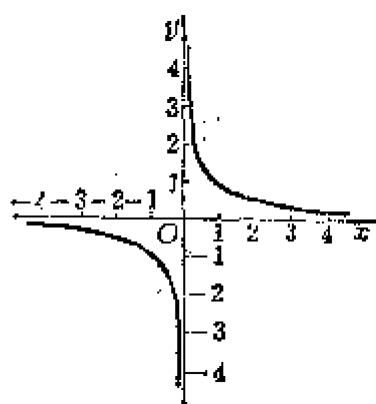
顶点：$A(1,0)$

拐点：$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{Ar\,th}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

和 $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\mathrm{Ar\,th}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

反双曲余割曲线

$y = \mathrm{Ar\,csch}\,x$



曲线关于原点对称.

不连续点：$x = 0$

渐近线：$x = 0,\ y = 0$

4. 反双曲函数的相互关系与基本公式

[反双曲函数的相互关系]

$\mathrm{Ar\,sh}\,x =$	$\mathrm{Ar\,ch}\,x =$	$\mathrm{Ar\,th}\,x =$	$\mathrm{Ar\,cth}\,x =$
$\pm\mathrm{Ar\,ch}\sqrt{x^2+1}$ *	$\pm\mathrm{Ar\,sh}\sqrt{x^2-1}$	$\mathrm{Ar\,sh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Ar\,sh}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{Ar\,th}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\pm\mathrm{Ar\,th}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\pm\mathrm{Ar\,ch}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *	$\pm\mathrm{Ar\,ch}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ *
$\mathrm{Ar\,cth}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$	$\pm\mathrm{Ar\,cth}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{Ar\,cth}\frac{1}{x}$	$\mathrm{Ar\,th}\frac{1}{x}$

有 * 号者，当 $x>0$ 时取正号，当 $x<0$ 时取负号.

[基本公式]

$$\mathrm{Ar\,sh}\,x \pm \mathrm{Ar\,sh}\,y = \mathrm{Ar\,sh}\left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\mathrm{Ar\,ch}\,x \pm \mathrm{Ar\,ch}\,y = \mathrm{Ar\,ch}\left[xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right]$$

$$\mathrm{Ar\,th}\,x \pm \mathrm{Ar\,th}\,y = \mathrm{Ar\,th}\,\frac{x \pm y}{1 \pm xy}$$

5. 双曲函数与三角函数的对比

[双曲函数与三角函数的关系]

用三角函数表示双曲函数	用双曲函数表示三角函数
$\operatorname{sh} z = -i\sin iz$ $\operatorname{ch} z = \cos iz$ $\operatorname{th} z = -i\operatorname{tg} iz$ $\operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg} iz$	$\sin z = -i\operatorname{sh} iz$ $\cos z = \operatorname{ch} iz$ $\operatorname{tg} z = -i\operatorname{th} iz$ $\operatorname{ctg} z = i\operatorname{cth} iz$

表中 $i=\sqrt{-1}$。

[三角函数、反三角函数,双曲函数与反双曲函数的几何意义]

图　形	几　何　意　义
单位圆 $x^2+y^2=1$ 2α 为圆扇形 $COEA$ 的圆心角(弧度),圆扇形 $COEA$ 的面积 $S=\alpha$	三角函数 $OB=\cos\alpha=\cos S$ $BC=\sin\alpha=\sin S$ $AD=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}S$ 反三角函数 $S=\operatorname{arc}\sin BC$ $S=\operatorname{arc}\cos OB$ $S=\operatorname{arc}\operatorname{tg}AD$ 都是圆扇形 $COEA$ 的面积,因此反三角函数又称圆函数
双曲线 $x^2-y^2=1$ 双曲扇形 $COEA$ 的面积 $S=\ln(OB+\sqrt{OB^2-1})$	双曲函数 $OB=\dfrac{e^S+e^{-S}}{2}=\operatorname{ch}S$ $BC=\sqrt{OB^2-1}=\operatorname{sh}S$ $AD=\dfrac{BC}{OB}=\operatorname{th}S$ 反双曲函数 $S=\operatorname{Ar}\operatorname{sh}BC$ $S=\operatorname{Ar}\operatorname{ch}OB$ $S=\operatorname{Ar}\operatorname{th}AD$ 都是双曲扇形 $COEA$ 的面积,因此反双曲函数又称面积函数

第二章　初等几何图形的计算与作图

几何图形是从现实世界中抽象出来的，所以，几何图形的理论，计算与作图广泛应用于人们的社会实践中。

本章重点介绍两类常用的几何图形：一是平面图形，如三角形、四边形、正多边形以及与圆有关的各种图形；另一是空间立体图形，如正方体、长方体、球体、锥体、圆柱体以及各种正多面体。这里较详细地收集了它们的面积、体积、侧面积、表面积、重心和转动惯量等计算公式。

另外，还介绍了一些图形(如正多边形)的作图方法，对于生产实践中常用的椭圆作图法和圆弧放样法也作了简要的说明。同时，明确指出了在百余年前已经严格证明了的所谓"几何三大问题"不能用尺规作图。

§1　三角形与四边形

一、三角形各元素的计算

1. 三角形各元素

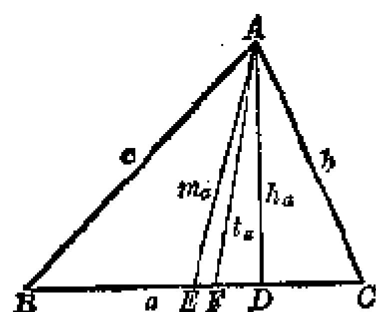


图　2.1

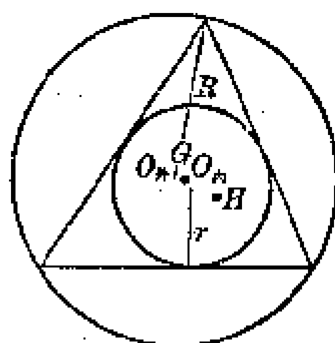


图　2.2

a, b, c 为三角形三边

A, B, C 为三个角($A+B+C=180°$)

$AD(=h_a)$为 a 边上的高

$AF(=t_a)$为 A 角的平分线

$AE(=m_a)$为 a 边上的中线

p 为半周长$\left(p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$

S 为 $\triangle ABC$ 的面积

R 为外接圆半径

r 为内切圆半径

H 为垂心(三条高的交点)

G 为重心(三条中线的交点)

$O_内$ 为内心(三条角平分线的交点)

$O_外$ 为外心(三条垂直平分线的交点)

2. 三角形各元素计算公式

[高] $h_a = b\sin C = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2}$

[中线] $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$

[角分线] $t_a = \dfrac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]} = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$

[面积] $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{2}ah_a = rp = \frac{abc}{4R}$$

[外接圆半径]

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4S}$$

[内切圆半径]

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$= p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

二、三角形和四边形的面积、几何重心、转动惯量计算公式

图 形	面积 S、几何重心 G 与转动惯量* J
[直线段] (图示 A、G、B，长 a；(a) 转轴与细杆距离 h；(b) 转轴过 G；(c) 转轴过端点)	长度 $L=a$ 重心 $GA=GB=\dfrac{a}{2}$ 转动惯量 (a)转轴平行于细杆，到细杆距离为 h(图(a)) $J=h^2m$ (b)转轴通过细杆重心 G，且与细杆垂直(图(b)) $J=\dfrac{a^2}{12}m$ (c)转轴通过细杆的一个端点，且与细杆垂直(图(c)) $J=\dfrac{a^2}{3}m$

* 表中 m 为物体的质量，物体都为匀质，一般物体的转动惯量计算公式见第六章，§3，五。

图　　形	面积S、几何重心G与转动惯量J
[任意三角形] (a) (b)　　(c) a,b,c为三边，h_a为a边上的高	重心　$GD=\frac{1}{3}AD$　$(BD=DC)$ 转动惯量 (a)转轴通过重心G，且与a边平行(图(a)) $J=\frac{ah_a^3}{36}=\frac{h_a^2}{18}m$ (b)转轴与三角形一边a重合(图(b)) $J=\frac{ah_a^3}{12}=\frac{h_a^2}{6}m$ (c)转轴通过三角形一顶点A，且平行于a边(图(c)) $J=\frac{ah_a^3}{4}=\frac{h_a^2}{2}m$
[等腰三角形] b为两腰，a为底边，h_a为a边上高	重心　$GD=\frac{1}{3}h_a$　$(BD=DC)$ 转动惯量 转轴与底边上的高h_a重合 $J=\frac{a^3h_a}{48}$ 当$a=b$时 $J=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}$

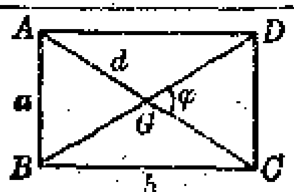
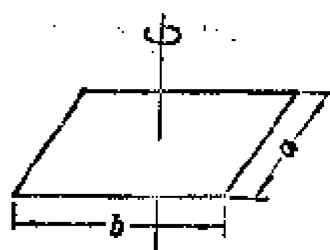
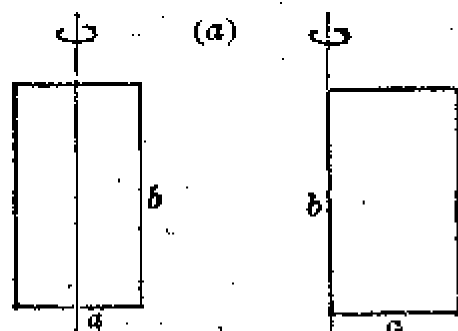
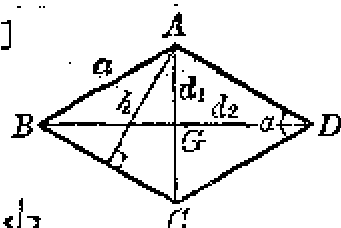
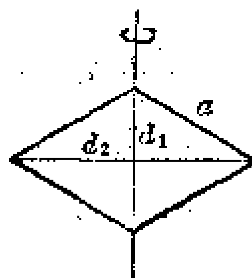
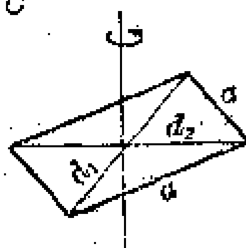
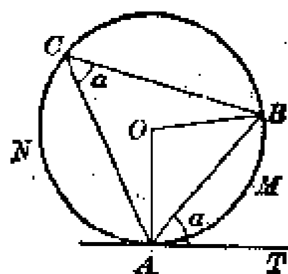
图　形	面积S、几何重心G与转动惯量J
[矩形]   (a)  (b)　　(c) a,b 为邻边，d 为对角线，φ 为对角线的夹角	面积　$S=ab=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$ 重心　G在对角线的交点上，即 $AG=GC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ 转动惯量 (a)转轴通过矩形中心，且垂直于矩形所在平面(图(a)) $J=\frac{(a^2+b^2)ab}{12}$ $=\frac{1}{12}(a^2+b^2)m$ (b)转轴通过矩形中心，且与矩形的 b 边平行(图(b)) $J=\frac{ba^3}{12}=\frac{a^2}{12}m$ (c)转轴与矩形的 b 边重合(图(c)) $J=\frac{ba^3}{3}=\frac{a^2}{3}m$
[菱形]   (a)　　(b) a 为边长，α 为顶角，d_1,d_2 为两对角线	面积　$S=a^2\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2=ah$ 重心　G在对角线交点上，即 $BG=\frac{1}{2}d_2$ 转动惯量 (a)转轴与对角线 d_1 重合(图(a)) $J=\frac{d_1d_2^3}{48}=\frac{d_2^2}{24}m$ (b)转轴通过重心 G 且垂直于图形所在平面(图(b)) $J=\frac{d_1d_2}{48}(d_1^2+d_2^2)$ $=\frac{1}{24}(d_1^2+d_2^2)m$

图　形	面积S、几何重心G与转动惯量J
[平行四边形] a,b 为邻边，h 为对边距，α 为顶角，d_1,d_2 为两对角线，φ 为两对角线夹角	面积　$S=bh=ab\sin\alpha$ $=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$ 重心　G在对角线交点上
[梯形] (a) a,b 为上下底，h 为高，l 为两腰中点连线	面积　$S=\frac{1}{2}(a+b)h=lh$ 重心　$GQ=\frac{h}{3\sin\alpha}\frac{2a+b}{(a+b)}$ $GP=\frac{h}{3\sin\alpha}\frac{a+2b}{a+b}$ $(AP=PB, CQ=QD,$ $AE=CD, CF=AB)$ 转动惯量 转轴通过重心，且平行于上下底(图(a)) $J=\frac{h^3(a^2+4ab+b^2)}{36(a+b)}$ 当 $a=b$ 时(平行四边形) $J=\frac{h^3a}{12}=\frac{h^2}{12}m$
[任意四边形] a,b,c,d 为四边长，d_1,d_2 为两对角线，φ 为两对角线夹角	面积　$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi=\frac{1}{2}d_2(h_1+h_2)$ $=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos\alpha}$ $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ $\alpha=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$ 或　$=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$

§2 圆与正多边形

一、与圆有关的各量计算公式

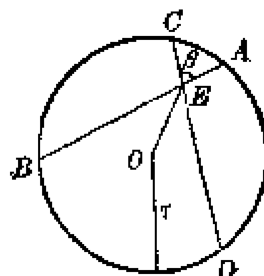
[圆的切线与弦的夹角α]



$$\alpha=\angle BAT=\angle BCA=\frac{1}{2}\widehat{AMB}$$

式中 $\widehat{AMB}$ 表示 AMB 弧所对应的圆心角$\angle AOB$ 的角度(下同),C 为 ANB 弧上的任意点

[两弦及其夹角 β]

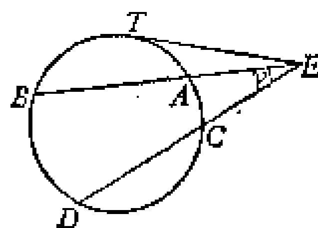


$$\beta=\angle AEC=\frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{BD})$$

$$AE\cdot BE=CE\cdot DE=r^2-OE^2$$

式中 r 为圆的半径

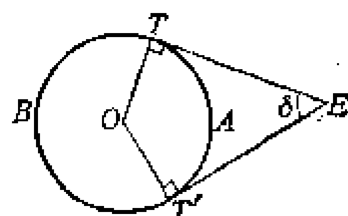
[两割线及其夹角γ]



$$\gamma=\frac{1}{2}(\widehat{BD}-\widehat{AC})$$

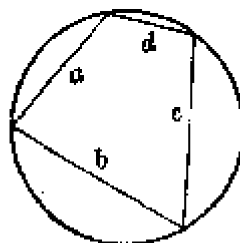
$$AE\cdot BE=CE\cdot DE=ET^2$$

[两切线的夹角 δ]



$$\delta=\frac{1}{2}(\widehat{TBT'}-\widehat{TAT'})$$

[圆内接四边形面积 S]



$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

式中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$

a,b,c,d 为四边

二、与圆有关的各种图形的面积、几何重心与转动惯量计算公式

图形	面积、几何重心与转动惯量
[圆圈] (a) (b) (c) O为圆心，r为半径，d为直径	周长 $L=2\pi r=\pi d$ 重心 G与圆心O重合 转动惯量 (a)转轴通过圆心，且垂直于圆所在平面(图(a)) $J=2\pi r^3=r^2m$ (b)转轴与圆圈的直径重合(图(b)) $J=\pi r^3=\frac{r^2}{2}m$ (c)转轴为圆圈的一条切线(图(c)) $J=3\pi r^3=\frac{3}{2}r^2m$
[圆形] (a) (b) (c) O为圆心，r为半径，d为直径	面积 $S=\pi r^2=\frac{\pi}{4}d^2$ 重心 G与圆心O重合 转动惯量 (a)转轴通过圆心，且垂直于圆所在的平面(图(a)) $J=\frac{\pi}{2}r^4=\frac{r^2}{2}m$ (b)转轴与圆的直径重合(图(b)) $J=\frac{\pi}{4}r^4=\frac{r^2}{4}m$ (c)转轴与圆的某直径平行，其距离为h(图(c)) $J=\left(\frac{r^2}{4}+h^2\right)\pi r^2$ $=\left(\frac{r^2}{4}+h^2\right)m$

图　　形	面积、几何重心与转动惯量
[半圆形] (a) (b)	面积 $S=\frac{1}{2}\pi r^2$ 重心 $GO=\frac{4}{3\pi}r\approx 0.4244r$ 转动惯量 (a)转轴与GO重合(图(a)) $J=\frac{\pi}{8}r^4=\frac{r^2}{4}m$ (b)转轴通过G点，且平行于直径AB(图(b)) $J=\frac{r^4(9\pi^2-64)}{72\pi}$ $=\frac{r^2}{36\pi^2}(9\pi^2-64)m$
[扇形] (a)　(b) r为半径，b为弦长，θ为弧s所对应的圆心角的度数，α为其弧度数，O为圆心	弧长 $s=\frac{\pi\theta}{180}r=\alpha r$ 面积 $S=\frac{1}{2}rs=\frac{\pi\theta r^2}{360}=\frac{1}{2}\alpha r^2$ 重心 $GO=\frac{2}{3}\frac{b}{s}r=\frac{4r}{3\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$ $=\frac{240}{\pi\theta}r\sin\frac{\theta}{2}$ 转动惯量 (a)转轴在图形平面上通过G点，且垂直于GO(图(a)) $J=\frac{r^4}{8}\left[\alpha+\sin\alpha-\frac{32}{9\alpha}(1-\cos\alpha)\right]$ $=\frac{r^2}{4\alpha}\left[\alpha+\sin\alpha-\frac{32}{9\alpha}(1-\cos\alpha)\right]m$ (b)转轴与GO重合(图(b)) $J=\frac{r^4}{8}(\alpha-\sin\alpha)$ $=\frac{r^2}{4\alpha}(\alpha-\sin\alpha)m$ (当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，即为四分之一圆形)

图 形	面积、几何重心与转动惯量
[弓形] (a) (b) r 为半径，b 为弦长($b=2a$)，h 为拱高，θ 为圆心角度数，α 为圆心角弧度数，s 为弧长，O 为圆心	弦长 $b=2a=2r\sin\frac{\theta}{2}$ $r=\frac{a^2+h^2}{2h}\qquad \operatorname{tg}\frac{\theta}{4}=\frac{h}{a}$ 拱高 $h=2r\sin^2\frac{\theta}{4}=a\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}$ 面积 $S=\frac{\pi\theta}{360}r^2-a\sqrt{r^2-a^2}$ $=\frac{1}{2}\alpha r^2-a\sqrt{r^2-a^2}$ $=\frac{1}{2}r^2(\alpha-\sin\alpha)=\frac{r(s-b)+bh}{2}$ 重心 $GO=\frac{1}{12}\cdot\frac{b^3}{s}=\frac{4}{3}r\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}$ (当 $\theta=180°$时，弓形即为半圆形) 转动惯量 (a)转轴与 GO 重合(图(a)) $J=\frac{r^4}{24}(3\alpha-4\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)$ (b)转轴通过重心 G，且与弦平行(图(b)) $J=\frac{r^4}{72}\left(9\alpha-9\sin\alpha\cos2\alpha-\frac{64\sin^6\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}\right)$
[圆环] (a) R 为外半径，r 为内半径，D 为外直径，d 为内直径，O 为圆心	面积 $S=\pi(R^2-r^2)=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$ $=2\pi\bar{R}t$ 式中 $t=R-r$ 为环宽， $\bar{R}=\frac{R+r}{2}$ 为平均直径 重心 G 与圆心 O 重合 转动惯量 转轴在图形平面上，且通过 G 点(图(a)) $J=\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$ $=\frac{1}{16}(D^2+d^2)m$

图　形	面积、几何重心与转动惯量

[部分圆环]

(a)　　(b)

$R, r, t, \bar{R}$同前，θ为所对应的圆心角的度数，α为其弧度数

面积　$S=\dfrac{\pi\theta}{360}(R^2-r^2)=\dfrac{\pi\theta}{180}t\bar{R}$

$=\alpha Rt$

重心　$GO=\dfrac{2}{3}\,\dfrac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\,\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\dfrac{\alpha}{2}}$

$\approx 38.197\dfrac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\,\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}$

转动惯量　转轴与GO　重合(图(a))

$J=\dfrac{R^4-r^4}{8}(\alpha-\sin\alpha)$

$=\dfrac{R^2+r^2}{4\alpha}(\alpha-\sin\alpha)m$

[新月形]

r为半径，d为直径，l为圆心距OO'，θ为新月形张开角度，α为其弧度数

面积　$S=r^2\left(\pi-\dfrac{\pi\theta}{180}+\sin\theta\right)$

$=r^2(\pi-\alpha+\sin\alpha)$

$=r^2\eta$

式中　$\eta=\pi-\dfrac{\pi\theta}{180}+\sin\theta$

重心　$GO=\dfrac{\pi-3\eta}{2\eta}l$

$GO'=\dfrac{\pi-\eta}{2\eta}l$

l/d	0.1	0.2	0.3	0.4
η	0.399	0.795	1.182	1.556

l/d	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
η	1.913	2.247	2.551	2.815	3.024

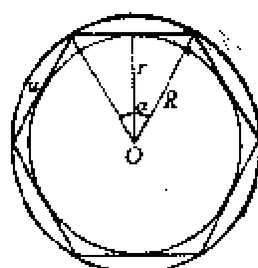
三、正多边形各量换算公式与比例系数表

n 为边数　　　　　　R 为外接圆半径

a 为边长　　　　　　r 为内切圆半径

α 为圆心角$\left(\alpha=\frac{360°}{n}\right)$　　S 为多边形面积

重心 G 与外接圆心 O 重合



正多边形各量换算公式表

各量	正三角形	正方形	正五边形	正六边形	正 n 边形
图形	3	4	5	6	n
S	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	a^2	$\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$	
	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$	$2R^2$		$\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$	$\frac{n}{2}R^2\sin\alpha$
	$3\sqrt{3}\,r^2$	$4r^2$		$2\sqrt{3}\,r^2$	$nr^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$
a	$\sqrt{3}\,R$	$\sqrt{2}\,R$	$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,R$	R	$2R\sin\frac{\alpha}{2}$
R	$\frac{\sqrt{3}}{3}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\,a$	a	$\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$
r	$\frac{\sqrt{3}}{6}a$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

正多边形各量比例系数表

n	S/a^2	S/R^2	S/r^2	a/R	R/a	r/a
3	0.4330	1.2990	5.1962	1.7321	0.5774	0.2887
4	1.0000	2.0000	4.0000	1.4142	0.7071	0.5000
5	1.7205	2.3776	3.6327	1.1756	0.8507	0.6882
6	2.5981	2.5981	3.4641	1.0000	1.0000	0.8660

n	S/a^2	S/R^2	S/r^2	a/R	R/a	r/a
7	3.6339	2.7364	3.3710	0.8678	1.1524	1.0383
8	4.8284	2.8284	3.3137	0.7654	1.3066	1.2071
9	6.1818	2.8925	3.2757	0.6840	1.4619	1.3737
10	7.6942	2.9389	3.2492	0.6180	1.6180	1.5388
12	11.196	3.0000	3.2154	0.5176	1.9319	1.8660
15	17.642	3.0505	3.1883	0.4158	2.4049	2.5323
16	20.109	3.0615	3.1826	0.3902	2.5629	2.5137
20	31.569	3.0902	3.1677	0.3129	3.1962	3.1569
24	45.575	3.1058	3.1597	0.2611	3.8306	3.7979
32	81.225	3.1214	3.1517	0.1960	5.1012	5.0766
48	183.08	3.1326	3.1461	0.1308	7.6449	7.6285
64	325.69	3.1366	3.1441	0.0981	10.190	10.178

§3 实用几何作图

一、正多边形作图

［已知边长作正三角形］ 已知 AB 等于边长．分别以 A,B 为圆心，AB 为半径画弧交于 C，连接 AC，BC，$\triangle ABC$ 即为所求正三角形(图 2.3)．

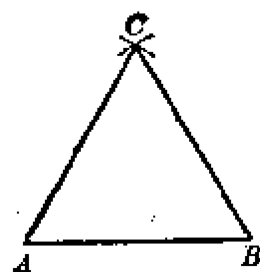


图 2.3

［已知边长作正方形］ 已知 AB 等于边长．以 AB 外任一点 O 为圆心，OA 为半径画圆交 AB 于 E．连接 EO 并延长交圆于 F，连接 AF 并延长截取 $AD=AB$．分别以 B，D 为圆心，AB 为半径画弧交于 C，连接 BC，DC，$\square ABCD$ 即为所求正方形(图 2.4)．

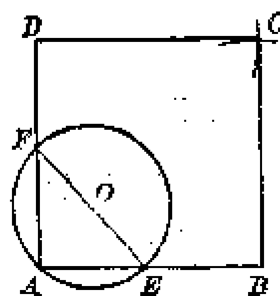


图 2.4

［已知外接圆作正五边形］ 过圆心O作互相垂直的直径AB，CD，平分OB于E，以E为圆心，EC为半径画弧交OA于F，以CF为半径在圆周上顺次截段并连接各点，即为所求正五边形（图 2.5）．也可参考正十边形作法（见图 2.11中的虚线）．

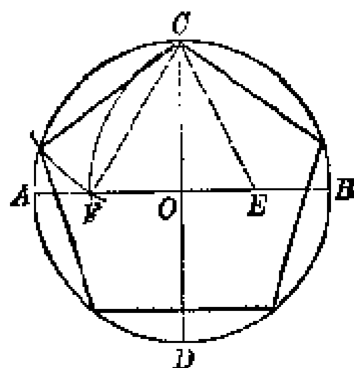


图　2.5

［已知边长作正五边形］ 已知AB等于边长．以A，B为圆心，AB为半径画两圆交于C，D，连接CD．以D为圆心，AB为半径画圆，交CD于E，交A圆于F，交B圆于G，连接FE，GE，并延长交B，A圆于H，I．分别以H，I为圆心，AB为半径画弧交于J，连接JI，IA，BH，HJ，连同AB即为所求正五边形（图 2.6）．

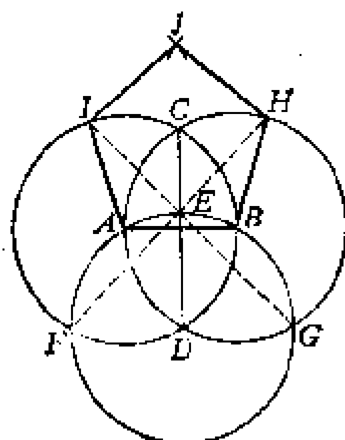


图　2.6

［已知外接圆作正六边形］ 以外接圆半径在其圆周上顺次截段，并连接各点，即为所求正六边形（图 2.7）．

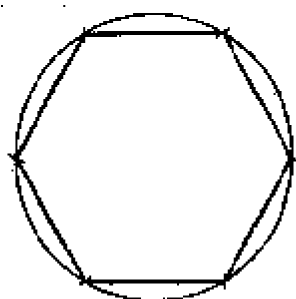


图　2.7

［已知边长作正六边形］ 已知AB等于边长，分别以A，B为圆心，AB为半径画弧交于O，以O为圆心，AB为半径画圆．再按上法可作出所求正六边形（图 2.8）．

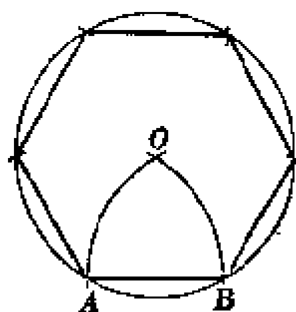


图　2.8

[已知外接圆作正七边形（近似作法）] 以圆周上任一点A为圆心，以同圆半径为半径画弧交圆周于B,C，连接BC，AO，交于D. 以BD为半径（作图时应略大于BD）在圆周上顺次截段，并连接各点，即为所求正七边形(图 2.9).

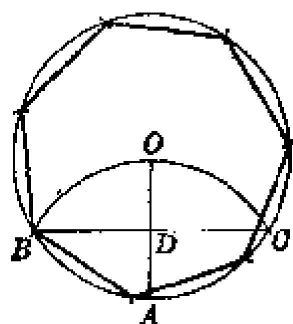


图 2.9

[已知外接圆作正八边形] 过圆心O作互相垂直的直径AB，CD. 分别以A，B，D为圆心，任意长为半径画弧交于E，F，连接EO，FO，并延长交圆于G，H，I，J，顺次连接八点，即为所求正八边形(图 2.10).

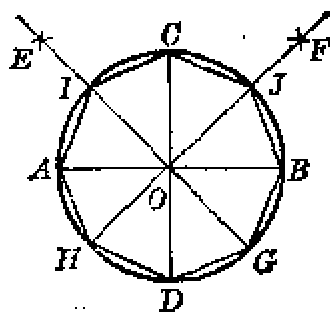


图 2.10

[已知外接圆作正十边形] 过圆心O作互相垂直的直径AB，CD，以OB为直径画圆E，连接EC交E圆于F. 以CF为半径在圆周上顺次截段；并连接各点，即为所求正十边形(图 2.11).

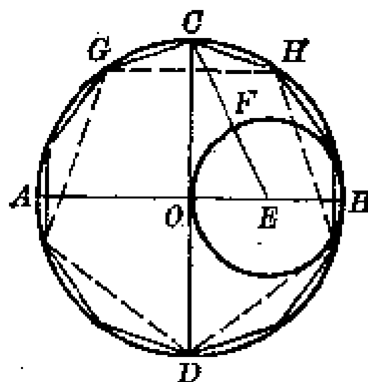


图 2.11

[已知外接圆作任意正多边形（近似作法）] 将直径AB n等分（n为边数）；以A，B为圆心，AB为半径画弧交于C，连接C与第二个分点E，并延长交圆于D，以AD为半径在圆周上顺次截段，并连接各点，即为所求正n边形(图 2.12 中为正九边形).

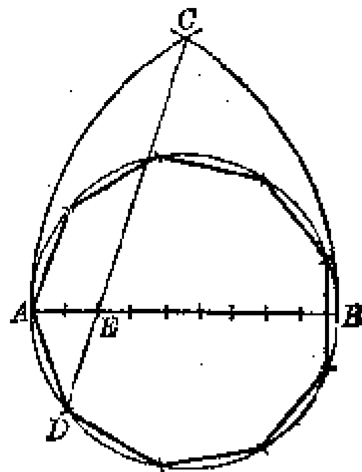


图 2.12

二、椭圆作图

已知长短轴($2a$, $2b$)作椭圆，其方法如下：

［轨迹法］ 作长轴 $AB=2a$，短轴 $CD=2b$，相互垂直平分交于O，以D为圆心，a为半径画弧交AB于F'_1，F'_2。在F_1，F_2两点钉上钉子，把一长度为$2a$的线的两端固定在钉子上，再用铅笔拉紧线，移动铅笔所画出的曲线即为椭圆(图2.13)。

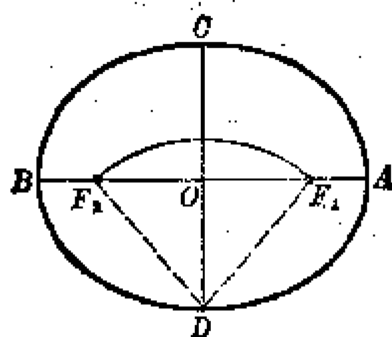


图 2.13

［焦点法］ 同轨迹法一样，先画出点F_1，F_2，将AB 8等分，中间各点为K_i $(1\leqslant i\leqslant 7)$。分别以$F_1$为圆心，$AK_i$为半径画弧，以$F_2$为圆心，$BK_i$为半径画弧，两两相交于$M_i$和$N_i(2\leqslant i\leqslant 6)$。再将这些交点连同$A$，$B$一起用光滑曲线顺次连接，即近似于所求椭圆(图2.14)。

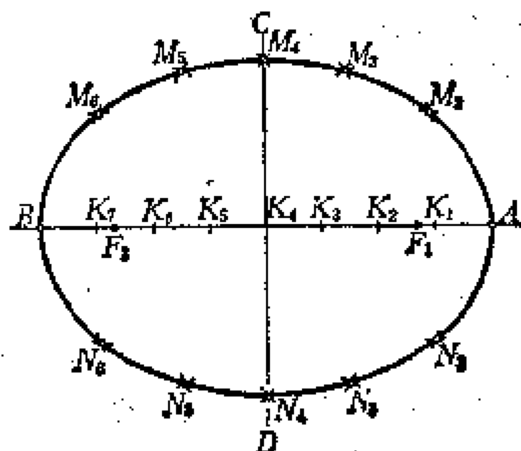


图 2.14

［压缩法］ 用长短轴为直径画出两个同心圆，并将圆周12等分(小圆分点1～12，大圆分点对应为1′～12′)。连接1′-5′，2′-4′，7′-11′，8′-10′和1-11，2-10，4-8，5-7，并延长，将1′-5′与1-11，5-7；2′-4′与2-10，4-8；7′-11′与1-11，5-7；8′-10′与2-10，4-8的交点(共8个)，连同四个顶点一起，用光滑曲线顺次连接，即近似于所求椭圆(图2.15)。

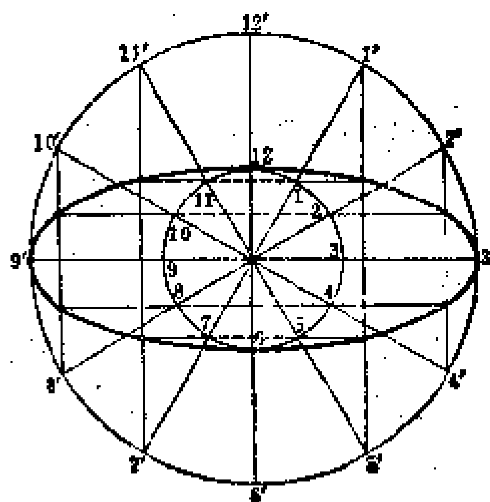


图 2.15

甲
十

〔圆弧法〕 作长轴 $AB=2a$，短轴 $CD=2b$，相互垂直平分交于 O，作 $OE=OA$，以 C 为圆心，CE 为半径画弧交 AC 于 F，作 AF 的垂直平分线交 AB 于 G，交 CD 延长线于 I．作 $OH=OG$，$OJ=OI$．分别以 I，J 为圆心，IC 为半径画弧，又分别以 G，H 为圆心，GA 为半径画弧，则四段弧相连即近似于所求椭圆(图 2.16)．

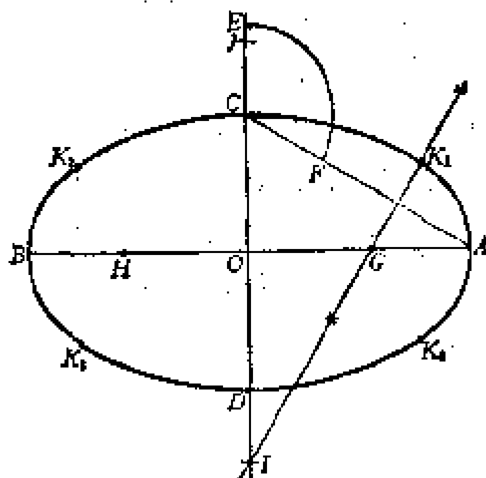


图 2.16

三、圆弧放样法

在土木建筑工程中，由于受各种施工条件的限制，不能用圆规一转就画出圆弧，可采用下面方法在施工现场直接放大样．这种方法可在有限平面内放出任意大半径的圆弧实样，又便于工人同志掌握．

〔已知弦长和拱高作圆弧〕

方法 1°

作 AB 等于弦长，作 CO 垂直平分 AB，并使 CO 等于拱高，连接 BC，作 BC 的中垂线 DE．作 $\angle ABC$ 的平分线交 DE 于 E，在 ED 延长线上取 $DF=DE$，则 F 为 $\widehat{AB}$ 的 $\frac{1}{4}$ 分点．由对称性，F 的对称点 F' 也是 $\widehat{AB}$ 的 $\frac{1}{4}$ 分点．重复上述步骤，可得 $\widehat{AB}$ 的 $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$ 各分点，将各分点以光滑曲线顺次连接，即为所求圆弧(图 2.17)．此方法概念明确，步骤较少，占地最小．

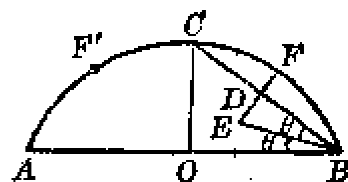


图 2.17

方法 2°

作 AB 等于弦长，作 CO 垂直平分 AB，并使 CO 等于拱高．作 BC 的中垂线 DF，截 $OE=CD$．过 E 作 AB 的垂线交 DF 于 F，则 F 为 $\widehat{AB}$ 的 $\frac{1}{4}$ 分点．由对称性，F 的对称点 F' 也是 $\widehat{AB}$ 的 $\frac{1}{4}$ 分点．重复上述步骤，可得 $\widehat{AB}$ 的 $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$ 各分点，将各分点以光滑曲线顺次连接，即为所求圆弧(图 2.18)．此方法步骤最少．

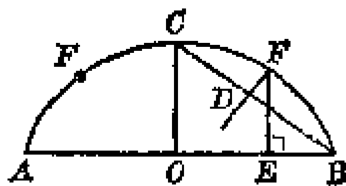


图 2.18

〔已知弦长和圆弧上任一点作圆弧〕　已知 AB 为弦长，C 为已知圆弧上一点．以 BC 为边作角 $\angle CBB_1=\alpha$（$\angle CAB<\alpha<\angle ABC$）．再以 AC 为边按相同方向作角 $\angle CAA_1=\alpha$．AA_1，BB_1 交于 C_1．C_1 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上的点．当取 α 为一系列值时，便得到圆弧上一系列点，将各点以光滑曲线顺次连接，即为所求圆弧（图 2.19）．此方法最适于采用经纬仪、罗盘仪来测放半径很大的圆弧．

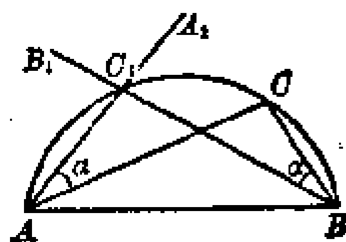


图　2.19

四、几何作图问题

所谓初等几何作图问题，是指使用无刻度的直尺和圆规来作图．若使用尺规有限次能作出几何图形，则称为作图可能，或者说欧几里得作图法是可能的，否则称为作图不可能．

很多平面图形可以用直尺和圆规作出，例如上面列举的正五边形、正六边形、正八边形、正十边形等．而另一些就不能作出，例如正七边形、正九边形、正十一边形等，这些多边形只能用近似作图法．如何判断哪些作图可能，哪些作图不可能呢？直到百余年前，用代数的方法彻底地解决了这个问题，即给出一个关于尺规作图可能性的准则：作图可能的充分必要条件是，这个作图问题中必需求出的未知量能够由若干已知量经过有限次有理运算及开平方运算而算出．几千年来许多数学家耗费了不少的精力，企图解决所谓“几何三大问题”：

1° 立方倍积问题，即作一个立方体，使它的体积二倍于一已知立方体的体积．

2° 三等分角问题，即三等分一已知角．

3° 化圆为方问题，即作一正方形，使它的面积等于一已知圆的面积．

后来已严格证明了这三个问题不能用尺规作图．

§4 立体图形的体积、表面积、侧面积、几何重心与转动惯量计算公式

一、立体图形的体积、表面积、侧面积、几何重心与转动惯量计算公式

图形	体积 V、表面积 S、侧面积 M、几何重心 G 与转动惯量* J
[正方体] a 为棱长，d 为对角线	体积 $V=a^3$ 表面积 $S=6a^2$ 侧面积 $M=4a^2$ 对角线 $d=\sqrt{3}a$ 重心 G 在对角线交点上 $GQ=\frac{a}{2}$
[长方体] a, b, h 分别为长、宽、高，d 为对角线	体积 $V=abh$ 表面积 $S=2(ab+ah+bh)$ 侧面积 $M=2h(a+b)$ 对角线 $d=\sqrt{a^2+b^2+h^2}$ 重心 G 在对角线交点上 $GQ=\frac{h}{2}$ 转动惯量 取长方体中心为坐标原点，坐标轴分别平行三个棱边 $J_x=\frac{1}{12}(b^2+h^2)m$ $J_y=\frac{1}{12}(a^2+h^2)m$ $J_z=\frac{1}{12}(a^2+b^2)m$ $J_o=\frac{1}{12}(a^2+b^2+h^2)m$ （当 $a=b=h$ 时，即为正方体的情况）

* 表中 m 为物体的质量，物体都为匀质．一般物体的转动惯量计算公式见第六章，§3，五．

图　形	体积V、表面积S、侧面积M、几何重心G与转动惯量J
[三棱柱] a, b, c 为边长, h 为高	体　积　$V=Fh$ 表面积　$S=2F+M$ 侧面积　$M=(a+b+c)h$ 式中F为底面积 重　心　$GQ=\frac{h}{2}$　(P, Q分别为上下底重心) 转动惯量 对于正三棱柱($a=b=c$)取G为坐标原点, z轴与棱平行 $J_z=\frac{\sqrt{3}}{48}a^4h=\frac{a^2}{12}m$
[正六棱柱] a 为底边长, h 为高, d 为对角线	体　积　$V=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h\approx 2.5981a^2h$ 表面积　$S=3\sqrt{3}a^2+6ah\approx 5.1962a^2+6ah$ 侧面积　$M=6ah$ 对角线　$d=\sqrt{h^2+4a^2}$ 重　心　$GQ=\frac{h}{2}$　(P, Q分别为上下底重心) 转动惯量 取G为坐标原点, z轴与棱平行 $J_z=\frac{5\sqrt{3}}{8}a^4h=\frac{5a^2}{12}m$
[正棱锥] n 为棱数, a 为底边长, h 为高, g 为斜高	体　积　$V=\frac{1}{3}Fh$ 表面积　$S=M+F$ 侧面积　$M=nF'=\frac{n}{2}ag$ 式中F为底面积, F'为一侧三角形面积 重　心　$GQ=\frac{h}{4}$　(Q为底面的重心)

图　形	体积 V、表面积 S、侧面积 M、 几何重心 G 与转动惯量 J
[四面体] a,b,c,p,q,r 为棱长	体积 $V^2=\frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 重心 $GQ=\frac{1}{4}PQ$ （P为顶点，Q为底面的重心）
[棱台] h 为高	体积 $V=\frac{h}{3}(F+F'+\sqrt{FF'})$ 式中 F'，F 分别为上下底面积 重心 $GQ=\frac{PQ}{4}\frac{F+2\sqrt{FF'}+3F'}{F+F'+\sqrt{FF'}}$ （P，Q分别为上下底重心）
[正棱台] a'，a 分别为上下底边长，n 为棱数，h 为高，g 为斜高.	体　积 $V=\frac{hF}{3}\left(1+\frac{a'}{a}+\left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)$ 表面积 $S=M+F'+F$ 侧面积 $M=\frac{n}{2}(a'+a)g$ 式中 F'，F 分别为上下底面积 重　心 $GQ=\frac{h}{4}\frac{a^2+2a'a+3a'^2}{a^2+a'a+a'^2}$ （P，Q分别为上下底重心）

图　　形	体积 V、表面积 S、侧面积 M、几何重心 G 与转动惯量 J
[截头方锥体] 两底为矩形，a', b', a, b 分别为上下底边长，h 为高，a_1 为截头棱长	体积　$V=\frac{h}{6}[ab+(a+a')(b+b')+a'b']$ $a_1=\frac{a'b-ab'}{b-b'}$ 重心　$GQ=\frac{PQ}{2}\frac{ab+ab'+a'b+3a'b'}{2ab+ab'+a'b+2a'b'}$ (P,Q 分别为上下底重心)
[楔形] 底为矩形，a, b 为其边长，h 为高，a' 为上棱长	体积　$V=\frac{bh}{6}(2a+a')$ 重心　$GQ=\frac{PQ}{2}\ \frac{a+a'}{2a+a'}$ (P 为上棱中点，Q 为下底面重心)
[球体] r 为半径	体　积　$V=\frac{4\pi}{3}r^3=\frac{\pi}{6}d^3\approx 0.52360d^3$ 表面积　$S=4\pi r^2$ 重　心　G 与球心 O 重合 转动惯量 取球心 O 为坐标原点 $J_x=J_y=J_z=\frac{2}{5}r^2m$ $J_o=\frac{3}{5}r^2m$

图　形	体积 V、表面积 S、侧面积 M、几何重心 G 与转惯量 J
[半球体] r 为半径，O 为球心	体　积　$V=\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{\pi}{12}d^3$ 表面积　$S=3\pi r^2$ 侧面积　$M=2\pi r^2$ 重　心　$GO=\frac{3}{8}r$ 转动惯量 取球心 O 为坐标原点，z 轴与 GO 重合 $J_x=J_y=J_z=\frac{2}{5}r^2m$ $J_o=\frac{3}{5}r^2m$
[球扇形(球状楔)] r 为球半径，α 为锥角(弧度)，a 为弓形底圆半径，h 为拱高	体　积　$V=\frac{2}{3}\pi r^2h\approx 2.0944r^2h$ 表面积　$S=\pi r(2h+a)$ 侧表面　(锥面部分)　$M=\pi ar$ 重　心　$GO=\frac{3}{8}(2r-h)$ 转动惯量 z 轴与 GO 重合 $J_z=\frac{2\pi}{15}r^5\left[2\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]$ $=\frac{r^3m}{5h}\left(2-3\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^3\frac{\alpha}{2}\right)$
[球冠(球缺)] r 为球半径，a 为拱底圆半径，h 为拱高	体　积　$V=\frac{\pi}{6}h(3a^2+h^2)=\frac{\pi}{3}h^2(3r-h)$ 表面积　$S=\pi(2rh+a^2)=\pi(h^2+2a^2)$ 侧面积(球面部分)　$M=2\pi rh=\pi(a^2+h^2)$ 重　心　$GO=\frac{3}{4}\frac{(2r-h)^2}{(3r-h)}$

图　形	体积 V、表面积 S、侧面积 M、 几何重心 G 与转动惯量 J
[球台] r 为球半径，a'，a 分别为上下底圆的半径，h 为高	体　积　$V=\frac{\pi}{6}h(3a^2+3a'^2+h^2)$ 表面积　$S=\pi(2rh+a^2+a'^2)$ 侧面积　$M=2\pi rh$ $r^2=a^2+\left(\frac{a^2-a'^2-h^2}{2h}\right)^2$ 重　心　$GO=\frac{3}{2h}\frac{a^4-a'^4}{3a^2+3a'^2+h^2}$ $GQ=\frac{h}{2}\frac{2a^2+4a'^2+h^2}{3a^2+3a'^2+h^2}$ （Q 为下底圆心）
[圆环胎] (a)　(b) (c) R 为中心半径，D 为中心直径，r 为圆截面半径，d 为圆截面直径	体　积　$V=2\pi^2Rr^2=\frac{\pi^2}{4}Dd^2$ 表面积　$S=4\pi^2Rr=\pi^2Dd$ 重　心　G 在圆环的中心上 转动惯量 取圆环的中心为坐标原点，z 轴垂直于圆环所在平面 $J_x=J_y=\left(\frac{5}{8}r^2+\frac{R^2}{2}\right)m$ $J_z=\left(\frac{3}{4}r^2+R^2\right)m$

图 形	体积 V、表面积 S、侧面积 M、几何重心 G 与转动惯量 J
[圆柱体] r 为底面半径，h 为高	体 积 $V=\pi r^2 h$ 表面积 $S=2\pi r(r+h)$ 侧面积 $M=2\pi rh$ 重 心 $GQ=\frac{h}{2}$ （P，Q 分别为上下底圆心） 转动惯量 取重心 G 为坐标原点，z 轴垂直底面 $J_x=J_y=\frac{1}{4}\left(r^2+\frac{h^2}{3}\right)m$ $J_z=\frac{r^2}{2}m$
[中空圆柱体(管)] R 为外半径，r 为内半径，h 为高	体 积 $V=\pi h(R^2-r^2)=2\pi\bar{R}th$ 表面积 $S=M+2\pi(R^2-r^2)$ 侧面积 $M=2\pi h(R+r)=4\pi h\bar{R}$ 式中 t 为管壁厚，$\bar{R}$ 为平均半径 重 心 $GQ=\frac{h}{2}$ 转动惯量 取 z 轴与 GQ 重合 $J_z=\frac{(R^2+r^2)}{2}m$
[斜截圆柱体] r 为底圆半径，h，H 分别为最小，最大高度，α 为截角，D 为截头椭圆轴	体 积 $V=\frac{\pi}{2}r^2(H+h)$ 表面积 $S=M+\pi r^2\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$ $=\pi r\left(r+H+h+\frac{D}{2}\right)$ 侧面积 $M=\pi r(H+h)$ 截头椭圆轴 $D=\sqrt{4r^2+(H-h)^2}$ 重 心 $GQ=\frac{H+h}{4}+\frac{r^2\operatorname{tg}^2\alpha}{4(H+h)}$ $GK=\frac{r^2\operatorname{tg}\alpha}{2(H+h)}$ （GQ 为重心到底面距离，GK 为重心到轴线 OO' 的距离）

图 形	体积 V、表面积 S、侧面积 M、几何重心 G 与转动惯量 J
[圆柱截段] h 为截段最大高度，b 为底面拱高，$2a$ 为底面弦长，r 为底面半径，2α 为弧所对应圆心角（弧度）	体　积　$V=\frac{h}{3b}[a(3r^2-a^2)+3r^2(b-r)\alpha]$ $=\frac{hr^3}{b}\left(\sin\alpha-\frac{1}{3}\sin^3\alpha-\alpha\cos\alpha\right)$ 侧面积（柱面部分） $M=\frac{2rh}{b}[(b-r)\alpha+a]$
[椭球体] $a>b>c$ (a) $a<b<c$ (b) a,b,c 为半轴	体　积　$V=\frac{4}{3}\pi abc\approx 4.1888\ abc$ 重　心　G 在椭球中心 O 上 转动惯量 取椭球中心为坐标原点，z 轴与 c 轴重合 $J_x=\frac{1}{5}(b^2+c^2)m$ $J_y=\frac{1}{5}(c^2+a^2)m$ $J_z=\frac{1}{5}(a^2+b^2)m$

图形	体积 V、表面积 S、侧面积 M、几何重心 G 与转动惯量 J
[圆锥体] r 为底圆半径，h 为高，l 为母线	体积 $V=\frac{\pi}{3}r^2h$ 表面积 $S=\pi r(r+l)$ 侧面积 $M=\pi rl$ 母线 $l=\sqrt{r^2+h^2}$ 重心 $GQ=\frac{h}{4}$ （Q 为底圆中心，O 为圆锥顶点） 转动惯量 取圆锥顶点为坐标原点，z 轴与 GQ 重合 $J_x=J_y=\frac{3}{5}\left(\frac{r^2}{4}+h^2\right)m$ $J_z=\frac{3}{10}r^2m$
[圆台] r，R 分别为上，下底圆半径，h 为高，l 为母线	体积 $V=\frac{\pi}{3}h(R^2+r^2+Rr)$ 表面积 $S=M+\pi(R^2+r^2)$ 侧面积 $M=\pi l(R+r)$ 母线 $l=\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ 圆锥高（母线交点到底圆的距离） $H=h+\frac{hr}{R-r}$ 重心 $GQ=\frac{h}{4}\cdot\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+Rr+r^2}$ （P，Q 分别为上下底圆心）
[拟棱台] 上下底平行，F'，F 分别为上，下底面积，F_0 为中截面面积，h 为高	体积 $V\approx\frac{h}{6}(F'+F+F_0)$ [注] 棱台、圆台、球台、圆锥、棱柱、圆柱等都是拟棱台的特例

图　形	体积 V、表面积 S、侧面积 M、几何重心 G 与转动惯量 J
[桶形体] d 为上、下底圆直径，D 为中截面直径，h 为高	母线为圆弧时： 体积　$V=\frac{\pi h}{12}(2D^2+d^2)\approx 0.26180h(2D^2+d^2)$ $\approx 0.08727h(2D+d)^2$ 母线为抛物线时： 体积　$V=\frac{\pi h}{15}\left(2D^2+Dd+\frac{3}{4}d^2\right)$ $\approx 0.05236h(8D^2+4Dd+3d^2)$ 重心　$GQ=\frac{h}{2}$ （P，Q 分别为上下底圆心）

二、多面体

	[正四面体]	[正八面体]	[正十二面体]	[正二十面体]
图　形				
面数 f	4	8	12	20
棱数 k	6	12	30	30
顶点数 e	4	6	20	12
体积 V	$0.1179a^3$	$0.4714a^3$	$7.6631a^3$	$2.1817a^3$
表面积 S	$1.7321a^2$	$3.4641a^2$	$20.6457a^2$	$8.6603a^2$

表中 a 为棱长。

[欧拉公式]　一个多面体的面数为 f，棱数为 k，顶点数为 e，它们之间满足

$$e-k+f=2$$

第三章　代数方程

代数方程的理论有下列几个主要问题：

(1) 根式解问题；

(2) 根的分布及近似计算；

(3) 根的存在问题；

(4) 根的性质的研究.

本章着重介绍(1)和(2)两个问题，对于(3)和(4)两个问题仅作简略的叙述.

根式解问题就是如何把方程的根用公式表达出来. 这里具体列出了实数域上二、三、四次方程根的表达式，并且指出根与系数之间的相互关系，还叙述了阿贝耳定理，即五次以及更高次的代数方程没有一般的根式解. 本章介绍了代数方程的性质，其中提到关于根的存在问题的重要的"代数基本定理"；并且叙述了伽罗瓦所指出的，存在用代数方法不能解的具体方程；也介绍了代数方程的某些特殊解法与对称多项式的基本定理；给出根的隔离的各种判别法. 最后介绍了方程实根的近似计算的多种方法，并对秦九韶法作了详细说明.

§1　二、三、四次方程的根的表达式

1. 基本概念

[数域]　如果一个数系满足下列两个条件，则称这个数系为一个数域：

(i) 系中有不等于零的数；

(ii) 对系内任意两个数(这两个数也可相同)的和、差、积、商(零不能作除数)仍为系内的数，这就是说，系内的数对于四则运算是封闭的.

例如，有理数系、实数系、复数系都是数域.

[多项式的根]　形如

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的方程称为在一个数域 S 上的一个未知数的 n 次代数方程，$f(x)$ 称为一元 n 次多项式，式中 n 为正整数，$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 是属于数域 S 的常数，称为方程的系数，最高次项系数 a_0 简称为首项系数.

设 c 是一个常数，使 $f(c)=0$，则称 c 为多项式 $f(x)$ 或方程 $f(x)=0$ 的根. 本节先考虑在实数域上的二、三、四次方程.

2. 二次方程

二次方程根的表达式及根与系数的相互关系

方 程	$ax^2+bx+c=0$	$x^2+px+q=0$
根的表达式	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
根与系数的关系	$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+x_2=-p\\ x_1x_2=q\end{cases}$
判别式	$\Delta=b^2-4ac$ $\Delta>0$ 有两个不等的实根 $\Delta=0$ 有两个相等的实根 $\Delta<0$ 有两个复根	$\Delta=p^2-4q$ $\Delta>0$ 有两个不等的实根 $\Delta=0$ 有两个相等的实根 $\Delta<0$ 有两个复根

3. 三次方程

[$x^3-1=0$] 方程

$$x^3-1=0$$

的三个根为

$$x_1=1,\ x_2=\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ x_3=\omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\quad (i^2=-1)\qquad(1)$$

[$x^3+px+q=0$(卡尔丹公式)] 方程

$$x^3+px+q=0$$

的三个根为

$$\begin{aligned}
x_1&=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\
x_2&=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\
x_3&=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}
\end{aligned}\qquad(2)$$

式中 ω,ω^2 同(1). 这叫做卡尔丹公式.

根与系数的关系为

$$x_1+x_2+x_3=0,\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{p}{q},\ x_1x_2x_3=-q$$

判别式为

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$\Delta>0$ 时，有一个实根和两个复根；$\Delta=0$ 时，有三个实根，当 $p=q=0$ 时，有一个三重零根；当$\left(\frac{q}{2}\right)^2=-\left(\frac{p}{3}\right)^3\neq0$ 时，三个实根中有两个相等；$\Delta<0$ 时，有三个不等的实根。

三个根的三角函数表达式(仅当 $p<0$ 时)为

$$x_1=2\sqrt[3]{r}\cos\theta$$

$$x_2=2\sqrt[3]{r}\cos(\theta+120°)$$

$$x_3=2\sqrt[3]{r}\cos(\theta+240°)$$

式中

$$r=\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3},\qquad \theta=\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2r}\right)$$

[$ax^3+bx^2+cx+d=0$] 一般三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\qquad(a\neq0)$$

上式除以 a，并设

$$x=y-\frac{b}{3a}$$

则化为如下的形式

$$y^3+py+q=0$$

可按(2)的情形处理，解出y_1, y_2, y_3，则一般三次方程的三个根为

$$x_1=y_1-\frac{b}{3a},\ x_2=y_2-\frac{b}{3a},\ x_3=y_3-\frac{b}{3a}$$

三个根与系数的关系为

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{c}{d},\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

4. 四次方程

[$ax^4+cx^2+e=0$] 方程

$$ax^4+cx^2+e=0$$

中，设 $y=x^2$，则化为二次方程

$$ay^2+cy+e=0$$

可解出四个根为

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4ae}}{2a}}$$

[$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$]　方程

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

中，设 $y=x+\frac{1}{x}$，则化为二次方程，可解出四个根为

$$x_{1,2,3,4}=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2},\quad y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+8a^2}}{2a}$$

[$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$]　一般四次方程

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

都可化为首项系数为1的四次方程，而方程

$$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

的四个根与下面两个方程的四个根完全相同：

$$x^2+\left(b+\sqrt{8y+b^2-4c}\right)\frac{x}{2}+\left(y+\frac{by-d}{\sqrt{8y+b^2-4c}}\right)=0$$

$$x^2+\left(b-\sqrt{8y+b^2-4c}\right)\frac{x}{2}+\left(y-\frac{by-d}{\sqrt{8y+b^2-4c}}\right)=0$$

式中 y 是三次方程

$$8y^3-4cy^2+(2bd-8e)y+e(4c-b^2)-d^2=0$$

的任一实根．

5. 阿贝耳定理

五次以及更高次的代数方程没有一般的代数解法（即由方程的系数经有限次四则运算和开方运算求根的方法）．这是阿贝耳定理．

§2　代数方程的性质

一、多项式与代数方程的一般性质

[代数基本定理]　每个复数域上 n 次代数方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\qquad(n\geqslant1)$$

在复数域中至少有一个根．

代数基本定理的推论：每个 n 次代数方程在复数域中有 n 个根，而且只有 n 个根．

[多项式的导数]　多项式 $f(x)$ 的导数为

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$$

微分学中仅考虑实变数函数的导数，而代数学中必须考虑复系数的复变数

多项式的导数，但是它们的定义与计算公式仍然一样.

[单根与重根]

1° 多项式的单根不是它的导数的根.

2° 多项式的m重根(即有m个根相同)是它的导数的$m-1$重根($m>1$).

3° 若$x_1, x_2, \cdots, x_k$分别为$f(x)$的$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ ($\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=n$)重根，则

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}$$

[洛尔定理及其推论] 由微分学中的洛尔定理可知，在实系数方程$f(x)=0$的两个实根之间总有$f'(x)=0$的一个实根.

从这个定理可推出下列两个推论:

1° 若$f(x)$的一切根都是实的，则$f'(x)$的一切根也是实的. 在$f(x)$的相邻两根之间有$f'(x)$的一个根并且是一个单根.

2° 若$f(x)$的一切根都是实的，且其中有p个(计算重数)是正的，则$f'(x)$有p个或$p-1$个正根.

[多项式的相关]

1° 若多项式$f(x)$，$\varphi(x)$的次数都不超过n，而它们对$n+1$个不同的数$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$有相等的值，即$f(\alpha_i)=\varphi(\alpha_i)$ ($i=1, \cdots, n+1$)，则$f(x)=\varphi(x)$.

2° 多项式$f(x)$和$\varphi(x)$的根完全相同的充分必要条件是$f(x)$和$\varphi(x)$只差一个不等于零的常数因子.

[整根与有理根] 任意整系数方程$f(x)=0$，若有一个有理根$\frac{p}{q}$(为既约分数)，则p是a_n的约数，q是a_0的约数.

由此可推出：任意整系数方程的整根必为常数项的约数. 若整系数方程的首项系数为1，则它的有理根必为整数.

[实根与复根·共轭实根与共轭复根]

1° 任意有理系数方程$f(x)=0$，若有一个根$a+\sqrt{b}$ (a, b是有理数，$\sqrt{b}$是无理数)，则必有另一个根$a-\sqrt{b}$. 这时$a+\sqrt{b}$与$a-\sqrt{b}$称为一对共轭实根.

2° 任意实系数方程$f(x)=0$的复根只可能是成对的共轭复根，并且根的重数相同. 从而，复根的个数是偶数.

3° 任意实系数奇数次方程$f(x)=0$至少有一个实根.

4° 任意实系数偶数次方程$f(x)=0$，且$a_0<0$，则至少有两个实根(一个正根和一个负根).

[根与系数的关系]　设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

为复数域 S 上的一元多项式，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $f(x)$ 在 S 中的 n 个根，则根与系数的关系为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{i=1}^{n}x_i=-a_1$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n}x_ix_j=a_2$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=\sum_{\substack{i,j,k=1\\(i<j<k)}}^{n}x_ix_jx_k=-a_3$$

………………………………

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^na_n$$

这就是说，$f(x)$ 的 x^{n-k} 的系数 a_k 等于从它的根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中每次取 k 个（不同的）一切可能乘积之和，若 k 是偶数，则取正号，若 k 为奇数，则取负号。

[根的范围]　设 ξ 为复系数代数方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{1}$$

的根，

1° 若所有系数 $a_i\neq0\ (i=0,1,\cdots,n)$，则 $|\xi|\leqslant\sigma$，其中 σ 为实系数代数方程

$$F(x)=|a_0|x^n-|a_1|x^{n-1}-\cdots-|a_n|=0$$

的一个正实根。

2° 设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1}$ 为任意正数，则 $|\xi|\leqslant\tau$，其中 τ 为下列 n 个数中最大的一个：

$$\frac{|a_1|}{|a_0|}+\frac{1}{\gamma_1},\quad \frac{|a_2|}{|a_0|}\gamma_1+\frac{1}{\gamma_2},\quad \cdots,\quad \frac{|a_{n-1}|}{|a_0|}\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-2}+\frac{1}{\gamma_{n-1}},$$

$$\frac{|a_n|}{|a_0|}\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-1}$$

特别，取 $\gamma_i=1\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 时，有

$$|\xi|\leqslant\max\left\{\frac{|a_n|}{|a_0|},\ 1+\frac{|a_1|}{|a_0|},\ \cdots,\ 1+\frac{|a_{n-1}|}{|a_0|}\right\} \tag{2}$$

方程(1)中作变换 $x=\dfrac{1}{y}$，可求出 $|y|$ 的上界，因而得到

$$|\xi|\geqslant\left(\max\left\{\frac{|a_0|}{|a_n|},\ 1+\frac{|a_1|}{|a_n|},\ \cdots,\ 1+\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\right\}\right)^{-1} \tag{3}$$

更进一步，记(2)式右边为 M，记(3)式右边为 m，如果取 $\rho<M$，使得

$$|a_0|\rho^n-|a_1|\rho^{n-1}-|a_2|\rho^{n-2}-\cdots-|a_{n-1}|\rho-|a_n|>0$$

取 $\rho'>m$，使得

$$|a_0|\rho'^n+|a_1|\rho'^{n-1}+\cdots+|a_{n-1}|\rho'-|a_n|<0$$

那末有 $\rho'\leqslant|\xi|\leqslant\rho$.

3° 设 γ 为任意正数，则 $|\xi|\leqslant r_1$，其中

$$r_1=\max\left\{\frac{1}{\gamma},\ \frac{|a_1|}{|a_0|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\gamma+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\gamma^{n-1}\right\}$$

特别，取 $\gamma=1$，有

$$|\xi|\leqslant\max\left\{1,\ \frac{1}{|a_0|}\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right\}$$

4° 若所有系数都为正实数，则

$$\min\left\{\frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_2}{a_1},\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\right\}\leqslant|\xi|\leqslant\max\left\{\frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_2}{a_1},\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\right\}$$

5° 若方程(1)的系数满足不等式

$$|a_0|<|a_1|-|a_2|-|a_3|-\cdots-|a_n|$$

则方程(1)至多有一个绝对值$\geqslant1$的根 ξ_1，而且

$$|\xi_1|\geqslant|a_1|-|a_2|-\cdots-|a_n|$$

[多项式的分解]

1° 设 $f(x)$ 为实数域上的多项式，若有非常数的实系数多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)h(x)$$

则称 $f(x)$ 为实数域上可约(或可化)，否则称 $f(x)$ 为实数域上的不可约多项式.

2° 实数域上不可约多项式，除一次多项式外，只有含(共轭)复根的二次多项式.

3° 每个实系数多项式都可分解为实系数的一次因式与二次因式之积.

有理数域上的多项式的分解见第二十章，§5，2.

[余数定理与综合除法] 若 c 为一常数，则多项式 $f(x)$ 除以 $x-c$ 所得的余数等于 $f(c)$.

设
$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

求 $f(x)$ 除以 $x-c$ 的商式与余数，其计算格式如下：

$$\begin{array}{r|llllll} c) & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & & b_0c & b_1c & \cdots & b_{n-2}c & b_{n-1}c \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{array}$$

式中 $b_0=a_0$，$b_i=a_i+b_{i-1}c$ $(i=1,2,\cdots,n)$．于是得到

商式　　$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}$

余数　　$r=b_n=f(c)$

例　$f(x)=x^4+2x^3-3x^2-5$ 除以 $x-2$，列出算式

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2) & 1 & 2 & -3 & 0 & -5 \\ & & 2 & 8 & 10 & 20 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 10 & 15=f(2) \end{array}$$

所以
$$\frac{f(x)}{x-2}=x^3+4x^2+5x+10+\frac{15}{x-2}$$

[多项式的泰勒公式(秦九韶法)]　n 次多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad (a_0\neq0)$$

在任意点 c 的泰勒展开式为

$$f(x)=b_0(x-c)^n+b_1(x-c)^{n-1}+\cdots+b_{n-1}(x-c)+b_n$$

式中系数 b_i $(0\leqslant i\leqslant n)$按下面的方法计算.

首先在$(n+2)\times(n+2)$方阵的对角线上列出 $a_0,a_1,\cdots,a_n,d$（d 为符号），在第 1 列上列出 a_0（即 $a_{i,i}=a_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n+1$; $a_{n+2,n+2}=d$; $a_{i,1}=a_0$, $i=1,2,\cdots,n+2$）.

$$c\begin{bmatrix} a_0 & & & & & \\ a_0 & a_1 & & & & \\ a_0 & a_{3,2} & a_2 & & & \\ a_0 & a_{4,2} & a_{4,3} & a_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_0 & a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_n & \\ a_0 & a_{n+2,2} & a_{n+2,3} & \cdots & a_{n+2,n+1} & d \end{bmatrix}$$

然后再按递推公式

$$a_{i,j}\,c+a_{i,j+1}=a_{i+1,j+1}\quad(i=2,\cdots,n+1;\ j=1,\cdots,i-1)$$

自上而下，自左而右依次计算出对角线下其余各元素，那末第 $n+2$ 行各元素即为所求系数，即

$$b_0=a_0,\quad b_i=a_{n+2,i+1}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

例　求 $f(x)=x^3-2x-5$ 在 $x=2$ 处的泰勒展开式.

解
$$2\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 1 & 2 & -2 & & \\ 1 & 4 & 2 & -5 & \\ 1 & 6 & 10 & -1 & d \end{bmatrix}$$

则

$$f(x)=(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)-1$$

二、多元多项式·对称多项式·结式

[多元多项式] 设常数 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 属于一个数域 S，$\alpha_i,\beta_i,\cdots,\nu_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$是正整数或零，则称形如

$$c_1x_1^{\alpha_1}x_2^{\beta_1}\cdots x_n^{\nu_1}+c_2x_1^{\alpha_2}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\nu_2}+\cdots+c_kx_1^{\alpha_k}x_2^{\beta_k}\cdots x_n^{\nu_k}$$

的表达式为数域S上元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$的 n 元多项式. $c_ix_1^{\alpha_i}x_2^{\beta_i}\cdots x_n^{\nu_i}$ 称为它的项，c_i 为它的系数，α_i 为项中关于 x_1 的次数，β_i 为项中关于 x_2 的次数，等等. $\alpha_i+\beta_i+\cdots+\nu_i$ 为项的次数. 在多项式中系数不为零的任一项关于 x_i 的最高次数称为多项式关于 x_i 的次数. 系数不为零的任一项的最高次数叫做多项式的次数. 各项次数都相等的多项式称为齐次多项式.

每个m次多项式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都可唯一地表示成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=0}^{m}f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

式中 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 i 次齐次多项式.

为了方便，经常把一个多元多项式按某一个变数，例如x_1 的降幂排列如下：

$$a_0(x_2,\cdots,x_n)x_1^m+a_1(x_2,\cdots,x_n)x_1^{m-1}+\cdots+a_m(x_2,\cdots,x_n)$$

式中 $a_0(x_2,\cdots,x_n),a_1(x_2,\cdots,x_n),\cdots,a_m(x_2,\cdots,x_n)$ 为 $x_2,\cdots,x_n$ 的 $n-1$ 元多项式.

若 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_k$次的多元多项式，则乘积 $f_1f_2\cdots f_k$ 为 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 次.

[对称多项式] 如果在一个 n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中，对调任一对 x_i 和 x_j 后，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$不变，那末称它为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式.

[初等对称多项式] 设

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}x_i,\qquad \sigma_2=\sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n}x_ix_j,\qquad \sigma_3=\sum_{\substack{i,j,k=1\\(i<j<k)}}^{n}x_ix_jx_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\qquad \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n$$

则称 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 为初等对称多项式. 例如，由多项式的根与系数的关系（本节,一)可知，多项式的系数除符号外都是根的初等对称多项式.

［对称多项式基本定理］　在数域S上，每个n元对称多项式$f(x_1,\cdots,x_n)$都可唯一地表成$x_1,\cdots,x_n$的初等对称多项式(系数在S中)的多项式．

［牛顿公式］　设

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$$

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

则下面牛顿公式成立：

$k\leqslant n$时，$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0$

$k>n$时，$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0$

［结式］　设

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-x_i) \qquad (m>0)$$

$$\varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=b_0\prod_{j=1}^{n}(x-y_j) \qquad (n>0)$$

则

$$R(f,\varphi)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_m & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{行}\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m\text{行}\end{matrix}$$

这个$m+n$阶行列式$R(f,\varphi)$称为多项式$f(x)$和$\varphi(x)$的结式，式中空白处的元素都是零．结式具有性质：

$$R(f,\varphi)=(-1)^{mn}R(\varphi,f)$$

$$R(f,\varphi)=a_0^nb_0^m\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x_i-y_j)=a_0^n\prod_{i=1}^{m}\varphi(x_i)=(-1)^{mn}b_0^m\prod_{j=1}^{n}f(y_j)$$

设a_0,b_0不全为零，则$f(x),\varphi(x)$在复数域上有公共根的充分必要条件是它们的结式$R(f,\varphi)=0$．

行列式$R(f,\varphi)$是$f(x)$与$\varphi(x)$的系数的一个$m+n$次齐次多项式，关于$a_0,a_1,\cdots,a_m$是n次齐次多项式，关于$b_0,b_1,\cdots,b_n$是m次齐次多项式。

三、代数方程的根的隔离

[傅立叶-布当判别法] 设$f(x)=0$为实系数n次代数方程，a，b为二实数，适合$a<b$，$f(a)\neq 0$，$f(b)\neq 0$，$f(x)$的各阶导数为

$$f(x),f'(x),\cdots,f^{(n)}(x)$$

若序列

$$\{f(a),f'(a),\cdots,f^{(n)}(a)\}$$

的变号次数*为p，序列

$$\{f(b),f'(b),\cdots,f^{(n)}(b)\}$$

的变号次数为q，则$p\geqslant q$，且a与b之间的$f(x)=0$的实根个数(一个k重根按k个根计算)等于$p-q$，或者比$p-q$少一个正偶数。

特别，当$p-q=0$时，(a,b)内无实根，当$p-q=1$时，(a,b)内只有一个实根。

[笛卡儿符号法则] 设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \qquad (a_0\neq 0,a_n\neq 0)$$

为实系数n次代数方程，若系数序列

$$\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$$

的变号次数为p，则方程$f(x)=0$的正根个数(一个k重根按k个根计算)等于p，或者比p少一个正偶数。

特别，当$p=0$时，无正根，当$p=1$时，有且仅有一个单正根。

上面两个定理没有解答这样的问题：一个给定的实系数方程是否有实根，有几个实根，并且在给定的区间(a,b)内有几个实根。斯图姆解决了这些问题。

[斯图姆判别法] 设$f(x)$为区间(a,b)内的无重根的实系数多项式，a,b为二实数，适合$a<b$，$f(a)\neq 0$，$f(b)\neq 0$，以$f_0(x)$表示$f(x)$，以$f_1(x)$表示$f(x)$的导数$f'(x)$。用$f_1(x)$除$f(x)$，并以$f_2(x)$表示由这个除法所得到的余式反号后的多项式，然后用$f_2(x)$除$f_1(x)$，并以$f_3(x)$表示余式反号后的多项式，这样继续下去，最后一个记作$f_s(x)$(等于非零常数)。这样得到的函数序列

* 序列$\{c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n\}$的变号次数定义如下：设两个相邻数$c_k,c_{k+1}$都不为零，它们的符号相反，则称两数之间有一次变号，否则变号次数为零。如果遇到零时则应考虑该数后面第一个非零数是否变号，也就是说把序列中的一切零去掉再考虑变号次数。

$$\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)\} \tag{1}$$

称为在区间(a,b)内以$f(x), f'(x)$为基的一个斯图姆组。

若序列

$$\{f_0(a), f_1(a), f_2(a), \cdots, f_s(a)\}$$

的变号次数为p，序列

$$\{f_0(b), f_1(b), f_2(b), \cdots, f_s(b)\}$$

的变号次数为q，则$f(x)=0$在区间(a,b)内的实根个数等于$p-q$。

应用斯图姆判别法可以查清实系数代数方程的根在实轴上的分布情况．特别，可以求出一组区间，使得每个区间内只含有方程的一个根．

关于代数方程$f(z)=0$的复根个数可参看第十章，§4，二的辐角原理．

[卢斯判别法] 假设实系数多项式

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

以

$$f_0(t)=t^n-a_2t^{n-2}+a_4t^{n-4}-a_6t^{n-6}+\cdots$$

$$f_1(t)=a_1t^{n-1}-a_3t^{n-3}+a_5t^{n-5}-\cdots$$

为基的斯图姆组为

$$\{f_0(t), f_1(t), f_2(t), \cdots, f_s(t)\} \tag{2}$$

1° $f(z)=0$在虚轴及右半平面上没有根的充分必要条件是：斯图姆组(2)内$s=n$，且每个多项式的次数比前一个低一次，首项系数都是正数．

2° 若斯图姆组(2)内$s=n$，则组内每个多项式的次数比前一个低一次，$f(z)=0$在虚轴上没有根，在右半平面的根的个数等于首项系数组成的序列的变号次数．

3° $f(z)=0$在右半平面上没有根而在虚轴上有p个根的充分必要条件是：斯图姆组(2)内$s=n-p$，且每个多项式的次数比前一个低一次，首项系数都是正数，且最后的p次方程$f_{n-p}(z)=0$有p个实根．这些实根就是$f(z)=0$在虚轴上的p个根的虚部．

如果考虑$f(z)=0$在单位圆上和单位圆外的根数问题，只要作线性变换

$$z=\frac{w+1}{w-1}$$

化为对$g(w)=0$在虚轴上和右半平面上根数的讨论．对此用卢斯判别法可以解决．

[胡尔威茨判别法] 实系数多项式

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

的一切根都位于左半平面上的充分必要条件是系数 $a_1>0$，并且多项式

$$f_0(t)=t^n-a_2t^{n-2}+a_4t^{n-4}+\cdots$$

和

$$f_1(t)=a_1t^{n-1}-a_3t^{n-3}+a_5t^{n-5}-\cdots$$

的根都是互相间隔的实根.

§3 代数方程的特殊解法

阿贝尔证明了五次及更高次的一般方程没有代数解法．可是阿贝尔定理并没有回答这个问题：每个给定的具体方程有没有代数解法．伽罗瓦证明了：存在用代数方法不能解的具体整系数代数方程．例如

$$x^5-x+1=0$$

伽罗瓦还找出方程能用根式求解的充分必要条件．

1．求有理根

根据上一节中"整根与有理根"的性质，可以求某些具体方程的有理根.

例　求方程 $2x^3-3x^2+2x+2=0$ 的有理根.

解　因为该方程的有理根$\frac{p}{q}$的 p 和 q 都是 2 的约数，所以它们是 1，-1，2 和 -2．因此$\frac{p}{q}$的可能值是 1，-1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，2 和 -2．用综合除法(见§2，一)检验：

$$1)\ \begin{array}{rrrr} 2 & -3 & 2 & 2 \\ & 2 & -1 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \qquad -1)\ \begin{array}{rrrr} 2 & -3 & 2 & 2 \\ & -2 & 5 & -7 \\ \hline 2 & -5 & 7 & -5 \end{array}$$

$$\frac{1}{2})\ \begin{array}{rrrr} 2 & -3 & 2 & 2 \\ & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \hline 2 & -2 & 1 & 2\frac{1}{2} \end{array} \qquad -\frac{1}{2})\ \begin{array}{rrrr} 2 & -3 & 2 & 2 \\ & -1 & 2 & -2 \\ \hline 2 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

所以$-\frac{1}{2}$为已知方程的一个有理根.

原式除以 $x+\frac{1}{2}$，得商式

$$2x^2-4x+4=0 \quad 即 \quad x^2-2x+2=0$$

它的判别式 $4-8<0$，它的两个根是一对共轭复根．因此原方程只有一个有理根$-\frac{1}{2}$.

2. 解三项方程

形如

$$au^{2n}+bu^n+c=0$$

的方程称为三项方程，其中 a,b,c,n 都不等于零，n 为整数．它可用根式解．令 $u^n=x$，得二次方程 $ax^2+bx+c=0$．

例　解方程

$$\frac{1}{u^4}-\frac{4}{u^2}+3=0$$

解　令 $\frac{1}{u^2}=x$，则得 $x^2-4x+3=0$，它的根是 $x=1$ 和 $x=3$．从 $\frac{1}{u^2}=x$ 得 $u=\pm\frac{1}{\sqrt{x}}$．所以 $u=\pm1$，$u=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$　代入原方程检验，可知这四个数是方程的根．

3. 解倒数方程

形如

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+cx^2+bx+a=0$$

（其中 x^{n-k} 和 x^k 项的系数相同）的方程称为倒数方程．倒数方程的任一根不等于零．

1°　偶数次（$n=2k$）倒数方程两边除以 x^k，再令 $z=x+\frac{1}{x}$，则原方程可化为 z 的 k 次方程，解此方程，得 z 的值，然后对应的 x 值可由二次方程

$$x^2-zx+1=0$$

求出．

2°　解奇数次（$n=2k+1$）倒数方程归结为解偶数次倒数方程．

例　解方程

$$2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$$

解　$x_1=-1$ 为原方程的一个根，把方程除以 $x+1$，得 4 次倒数方程：

$$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$$

把它除以 x^2，然后并项，得

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0$$

令 $z=x+\frac{1}{x}$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=z^2-2$，从而上式变为

$$2(z^2-2)+3z-16=0\quad 即\quad 2z^2+3z-20=0$$

由此得 $z_1=-4, z_2=\frac{5}{2}$. 因而有确定 x 的两个方程:

$$x^2+4x+1=0 \text{ 和 } 2x^2-5x+2=0$$

由此得

$$x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}, \quad x_4=2, \quad x_5=\frac{1}{2}$$

4. 解二项方程

形如

$$x^n-A=0$$

的方程称为二项方程. 它的 n 个根就是复数 A 的 n 次方根.

如果把 A 写为

$$A=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

则方程 $x^n-A=0$ 的 n 个根是

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

几何说明: 复平面上与数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的 n 次方根对应的点是一个正 n 边形的顶点, 这些顶点在以原点为中心, 以$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆上. 而这个 n 边形的顶点之一有幅角$\frac{\theta}{n}$. 图 3.1 表示 $n=6$ 的情形.

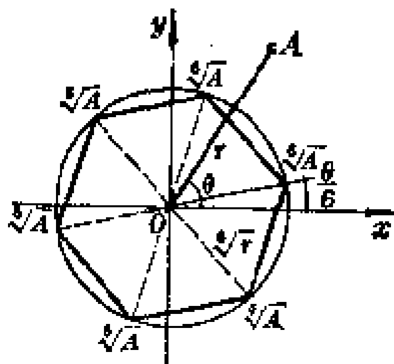


图 3.1

若 $A=1$, 则 $x^n=1$ 的解 ξ 称为 n 次单位根. n 个 n 次单位根为

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

如果 ξ 是其中一个 n 次单位根, 那末 n 个 n 次单位根是 $1,\xi,\xi^2,\cdots,\xi^{n-1}$, 它们在几何上表示为单位圆的一个内接正 n 边形的顶点.

§4 实根的近似计算

设 $f(x)$ 为已知连续函数, ξ 是方程

$$f(x)=0$$

的根, 这里方程可以是一般方程(代数方程或超越方程). 在实际问题中都给出了根的范围, 例如代数方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根 ξ 的范围是

$$|\xi|\leqslant 1+\frac{1}{a_0}\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$$

因此可以假定方程在区间(a,b)内只有一个根(若有两个根，则将区间的一个端点换为使$f'(x)=0$的点)．并由函数的连续性可知，一般来说，在根的附近$f(x)$是异号的(当$f'(\xi)=0$或∞除外)，所以在下面介绍的各种近似计算中，都假定$f(a)$和$f(b)$异号．

一、秦九韶法*

秦九韶法基本上是通过逐次试验求根的近似值的方法，试验次数愈多，所得近似值愈接近根的真值．系统地继续这一过程，直至达到预定的有效数字的位数．现举例具体说明这个方法．

例 求方程

$$f(x)=x^3+18x-30=0 \tag{1}$$

的根到五位有效数字．

应用笛卡儿符号法则可知这个方程有一个正根．由于$f(1)=-11$，$f(2)=14$，这个正根在$(1,2)$之间．

现在应用秦九韶法求这个方程的近似根．先设$p=x-1$，这里p表示1到所求根的距离．应用多项式的泰勒公式(秦九韶法，见§2，一)，得到关于p的方程

$$p^3+3p^2+21p-11=0 \tag{2}$$

其算式为

$$1\left[\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 18 & & \\ 1 & 2 & 19 & -30 & \\ 1 & 3 & 21 & -11 & d \end{array}\right]$$

现在求纯小数p的近似值，由于纯小数的三次方或二次方的值更小，可暂舍去方程(2)的头两项而来计算$21p-11=0$，即$p=0.5238\cdots$．但舍去的两项是正的，这个值显得太大．当$p=0.500$时，方程(2)的左边各项的和仍是正数(0.375)，而当$p=0.400$时，方程(2)的左边各项的和是负数(-2.056)．因此，设$p=0.4+h(h>0)$，即$h=p-0.4$．再应用多项式的泰勒公式，得到关于h的

---

* 我国古代数学家秦九韶在他所著的《数书九章》(1247)中，给出一个求代数方程的根的近似值的方法，这个方法一般书上都称为和纳法．实际上和纳在1819年才提出这个方法，比秦九韶晚五百多年．

方程

$$h^3+4.2h^2+23.88h-2.056=0 \tag{3}$$

其算式为

$$0.4\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 3 & & & \\ 1 & 3.4 & 21 & & \\ 1 & 3.8 & 22.33 & -11 & \\ 1 & 4.2 & 23.88 & -2.056 & d \end{bmatrix}$$

现在求小数 h 的近似值，舍去头两项，求得 $h=0.08609\cdots$. 因舍去两个正量，所得的 h 太大，所以设 $h=0.08+q(q>0)$，即 $q=h-0.08$. 应用上述方法得到关于 q 的方程

$$q^3+4.44q^2+24.5712q-0.118208=0 \tag{4}$$

同上面一样，从方程(4)的后两项求得 $q=0.00481\cdots$，设 $q=0.004+r\ (r>0)$，即 $r=q-0.004$，得到关于 r 的方程

$$r^3+4.452r^2+24.606768r-0.019852096=0 \tag{5}$$

从后两项求出 r 的近似值 $r=0.0008\cdots$，因舍去的都是正量，所以方程(5)的根在 0.0008 和 0.00081 之间.

现在把(2)，(3)，(4)，(5)的各个近似值 0.4，0.08，0.004，0.0008 相加得总和 0.4848，然后加到第一次近似值 1 上，所以方程(1)的根在 1.4848 与 1.48481 之间，取五位有效数字为 1.4848.

用秦九韶法还能求负的近似根. 想求 $f(x)=0$ 的一切负实根，可先求 $f(-x)$ 的正实根，然后改变符号，即得负实根.

二、二分法

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$（这里假定 $f(a)<0,f(b)>0$），取区间 $[a,b]$ 的中点 $\frac{a+b}{2}$，若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则 $f(x)=0$ 的根是 $\xi=\frac{a+b}{2}$. 不然，若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$，则令 $a_1=a,b_1=\frac{a+b}{2}$；若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，则令 $a_1=\frac{a+b}{2},b_1=b$. 于是形成新区间 $[a_1,b_1]$，它包含 $f(x)=0$ 的根 ξ（图 3.2）.

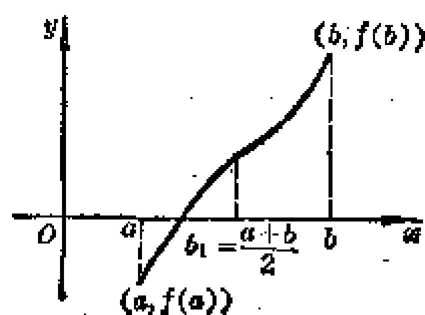


图 3.2

再取 $[a_1, b_1]$ 的中点 $\frac{a_1+b_1}{2}$，若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$，则 $\xi=\frac{a_1+b_1}{2}$，若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)>0$，则令 $a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$；若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0$，则令 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$．于是又形成新区间 $[a_2, b_2]$，其长度等于 $\frac{b-a}{2^2}$，它包含方程 $f(x)=0$ 的根 ξ．…若允许误差 $\varepsilon=10^{-k}$，则按这个过程作出区间 $[a_1, b_1]$，$[a_2, b_2]$，$[a_3, b_3]$，…，$[a_n, b_n]$，$n=\left[\frac{k+\lg(b-a)}{\lg 2}\right]$ （$[x]$表示 x 的整数部分），于是

$$\xi^*=\frac{a_n+b_n}{2}$$

是方程 $f(x)=0$ 的近似根，误差不超过

$$|\xi-\xi^*|\leqslant\frac{b-a}{2^{n+1}}\leqslant 10^{-k}$$

二分法是求实根的近似计算中行之有效的最简单的方法，它只要求函数是连续的，因此它的使用范围很广，并便于在电子计算机上实现．但是它不能求重根，也不能求虚根．

三、迭代法

把方程 $f(x)=0$ 表成它的等价形式

$$x=\varphi(x)$$

或一般地

$$f_1(x)=f_2(x)$$

式中 $f_1(x)$是这样一个函数：对任意实数 c，能容易算出方程 $f_1(x)=c$ 的精确度很高的实根．如果对任意 $a\leqslant x_1\leqslant b, a\leqslant x_2\leqslant b$，下式成立：

$$\frac{|f_2'(x_2)|}{|f_1'(x_1)|}\leqslant q<1$$

则下面迭代过程是收敛的．

首先从一个近似根 x_0 出发（x_0 可由图解法粗略估计出），代入方程右边，解方程

$$f_1(x)=f_2(x_0)$$

得到第一个近似根 $x=x_1$，再解方程

$$f_1(x)=f_2(x_1)$$

得到第二个近似根 $x=x_2$, …, 类似地由第 n 个近似根 x_n, 解方程

$$f_1(x)=f_2(x_n)$$

得到第 $n+1$ 个近似根 $x=x_{n+1}$. 于是得到一系列不同精确度的近似根

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

它收敛于方程的根 ξ(图 3.3).

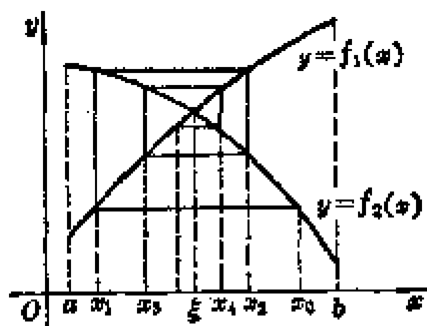


图　3.3

收敛速度(即误差消失速度)与 α^n 相当, 而

$$\alpha\approx\frac{x_2-x_1}{x_1-x_0}$$

用

$$x_2^*=x_2-\frac{(\Delta x_1)^2}{\Delta^2 x_0}$$

代替 x_2, 可加速收敛. 式中 $\Delta x_1=x_2-x_1$ 为 x_1 的一阶差分, $\Delta^2 x_0=\Delta x_1-\Delta x_0$ 为 x_0 的二阶差分.

对于方程 $x=\varphi(x)$, 只要 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上连续, 且 $|\varphi'(x)|\leqslant q<1$, 那末, 它的根可由

$$x_1=\varphi(x_0)$$
$$x_2=\varphi(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n+1}=\varphi(x_n)$$

来接近(图 3.4).

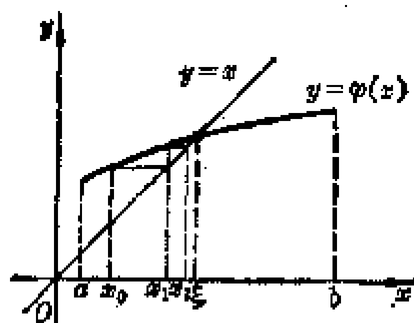


图　3.4

例　用迭代法求方程

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}+\ln x-\ln(1+\sqrt{1+x^2})+2.86996=0$$

的实根的近似值.

解　设

$$f_1(x)=\ln x$$

$$f_2(x)=\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}-2.86996$$

则原方程化为

$$f_1(x)=f_2(x)$$

又因为 $f(0)=-\infty$, $f(1)>0$, 所以方程 $f(x)=0$ 的实根在$(0,1)$中, 而

$$\frac{|f_2'(x_2)|}{|f_1'(x_1)|}\leqslant\frac{x_1}{(1+\sqrt{1+x_2^2})\sqrt{1+x_2^2}}\leqslant\frac{1}{2}<1\qquad(0\leqslant x_1, x_2\leqslant 1)$$

因此下面迭代过程是收敛的. 因为有常用对数表可以查阅,方程化为

$$\lg x=\lg(1+\sqrt{1+x^2})-(\sqrt{1+x^2}+2.86996)\lg e$$

迭代程序为

$$\lg x_n=\lg(1+\sqrt{1+x_{n-1}^2})-0.434295(\sqrt{1+x_{n-1}^2}+2.86996)$$

选初始值 $x_0=0$ 代入,

$$\lg x_1=\lg 2-0.434295(1+2.86996)=\bar{2}.62033$$

$$x_1=0.041718$$

$$\lg x_2=\lg(1+\sqrt{1+(0.041718)^2})$$

$$-0.434295(\sqrt{1+(0.041718)^2}+2.86996)$$

$$=\bar{2}.620137$$

$$x_2=0.041700$$

因为 $f(0.041700)<0$, $f(0.041701)>0$, 所以 $f(x)=0$ 的根在 $(0.041700, 0.041701)$之间, 近似根为 $\xi^*\approx 0.0417005$, 误差小于 0.000001.

例 用迭代法求方程

$$x^{41}+x^3+1=0$$

的复根的近似值.

解 迭代程序为

$$x_{n+1}^{41}=-(1+x_n^3)$$

方程有二十对共轭复根, 其近似值为

$$x=e^{\pm\frac{2k+1}{41}\pi i}\qquad (k=0,1,\cdots,19)$$

从 $x_0=e^{\frac{\pi}{41}i}$ $(k=0$, 取正号$)$出发, 而$\frac{\pi}{41}$弧度$\approx 4.390°$, 则

$$x_0=\cos 4.390°+i\sin 4.390°=0.9971+i0.0766$$

$$x_0^3=e^{\frac{3\pi}{41}i}=e^{13.17°i}=0.9737+i0.2278$$

$$-(1+x_0^3)=-1.9737-i0.2278\approx 1.9868e^{186.61°i}$$

$$x_1=1.0169e^{4.55°i}=1.0169(0.99685+i0.07933)$$

$$\approx 1.01370+i0.08067$$

而对应的准确根为 $x=1.0143046\cdots+i0.0809230\cdots$.

四、牛顿法

1. 一般牛顿法

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续, $f'(x)$也连续, 且 $f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$, $f(a)f(b)<0$

(设 $f(a)<0, f(b)>0$)，过点 $(a, f(a))$(或点 $(b, f(b))$)作曲线的切线：

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=f'(a)\left(\text{或 } \frac{y-f(b)}{x-b}=f'(b)\right)$$

它和 x 轴的交点为 $x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}\left(\text{或 } x=b-\frac{f(b)}{f'(b)}\right)$.

用迭代公式

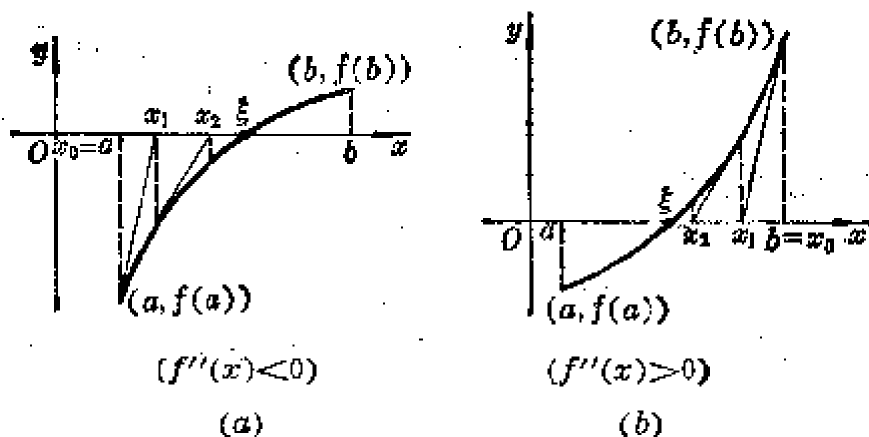
$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

并取初始值

$$x_0=\begin{cases} a, & \text{当 } f''(x)<0 \\ b, & \text{当 } f''(x)>0 \end{cases}$$

可计算出方程 $f(x)=0$ 的根的近似值(图 3.5). 误差 $|\xi-x_n|$ 不超过

$$\frac{|f(x_n)|}{\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|}$$



$(f''(x)<0)$　　$(f''(x)>0)$

(a)　　(b)

图 3.5

一般选取的初始值 x_0，要满足不等式

$$|f'(x_0)|^2>\left|\frac{f''(x_1)f(x_0)}{2}\right|$$

例　用牛顿法求方程

$$f(x)=x^3+2x^2-3x-7=0$$

的实根的近似值.

解　首先由下表确定 $[a, b]$，$a=1.8$，$b=1.9$，$f(a)f(b)<0$：

x	$+\infty$	5	2	1.9	1.8	1.7	1.5	1	$-\infty$
$f(x)$	+	+	+	+1.379	−0.083	−	−	−	−

再求导数

$$f'(x)=3x^2+4x-3$$

$$f''(x)=6x+4>0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

考虑到$f(1.8)$很接近于 0，则取 $x_0=1.8$，

$$f'(x_0)=f'(1.8)=9.72+7.2-3=13.92$$

$$x_1=1.8-\frac{-0.088}{13.92}=1.80632$$

$$f(x_1)=f(1.80632)=0.00030>0$$

$$f'(x_1)=f'(1.80632)=14.01368$$

$$x_2=1.80632-\frac{0.00030}{14.01368}=1.80632-0.00002=1.80630$$

因为$f(1.80630)<0$，所以根在$(1.80630, 1.80632)$之间．取近似值 $\xi^*=1.80631$，误差小于 0.00001．

2．近似牛顿法

如果$f'(x)$不易算出，可改用差商代替，得出近似牛顿法迭代程序：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)h}{f(x_k+h)-f(x_k-h)}$$

3．逐次压缩牛顿法

求实系数代数方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的单实根时，用牛顿法求出一个实根 x_0 后，可把多项式的次数降低一次．降低次数后的多项式系数 b_k 为

$$b_0=a_0$$

$$b_k=a_k+x_0b_{k-1} \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

然后，再把求出的实根作为初始近似值，用同法求出再次降低次数的多项式的实根，依此求出全部单实根．

4．牛顿法解非线性方程组

假设非线性方程组

$$\begin{cases} u(x,y)=0 \\ v(x,y)=0 \end{cases}$$

存在一组近似解 $P_0(x_0,y_0)$，且

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{matrix}\right|_{P_0} \neq 0$$

可用迭代公式:

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{J_n}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} & u\\ \frac{\partial v}{\partial y} & v\end{vmatrix}_{P_n}$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{J_n}\begin{vmatrix}u & \frac{\partial u}{\partial x}\\ v & \frac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}_{P_n}$$

式中 P_n 为点(x_n, y_n), J_n 为雅可比式 J 在 P_n 的值:

$$J_n=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}_{P_n}$$

例 求方程组

$$\begin{cases}u(x,y)=x^2+y^2-5=0\\ v(x,y)=(x+1)y-(3x+1)=0\end{cases}$$

在点 $P_0(1,1)$ 附近的近似解.

解 其雅可比式为

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ y-3 & x+1\end{vmatrix}$$

在点 $P_0(1,1)$ 处有

$$u_0=1+1-5=-3,\qquad v_0=2-4=-2$$

$$J_0=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=8\neq 0$$

于是

$$x_1=1+\frac{1}{8}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=1+\frac{1}{4}$$

$$y_1=1+\frac{1}{8}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}=1+\frac{10}{8}=2+\frac{1}{4}$$

再从 $P_1\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$算出 $P_2(x_2, y_2)$:

$$x_2=1,\qquad y_2=2+\frac{1}{36}$$

就是方程组的近似解.

五、弦截法(线性插值法)

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f'(x)$, $f''(x)$ 都不变号, 且 $f(a)f(b)<0$(这里假定 $f(a)<0, f(b)>0$). 过点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线是:

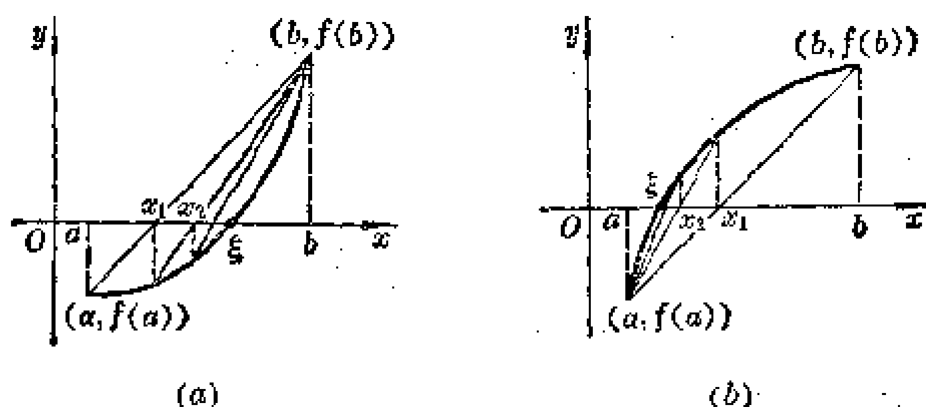
$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}\quad\left(\text{或}\ \frac{f(b)-y}{f(b)-f(a)}=\frac{b-x}{b-a}\right)$$

它和 x 轴的交点是 $x=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$ $\left(\text{或}\ x=b-\frac{(b-a)f(b)}{f(b)-f(a)}\right)$.

(a) 当 $f'(x)f''(x)>0$ 时, 用迭代公式

$$\begin{cases} x_{n+1}=b-\dfrac{(b-x_n)f(b)}{f(b)-f(x_n)} \\ x_0=a \end{cases}$$

可求出方程的近似根(图 3.6(a)).



(a)　　　　(b)

图 3.6

(b) 当 $f'(x)f''(x)<0$ 时, 用迭代公式

$$\begin{cases} x_{n+1}=a-\dfrac{(x_n-a)f(a)}{f(x_n)-f(a)} \\ x_0=b \end{cases}$$

可求出方程 $f(x)=0$ 的近似根(图 3.6(b)).

六、联合法(牛顿法与弦截法联合使用)

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f'(x)$, $f''(x)$ 都不变号, 且 $f(a)f(b)<0$(这里假定 $f(a)<0, f(b)>0$).

(a) 当 $f(a)$ 与 $f''(x)$ 同号时(图 3.7(a)), 用迭代公式

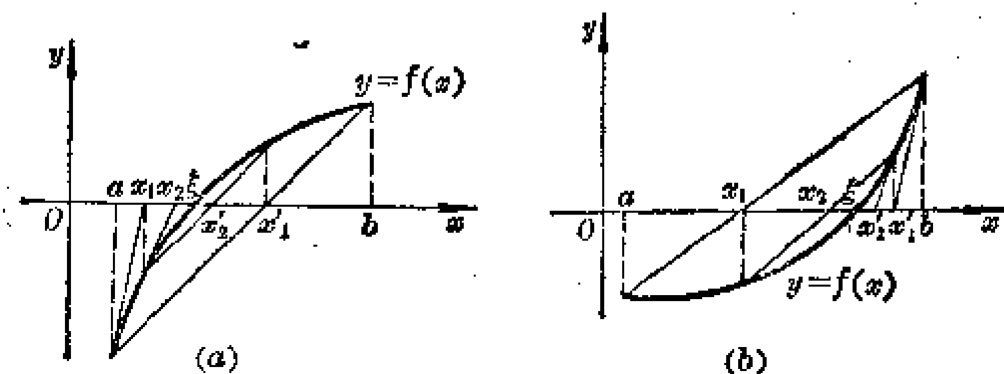


图 3.7

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$x_1'=b-\frac{(a-b)f(b)}{f(a)-f(b)}$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2'=x_1'-\frac{(x_1-x_1')f(x_1')}{f(x_1)-f(x_1')}$$

…………

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_n'=x_{n-1}'-\frac{(x_{n-1}-x_{n-1}')f(x_{n-1}')}{f(x_{n-1})-f(x_{n-1}')}$$

可求出方程 $f(x)=0$ 的近似根.

(b) 当 $f(a)$ 与 $f''(x)$ 异号时(图 3.7(b)),用迭代公式

$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

$$x_1'=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$$

$$x_2=x_1-\frac{(x_1'-x_1)f(x_1)}{f(x_1')-f(x_1)}$$

$$x_2'=x_1'-\frac{f(x_1')}{f'(x_1')}$$

…………

$$x_n=x_{n-1}-\frac{(x_{n-1}'-x_{n-1})f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}')-f(x_{n-1})}$$

$$x_n'=x_{n-1}'-\frac{f(x_{n-1}')}{f'(x_{n-1}')}$$

可求出方程 $f(x)=0$ 的近似根.

误差　$|x_n'-\xi|\leqslant|x_n'-x_n|$ 或 $|x_n'-\xi|\leqslant|x_n'-\bar{x}_n|$.

七、抛物线法(穆勒法)

求实系数 n 次方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \tag{1}$$

的近似根.

可先求出 $f(x)=0$ 的一个根 $x=r$, 则

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-r)g(x)\\&=(x-r)(x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1})\end{aligned}$$

式中 $g(x)$ 是 $n-1$ 次多项式, 然后再求出 $g(x)$ 的根, 依此类推, 可以求出 $f(x)=0$ 的全部实根来.

首先选取 x 轴上三点: x_0,x_1,x_2, 通过曲线 $y=f(x)$ 上的三点: $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$ 作一抛物线 $y=P(x)$ (即拉格朗日插值多项式, 见第十七章, §2, 三), 抛物线与 x 轴有两个交点, 取离 x_2 较近的一点作为 x_3; 再过三点 $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, $(x_3,f(x_3))$ 作一抛物线 (图 3.8 中的虚线), 它与 x 轴有两个交点, 取离 x_3 较近的一点作为 x_4, …, 依此法作出点 x_{i-2},x_{i-1},x_i, 再过三点 $(x_{i-2},f(x_{i-2}))$, $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$, $(x_i,f(x_i))$ 作一抛物线与 x 轴有两个交点, 取离 x_i 较近的一点作为 x_{i+1}, 等等.

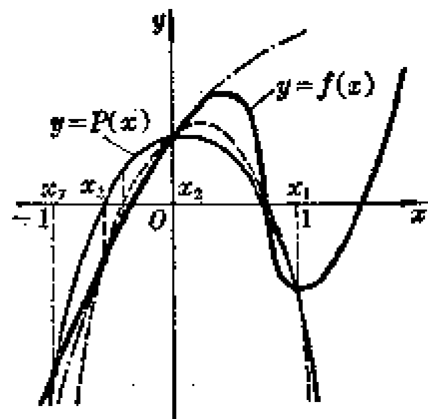


图 3.8

对于预先给定的允许误差 ε, 当迭代过程进行到

$$|x_{i+1}-x_i|<\varepsilon$$

时, 就取 x_{i+1} 作为 $f(x)=0$ 的一个近似根.

由此得到的序列是收敛的. 极限值 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 就是方程 $f(x)=0$ 的根.

迭代步骤如下:

(1) 根据经验对上式(1)可取

$$x_0=-1,\quad x_1=1,\quad x_2=0$$

作为初始值, 于是

$$f(x_0)=(-1)^n+(-1)^{n-1}a_1+\cdots-a_{n-1}+a_n$$

$$f(x_1)=1+a_1+\cdots+a_n$$

$$f(x_2)=a_n$$

或用 $x=0$ 附近的近似值

$$f(x_0)\approx a_{n-2}-a_{n-1}+a_n$$

$$f(x_1)\approx a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$$

$$f(x_2)=a_n$$

(2) 设

$$\lambda_i=\frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i-1}-x_{i-2}},\qquad \delta_i=1+\lambda_i=\frac{x_i-x_{i-2}}{x_{i-1}-x_{i-2}}$$

$$g_i=f(x_{i-2})\lambda_i^2-f(x_{i-1})\lambda_i\delta_i+f(x_i)\lambda_i$$

$$h_i=f(x_{i-2})\lambda_i^2-f(x_{i-1})\delta_i^2+f(x_i)(\lambda_i+\delta_i)$$

由此根据 x_{i-2},x_{i-1},x_i 计算出 $\lambda_i,\delta_i,g_i,h_i$，并根据下列公式计算出 λ_{i+1}:

$$\lambda_{i+1}=\frac{-2f(x_i)\delta_i}{h_i\pm\sqrt{h_i^2-4f(x_i)\delta_i g_i}}$$

($h_i>0$，根式取正号；$h_i<0$，根式取负号)

当 $f(x_{i-2})=f(x_{i-1})=f(x_i)$时，取 $\lambda_{i+1}=1$。

(3) 根据公式

$$x_{i+1}=\lambda_{i+1}(x_i-x_{i-1})+x_i$$

计算出 x_{i+1}。

八、林士谔-赵访熊法(劈因子法)

由于解二次方程是容易的，因此在求实系数代数方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的复根时，如果找出 $f(x)$的一个二次因子，就等于找到方程的一对复根。

设 $f(x)$的一个近似二次因子(任意选取)为

$$w(x)=x^2+px+q$$

可用下述方法使它精确化:

(1) 用 $w(x)$去除$f(x)$，得到商式 $Q(x)$和余式 $R(x)$，即

$$\begin{aligned}f(x)&=w(x)Q(x)+R(x)\\&=(x^2+px+q)(x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\cdots+b_{n-3}x+b_{n-2})+(r_1x+r_2)\end{aligned}$$

式中商式与余式的系数可用下面的递推公式算出:

$$b_k=a_k-pb_{k-1}-qb_{k-2},\qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$b_{-1}=0,\qquad b_0=1$$

$$r_1=b_{n-1}=a_{n-1}-pb_{n-2}-qb_{n-3}$$

$$r_2=b_n+pb_{n-1}=a_n-qb_{n-2}$$

(2) 用 $w(x)$ 去除 $xQ(x)$ 得到余式

$$R^{[1]}(x)=R_{11}x+R_{21}$$

式中 R_{11}, R_{21}，由下面的递推公式算出：

$$c_k=b_k-pc_{k-1}-qc_{k-2},\qquad k=1,2,\cdots,n-3$$

$$c_{-1}=0,\quad c_0=1$$

$$R_{11}=b_{n-2}-pc_{n-3}-qc_{n-4}$$

$$R_{21}=-qc_{n-3}$$

(3) 用 $w(x)$ 去除 $Q(x)$ 得到余式

$$R^{[2]}(x)=R_{12}x+R_{22}$$

式中 R_{12}, R_{22} 由下面的公式算出：

$$R_{12}=b_{n-3}-pc_{n-4}-qc_{n-5}$$

$$R_{22}=b_{n-2}-qc_{n-4}$$

(4) 解二元一次线性方程组

$$\begin{cases}R_{11}u+R_{12}v=r_1\\ R_{21}u+R_{22}v=r_2\end{cases}$$

得到 u, v.

(5) 修正后的二次式为

$$w^{[1]}(x)=x^2+(p+u)x+(q+v)$$

如果它还不够精确，再重复(1)至(5)的步骤进行修正，直到足够精确为止.

林士谔-赵访熊法求实系数代数方程的复根，其优点是避免了复数运算，缺点是程序比较复杂.

例　用林士谔-赵访熊法求代数方程

$$x^4+x^3+5x^2+4x+4=0$$

的复根.

解　设近似二次式为

$$w(x)=5x^2+4x+4=5(x^2+0.8x+0.8)$$

不妨假设 $w(x)$ 就是 $x^2+0.8x+0.8$，分别由(1)，(2)，(3)算出：

$$r_1=0.608,\qquad r_2=0.768$$

$$R_{11}=3.72,\qquad R_{21}=0.48$$

$$R_{12}=-0.6,\qquad R_{22}=3.24$$

根据(4)解方程组

$$\begin{cases}3.72u-0.6v=0.608\\0.48u+3.24v=0.768\end{cases}$$

得

$$u=0.19697,\qquad v=0.20786$$

由(5)得到第一次精确化二次式

$$\begin{aligned}w^{[1]}(x)&=x^2+(0.8+0.19697)x+(0.8+0.20786)\\&=x^2+0.99697x+1.00786\end{aligned}$$

依次又可得到第二次精确化二次式

$$w^{[2]}(x)=x^2+1.00048x+1.00054$$

它的两个复根是

$$0.50024\pm i0.86620$$

而精确的二次式为

$$x^2+x+1$$

它的两个复根是

$$0.5\pm i0.86603$$

九、下降法

对任意实系数超越方程组

$$\begin{cases}f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\end{cases}\tag{1}$$

定义目标函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}f_i^2$$

如果$F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)<\varepsilon$($\varepsilon$为在一定精确度下给定的适当小的正数)，则认为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$为方程组(1)的解*.

具体计算步骤如下：

(1) 任取一组初始值$x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}$(全不为零)，设已按照下述过程计算

---

* 显然$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足条件$F(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)<\varepsilon$的极小点$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$可以是方程组(1)的解，因此也可利用第十八章§3无条件极值问题解法.

到第m步得到一组值：$x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}$.

(2) 计算

$$F_m = F(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$$

(3) 若$F_m < \varepsilon$，则$x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)}$是所求的解，否则计算$n$个偏导数：

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_i^{(m)}} = \frac{1}{H_i}[F(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_i^{(m)} + H_i, \cdots, x_n^{(m)}) - F(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})]$$

$$H_i = wx_i^{(m)} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

式中w为给定的适当小的正数(例如10^{-6})。

(4) 计算

$$x_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} - \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_i^{(m)}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

式中

$$\lambda_m = \frac{F(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_i^{(m)}}\right)^2}$$

得到一组$\{x_i^{(m+1)}\}$，再重复(2)，(3)，(4)的计算。

第四章　矩阵·行列式·线性方程组

本章内容包括矩阵、行列式与线性代数方程组两部分.

在前一部分,叙述了矩阵和行列式的基本概念,重点介绍各种类型矩阵的性质、基本运算,此外,还介绍了矩阵的特征值与特征矢量的求法,及有关的内容,如相似变换等;在线性方程组部分,着重介绍含 n 个未知量的 n 个方程的方程组解法,也简单地讨论了解的结构.最后对整系数线性方程组和线性不等式组也作了扼要说明.

§1　矩阵与行列式

一、矩阵及其秩

[矩阵与方阵]　数域(第三章, §1)F 上的 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$按确定的位置排成的矩形阵列,称为 $m\times n$ 矩阵.记作

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

其中横的一排叫做行,竖的一排叫做列,a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的元素,矩阵 A 简记为(a_{ij})或$(a_{ij})_{m\times n}$.

$n\times n$ 矩阵也称为 n 阶方阵, a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn} 称为矩阵 A 的主对角线的元素.

行数 m 与列数 n 都是有限的矩阵,称为有限矩阵,否则称为无限矩阵.

[矢量的线性相关与线性无关]　对于 n 维空间的一组矢量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$,若数域 F 中有一组不全为零的数 $k_i(i=1,2,\cdots,m)$,使

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m=0$$

成立,则称这组矢量在 F 上线性相关,否则称这组矢量在 F 上线性无关.

矢量组的线性相关性的讨论:

1°　矢量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性相关的充分必要条件是:其中至少有一个矢量 $\boldsymbol{x}_i$ 可用其他矢量的线性组合来表示,即

$$x_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \alpha_j x_j$$

2° 包含零矢量的矢量组一定线性相关.

3° 矢量组 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 中，若有两个矢量相等：$x_i = x_j (i \neq j)$，则该矢量组线性相关.

4° 若矢量组 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 线性相关，则再添加若干个矢量后所组成的矢量组仍然线性相关；若矢量组 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 线性无关，则其中任一部分矢量组成的矢量组也线性无关.

5° 若 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 线性无关，而 $x_1, x_2, \cdots, x_{r+1}$ 线性相关，则 x_{r+1} 可以表示为 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的线性组合.

[行矢量与列矢量·矩阵的秩]　由矩阵任一行的元素构成的 n 维矢量称为行矢量，记为

$$\alpha^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

由矩阵任一列的元素构成的 m 维矢量称为列矢量，记为

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\tau} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

式中 τ 表示转置，即行(列)转换为列(行).

若矩阵 A 的 n 个列矢量中有 r 个线性无关($r \leqslant n$)，而所有个数大于 r 的列矢量组都线性相关，则称数 r 为矩阵 A 的列秩. 类似可定义矩阵 A 的行秩.

矩阵 A 的列秩与行秩一定相等. 它也称为矩阵的秩，记作 $\operatorname{rank} A = r$.

矩阵的秩也等于该矩阵中不等于零的子式(见本节，二)的最大阶数.

二、行列式

1. 行列式及其拉普拉斯展开定理

[n 阶行列式]　设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是由排成 n 阶方阵形式的 n^2 个数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 确定的一个数，其值为 $n!$

项之和

$$D=\sum(-1)^k a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

式中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是将序列 1, 2, $\cdots$, n 的元素次序交换 k 次所得到的一个序列，Σ 号表示对 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 取遍 $1,2,\cdots,n$ 的一切排列求和，那末数 D 称为 n 阶方阵相应的行列式．例如，四阶行列式是 $4!$ 个形为 $(-1)^k a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}a_{4k_4}$ 的项的和，而其中 $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ 相应于 $k=3$，即该项前端的符号应为 $(-1)^3$．

若 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，则 A 相应的行列式 D 记作

$$D=|A|=\det A=\det(a_{ij})$$

若矩阵 A 相应的行列式 $D=0$，称 A 为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵．

［标号集］ 序列 $1,2,\cdots,n$ 中任取 k 个元素 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 满足

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n \tag{1}$$

$i_1,i_2,\cdots,i_k$ 构成 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个具有 k 个元素的子列．$\{1,2,\cdots,n\}$ 的具有 k 个元素的满足(1)的子列的全体记作 $C(n,k)$，显然 $C(n,k)$ 共有 C_n^k 个子列．因此 $C(n,k)$ 是一个具有 C_n^k 个元素的标号集（参见第二十一章，§1，二），$C(n,k)$ 的元素记作 $\sigma,\tau,\cdots$，$\sigma\in C(n,k)$ 表示

$$\sigma=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$$

是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的满足(1)的一个子列．若令 $\tau=\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}\in C(n,k)$，则 $\sigma=\tau$ 表示 $i_1=j_1,i_2=j_2,\cdots,i_k=j_k$．

［子式·主子式·余子式·代数余子式］

从 n 阶行列式 D 中任取 k 行与 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n-1)$，由这 k 行与 k 列交点处的元素构成的 k 阶行列式称为行列式 D 的 k 阶子式，记作

$$M_{\sigma\tau},\qquad \sigma,\tau\in C(n,k)$$

如果所选取的 k 行 k 列分别是第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行与第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列，则所得到的 k 阶子式称为主子式．即当 $\sigma=\tau\in C(n,k)$ 时，$M_{\sigma\tau}$ 是主子式．

从行列式 D 中划去 k 行 (σ) 与 k 列 (τ) 后得到的 $n-k$ 阶行列式称为子式 $M_{\sigma\tau}$ 的余子式，记作 $M'_{\sigma\tau}$．

如果 $\sigma=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，$\tau=\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}$，则称

$$A_{\sigma\tau}=(-1)^{\sum\limits_{l=1}^{k} i_l+\sum\limits_{l=1}^{k} j_l}M'_{\sigma\tau}$$

为子式 $M_{\sigma\tau}$ 的代数余子式．

特别，当 $k=1$ 时，$\sigma=\{i\}$，$\tau=\{j\}$，子式 $M_{\sigma\tau}$ 就是一个元素 a_{ij}，a_{ij} 的余子式记作 M_{ij}，a_{ij} 的代数余子式记作 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

且有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}D & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases} \tag{2}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\begin{cases}D & (j=k)\\ 0 & (j\neq k)\end{cases} \tag{3}$$

［拉普拉斯展开定理］　在n阶行列式D中任取k行$(1\leqslant k\leqslant n-1)$，那末包含于所选定的这些行中的所有$k$阶子式与它们各自的代数余子式的乘积之和等于行列式$D$．即对任意$\sigma\in C(n,k)$，$1\leqslant k\leqslant n-1$，

$$D=\sum_{\tau\in C(n,k)}M_{\sigma\tau}A_{\sigma\tau} \tag{4}$$

式中Σ表示对标号集$C(n,k)$中的所有元素求和．

拉普拉斯定理中是对行进行的，对列有类似结果

$$D=\sum_{\sigma\in C(n,k)}M_{\sigma\tau}A_{\sigma\tau} \tag{5}$$

此外还有

$$\sum_{\tau\in C(n,k)}M_{\sigma\tau}A_{\lambda\tau}=\begin{cases}D & (\sigma=\lambda)\\ 0 & (\sigma\neq\lambda)\end{cases} \tag{6}$$

$$\sum_{\sigma\in C(n,k)}M_{\sigma\tau}A_{\sigma\lambda}=\begin{cases}D & (\tau=\lambda)\\ 0 & (\tau\neq\lambda)\end{cases} \tag{7}$$

显然(2)，(3)分别是(6)，(7)的特例．

［拉普拉斯恒等式］　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}(m\geqslant n)$，又设 $l=C_m^n$，A的所有n阶子式为$U_1,U_2,\cdots,U_l$，B的相应的n阶子式为$V_1,V_2,\cdots,V_l$，则

$$\det(A^{\tau}B)=\sum_{k=1}^{l}U_kV_k$$

2. 行列式的性质

1°　$|A_1A_2\cdots A_m|=|A_1||A_2|\cdots|A_m|$

$$|A^m|=|A|^m,\qquad |kA|=k^n|A|$$

式中$A_1,A_2,\cdots,A_m$全为n阶方阵，k为任一复数．

2°　行与列互换后，行列式的值不变，即

$$|A^{\tau}|=|A|$$

式中A^{τ}表示A的转置矩阵(见本章§2)．

3° 互换行列式的任意两行(或列),行列式变号. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4° 用数 α 乘行列式的一行(或列),等于将行列式乘以数 α. 例如

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5° 将行列式的一行(或列)元素乘以数 α 后加到另一行(或列)的相应元素上,行列式的值不变. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+\alpha a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+\alpha a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6° 若行列式中有一行(或列)全为零,则行列式等于零.

若行列式中有两行(或列)对应的元素完全相同或成比例,则行列式为零.

若行列式中有一行(或列)元素是其他某些行(或列)对应元素的线性组合,则行列式为零.

7° 若行列式中某一行(或列)的所有元素都可表示为两项之和,则该行列式可用两个同阶的行列式之和来表达. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_2+b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. 几个特殊行列式

[对角行列式]

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} d_i = d_1 d_2 \cdots d_n$$

[三角形行列式]

$$\begin{vmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \cdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$$

[二阶行列式]

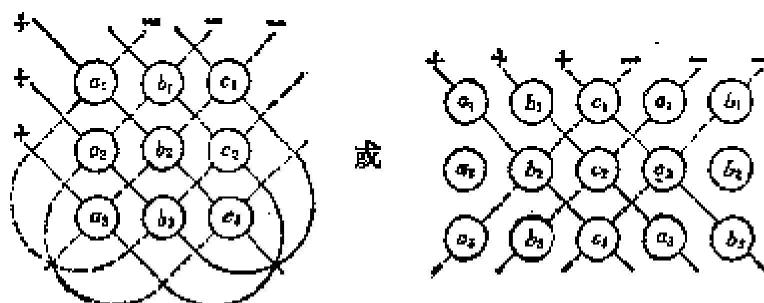
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

[三阶行列式]

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

记忆方法



行列式的值，等于各实线上元素乘积之和减去各虚线上元素乘积之和。

[四阶行列式]

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+ a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_3 & d_3 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & d_3 \\ a_4 & d_4 \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_4 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}$$

注意，四阶和四阶以上的行列式不能采用三阶行列式那种记忆方法，应按拉普拉斯展开定理采用逐步降阶的方法展开。

[范德蒙行列式]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$$

式中$\prod$是对一切数对(i, j) $(1 \leqslant j < i \leqslant n)$求积。

[倒数对称行列式]

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = \frac{[2!3!\cdots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!\cdots(2n-1)!}$$

§2 矩阵的运算

一、矩阵的相等、加、减、数乘、乘法、转置与共轭

运算及其规则	性质与说明
[相等] $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ 当且仅当 $a_{ij} = b_{ij} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$	相等矩阵必须具有相同行数与相同列数。 两矩阵相等，指各对应位置的元素分别相等。

运算及其规则	性质与说明
[加减] $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$ 其中 $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n \end{pmatrix}$	同类型的矩阵才能相加减(各对应位置的元素相加减)。 $A+B=B+A$ (交换律) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (结合律)
[数乘] $k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$	数乘矩阵时,将数乘到矩阵的每个元素上。 $kA=Ak$ $k(A+B)=kA+kB$ $(k+l)A=kA+lA$ $k(lA)=(kl)A$ (k, l 为任意两个复数)
[乘法] 若 $A=(a_{ij})$为 $m\times n$ 矩阵 $B=(b_{ij})$为 $n\times s$ 矩阵,则 $AB=(a_{ij})(b_{ij})=(c_{ij})=C$ 式中 C 为 $m\times s$ 矩阵,且 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,s \end{pmatrix}$	乘积的元素 c_{ij},等于左矩阵的第 i 行与右矩阵的第 j 列对应元素相乘之后相加。 左矩阵的列数必须等于右矩阵的行数。 $(AB)C=A(BC)$ (结合律) $\left.\begin{array}{l}(A+B)C=AC+BC \\ C(A+B)=CA+CB\end{array}\right\}$(分配律) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ (k是任意复数) [注] $AB=BA$ 一般情况下不成立,即无交换律。

运算及其规则	性质与说明
[转置] 把 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 的列同行互换后所得到的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的转置矩阵，记作A^{τ}，即 $$A^{\tau}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}^{\tau}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$	$(A+B)^{\tau}=A^{\tau}+B^{\tau}$ $(kA)^{\tau}=kA^{\tau}$ (k为任意复数) $(AB)^{\tau}=B^{\tau}A^{\tau}$ (反序定律) $(A_1A_2\cdots A_s)^{\tau}=A_s^{\tau}\cdots A_2^{\tau}A_1^{\tau}$ $(A^k)^{\tau}=(A^{\tau})^k$ (k为整数)
[共轭] 把矩阵 $A=(a_{ij})$的所有元素换成它们的共轭复数后所得到的矩阵称为 A 的共轭矩阵，记作 $\bar{A}$，即 $$\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$$	$\overline{(A+B)}=\bar{A}+\bar{B}$ $\overline{(kA)}=\bar{k}\bar{A}$ (k 为任意复数) $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$ $\overline{(A^{\tau})}=(\bar{A})^{\tau}$

二、矩阵的初等变换与初等矩阵

设 $I=\begin{bmatrix}1&&0\\&1&\\&&\ddots&\\0&&&1\end{bmatrix}$，称为单位矩阵.

初等变换	初等矩阵	初等矩阵与初等变换之间的关系
矩阵的第 i 列(或行)与第 j 列(或行)互调	对单位矩阵 I 施行这种初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵，记作 I_{ij} $$I_{ij}=\begin{bmatrix}1&&&&&&&&0\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&\cdots&1&\cdots&&\\&&&\vdots&1&\vdots&&&\\&&&\vdots&&\ddots&&&\\&&&\vdots&&1&&&\\&&&1&\cdots&0&\cdots&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\0&&&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\\(i)\\\\\\\\(j)\\\\\\\\\end{matrix}$$ (第 (i)、(j) 列)	对矩阵 A 施行这种初等变换相当于用初等矩阵 I_{ij} 右(或左)乘 A. 例如 $$AI_{12}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{12}&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\a_{22}&a_{21}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m2}&a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

初等变换	初 等 矩 阵	初等矩阵与初等变换之间的关系
用数$k(\neq 0)$乘矩阵的第i列（或行）	对单位矩阵I施行这种初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵，记作$P_i(k)$ $P_i(k)=\begin{bmatrix}1&&&&&&0\\&\ddots&&\vdots&&&\\&&1&\vdots&&&\\&&&k&\cdots&\cdots&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\0&&&&&&1\end{bmatrix}(i)$（第$k$所在列为第$(i)$列）	对矩阵A施行这种初等变换相当于用初等矩阵$P_i(k)$右(或左)乘A. 例如 $P_2(k)A=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&k&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$
矩阵的第i列(或行)加上第j列(或行)的k倍	对单位矩阵I施行这种初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵，记作$A_{ij}(k)$ $A_{ij}(k)=\begin{bmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&\vdots&\vdots&&\\&&1\cdots&\vdots&\cdots&\\&&\vdots&\ddots&\vdots&\\&&k\cdots&1&\cdots&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\(i)\\\\(j)\\\\\\\end{matrix}$（列标为$(i)$ (j)）	对矩阵A施行这种初等变换相当于用初等矩阵$A_{ij}(k)$右(或左)乘A. 例如 $AA_{12}(k)=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\k&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+ka_{12}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}+ka_{22}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}+ka_{m2}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$

初等变换具有性质:

1° 任何矩阵(a_{ij})都可经过有限次初等变换化为对角矩阵

$$(a_{ij})\rightarrow\begin{bmatrix}1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0\end{bmatrix}$$

2° 初等变换不改变矩阵的秩.

三、矩阵的微积分

假设矩阵A的元素a_{ij}都是参数t的函数,那末

1° 矩阵A的导数定义为

$$\frac{dA}{dt}=\dot{A}=\begin{bmatrix}\frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt}\\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \cdots & \frac{da_{2n}}{dt}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \cdots & \frac{da_{mn}}{dt}\end{bmatrix}$$

同样可定义矩阵的高阶导数.

2° 矩阵A的积分定义为

$$\int A\,dt=\begin{bmatrix}\int a_{11}dt & \int a_{12}dt & \cdots & \int a_{1n}dt\\ \int a_{21}dt & \int a_{22}dt & \cdots & \int a_{2n}dt\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \int a_{m1}dt & \int a_{m2}dt & \cdots & \int a_{mn}dt\end{bmatrix}$$

同样可定义矩阵的多重积分.

四、特殊矩阵

[零矩阵与零因子] 元素a_{ij}全为零的矩阵称为零矩阵,记作

$$O=(0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

零矩阵具有性质:

$$O+A=A+O=A$$

$$OA=AO=O$$

$$A+(-A)=O,\quad -A \text{ 称为} A \text{的负矩阵}$$

若 A,B 为非零矩阵,即 $A\neq O$, $B\neq O$, 而 $AB=O$, 则称矩阵 A 为矩阵 B 的左零因子,矩阵 B 为矩阵 A 的右零因子. 例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

[对角矩阵] 主对角线以外的元素都是零 ($d_{ij}=0,\ i\neq j$) 的方阵称为对角矩阵,记作

$$D=\begin{bmatrix}d_1 & & 0\\ & d_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{bmatrix}=\operatorname{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)=\lceil d_1\quad d_2\quad \cdots\quad d_n\rfloor$$

对角矩阵具有性质:

1° 左乘 B

$$DB=\begin{bmatrix}d_1 & & & 0\\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1b_{11} & d_1b_{12} & \cdots & d_1b_{1n}\\ d_2b_{21} & d_2b_{22} & \cdots & d_2b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ d_nb_{n1} & d_nb_{n2} & \cdots & d_nb_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=(d_ib_{ij})$$

2° 右乘 B

$$BD=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1 & & & 0\\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1b_{11} & d_2b_{12} & \cdots & d_nb_{1n}\\ d_1b_{21} & d_2b_{22} & \cdots & d_nb_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ d_1b_{n1} & d_2b_{n2} & \cdots & d_nb_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=(d_jb_{ij})$$

3° 两个对角矩阵的和、差、积仍为对角矩阵.

[数量矩阵] $d_i=d\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的对角矩阵称为数量矩阵,记作

$$D=\begin{bmatrix}d & & 0\\ & d & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d\end{bmatrix}=\lceil d\quad d\quad \cdots\quad d\rfloor$$

显然 $DB=BD=dB$.

[单位矩阵] $d=1$ 的数量矩阵称为单位矩阵，记作

$$I=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{bmatrix}=[1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1]$$

显然 $IB=BI=B$.

[对称矩阵] 满足条件

$$a_{ij}=a_{ji}\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

的方阵 $A=(a_{ij})$称为对称矩阵. 例如

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 1 & 6 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

是对称矩阵. 对称矩阵具有性质:

若 A,B 都是对称矩阵，则 $A^T=A$，且 A^{-1}(使 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ 的矩阵. 详见本节，六)，A^m(m 为正整数)，$A+B$ 仍是对称矩阵.

[实对称矩阵] 实对称矩阵按其特征值(本节，七)可分为正定矩阵，半正定矩阵、负定矩阵、半负定矩阵和不定矩阵，它们的定义与充分必要条件如下

名 称	定 义	充 分 必 要 条 件
正定矩阵	特征值都大于零的实对称矩阵	所有主子式都大于零，即 $A_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$
半正定矩阵	特征值都不小于零的实对称矩阵	$\det A=0$ $A_i\geqslant0\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$
负定矩阵	特征值都小于零的实对称矩阵	$A_i\begin{cases}<0 & (i\text{ 为奇数})\\ >0 & (i\text{ 为偶数})\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$
半负定矩阵	特征值都不大于零的实对称矩阵	$\det A=0$ $A_i\begin{cases}\leqslant0 & (i\text{为奇数})\\ \geqslant0 & (i\text{为偶数})\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$
不定矩阵	特征值既有大于零又有小于零的实对称矩阵	或有一个偶数阶主子式 $A_{2k}=0$，或有两个奇数阶主子式，其中一个为正另一个为负

[反对称矩阵] 满足条件

$$a_{ij}=\begin{cases}0 & (i=j)\\ -a_{ji} & (i\neq j)\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

的方阵 $A=(a_{ij})$ 称为反对称矩阵. 例如

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

是反对称矩阵. 反对称矩阵具有性质:

1° 若 A,B 都是反对称矩阵, 则 $A^{\tau}=-A$, 且 $A^{-1}, A+B$ 仍是反对称矩阵,

$$A^{m}\text{ 为}\begin{cases}\text{对称矩阵} & (m\text{为偶数})\\ \text{反对称矩阵} & (m\text{为奇数})\end{cases}$$

2° 任意方阵 A 都可分解为一个对称矩阵 $B=(b_{ij})$ 与一个反对称矩阵 $C=(c_{ij})$ 之和, 即

$$A=B+C$$

只需取

$$b_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}),\quad c_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})$$

$$(i,j=1,2,\cdots,n)$$

[埃尔米特矩阵] 满足条件

$$A^{\tau}=\bar{A}$$

的方阵 A 称为埃尔米特矩阵. 例如

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1-2i & 2+i\\ 1+2i & 1 & 3-2i\\ 2-i & 3+2i & 4\end{bmatrix},$$

是埃尔米特矩阵. 埃尔米特矩阵具有性质:

若 A,B 都是埃尔米特矩阵, 则 A^{-1}, $A+B$ 仍是埃尔米特矩阵. 若 A 又是实方阵(即 a_{ij} 全为实数), 则 A 就是对称矩阵.

[反埃尔米特矩阵] 满足条件

$$A^{\tau}=-\bar{A}$$

的方阵 A 称为反埃尔米特矩阵. 例如

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1+2i & -2-i\\ 1+2i & 0 & 5i\\ 2-i & 5i & 0\end{bmatrix}$$

是反埃尔米特矩阵．反埃尔米特矩阵具有性质：

若 A,B 都是反埃尔米特矩阵，则 A^{-1}，$A+B$ 仍是反埃尔米特矩阵．若 A 又是实方阵，则 A 就是反对称矩阵．

［正交矩阵］ 满足条件

$$A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$$

的方阵 A 称为正交矩阵，例如

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

是正交矩阵．正交矩阵具有性质：

若 $A=(a_{ij})$ 和 B 都是正交矩阵，则

1° A^{-1}, AB 仍是正交矩阵．

2° $\det A=\pm 1$．

3° $$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

［酉(U)矩阵］ 满足条件

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}=A^{-1}$$

的方阵 A 称为酉(U)矩阵．例如

$$A=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$$

是酉矩阵．酉矩阵具有性质：

若 $A=(a_{ij})$ 和 B 都是酉矩阵，则

1° A^{-1}, AB 仍是酉矩阵．

2° $\det A\cdot\det\bar{A}=1$．

3° 若 A 又是实方阵，则 A 是正交矩阵．

［带型矩阵］ 满足条件

$$a_{ij}=0 \qquad (|i-j|>m)$$

的方阵 $A=(a_{ij})$ 称为带型矩阵．$2m+1$ 称为带宽．一般形式为

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,m+1} & & 0\\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{n-m,n}\\ & \ddots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & a_{n,n-m} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

[三角形矩阵]　满足条件

$$a_{ij}=0 \quad (i>j)$$

的方阵 $A=(a_{ij})$ 称为上三角形矩阵，一般形式为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

满足条件

$$b_{ij}=0 \quad (i<j)$$

的方阵 $B=(b_{ij})$ 称为下三角形矩阵，一般形式为

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & & & 0 \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

三角形矩阵具有性质：

1°　任何方阵 C 都可表为一个上三角形矩阵 A 与一个下三角形矩阵 B 的乘积，即

$$C=AB$$

2°　上(或下)三角形矩阵的和、差、积及数乘仍是上(或下)三角形矩阵。

[分块矩阵]　用水平和垂直虚线将矩阵 A 中的元素的阵列分成小块（称为子阵），A 就成为分块矩阵．例如

$$A=\left[\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

式中

$$B_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{12}=\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$$B_{21}=[a_{31} \quad a_{32}], \quad B_{22}=[a_{33}]$$

它们都是 A 的子阵．

进行分块矩阵的运算时，可将子阵当作通常矩阵的元素看待．这些运算指加、减、乘法、数乘、转置与共轭等．

[分块对角矩阵]　主对角线上的子阵都是方阵，其余子阵都是零矩阵的分块矩阵称为分块对角矩阵．一般形式为

$$A=\left[\begin{array}{c:c:c:c} B_{11} & O & & O \\ \hdashline O & B_{22} & & \\ \hdashline & & \ddots & \\ \hdashline O & & & B_{kk} \end{array}\right].$$

分块对角矩阵A的逆矩阵A^{-1}和A的行列式可以用下面简单公式求出

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & & & O \\ & B_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_{kk}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\det A=\det B_{11}\cdot\det B_{22}\cdot\cdots\cdot\det B_{kk}$$

注意，一般分块矩阵的行列式不能用把子阵当作通常矩阵的元素的方法来计算，例如把四阶方阵化为分块矩阵

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

一般 $\det A=\det B_{11}\cdot\det B_{22}-\det B_{21}\cdot\det B_{12}$ 不成立(参见§1,二,3中的四阶行列式).

五、相似变换

[相似变换] 如果有一非奇异矩阵X(即$\det X\neq 0$)使得

$$B=X^{-1}AX$$

那末称矩阵A与矩阵B相似，也称A经相似变换化为B，记作$A\sim B$. 它具有下列性质:

1° $A\sim A$, $A^{\mathrm{T}}\sim A$.

2° 若$A\sim B$，则$B\sim A$.

3° 若$A\sim C$, $B\sim C$，则$A\sim B$.

4° $X^{-1}(A_1+A_2+\cdots+A_m)X=X^{-1}A_1X+X^{-1}A_2X+\cdots+X^{-1}A_mX$

5° $X^{-1}(A_1A_2\cdots A_m)X=X^{-1}A_1X\cdot X^{-1}A_2X\cdot\cdots\cdot X^{-1}A_mX$

6° $X^{-1}A^mX=(X^{-1}AX)^m$

7° 若$f(A)$为矩阵A的多项式，则

$$X^{-1}f(A)X=f(X^{-1}AX)$$

8° 若$A\sim B$，则

A与B的秩相同，即rank $A=$rank B.

A与B的行列式相同，即det $A=$det B.

A与B的迹(定义见本节，七)相同，即tr $A=$tr B.

A与B具有相同的特征多项式和特征值(本节，七)。

［正交变换］ 若Q为正交矩阵(即$Q^{-1}=Q^{\tau}$)，则称

$$Q^{\tau}AQ$$

为矩阵A的正交变换，其性质与相似变换类似．特别还有性质：

对称矩阵A经正交变换后仍是对称矩阵．

［旋转变换］ 取正交矩阵U为

$$U_{pq}=(u_{ij})=\begin{array}{l} \begin{matrix} & & & (p) & & (q) & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & \cdots & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & \cdots & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ (p) \\ \\ \\ \\ (q) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

即

$$u_{pp}=u_{qq}=\cos\theta$$
$$u_{pq}=-u_{qp}=\sin\theta$$
$$u_{ii}=1\quad(i\neq p,q)$$
$$u_{ij}=0\quad(i,j\neq p,q;i\neq j)$$

这时称

$$B=U_{pq}^{\tau}AU_{pq}$$

为A的旋转变换，θ称为旋转角，如果A是对称矩阵，那末B的元素b_{ij}与A的元素a_{ij}有如下对应关系：

$$\begin{cases} b_{pp}=a_{pp}\cos^2\theta-2a_{pq}\sin\theta\cos\theta+a_{qq}\sin^2\theta \\ b_{qq}=a_{pp}\sin^2\theta+2a_{pq}\sin\theta\cos\theta+a_{qq}\cos^2\theta \\ b_{pq}=b_{qp}=(a_{pp}-a_{qq})\sin\theta\cos\theta+a_{pq}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\ b_{pj}=a_{pj}\cos\theta-a_{qj}\sin\theta & (j\neq p,q) \\ b_{qj}=a_{pj}\sin\theta+a_{qj}\cos\theta & (j\neq p,q) \\ b_{ij}=a_{ij} & (\text{其他元素}) \end{cases}$$

同时有性质:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2\leqslant\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2$$

若取旋转角

$$\theta=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,ctg}\frac{a_{qq}-a_{pp}}{2a_{pq}}$$

则旋转变换使

$$b_{pq}=b_{qp}=0$$

六、逆矩阵

[逆矩阵及其性质] 若方阵 A,B 满足等式

$$AB=BA=I \quad (I \text{ 为单位矩阵})$$

则称 A 为 B 的逆矩阵，或称 B 为 A 的逆矩阵，记作

$$A=B^{-1} \quad \text{或} \quad B=A^{-1}$$

这时 A,B 都称为可逆矩阵(或非奇异矩阵，或满秩矩阵)。否则称为不可逆矩阵(或奇异矩阵，或降秩矩阵)。

可逆矩阵具有性质:

1° 若 A,B 为可逆矩阵，则 AB 仍为可逆矩阵，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \quad (\text{反序定律})$$

一般地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 为可逆矩阵，则

$$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

2° 矩阵 A 可逆的充分必要条件是: $\det A\neq 0$。

3° 若矩阵 A 可逆，则

$$\det A^{-1}\neq 0 \quad \text{且} \quad \det A^{-1}=(\det A)^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1}=A,\qquad (aA)^{-1}=a^{-1}A^{-1}\quad (a\neq 0)$$

$$(A^{\tau})^{-1}=(A^{-1})^{\tau},\qquad (\bar{A})^{-1}=(\overline{A^{-1}})$$

4° 矩阵A可逆的充分必要条件是：矩阵A的特征值全不为零.

[伴随矩阵与逆矩阵表达式] 设A_{ij}为矩阵$A=(a_{ij})$的第i行第j列元素a_{ij}的代数余子式，则矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵A的伴随矩阵.

若A为非奇异矩阵，即$\det A\neq 0$，则A的逆矩阵表达式为

$$A^{-1}=\frac{A^*}{\det A}$$

注意，A^*的第i行第j列元素是A的第j行第i列元素的代数余子式.

[对角矩阵的逆矩阵] 对角矩阵

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix},\quad d_i\neq 0\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

的逆矩阵为

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} d_1^{-1} & & & 0 \\ & d_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n^{-1} \end{bmatrix}$$

显然对角矩阵的逆矩阵仍是对角矩阵.

[三角形矩阵的逆矩阵] 三角形矩阵

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix},\quad \begin{matrix} l_{ii}\neq 0 & (i=1,2,\cdots,n) \\ l_{ij}=0 & (j>i) \end{matrix}$$

的逆矩阵为

$$L^{-1}=P=\begin{bmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

式中

$$p_{ii}=\frac{1}{l_{ii}} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$p_{ij}=-\frac{1}{l_{ii}}\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik}p_{kj} \qquad \begin{pmatrix} j=1,2,\cdots,n-1 \\ i=j+1,\cdots,n \end{pmatrix}$$

$$p_{ij}=0 \quad (j>i)$$

显然非奇异下(上)三角形矩阵的逆矩阵仍是下(上)三角形矩阵.

[正定矩阵的逆矩阵]

1° 高斯-若当法

正定矩阵 $A=(a_{ij})$ 的逆 $A^{-1}=(b_{ij})$ 可由下列递推公式求出:

$$a_{nn}^{(k)}=\frac{1}{a_{11}^{(k-1)}}, \qquad a_{n,j-1}^{(k)}=\frac{-a_{1j}^{(k-1)}}{a_{11}^{(k-1)}}, \qquad a_{i-1,n}^{(k)}=\frac{a_{i1}^{(k-1)}}{a_{11}^{(k-1)}}$$

$$a_{i-1,j-1}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-\frac{a_{i1}^{(k-1)}a_{1j}^{(k-1)}}{a_{11}^{(k-1)}} \qquad (i,j=n,n-1,\cdots,2)$$

$$(k=1,2,\cdots,n)$$

$$a_{ij}^{(0)}=a_{ij}$$

最后得到

$$b_{ij}=a_{ij}^{(n)}$$

式中 n 为该正定矩阵 A 的阶.

例 1 求正定矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

解 按上述步骤可解出:

$$a_{33}^{(1)}=\frac{1}{3}, \quad a_{32}^{(1)}=-\frac{1}{3}, \quad a_{31}^{(1)}=-\frac{0}{3}=0, \quad a_{23}^{(1)}=\frac{1}{3},$$

$$a_{13}^{(1)}=\frac{0}{3}=0, \quad a_{22}^{(1)}=4-\frac{1\times 1}{3}=\frac{11}{3}, \quad a_{21}^{(1)}=2-\frac{1\times 0}{3}=2,$$

$$a_{12}^{(1)}=2-\frac{0\times 1}{3}=2, \quad a_{11}^{(1)}=2-\frac{0\times 0}{3}=2$$

$$(a_{ij}^{(1)})=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

类似可求得

$$(a_{ij}^{(2)})=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=(a_{ij}^{(3)})=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{11}{10} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

2° 三角阵法　其步骤如下：

(1) 把正定矩阵 $A=(a_{ij})$表示为

$$A=\Lambda D\Lambda^{T}$$

式中D为实的非奇异对角矩阵

$$D=\begin{bmatrix}d_1 & & & 0\\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{bmatrix}$$

Λ为实的非奇异下三角形矩阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & & & 0\\ \lambda_{21} & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{n,n-1} & 1\end{bmatrix}$$

Λ^{T}是Λ的转置矩阵. $d_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 与 $\lambda_{ij}\ (i=2,\cdots,n;\ j=1,\cdots,n)$ 由下面递推公式算出：

$$\lambda_{ij}=0 \qquad (j>i)$$

$$\lambda_{ii}=1 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$x_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}x_{ik}\lambda_{jk} \qquad (i=2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,i-1)$$

$$\lambda_{ij}=\frac{x_{ij}}{d_j} \qquad (i=2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,i-1)$$

$$d_i=a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}x_{ik}\lambda_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

(2) 求出D的逆矩阵

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{d_1} & & & \\ & \frac{1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{d_n}\end{bmatrix}$$

(3) 求出Λ的逆矩阵

$$\Lambda^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ \rho_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{cases}\rho_{ij}=-\sum_{k=j}^{i-1}\lambda_{ik}\rho_{kj} & (j=1,2,\cdots,n-1;\ i=j+1,j+2,\cdots,n)\\ \rho_{ii}=1 & (i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

(4) 求出A的逆矩阵

$$A^{-1}=(\Lambda D\Lambda^{T})^{-1}=(\Lambda^{-1})^{T}D^{-1}\Lambda^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{n1}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn}\end{bmatrix}$$

式中

$$\beta_{ij}=\sum_{k=i}^{n}\frac{\rho_{ki}\rho_{kj}}{d_k}\qquad(j=1,2,\cdots,i;\ i=1,2,\cdots,n)$$

注意，这种方法的好处是避免了求平方根的运算。

例 2　求正定矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1}.

解　按上述递推公式计算得到:

$$x_{21}=1,\quad d_1=2,\quad \lambda_{21}=\frac{1}{2}$$

$$x_{31}=1,\quad \lambda_{31}=\frac{1}{2},\quad d_2=2-1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$x_{32}=-1-1\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2},\quad \lambda_{32}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=-1$$

$$d_3=3-\left[1\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)(-1)\right]=1$$

$$\rho_{11}=\rho_{22}=\rho_{33}=1$$

$$\rho_{21}=-\left(\frac{1}{2}\right)\times 1=-\frac{1}{2}$$

$$\rho_{31}=-\left[\frac{1}{2}\times 1+(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=-1$$

$$\rho_{32}=-(-1)\times 1=1$$

$$\beta_{11}=\frac{1\times 1}{2}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}}+\frac{(-1)(-1)}{1}=\frac{5}{3}$$

$$\beta_{22}=\frac{1\times 1}{\frac{3}{2}}+\frac{1\times 1}{1}=\frac{5}{3},\quad \beta_{33}=\frac{1\times 1}{1}=1$$

$$\beta_{21}=\frac{1\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}}+\frac{1\times(-1)}{1}=-\frac{4}{3},\qquad \beta_{31}=\frac{1\times(-1)}{1}=-1$$

$$\beta_{32}=\frac{1\times 1}{1}=1$$

所以

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -1\\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

[分块矩阵的逆矩阵]　设非奇异矩阵 A 的分块矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$$

式中 B_{11}, B_{22} 为方子阵，那末A的逆矩阵

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}$$

由下面公式求出

$$C_{22}=(B_{22}-B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1}$$

$$C_{12}=-B_{11}^{-1}B_{12}C_{22}$$

$$C_{21}=-C_{22}B_{21}B_{11}^{-1}$$

$$C_{11}=B_{11}^{-1}-C_{12}B_{21}B_{11}^{-1}$$

［初等变换法求逆矩阵］ 设

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}=B$$

对矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right]$$

作一系列行的初等变换，使虚线左边一块矩阵化为单位矩阵，而右边一块单位矩阵就变为A的逆矩阵 $B=A^{-1}$，即

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{array}\right]$$

例 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

解 用初等变换逐步得到：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\2&1&3&0&1&0\\0&3&4&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{\text{第 1 行乘}(-2)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&3&4&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行乘}(-1)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-1&2&-1&0\\0&3&4&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\text{第 2 行乘}(-3)\text{加到第 3 行}]{\text{第 2 行乘}(-1)\text{加到第 1 行}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&-1&1&0\\0&1&-1&2&-1&0\\0&0&7&-6&3&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行乘}\frac{1}{7}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&-1&1&0\\0&1&-1&2&-1&0\\0&0&1&-\frac{6}{7}&\frac{3}{7}&\frac{1}{7}\end{array}\right]\xrightarrow[\text{第 3 行加到第 2 行}]{\text{第 3 行乘}(-2)\text{加到第 1 行}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{7}&\frac{1}{7}&-\frac{2}{7}\\0&1&0&\frac{8}{7}&-\frac{4}{7}&\frac{1}{7}\\0&0&1&-\frac{6}{7}&\frac{3}{7}&\frac{1}{7}\end{array}\right]$$

所以

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{7}&\frac{1}{7}&-\frac{2}{7}\\\frac{8}{7}&-\frac{4}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{6}{7}&\frac{3}{7}&\frac{1}{7}\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}5&1&-2\\8&-4&1\\-6&3&1\end{bmatrix}$$

[逆矩阵的近似求法] 设 A_0^{-1} 为矩阵 A 的初始近似逆矩阵，可由下列迭代公式求出更精确的逆矩阵:

$$A_{n+1}^{-1}=A_n^{-1}(2I-AA_n^{-1})\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

式中 I 为与 A 同阶的单位矩阵。

[计算机求逆程序的检验矩阵] 用下列 n 阶非奇异矩阵及其逆矩阵，来检验大矩阵求逆的计算机程序。

$$A=\begin{bmatrix}\frac{n+2}{2n+2}&-\frac{1}{2}&0&0&\cdots&0&\frac{1}{2n+2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&0&\cdots&0&0\\0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2n+2}&0&\cdots&\cdots&\cdots&-\frac{1}{2}&\frac{n+2}{2n+2}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & 4 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{bmatrix}$$

七、特征值与特征矢量

〔特征值与特征矢量〕 对 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

和 n 维非零列矢量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

如果有一个数 λ，使得

$$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值(特征根)，$\boldsymbol{\alpha}$ 为矩阵 A 的特征值 λ 所对应的特征矢量.

矩阵 A 的所有特征值中绝对值最大的一个称为 A 的第一特征值.

〔特征矩阵·特征多项式·特征方程〕 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的特征矩阵定义为

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

式中 I 为 n 阶单位矩阵. 行列式 $|A-\lambda I|$ 称为矩阵 A 的特征多项式，记作

$$\varphi(\lambda)=|A-\lambda I|$$

方程

$$\varphi(\lambda)=0$$

称为矩阵A的特征方程.

[矩阵的迹与谱] n阶方阵A的主对角线上各元素之和称为A的迹，记作

$$\mathrm{tr}\,A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

特征方程 $\varphi(\lambda)=0$ 的n个根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是矩阵A的n个特征值. 集合$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$称为矩阵$A$的谱，记作 $\mathrm{ch}A$.

线性齐次方程组

$$(A-\lambda_i I)\,\alpha=0$$

的非零解α便是矩阵A的特征值 λ_i 所对应的特征矢量.

[特征值与特征矢量的性质]

1° 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为n阶方阵A的n个特征值，则

A^k的特征值为 $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k$($k$为正整数).

A的逆矩阵 A^{-1} 的特征值为 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$.

A的伴随矩阵 A^*的特征值为 $\lambda_1^{-1}|A|,\lambda_2^{-1}|A|,\cdots,\lambda_n^{-1}|A|$.

2° n阶方阵A的n个特征值之和等于A的迹，矩阵A的n个特征值之积等于A的行列式，即

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$$

由此可以推出矩阵可逆的另一充分必要条件是：A的所有特征值都不为零.

3° 若 λ_i 是特征方程的k重根，则对应于 λ_i 的线性无关的特征矢量的个数不大于k. 当 λ_i 为单根时，对应于 λ_i 的线性无关特征矢量只有一个.

4° 矩阵A的不同特征值所对应的特征矢量线性无关.

若n阶方阵A对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_s$的线性无关的特征矢量分别有 k_1, $k_2,\cdots,k_s$ 个，则这$\sum_{i=1}^{s}k_i$个特征矢量线性无关，且$\sum_{i=1}^{s}k_i\leqslant n$.

5° 实对称矩阵的特征值都是实数，并且有n个线性无关(而且是正交)的特征矢量.

6° 矩阵的特征值在相似变换下保持不变. 特别，A^T与A具有相同的特征值.

[求第一特征值的迭代法] 在实际问题中，往往不要求算出矩阵A的全部特征值，只需算出第一特征值，用迭代法计算如下：

$$\begin{cases} A\alpha^{(k)}=\lambda_1^{(k+1)}\alpha^{(k+1)} & (k=0,1,2,\cdots) \\ \alpha^{(0)}=b \end{cases}$$

假定当$|\alpha^{(m)}-\alpha^{(m+1)}|<\varepsilon$时，可以认为$\alpha^{(k)}\approx\alpha^{(m+1)}$，那末迭代到$k=m$即可。这时$\lambda_1^{(m+1)}$为矩阵$A$的第一特征值的近似值，$\alpha^{(m+1)}$为对应的特征矢量。

[求实对称矩阵特征值的雅可比法] 设n阶实对称矩阵$A=(a_{ij})$的特征值是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则必存在一正交矩阵$Q$，使得

$$Q^{\tau}AQ=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

为对角矩阵. 正交矩阵Q可用一系列旋转矩阵的积来逼近:

$$Q=\prod U_{pq}$$

式中

$$U_{pq}=(u_{ij})=\begin{array}{c} \begin{matrix} & & & (p) & & (q) & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & \cdots & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & \vdots & & 1 & & & \\ & & & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & \cdots & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{matrix} \\ \\ \\ (p) \\ \\ \\ \\ (q) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

取

$$\theta=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,ctg}\frac{a_{qq}-a_{pp}}{2a_{pq}}$$

因为在这种旋转变换下，消去了矩阵中位于第p行第q列$(p\neq q)$交点上的元素(见本节，五)，而矩阵所有元素的平方和保持不变，并且对角线上的元素的平方和增大，因而非对角线元素的平方和随之减小. 因此，当旋转次数足够大时，可使非对角线元素的绝对值足够小. 对于预先给定的精度$\varepsilon>0$，如果$|a_{ij}|<\varepsilon$

$(i\neq j)$，则可认为 $a_{ij}\approx 0$. 于是得到求矩阵 A 的特征值与特征矢量的具体迭代方法.

1° 按以下递推公式求特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$:

$$\begin{cases} \zeta_k=\operatorname{ctg} 2\theta=\dfrac{a_{qq}^{(k)}-a_{pp}^{(k)}}{2a_{pq}^{(k)}} \\ t_k=\operatorname{tg}\theta=\begin{cases}(\zeta_k+\sqrt{1+\zeta_k^2})^{-1} & (\zeta_k\geqslant 0)\\ -(|\zeta_k|+\sqrt{1+\zeta_k^2})^{-1} & (\zeta_k<0)\end{cases} \\ v_k=\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+t_k^2}-1}{t_k} & (t_k>0)\\ \dfrac{1-\sqrt{1+t_k^2}}{|t_k|} & (t_k<0)\end{cases} \\ s_k=\sin\theta=\dfrac{t_k}{\sqrt{1+t_k^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{pp}^{(k+1)}=a_{pp}^{(k)}-t_k a_{pq}^{(k)} \\ a_{qq}^{(k+1)}=a_{qq}^{(k)}+t_k a_{pq}^{(k)} \\ a_{pj}^{(k+1)}=a_{pj}^{(k)}-s_k(a_{qj}^{(k)}+v_k a_{pj}^{(k)}) & (j\neq p) \\ a_{qj}^{(k+1)}=a_{qj}^{(k)}+s_k(a_{pj}^{(k)}-v_k a_{qj}^{(k)}) & (j\neq q) \\ a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)} & (i\neq p,q,\ j\neq p,q) \\ a_{ij}^{(1)}=a_{ij} & (i,j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

$$(k=1,2,\cdots)$$

假定当 $|a_{ij}^{(m)}|<\varepsilon(i\neq j)$时，可以认为 $a_{ij}^{(m)}\approx 0$，则迭代到 $k=m-1$ 即可. 而取 $a_{ii}^{(m)}$ 作为 λ_i 的近似值:

$$\lambda_i\approx a_{ii}^{(m)}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

2° 求特征矢量 从 1° 有

$$U_m^{\tau}U_{m-1}^{\tau}\cdots U_1^{\tau}AU_1\cdots U_{m-1}U_m=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

记

$$P_m=U_1\cdots U_{m-1}U_m$$

则

$$AP_m = P_m \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

所以 P_m 为特征矢量矩阵.

P_m 由下列递推公式算出:

$$\begin{cases} u_{ip}^{(k+1)} = u_{ip}^{(k)} - s_k(u_{iq}^{(k)} + v_k u_{ip}^{(k)}) \\ u_{iq}^{(k+1)} = u_{iq}^{(k)} + s_k(u_{ip}^{(k)} - v_k u_{iq}^{(k)}) \\ u_{ij}^{(k+1)} = u_{ij}^{(k)} \qquad (j \neq p, q) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ u_{ij}^{(1)} = u_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$
$$(k = 1, 2, \cdots, m-1)$$

最后得到 $$P_m = (u_{ij}^{(m)})$$

即 $$u_i^{(m)} = (u_{1i}^{(m)}, u_{2i}^{(m)}, \cdots, u_{ni}^{(m)})^T$$

为对应于特征值 λ_i 的特征矢量的近似值.

[求对称三对角矩阵特征值的方法]

1° 相似变换法 设 A 为 n 阶对称三对角矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & & & 0 \\ e_1 & d_2 & e_2 & & \\ & e_2 & d_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & e_{n-1} \\ 0 & & & e_{n-1} & d_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

经过相似变换

$$A_{k+1} = U_1^T U_2^T \cdots U_{n-1}^T (A_k - t_k I) U_{n-1} \cdots U_2 U_1$$

式中 I 为单位矩阵, t_k 为适当选定的常数, U_i 为雅可比旋转矩阵:

$$U_i = \overset{\begin{matrix} (i) & (i+1) \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c_i & s_i & & \\ & & & -s_i & c_i & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}} \begin{matrix} \\ \\ \\ (i) \\ (i+1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

U_i^T 为 U_i 的转置矩阵．又 $A_1=A$，A_{k+1} 与 A_k-t_kI 相似，且 A_m 与 $A_1-\sum_{j=1}^{m-1}t_jI$ 相似．因此，若 A_m 的特征值为 $\lambda_i^{(m)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 A_1 的特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 为

$$\lambda_i=\lambda_i^{(m)}+\sum_{j=1}^{m-1}t_j\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

假定当 $e_i^{(m)}<\varepsilon(i=1,2,\cdots,n)$ 时，可认为 $e_i^{(m)}\approx 0$，那末可适当选择 s_i,c_i，使得当 m 充分大时，A_m 在该精度下化为对角线矩阵，其特征值 $\lambda_i^{(m)}\approx d_i^{(m)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$．

$d_i^{(m)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 可由下列递推公式算出：

$$q_n^{(k)}=d_n^{(k)}-t_k,\qquad c_n^{(k)}=1,\qquad s_n^{(k)}=0$$

$$r_{i+1}^{(k)}=[(q_{i+1}^{(k)})^2+(e_i^{(k)})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$g_{i+1}^{(k)}=c_{i+1}^{(k)}e_i^{(k)}$$

$$h_{i+1}^{(k)}=c_{i+1}^{(k)}q_{i+1}^{(k)}$$

$$c_i^{(k)}=q_{i+1}^{(k)}/r_{i+1}^{(k)}$$

$$s_i^{(k)}=e_i^{(k)}/r_{i+1}^{(k)}$$

$$q_i^{(k)}=c_i^{(k)}(d_i^{(k)}-t_k)-s_i^{(k)}g_{i+1}^{(k)}$$

$$\begin{cases}d_{i+1}^{(k+1)}=h_{i+1}^{(k)}+s_i^{(k)}[c_i^{(k)}g_{i+1}^{(k)}+s_i^{(k)}(d_i^{(k)}-t_k)]\\ e_{i+1}^{(k+1)}=s_{i+1}^{(k)}r_{i+1}^{(k)}\\ d_1^{(k+1)}=c_1^{(k)}q_1^{(k)},\quad e_1^{(k+1)}=s_1^{(k)}q_1^{(k)}\end{cases}$$

$$(i=n-1,n-2,\cdots,2,1;\ k=1,2,\cdots,m-1)$$

t_k 的选择对收敛速度影响较大，取 t_k 为二阶矩阵

$$\begin{bmatrix}d_1^{(k)} & e_1^{(k)}\\ e_1^{(k)} & d_2^{(k)}\end{bmatrix}$$

的接近于 $d_1^{(k)}$ 的那个特征值，即

$$t_k=\begin{cases}d_1^{(k)}-e_1^{(k)}/(\beta-\sqrt{1+\beta^2})\qquad(\beta<0)\\ d_1^{(k)}-e_1^{(k)}/(\beta+\sqrt{1+\beta^2})\qquad(\beta\geqslant 0)\end{cases}$$

式中
$$\beta=\frac{d_2^{(k)}-d_1^{(k)}}{2e_1^{(k)}}$$

2°　二分法　设 A 为 n 阶对称三对角矩阵（如(1)式），对任意 λ，设序列

$$q_1(\lambda)=d_1-\lambda$$

$$q_i(\lambda)=(d_i-\lambda)-\frac{e_{i-1}^2}{q_{i-1}(\lambda)} \qquad (i=2,\cdots,n)$$

中 $q_i(\lambda)<0$ 的个数为 $N(\lambda)$（在这些关系式中，对于某些 i，如果 $q_{i-1}(\lambda)=0$，则只需用适当小的数代替即可），则 $N(\lambda)$ 等于矩阵 A 的小于 λ 的特征值的个数.

假定矩阵 A 的第 k 个特征值 $\lambda_k(\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n)$ 在区间 $[u,v]$ 中，令 $r_1=\frac{u+v}{2}$，当 $N(r_1)\geqslant k$ 时，则 $\lambda_k\in[u,r_1]$；当 $N(r_1)<k$ 时，则 $\lambda_k\in[r_1,v]$；…依此类推，m 步之后，λ_k 包含在宽度为 $\frac{v-u}{2^m}$ 的区间中. m 充分大时，便可得到所求的特征值.

八、矩阵多项式与最小多项式

［矩阵多项式］ 设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为某一数域（实数域或复数域）中的数，A 为这个数域上的 n 阶方阵，则表示式

$$f(A)=a_0I+a_1A+\cdots+a_nA^n$$

称为矩阵 A 的多项式，式中 I 为 n 阶单位矩阵.

如果矩阵 A 使得

$$f(A)=O$$

那末称 A 为多项式

$$f(\lambda)=a_0\lambda+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$$

的根.

［哈密顿-凯莱定理］ 任一方阵都是它的特征多项式的根.

［最小多项式及其性质］ 以矩阵 A 为根的非零多项式 $f(\lambda)$ 中，存在首项系数为 1 次数最低的多项式 $\varphi(\lambda)$，它就称为矩阵 A 的最小多项式.

最小多项式具有性质：

1° 任一方阵仅有一个最小多项式；

2° 任一以 A 为根的多项式 $f(\lambda)$ 都可被 A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$ 所整除. 特别，任一方阵的最小多项式可整除其特征多项式；

3° 方阵 A 的特征多项式的根都是 A 的最小多项式的根；

4° 相似矩阵具有相同的特征多项式和最小多项式.

§3 线性方程组

一、含 n 个未知量 n 个方程的线性方程组解法

[齐次和非齐次线性方程组] 含 n 个未知量 n 个方程的线性方程组取如下形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

当常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时,(1)称为非齐次线性方程组; 当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时,(1)称为齐次线性方程组.

如果记

$$A=(a_{ij})=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (\text{系数矩阵})$$

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\tau$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^\tau \qquad (\text{常数项矢量})$$

式中 τ 表示转置,那末线性方程组(1)可写成矩阵形式

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{2}$$

[逆矩阵法] 当 $|A|\neq0$ 时,线性方程组(2)的解为

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

式中 A^{-1} 是系数矩阵 A 的逆矩阵,$\boldsymbol{x}$ 称为(2)的解矢量.

[克莱姆法则] 若 $|A|\neq0$,则方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{|A|},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{|A|},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{\Delta_n}{|A|}$$

式中

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \cdots,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & b_n\end{vmatrix}$$

这里 $\Delta_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是以常数项矢量 b 替换 A 中第 j 列矢量后得到的 n 阶行列式．特别

1° 二阶线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

的解为

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

式中

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$$

2° 三阶线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

的解为

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

式中

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix},\qquad \Delta_z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$$

[有回代过程的主元素消去法(高斯消去法)] 对于 n 阶线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=a_{i,n+1}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

可用矩阵表成

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

消元步骤:

(1) 在系数矩阵中找出绝对值最大的元素(这元素称为主元素), 不妨设a_{11}(第1行第1列元素)为主元素,(不然, 如果a_{ij}为主元素, 可先将第i个方程与第1个方程互换位置, 再把未知数x_1和x_j的次序调换, 那末得到新的系数矩阵, 其主元素必在第1行第1列上). 将第1个方程乘以$-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, 分别与第i个方程相加$(i=2,3,\cdots,n)$, 得到新的n阶线性方程组, 用矩阵表示如下

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \boxed{b_{22}} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ b_{2,n+1} \\ b_{3,n+1} \\ \vdots \\ b_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

(2) 在除第1行外的系数矩阵中找出主元素, 不妨设b_{22}为主元素. 再将第二个方程乘以$-\frac{b_{i2}}{b_{22}}$分别与第i个方程相加$(i=3,4,\cdots,n)$, 得到新的n阶线性方程组, 用矩阵表示如下

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \boxed{b_{22}} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \boxed{c_{33}} & \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ b_{2,n+1} \\ c_{3,n+1} \\ \vdots \\ c_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

(3) 按照(1),(2)的方法进行$n-2$次以后, 在除第1至$n-2$行外的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} \boxed{e_{n-1,n-1}} & e_{n-1,n} \\ e_{n,n-1} & e_{nn} \end{bmatrix}$$

中找出主元素，不妨设 $e_{n-1,n-1}$ 为主元素。将第 $n-1$ 个方程乘以 $-\frac{e_{n,n-1}}{e_{n-1,n-1}}$ 与第 n 个方程相加，得到新的 n 阶线性方程组，用矩阵表示如下

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & \boxed{b_{22}} & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & \boxed{c_{33}} & \cdots & c_{3,n-1} & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{e_{n-1,n-1}} & e_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ b_{2,n+1} \\ c_{3,n+1} \\ \vdots \\ e_{n-1,n+1} \\ m_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

这样做完 $n-1$ 次之后，消元过程结束．原来系数矩阵已经化成上三角形矩阵（这时未知数的次序已做了若干次调换）．

回代步骤：

由第 n 个方程解出

$$x_n = \frac{m_{n,n+1}}{m_{nn}}$$

将 x_n 代入第 $n-1$ 个方程，解出 x_{n-1}，再将 x_{n-1}, x_n 代入第 $n-2$ 个方程解出 x_{n-2}，…，最后将已解出的 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 代入第一个方程解出 x_1．

注意，这里每当找出主元素后，都经过行与行互换和未知数次序调换等手续，也可以把调换未知数次序的步骤放到第 $n-1$ 步之后一起去做，同样可以得到三角形的系数矩阵．

例 1 用主元素消去法解方程组

$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ -23x_1 + 11x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

解 方程组用矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 & -2 \\ -23 & 11 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解的步骤如下：

(1) 第 2 行第 1 列的元素 -23 是主元素，用口框起来，并用矩阵形式表示成

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 & -2 & 3 \\ \boxed{-23} & 11 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

把矩阵第2行乘以$\frac{11}{23}$加到第1行上，把第2行乘以$\frac{1}{23}$加到第3行上，得到矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{\frac{52}{23}} & -\frac{35}{23} & 3 \\ \boxed{-23} & 11 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{35}{23} & \frac{47}{23} & -1 \end{bmatrix}$$

在除第2行外的系数矩阵中找到第二个主元素在第1行第2列上为$\frac{52}{23}$.

(2) 把第1行乘以$\frac{35}{52}$加到第3行上，得到矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{\frac{52}{23}} & -\frac{35}{23} & 3 \\ \boxed{-23} & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{53}{52} & \frac{53}{52} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第2行互换}]{\text{第1行与}} \begin{bmatrix} \boxed{-23} & 11 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{52}{23}} & -\frac{35}{23} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{53}{52} & \frac{53}{52} \end{bmatrix}$$

(3) 由第三个方程解出$x_3=1$，将x_3代入第二个方程，解出$x_2=2$，将x_2,x_3代入第一个方程，解出$x_1=1$.

于是方程组的解为(1, 2, 1).

[无回代过程的主元素消去法]　这种方法与上法基本一样，不同之处在于每次消元时，都用某一方程去消去其余所有$n-1$个方程的未知数．例如上面方法的消元步骤(2)中，改成将第二个方程乘以$-\frac{b_{i2}}{b_{22}}$分别与第i个方程相加，$i=1,3,4,\cdots,n$(共$n-1$个，与上面方法不同的是，这里包括$i=1$，并设$a_{12}=b_{12}$)，得到新的系数矩阵是

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & 0 & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \boxed{b_{22}} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

而最后得到对角系数矩阵是：

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{b_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{c_{33}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

因此不需经过回代过程，即可直接解出各个未知数来。

无回代过程的主元素消去法运算量比有回代过程的大，但在电子计算机上编制程序较为简单。

为了减少运算量，便于编制程序，第一步可在系数矩阵的第1列找出绝对值最大的元素为列主元素，消元后，第二步从系数矩阵的第2列找出列主元素进行消元，等等．这种消元法称为列主元素消去法，它也可达到较好的精确度．

［简单迭代法］ 一般步骤：

(1) 将线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

改写成

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + d_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(2) 任意选取一组初始近似值 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$，作为方程的第0次近似解．

(3) 依次使 $k=1,2,3,\cdots$，用公式

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j^{(k-1)} + d_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

求出方程的第 k 次近似解，直至满足

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$$

为止，式中 $\varepsilon>0$ 为预先给定的允许误差．于是第 k 次近似解 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}$ 在允许误差 ε 的范围内满足方程组．注意这里的允许误差不是指近似解与精确解之间的最大绝对误差．

例 2　用简单迭代法求方程组

$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ -23x_1 + 11x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

的解，其允许误差 $\varepsilon = 0.002$.

解　根据例 1 可化为方程组

$$\begin{cases} -23x_1 + 11x_2 + x_3 = 0 & (1') \\ \frac{52}{23}x_2 - \frac{35}{23}x_3 = 3 & (2') \\ -\frac{35}{23}x_2 + \frac{47}{23}x_3 = -1 & (3') \end{cases}$$

分别由(1′)，(2′)，(3′)，可得迭代方程(满足收敛条件)

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 0.7700x_1^{(k-1)} + 0.1100x_2^{(k-1)} + 0.0100x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = \qquad 0.6731x_3^{(k-1)} + 1.3269 \\ x_3^{(k)} = \qquad 0.7447x_2^{(k-1)} \qquad -0.4894 \end{cases}$$

选取初始值 $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$，逐次迭代得出一系列近似解:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1	1	1	10	0.9581	1.9634	1.0000
1	0.8900	2.0000	0.2553	11	0.9643	2.0000	0.9764
2	0.9079	1.4987	1.0000	12	0.9723	1.9841	1.0000
3	0.8739	2.0000	0.6267	13	0.9769	2.0000	0.9882
4	0.8992	1.7487	1.0000	14	0.9821	1.9920	1.0000
5	0.8947	2.0000	0.8129	15	0.9853	2.0000	0.9941
6	0.9171	1.8741	1.0000	16	0.9887	1.9960	1.0000
7	0.9223	2.0000	0.9062	17	0.9908	2.0000	0.9970
8	0.9392	1.9369	1.0000	18	0.9929	1.9980	1.0000
9	0.9463	2.0000	0.9530	19	0.9943	2.0000	0.9985

迭代 19 次后得到 $x_1^{(19)} = 0.9943$, $x_2^{(19)} = 2.0000$, $x_3^{(19)} = 0.9985$ 在允许误差 $\varepsilon = 0.002$ 范围内满足方程组.

［赛得尔迭代法］　把简单迭代法的步骤(3)中的迭代公式改成

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(k-1)} + d_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

其他步骤同简单迭代法.

在一般情况下，赛得尔迭代法比简单迭代法收敛得快些.

例 3 用赛得尔迭代法求例 2 中方程组的解.

解 选取初始值 $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=1$，并代入方程(1′)计算出

$$x_1^{(1)}=0.8900$$

再将 $x_1^{(1)}=0.8900, x_2^{(0)}=1, x_3^{(0)}=1$ 代入方程(2′)计算出

$$x_2^{(1)}=2.0000$$

再将 $x_1^{(1)}=0.8900, x_2^{(1)}=2.0000, x_3^{(0)}=1$，代入方程(3′)计算出

$$x_3^{(1)}=1.0000$$

再将 $x_1^{(1)}=0.8900$, $x_2^{(1)}=2.0000, x_3^{(1)}=1.0000$，按赛得尔迭代法继续迭代可以发现，$x_2^{(k)}=2.0000, x_3^{(k)}=1.0000, k=1,2,\cdots$，因此只需考虑方程(1′)，

$$x_1^{(k)}=0.7700x_1^{(k-1)}+0.1100\times2+0.0100\times1$$

即解方程 $$x_1=0.7700x_1+0.2300$$

得出 $x_1=1.0000$，因此方程组的解为

$$x_1=1.0000,\quad x_2=2.0000,\quad x_3=1.0000$$

[迭代法的收敛条件与误差估计]

方法	收敛条件	第 k 次近似解 $x_i^{(k)}$ 的最大误差
简单迭代法	$\mu=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\lvert c_{ij}\rvert<1$	$\max\limits_{1\le i\le n}\lvert x_i^{(k)}-x_i^*\rvert\le\frac{\mu^k}{1-\mu}\max\limits_{1\le i\le n}\lvert x_i^{(1)}-x_i^{(0)}\rvert$
	$\nu=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert c_{ij}\rvert<1$	$\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i^{(k)}-x_i^*\rvert\le\frac{\nu^k}{1-\nu}\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i^{(1)}-x_i^{(0)}\rvert$
	$p=\sum\limits_{i,j=1}^{n}c_{ij}^2<1$	$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-x_i^*)^2}\le\frac{p^{k/2}}{1-p^{1/2}}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^{(1)}-x_i^{(0)})^2}$
赛得尔迭代法	$\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\lvert c_{ij}\rvert<1$ 或 $\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert c_{ij}\rvert<1$	$\max\limits_{i}\lvert x_i^{(k)}-x_i^*\rvert\le\frac{\mu^k}{1-\mu}\max\limits_{1\le i\le n}\lvert x_i^{(1)}-x_i^{(0)}\rvert$ 其中 $\mu=\max\limits_{1\le i\le n}\left\{\frac{\sum\limits_{j=i}^{n}\lvert c_{ij}\rvert}{1-\sum\limits_{j=1}^{i-1}\lvert c_{ij}\rvert}\right\}$

[松弛迭代法] 把简单迭代法的迭代公式改成

$$x_i^{(k)}=\omega\left(\sum_{j=1}^{i-1}c_{ij}x_j^{(k)}+\sum_{j=i+1}^{n}c_{ij}x_j^{(k-1)}+d_i\right)+(1-\omega)x_i^{(k-1)}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

其他步骤同简单迭代法. 上式中 ω 是常数, 称为松弛因子. 适当选取 ω 可以提高收敛速度, 通常 ω 取为 1.5～2(当取 $\omega\in(1,2)$ 时, 称为超松弛迭代法, 当取 $\omega\in(0,1)$ 时, 称为低松弛迭代法).

[共轭斜量法] 线性方程组

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

可按下面步骤解出:

(1) 首先选取适当的近似解为初始值:

$$\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^{\tau}$$

(2) 计算初次残差矢量

$$\boldsymbol{r}^{(0)}=\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}^{(0)}$$

和矢量

$$\boldsymbol{p}^{(0)}=A^{\tau}\boldsymbol{r}^{(0)}$$

式中 A^{τ} 为 A 的转置矩阵.

(3) 对 $i=0,1,2,\cdots,N-1$, 依次按下列公式迭代

$$\alpha_i=\frac{(A\boldsymbol{p}^{(i)},\boldsymbol{r}^{(i)})}{(A\boldsymbol{p}^{(i)},A\boldsymbol{p}^{(i)})}=\frac{(\boldsymbol{p}^{(i)},A^{\tau}\boldsymbol{r}^{(i)})}{(A\boldsymbol{p}^{(i)},A\boldsymbol{p}^{(i)})}=\frac{(A^{\tau}\boldsymbol{r}^{(i)},A^{\tau}\boldsymbol{r}^{(i)})}{(A\boldsymbol{p}^{(i)},A\boldsymbol{p}^{(i)})}$$

$$\boldsymbol{x}^{(i+1)}=\boldsymbol{x}^{(i)}+\alpha_i\boldsymbol{p}^{(i)}$$

$$\boldsymbol{r}^{(i+1)}=\boldsymbol{r}^{(i)}-\alpha_iA\boldsymbol{p}^{(i)}$$

$$\beta_{i+1}=\frac{(A^{\tau}\boldsymbol{r}^{(i+1)},A^{\tau}\boldsymbol{r}^{(i+1)})}{(A^{\tau}\boldsymbol{r}^{(i)},A^{\tau}\boldsymbol{r}^{(i)})}$$

$$\boldsymbol{p}^{(i+1)}=A^{\tau}\boldsymbol{r}^{(i+1)}+\beta_{i+1}\boldsymbol{p}^{(i)}$$

式中 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的内积(见第八章).

这一过程只要进行到 $\boldsymbol{r}^{(N)}$ 足够小即可停止.

[追赶法解实三对角线性方程组] 实三对角线性方程组

$$\begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_1 & 0 & & & 0\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & & \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1}\\ 0 & & & & \alpha_n & \beta_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

可按下面步骤解出：

首先计算

$$\lambda_1=\frac{\gamma_1}{\beta_1},\qquad d_1=\frac{b_1}{\beta_1}$$

再对$k=2,3,\cdots,n-1$，依次按下列公式迭代

$$\lambda_k=\frac{\gamma_k}{\beta_k-\alpha_k\lambda_{k-1}},\qquad d_k=\frac{b_k-\alpha_k d_{k-1}}{\beta_k-\alpha_k\lambda_{k-1}}$$

最后得到线性方程组的解为

$$\begin{cases}x_n=\dfrac{b_n-\alpha_n d_{n-1}}{\beta_n-\alpha_n\lambda_{n-1}}\\ x_k=d_k-\lambda_k x_{k+1}\qquad (k=n-1,n-2,\cdots,1)\end{cases}$$

例4 用追赶法解方程组

$$\begin{bmatrix}4&-1&0\\-1&4&-2\\0&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

解 按上述公式依次计算得到

$$\lambda_1=-\frac{1}{4},\qquad d_1=\frac{1}{4}$$

$$\lambda_2=\frac{-2}{4-(-1)\left(-\frac{1}{4}\right)}=-\frac{8}{15},\qquad d_2=\frac{2-(-1)\frac{1}{4}}{4-(-1)\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{3}{5}$$

$$\begin{cases}x_3=\dfrac{2-(-1)\frac{3}{5}}{4-(-1)\left(-\frac{8}{15}\right)}=\dfrac{3}{4}\\ x_2=\dfrac{3}{5}-\left(-\dfrac{8}{15}\right)\dfrac{3}{4}=1\\ x_1=\dfrac{1}{4}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)1=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

[平方根法解正定矩阵的线性方程组] 设A为正定矩阵，则线性方程组

$$Ax=b$$

可按下面步骤解出：

(1) 计算l_{ij}(分解$A=LL^T$，$L=(l_{ij})$为实非奇异下三角形矩阵)

$$l_{ii}=\left(a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$l_{ij}=\frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}\right)\qquad\begin{pmatrix}i=2,\cdots,n\\j=1,\cdots,i-1\end{pmatrix}$$

式中 n 为矩阵 A 的阶数.

(2) 计算 y_i(解方程组 $L\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$)

$$y_i=\frac{1}{l_{ii}}\left(b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k\right)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

(3) 计算 x_i(解方程组 $L^{\tau}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$)

$$x_i=\frac{1}{l_{ii}}\left(y_i-\sum_{k=i+1}^{n}l_{ki}x_k\right)\qquad(i=n,n-1,\cdots,1)$$

[正定带型矩阵的线性方程组解法] 设 $A=(a_{ij})$ 为一正定带型矩阵, 满足

$$a_{ij}=0,\quad |i-j|>m\qquad(m\text{为正整数})$$

则线性方程组

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

可按下面步骤解出:

(1) 计算 λ_{ij}. 为了节省存储单元, 充分利用矩阵的对称和带型特点, 只需储存对角线和对角线下的带中元素, 这时可以改变 a_{ij} 的下标, 令

$$a_{ij}=a_{i,m-i+j}$$

例如当 $n=4, m=2$ 的对称带型矩阵的存储格式为

$$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&0&a_{43}&a_{44}\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}0&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{matrix}$$

然后按下列公式计算 λ_{ij}:

当 $i\leqslant m$ 时,

$$\lambda_{im}=\left(a_{im}-\sum_{k=m-i+1}^{m-1}\lambda_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

$$\lambda_{ij}=\frac{1}{\lambda_{i-m+j,m}}\left(a_{ij}-\sum_{k=m-i+1}^{j-1}\lambda_{ik}\lambda_{i-m+j,k+m-j}\right)$$

$$(i=2,\cdots,m;\ j=m-i+1,\cdots,m-1)$$

当 $i>m$ 时,

$$\lambda_{im}=\left(a_{im}-\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}\quad (i=m+1,\cdots,n)$$

$$\lambda_{ij}=\frac{1}{\lambda_{i-m+j,m}}\left(a_{ij}-\sum_{k=0}^{j-1}\lambda_{ik}\lambda_{i-m+j,k+m-j}\right)$$

$$(i=m+1,\cdots,n;\quad j=0,\cdots,m-1)$$

(2) 计算y_i. 令

$$l_{ij}=\lambda_{i,m-i+j}$$

且按下列公式计算y_i:

$$y_i=\frac{1}{l_{ii}}\left(b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k\right)\quad (i\leqslant m)$$

$$y_i=\frac{1}{l_{ii}}\left(b_i-\sum_{k=i-m}^{i-1}l_{ik}y_k\right)\quad (i>m)$$

(3) 计算x_i.

$$x_i=\frac{1}{l_{ii}}\left(y_i-\sum_{k=i+1}^{i+m}l_{ki}x_k\right)\quad (i<n-m)$$

$$x_i=\frac{1}{l_{ii}}\left(y_i-\sum_{k=i+1}^{n}l_{ki}x_k\right)\quad (i\geqslant n-m)$$

这方法只有当m远小于n时才显示出优越性，否则选用其他方法. 本公式利用了矩阵的对称性与带型特点，便于在电子计算机上储存，并进行计算.

二、一般情形的线性方程组

含n个未知量m个方程的线性方程组取如下形式

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\qquad (1)$$

记

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

$$b=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$$

则给定线性方程组的矩阵形式为

$$Ax=b \tag{1}$$

相应的齐次方程组为

$$Ax=0 \tag{2}$$

A 称为方程组(1)的系数矩阵,

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为方程组(1)的增广矩阵.

[线性方程组有解的判别定理] 以 $r(A)$, $r(C)$ 分别表示系数矩阵 A 与增广矩阵 C 的秩,则有

1° 当 $m=n$ 且 $r(A)=r(C)=n$(或 $|A|\neq 0$)时,方程组(1)有唯一解;

2° 当 $r(A)<r(C)$ 时,方程组(1)无解,这时(1)称为矛盾方程组;

3° 当 $r(A)=r(C)=r<n$(或 $|A|=0$)时,方程组(1)有无穷多组解;

4° 齐次线性方程组(2)有非零解的充分必要条件是: $r(A)<n$($|A|=0$).

[线性方程组的解的结构]

1° 当 $r(A)=r<n$ 时,齐次方程组 $Ax=0$ 的任一非零解 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 都可用它的 $n-r$ 个线性无关解 $x^{(i)}=(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})^T$ $(i=1, 2, \cdots, n-r)$ 的线性组合来表示.

这 $n-r$ 个线性无关解称为方程组的基础解系,它不是唯一的.

2° 设 $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的一个特解,则它的任一解 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 都可以表示为

$$x=x^{(0)}+\eta$$

式中 $\eta=(x_1', x_2', \cdots, x_n')^T$ 是它相应的齐次方程组 $Ax=0$ 的一个解.

三、整系数线性齐次方程组的整数解

假设 $(a_{ij})_{m\times n}$ 是 $m\times n$ 整数矩阵, $m<n$. 令

$$A_i=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

那末整系数线性齐次方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

的整数解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足

$$0 < \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\} \leqslant [(A_1A_2\cdots A_m)^{\frac{1}{n-m}}]$$

式中[ ]表示整数部分.

四、一类线性不等式组的解(克莱姆法则)

假设

$$A=(a_{ij})$$

为 $n\times n$ 非奇异矩阵, 那末线性不等式组

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant b_i$$

$$b_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

的解为

$$|x_j| \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i |A_{ij}|}{|\det A|} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

式中 A_{ij} 为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素的代数余子式.

第五章 微 分 学

微积分学的研究方法是极限方法，研究的对象是函数(特别是初等函数)，微积分学的主要内容是微分法、积分法和它们的应用．本章主要介绍极限方法以及微分法和它的应用(隐函数理论、函数展开为幂级数、函数的极值和作图)，还介绍了函数连续性的概念和性质，以及数项级数、二重级数、函数项级数和无穷乘积的收敛概念和判别法．同时考虑到函数的一致连续性、函数项级数的一致收敛性以及函数的可微性的概念在理论和实际上的重要性，本章着重介绍了这些概念，并举例说明这些概念的实质．另外收集了一些常见的初等函数的幂级数展开式，列表备查．

§1 序列与函数的极限

一、序列的极限

1．基本概念

［有穷极限］ 假定对于任意小的 $\varepsilon>0$，都存在正整数 $N=N(\varepsilon)$，使得对于一切的 $n>N$，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon \quad (a\text{ 为有限数})$$

成立，就称序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$(简记为 $\{x_n\}$)以 a 为极限(或称序列收敛于 a)，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

否则序列称为发散的．

［无穷极限］ 假定对于任意大的 $E>0$，都存在正整数 $N=N(E)$，使得对于一切的 $n>N$，不等式

$$|x_n|>E$$

成立，就称序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$的极限是$\infty$(或称序列发散于$\infty$)，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$$

［部分极限(聚点)］ 在已知序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 的元素中，保持原来次序自左至右任意选取无穷多个元素，如

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n}, \cdots$$

这种序列称为已知序列的子序列．如果

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n}=\xi$$

就称数 ξ（或符号∞）为已知序列 $\{x_n\}$ 的部分极限（或聚点）．

任何序列$\{x_n\}$，不论是有界的或无界的，都有部分极限存在．

［上极限与下极限］ 序列$\{x_n\}$ 的最大的部分极限（有穷或无穷）称为序列$\{x_n\}$的上极限，记作

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

而它的最小的部分极限（有穷或无穷）称为序列$\{x_n\}$的下极限，记作

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

所以，一个序列$\{x_n\}$如果有两个子序列不收敛于同一极限，这个序列$\{x_n\}$就不收敛．如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，即序列$\{x_n\}$收敛于$a$，那末$\{x_n\}$的任一子序列$\{x_{p_n}\}$都收敛于$a$．

2．序列极限存在的判别法

［柯西准则］ 序列 $\{x_n\}$ 的极限存在的充分必要条件是：对任意给定的$\varepsilon>0$，都存在正整数$N=N(\varepsilon)$，使得当$n>N$时，不等式

$$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$$

对一切正整数$p>0$都成立．

［上下极限相等］ 序列$\{x_n\}$的极限（有穷或无穷）存在的充分必要条件是：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

［单调有界］ 单调有界序列必有极限．

若$\{x_n\}$为递增序列，且$x_n\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在而且不超过$M$．

若$\{x_n\}$为递减序列，且$x_n\geqslant M(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在而且不小于$M$．

［有有界变差］* 有有界变差序列（即存在正数c，使得$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+$

---

* 对于函数有有界变差是这样定义的：假定$f(x)$在$[a,b]$上有限，在$[a,b]$上作分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，作和$V=\sum\limits_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|$，$V$的上确界叫做$f(x)$在$[a,b]$上的全变差，记为$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$．如果$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty$，那末称$f(x)$在$[a,b]$上有有界变差．

$+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c,\quad n=2,3,\cdots$)必有极限.

[序列对比]　若序列$\{x_n\}$满足条件$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$,则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=c$$

[施笃兹定理]　对序列$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$，若(i)$n\geqslant n_0$($n_0$为某一自然数)时,$y_{n+1}>y_n$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, (iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$　(有限数或$\pm\infty$),则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$$

[加权平均序列]　设$w_{nk}\geqslant0$ ($k=1,2,\cdots,n;n=1,2,\cdots$), $\sum\limits_{k=1}^{n}w_{nk}=1$, 对固定的$k$, $\lim\limits_{n\to\infty}w_{nk}=0$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}w_{nk}x_k=a$$

3. 序列极限的基本公式

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在,则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}\qquad(\text{当}\lim_{n\to\infty}y_n\neq0\text{ 时})$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim_{n\to\infty}y_n\qquad(\text{当 }x_n\leqslant y_n\text{ 时})$$

4. 常用序列的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$
$$=e=2.718281828459045\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a\qquad(a>0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\qquad(a>0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right]=\gamma$$

式中 $\gamma=0.5772156649015328\cdots$为欧拉常数。

二、函数的极限

1．基本概念

［双边极限(函数在某一点的极限)］ 若对任意小的 $\varepsilon>0$，都存在一个正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对一切满足不等式 $0<|x-a|\leqslant\delta$ 的值 x，$|A-f(x)|<\varepsilon$ 都成立，则称数 A 为函数 $f(x)$ 在点 a 的极限，记作

$$\lim_{x\to a}f(x)=A$$

［单边极限(左极限与右极限)］ 若对任意小的 $\varepsilon>0$，都存在一个正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对一切满足不等式 $a-\delta\leqslant x<a$ 的值 x，$|A'-f(x)|<\varepsilon$ 都成立，则称数 A' 为函数 $f(x)$ 在点 a 的左极限，记作

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a-0)=A'$$

若对任意小的 $\varepsilon>0$，都存在一个正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对一切满足不等式 $a<x\leqslant a+\delta$ 的值 x，$|A''-f(x)|<\varepsilon$ 都成立，则称数 A'' 为函数 $f(x)$ 在点 a 的右极限，记作

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a+0)=A''$$

［无穷极限］ 若对任意大的正数 M，都存在一个正数 $\delta=\delta(M)$，使得对一切满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的值 x，恒有

$$|f(x)|>M$$

则称函数 $f(x)$ 在点 a 的极限是 ∞，记作

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$$

［局部极限］ 若对某序列 $x_n\to a$ 有等式

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=B$$

则称数 B(或符号∞)为函数 $f(x)$ 在点 a 的局部极限(有穷的或无穷的)。

［上极限与下极限］ 局部极限中最小的和最大的分别用

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) \text{ 和 } \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$$

来表示，它们分别称为函数 $f(x)$ 在点 a 的下极限和上极限.

2. 函数极限存在的判别法

[柯西准则] 函数 $f(x)$ 在点 a 的极限存在的充分必要条件是：对任意小的 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使满足

$$0<|x'-a|<\delta \text{ 和 } 0<|x''-a|<\delta$$

的任意两点 x' 和 x''（x' 和 x'' 在函数 $f(x)$ 的定义域内），都有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

[任意收敛序列上的极限] 函数 $f(x)$ 在点 a 的极限存在的充分必要条件是：对任意收敛于 a 的序列 $\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

这时函数 $f(x)$ 在点 a 的极限为 A.

[左右极限相等·上下极限相等] 函数 $f(x)$ 在点 a 的极限存在的充分必要条件是：左极限等于右极限，或者上极限等于下极限，即

$$f(a+0)=f(a-0)$$

或

$$\overline{\lim}_{x\to a} f(x)=\underline{\lim}_{x\to a} f(x)$$

[单调有界] 单调有界函数必有极限.

若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调上升函数，且在区间 (a,b) 内 $f(x)\leqslant M$，则 $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ 必存在且不超过 M.

若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调下降函数，且在区间 (a,b) 内 $f(x)\geqslant M$，则 $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ 必存在且不小于 M.

[函数对比] 若 $f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$，则

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

3. 函数极限的基本公式

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 存在，则

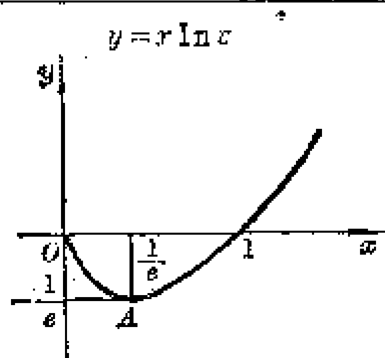
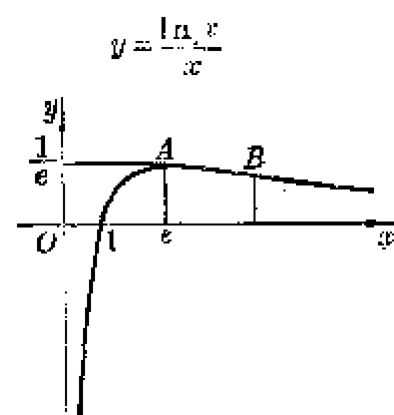
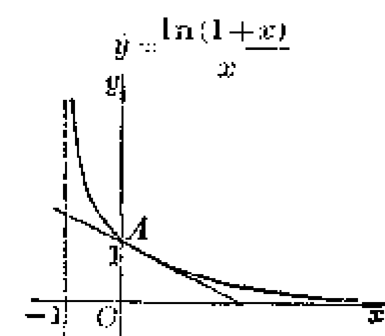
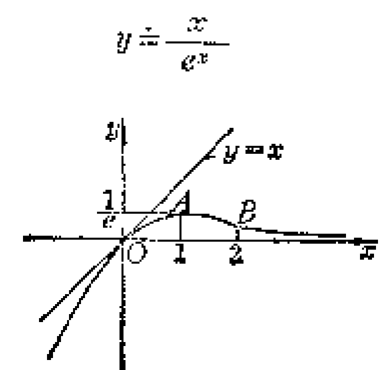
$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)} \quad (\text{当 } \lim_{x\to a}g(x)\neq 0 \text{ 时})$$

4. 一些重要函数的极限

函数与图形	极限与特征
$y=\frac{\sin x}{x}$	曲线关于 y 轴对称 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ [注] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}$
$y=\frac{\operatorname{tg}x}{x}$	曲线关于 y 轴对称 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\mp\infty$
$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	渐近线 $y=e$ 和 $x=-1$ 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ $\lim\limits_{x\to+0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$ $\lim\limits_{x\to-1-0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=+\infty$ [注] $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k$

图形	说明
$y=x\ln x$ 	极小点 $A\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$ 极　限 $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x=0$ [注] $\lim\limits_{x\to+0} x^x=1$
$y=\frac{\ln x}{x}$ 	极大点 $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$ 拐　点 $B\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ 渐近线 $y=0$ 和 $x=0$ 极　限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ [注] $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$
$y=\frac{\ln(1+x)}{x}$ 	渐近线 $y=0$ 和 $x=-1$ 极　限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{\ln(1+x)}{x}=+\infty$
$y=\frac{x}{e^x}$ 	与 y 轴交点 $O(0,0)$，该点切线斜率为 1 极大点 $A\left(1,\frac{1}{e}\right)$ 拐　点 $B(2,2e^{-2})$ 渐近线 $y=0$ 极　限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$ [注] $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad (n>0)$

$y=xe^{\frac{1}{x}}$	曲线由两支组成 不连续点 $x=0$ 渐 近 线 $y=x+1$ 极 限 $\lim\limits_{x\to+0} xe^{\frac{1}{x}}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-0} xe^{\frac{1}{x}}=0$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{1}{x}}=\pm\infty$
$y=e^{\frac{1}{x}}$	不连续点 $x=0$ 渐 近 线 $y=1$ 和 $x=0$ 极 限 $\lim\limits_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}}=0$ $\lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$

5. 不定式的定值法——洛比达法则

洛比达法则是用来计算 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ 等七种不定式的极限的法则*.

$\left[\text{洛比达第一法则}\left(\frac{0}{0}\right)\right]$ 设(i) 函数 $f(x)$和 $g(x)$是在区间 $(a, b]$ 内定义的, (ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, (iii) 在区间 $(a, b]$ 内存在有限导数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$, 而且 $g'(x)\neq0$, (iv)存在极限(有穷或无穷)

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

那末

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 又是 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 可再用上法求极限.

* 极限的计算除应用洛比达法则外, 还可用函数的泰勒级数展开 (§3, 八), 将不定式展开求出极限.

[洛比达第二法则$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$] 设(i)函数$f(x)$和$g(x)$是在区间$(a,b]$内定义的，(ii)$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，(iii)在区间$(a,b]$内存在有限导数$f'(x)$及$g'(x)$，而且$g'(x)\neq 0$，(iv)存在极限(有穷或无穷)

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

那末

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$又是$\frac{\infty}{\infty}$型不定式，可再用上法求极限。

[其他类型不定式($0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^∞，0^0，∞^0)]

1° 对$0\cdot\infty$型的不定式，可先把它变成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，然后再应用洛比达法则。设

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty$$

如果要计算$\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)$，那末可以进行变形

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

其中的第二式在$x\to a$时是$\frac{0}{0}$型不定式；第三式是$\frac{\infty}{\infty}$型不定式。

2° $\infty-\infty$型的不定式也能变成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型。如果要计算$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$，这里

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty$$

那末可以进行下面的变形，把它变成$\frac{0}{0}$型不定式：

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

3° 对于1^∞，0^0，∞^0型的不定式，可以预先把这些表达式取对数。

设$y=[f(x)]^{g(x)}$，则$\ln y=g(x)\ln f(x)$。$\ln y$的极限就是$0\cdot\infty$型的不定式。假如用上述任一方法能求出$\lim\limits_{x\to a}\ln y$，比如它等于$k$(或$+\infty$，或$-\infty$)，那末$\lim\limits_{x\to a}y$就等于$e^k$(或$\infty$，或$0$)。

6. 函数无穷小和无穷大的阶(符号 $O^*, o, O, \sim$)

若 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$，则函数 $\varphi(x)$ 称为当 $x\to a$ 时的无穷小量；若 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$，则函数 $\varphi(x)$ 称为当 $x\to a$ 时的无穷大量.

符号 $O^*, o, O, \sim$

符　号	定　义	意　　义
当 $x\to a$ 时，$\varphi(x)=O^*(\psi(x))$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=k$ $(0<\|k\|<+\infty)$	表示函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $x\to a$ 的过程中，按狭义来说，是同阶的无穷小或无穷大.
当 $x\to 0$ 时，$\varphi(x)=O^*(x^n)$ $(n>0)$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x^n}=k$ $(0<\|k\|<+\infty)$	称 $\varphi(x)$ 对于无穷小 x 是 n 阶无穷小. 例如，当 $x\to 0$ 时，$2x^3-x^5=O^*(x^3)$
当 $x\to\infty$ 时，$\varphi(x)=O^*(x^n)$ $(n>0)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x^n}=k$ $(0<\|k\|<+\infty)$	称 $\varphi(x)$ 对于无穷大 x 是 n 阶无穷大. 例如，当 $x\to\infty$ 时，$2x^3-3x^2+1=O^*(x^3)$
当 $x\to a$ 时，$\varphi(x)=o(\psi(x))$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$	表示当 $x\to a$ 时，函数 $\varphi(x)$ 对于函数 $\psi(x)$ 是较高阶的无穷小，或函数 $\varphi(x)$ 对于函数 $\psi(x)$ 是较低阶的无穷大. 例如，当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^n=1+nx+o(x)$
当 $x\to a$ 时，$\varphi(x)=O(\psi(x))$	$\overline{\lim\limits_{x\to a}}\dfrac{\|\varphi(x)\|}{\psi(x)}=k$ $(0\leqslant k<+\infty)$	当 $x\to a$ 时，函数 $\varphi(x)$ 无穷小的阶(在广义的意义上)不低于某正的函数 $\psi(x)$ 无穷小的阶(或函数 $\varphi(x)$ 无穷大的阶不高于函数 $\psi(x)$ 无穷大的阶). 例如，当 $x\to\infty$ 时，$x+x^2\sin x=O(x^2)$
当 $x\to a$ 时，$\varphi(x)\sim\psi(x)$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$	称函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 当 $x\to a$ 时为等价的. 例如，当 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\sim x$，$\operatorname{tg}x\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a\,(a>0)$，$\ln(1+x)\sim x$

三、函数的连续性

1. 单变量函数的连续性

[函数在一点连续]　函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性有下面几种定义方法：

定义 1　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$，那末 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

定义 2　如果 $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$，那末 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

定义 3（柯西）　如果对于任意小的 $\varepsilon>0$，都存在正数 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

那末 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

定义 4　当自变量的改变量 Δx 为无穷小量时，函数的改变量 Δy 也是无穷小量，或者写为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x=x-x_0\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

那末 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

定义 5（海涅）　如果对任何以 x_0 为极限的序列 $\{x_n\}$ 恒有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$$

那末 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

定义 6（贝尔）　设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，x_0 是 $[a,b]$ 内一点，记 σ 为含有 x_0 的小闭区间（它含于 $[a,b]$ 内），分别记 $f(x)$ 在 σ 内的上，下确界为 B_σ，A_σ，称 $\omega_\sigma=B_\sigma-A_\sigma$ 为 $f(x)$ 在 σ 上的振幅。当区间 σ 无限地收缩为一点时，$A_\sigma, B_\sigma, \omega_\sigma$ 的极限都存在，分别记为 $A_{x_0}, B_{x_0}, \omega_{x_0}$。

如果

$$\omega_{x_0}=B_{x_0}-A_{x_0}=0$$

那末 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

以上几种定义都是等价的。

[函数在一点单边连续]

若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 右连续。

若 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续。

[函数在一个区间上连续]　如果函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，它在这个

区间上任一点 x 都连续，那末称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续(对开区间 (a,b) 可用同样定义).

这里要指出，因为函数 $f(x)$ 可能在区间 $[a,b]$ 之外根本不存在，所以函数在端点的连续性应当理解为单边连续：在点 a 是右连续，在点 b 是左连续.

[函数的不连续(或间断)点] 由函数在一点连续的定义可知，间断点只能分两类：

1° 两个极限 $f(a-0)$ 及 $f(a+0)$ 都存在，而等式 $f(a-0)=f(a)=f(a+0)$ 不成立，这种间断点称为第一类间断点.

2° 上面两个极限中至少有一个不存在，这种间断点称为第二类间断点.

[连续函数的运算]

1° 连续函数的代数和是连续函数.

2° 有限个连续函数的积是连续函数.

3° 两个连续函数的商(当分母不等于零时)是连续函数.

4° 复合函数的连续性：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，又函数 $\varphi(y)$ 也在某一个区间上连续，而该区间包含着函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上所取的一切值，那末复合函数 $\varphi[f(x)]$ 也在区间 $[a,b]$ 上连续.

[连续函数的性质]

1° 如果函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 连续，并且 $f(a)>0$ (或 $f(a)<0$)，那末 $f(x)$ 在点 a 的某一个邻域(即开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$，$\varepsilon>0$ 任意小)内的一切点都有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

2° 函数的有界性定理 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 一定在该区间上有界.

3° 最大最小值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那末在这个区间上至少存在一点 x，使得对应的 $f(x)$ 值最大，并且也至少有一点 x，使得 $f(x)$ 的值最小.

4° 中间值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=A$，$f(b)=B$，并设 K 是 A，B 之间的任意一个值，那末在这个区间上至少存在一点 x，使得 $f(x)$ 的值等于 K. 特别是，若 A,B 不同号，则在这个区间内，至少有一点 x，使得 $f(x)$ 的值等于零.

5° 反函数的连续性 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上递增而且连续，又 $f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，那末反函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上也连续.

6° 以参数表出的函数的连续性 如果函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (α,β) 内

定义并连续，且函数$\varphi(t)$在此区间内是严格单调的，那末方程组

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

在区间(a,b)内把y定义成x的单值连续函数：

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$$

其中 $a=\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t)$及$b=\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)$.

[初等函数的连续性] 一般地说，基本初等函数 x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, …以及由它们经过有限次的算术运算和复合函数运算后所得的函数，在一切使它们有意义的点都连续。

[实数集合的确界]

1° 有界集合 设有某一个实数集合E，若有一个数M，使得集合E的一切数$\leqslant M$，则称集合E是有上界的．类似地，若有一个数m，使得集合E的一切数$\geqslant m$，则称这个集合是有下界的．既有上界又有下界的集合称为有界集合．

2° 实数集合的上确界和下确界

定义1 若有一个数β，使得实数集合E中没有大于β的数，但是无论$\varepsilon>0$多么小，E中总有大于$\beta-\varepsilon$的数，则β称为集合E的上确界，记作$\sup E$．若有一个数α，使得集合E中没有小于α的数，但是无论$\varepsilon>0$多么小，E中总有小于$\alpha+\varepsilon$的数，则α称为集合E的下确界，记作$\inf E$．

定义2 实数集合的最小的上界称为它的上确界，最大的下界称为它的下确界．

以上两个定义是等价的．

3° 确界存在定理 有上界的集合必有唯一的上确界，有下界的集合必有唯一的下确界．

[函数的一致连续性]

1° 函数的一致连续性定义 设函数$f(x)$定义在某一区间X(闭的或不闭的，有穷的或无穷的）上，若对任意给定的$\varepsilon>0$，都存在一个只与ε有关的$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对区间$X$上的任意两点$x_1$和$x_2$，只要

$$|x_2-x_1|<\delta$$

就有不等式

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

成立，则称函数$f(x)$在区间X上一致连续．

注意，函数在区间上每一点连续并不能必然地推出它在这个区间上的一致

连续性.

例 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间(0, 1)内每一点都连续，但在(0, 1)内并不一致连续. 事实上，对于任意小的 $\delta>0$，令 $x_1=\delta$，$x_2=2\delta$，则 $|x_2-x_1|=\delta$，而 $|f(x_2)-f(x_1)|=\frac{1}{\delta}-\frac{1}{2\delta}=\frac{1}{2\delta}$，这时，$|x_2-x_1|$可以任意小，但$|f(x_2)-f(x_1)|$可以任意大，所以不一致连续.

值得注意的是，在闭区间$[a, b]$上已不再有与此类似的情况. 这就是下面的

2° 康托定理 若函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则它在这区间上也是一致连续的.

3° 设

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$$

式中x_1和x_2为(a, b)内适合$|x_1-x_2|\leqslant\delta$的任意两点. 函数ω_f称为函数$f(x)$的连续模数.

函数$f(x)$在区间(a, b)内一致连续的充分必要条件是

$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$$

2. 多变量函数的连续性

[多变量函数的极限] 设函数$u=f(P)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$定义在区域$D$内，$P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$为$D$内一点. 若对任意小的$\varepsilon>0$，都存在$\delta=\delta(\varepsilon, P_0)>0$，使得只要$P\in D$及$0<\rho(P, P_0)<\delta$(其中$\rho(P, P_0)$为$P$和$P_0$两点间的距离)，都有

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

则称数A为函数$f(P)$在P_0点的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x_i\to x_i^0\\1\leqslant i\leqslant n}}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=A$$

[n重极限与累极限] 上述函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的极限，是当函数的一切自变量同时趋向于各自的极限时所得出的，称为n重极限(在$n=2, 3, \cdots$时分别称为二重极限，三重极限，等等). 此外，还有一种极限，它是由各个自变量依某种次序相继地各自趋向于极限所得出的，称为累极限. 例如对二元函数$f(x, y)$来说，二重极限为$\lim\limits_{\substack{x\to a\\y\to b}}f(x, y)$，两个累极限为$\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x, y)$(先让自变量$x$趋于$a$，再让自变量$y$趋于$b$)和$\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x, y)$(先让自变量$y$趋于$b$，再让自变量$x$趋于$a$)，三者不一定相等.

定理　若 (i) 二重极限

$$A=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$$

存在(有穷或无穷)，(ii) 对于D内的任一y，关于x的(有限的)单重极限

$$\varphi(y)=\lim_{x\to a} f(x,y)$$

存在，则累极限

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$$

必存在，而且就等于二重极限.

对于第二种累极限 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$有类似结论.

[多变量函数的连续性]

定义 1　如果 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)=f(\lim\limits_{P\to P_0} P)$，那末$f(P)$在点 P_0连续.

定义 2　如果对任意小的$\varepsilon>0$，都存在正数$\delta>0$，使得当$0<\rho(P,P_0)<\delta$时，恒有

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$$

那末 $f(P)$在点 P_0连续.

定义 3　当自变量的改变量 Δx_i $(i=1,2,\cdots,n)$为无穷小量时，函数的改变量 Δu 也是无穷小量，或者写为

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta u=\lim_{\rho\to 0}[f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\cdots,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)]=0$$

式中 $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2}$，那末 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$连续.

若函数$f(P)$在区域D上每点都连续，则称函数$f(P)$在区域D上连续.

[多变量函数的一致连续性]　设函数$f(P)$ 定义在某一区域 D(有限的或无限的)上，若对任意给定的$\varepsilon>0$，都存在一个只与ε有关的$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对区域$D$上任意两点 P_1和 P_2，只要

$$\rho(P_1,P_2)<\delta$$

就有不等式

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$$

成立，则称函数 $f(P)$在区域D上一致连续.

[多变量连续函数的性质]

1°　在有界闭区域D上连续的函数必在D上有界.

2° 在有界闭区域D上连续的函数必在D上达到一个最大值与一个最小值.

3° 在有界闭区域D上每点都连续的函数必在D上一致连续.

§2 级数的收敛与运算

一、数项级数收敛的判别法

1. 基本概念与基本性质

[级数的基本概念] 设$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$是一个无穷序列,符号

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

称为无穷级数,简称级数,记作$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. a_n称为级数的一般项.

$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

称为级数的第n个部分和. 若当$n\to\infty$时,部分和序列$\{A_n\}$具有有穷或无穷(但有确定的正号或负号的)极限A:

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

则称A为级数的和,并写成

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

若级数具有有穷和,则称级数为收敛的,否则,即级数和等于$\pm\infty$或不存在,则称级数为发散的.

[级数的基本性质]

1° 弃去级数前面的有限项或在级数前面加进有限项,并不影响级数的收敛与发散的性质.

2° 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,则它的第m项后的余项的和数

$$\alpha_m=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots=\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

当 $m\to\infty$ 时趋于零。

3° 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，c 是任一常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 也收敛，并有

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

4° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 也收敛，并有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

[柯西准则] 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，都存在正整数 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，对一切正整数 p，下列不等式成立：

$$|A_{n+p}-A_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon$$

[级数收敛的必要条件] 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的一个必要条件是：一般项 a_n 趋于零，即 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

2. 同号级数收敛判别法

设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{2}$$

为两个同号级数(即每一项符号相同的级数，当都是正号时，称为正项级数)，这类级数的收敛判别法见下页表。

名称		条件	级数的收敛性	
			收敛	发散
比较判别法	Ⅰ	当 $n>N$ 时， $0\leqslant a_n\leqslant b_n$	若级数(2)收敛， 则级数(1)收敛	若级数(1)发散， 则级数(2)发散
	Ⅱ	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=K$ $(0\leqslant K\leqslant+\infty)$ $(b_n\neq 0)$	当 $K<+\infty$ 时， 若级数(2)收敛， 则级数(1)收敛	当 $K>0$ 时， 若级数(2)发散， 则级数(1)发散
	Ⅲ	当 $n>N$ 时， $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $(a_n\neq 0,\ b_n\neq 0)$	若级数(2)收敛， 则级数(1)收敛	若级数(1)发散， 则级数(2)发散
	Ⅳ	当 $n\to+\infty$ 时， $a_n\sim b_n$	级数(1)和(2) 同时收敛	级数(1)和(2) 同时发散
	Ⅴ	$a_n=O^*\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$	当 $p>1$ 时	当 $p\leqslant 1$ 时
达兰贝尔判别法		$a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$	当 $q<1$ 时	当 $q>1$ 时
柯西判别法		$a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$	当 $q<1$ 时	当 $q>1$ 时
拉阿伯判别法		$a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$	当 $p>1$ 时	当 $p<1$ 时
高斯判别法		$a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$， 其中 θ_n 有界： $\lvert\theta_n\rvert\leqslant L,\ \varepsilon>0$	当 $\lambda>1$ 时； 或者当 $\lambda=1$， 而 $\mu>1$ 时	当 $\lambda<1$ 时； 或者当 $\lambda=1$， 而 $\mu\leqslant 1$ 时

名称	条件	级数的收敛性	
		收敛	发散
柯西积分判别法	$f(x)\ (x\geqslant 1)$ 为非负不增函数	$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 同时收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 同时发散
对数判别法	$a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 设 $L_n=\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}$	当 $n\geqslant N(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ 时, $L_n\geqslant 1+\varepsilon$	当 $n\geqslant N(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ 时, $L_n\leqslant 1-\varepsilon$

3. 变号级数收敛判别法

[级数的绝对收敛性] 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots \tag{3}$$

收敛，则变号级数(即正负项可以任意出现的级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{4}$$

也收敛，并称级数(4)为绝对收敛.

若级数(4)收敛，而级数(3)发散，则称(4)为条件收敛(非绝对收敛).

要确定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的绝对收敛性，只须把上面关于同号级数的收敛判别法应用到正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 上去. 但对发散性判别法必须当心，虽然级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 是发散的，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也仍然可以收敛(非绝对收敛)，仅仅柯西判别法与达兰贝尔判别法是例外.

绝对收敛级数的和等于级数的所有正项组成的级数的和减去级数所有负项的绝对值组成的级数的和.

[黎曼定理] 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为条件收敛级数，若适当的变更项的次序，则可收敛

于任一给定的数(有限或无限)。

[达兰贝尔判别法] 若变号级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$$

则当$l<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛；当$l>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

[莱布尼茨判别法] 若交错级数

$$c_1-c_2+c_3-c_4+\cdots+(-1)^{n-1}c_n+\cdots\qquad(c_n\geqslant 0)$$

满足条件：(i) $c_n\geqslant c_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$，则该级数收敛(一般说来，非绝对收敛)。对于级数的余项

$$R_n=(-1)^n c_{n+1}+(-1)^{n+1}c_{n+2}+\cdots$$

有以下估计：

$$R_n=(-1)^n\theta_n c_{n+1}\qquad(0\leqslant\theta_n\leqslant 1)$$

而且余项的符号与其第一项的符号相同，其绝对值比第一项绝对值小。

[狄利克莱判别法] 若部分和$A_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$有界，且当$n\to\infty$时，b_n单调地趋于零，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

[阿贝耳判别法] 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且数b_n $(n=1,2,\cdots)$构成一单调有界序列：

$$|b_n|\leqslant K\qquad(n=1,2,\cdots)$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

二、函数项级数收敛的判别法

1. 收敛与一致收敛

[收敛与收敛区域] 设$u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$都是定义在某区间$[a,b]$上的函数，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

为定义在$[a, b]$上的函数项级数．若对区间$[a, b]$上的每点的部分和

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

当$n \to \infty$时，都有极限$S(x)$，即

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = S(x)$$

则称函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$[a, b]$上是收敛的，函数$S(x)$是它的和，区间$[a, b]$是收敛区域．函数

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

称为余项．显然在收敛区域上的每点x，都有

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0$$

也就是说，对任意给定的$\varepsilon > 0$与收敛区域$[a, b]$上的每点x，都存在一个自然数$N(\varepsilon, x)$（N的大小不但与给定的正数ε有关，而且与x的数值有关），使得当$n \geqslant N$时，都有

$$|r_n(x)| < \varepsilon \quad 或 \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

［一致收敛］ 设函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

对区间$[a, b]$上每点都收敛，它的和是$S(x)$．

若对给定的$\varepsilon > 0$，都存在一个只与ε有关而与x的数值无关的自然数$N(\varepsilon)$，使得当$n \geqslant N$时，不等式

$$|r_n(x)| < \varepsilon \quad 或 \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

对于$[a, b]$上的一切x都成立，则称函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$[a, b]$上一致收敛，即部分和$S_n(x)$一致收敛于级数的和$S(x)$．

由一致收敛的定义可知函数项级数在某区间$[a, b]$上一致收敛比在$[a, b]$上点点收敛的要求高．在某区间$[a, b]$上一致收敛的一个函数项级数在$[a, b]$上一

定点点收敛，但在区间$[a,b]$上点点收敛的函数项级数在$[a,b]$上不一定一致收敛.

2. 一致收敛判别法

[柯西准则] 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛的充分必要条件是：对任意给定的$\varepsilon>0$，都存在一个只与$\varepsilon$有关而与$x$无关的自然数$N=N(\varepsilon)$，使得当$n>N$时，不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

对一切自然数p以及区间$[a,b]$上一切点x，都成立.

[外尔斯特拉斯判别法] 对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，若有收敛的数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$存在，使得对区间$[a,b]$上一切点$x$，不等式

$$|u_n(x)|\leqslant c_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

成立，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上绝对且一致收敛.

[阿贝耳判别法] 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛，函数序列$\{v_n(x)\}$对每个$x$是单调序列，而且对任意的$x$与$n$都是有界的：

$$|v_n(x)|\leqslant K$$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$$

在区间$[a,b]$上一致收敛.

[狄利克莱判别法] 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和对任意的$x$与$n$都是有界的：

$$|S_n(x)|\leqslant M$$

函数序列$\{v_n(x)\}$（对每个x）是在区间$[a,b]$上一致趋向于零的单调序列，则

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$$

在区间$[a,b]$上一致收敛.

3. 函数级数的运算及其条件

运　算	表　达　式	条　　件
级数和的连续性	$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续	(i) $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛
逐项相加减	$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ $=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)\pm v_n(x)]$ $(a\leqslant x\leqslant b)$	$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上都收敛
相乘	$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ $=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x)$ 其中　$w_n(x)=u_1(x)v_n(x)+\cdots$ $+u_k(x)v_{n-1}(x)+\cdots$ $+u_n(x)v_1(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$	$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上都收敛, 并且至少有一个绝对收敛
逐项取极限	$\lim_{x\to x_0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to x_0}u_n(x)\right\}$ $(a\leqslant x_0\leqslant b)$	(i) $\lim_{x\to x_0}u_n(x)=c_n(n=1,2,\cdots)$ c_n为有限值, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

运算	表达式	条件
逐项微分	$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$	(i) $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$定义在$[a,b]$上，而且有连续的导数$u_n'(x)$， (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上收敛， (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛
逐项积分	$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$， $\int_a^x\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(x)dx$ 对于$[a,b]$上的一切点x一致成立	(i) $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上连续(或可积)， (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛

三、二重级数

[二重级数] 已知由两个自然数附标决定的无穷数集

$$a_i^{(k)}\quad(i=1,2,3,\cdots;k=1,2,3,\cdots)$$

把它们排列成无穷矩阵的形状:

$$\begin{array}{cccccc}
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \cdots & a_i^{(1)} & \cdots\\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \cdots & a_i^{(2)} & \cdots\\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \cdots & a_i^{(3)} & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & \cdots & a_i^{(k)} & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

这种矩阵称为带两个附标的元素 $a_i^{(k)}$ 的无穷矩阵.

$$a_1^{(1)}+a_2^{(1)}+a_3^{(1)}+\cdots+a_i^{(1)}+\cdots+a_1^{(2)}+a_2^{(2)}+a_3^{(2)}+\cdots+a_i^{(2)}$$

$$+\cdots+a_1^{(k)}+a_2^{(k)}+a_3^{(k)}+\cdots+a_i^{(k)}+\cdots=\sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

称为二重级数.

限于前 m 行与前 n 列，考虑有穷和数

$$A_n^{(m)}=\sum_{i,k=1}^{i=n,k=m}a_i^{(k)}=\sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^{(k)}\right\}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m}a_i^{(k)}\right\}$$

这和数称为二重级数的部分和.

如果存在二重极限

$$A=\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}A_n^{(m)}$$

这极限是有穷的或无穷的(但有确定的正号或负号)，那末称这极限为二重级数的和，记作

$$A=\sum_{i=1,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

若级数 $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$ 具有有限和，则称它是收敛的，否则，称它是发散的.

二重级数收敛的一个必要条件是一般项趋于零，即

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}a_n^{(m)}=0$$

[累级数] 如果在无穷矩阵中把每一行单独地相加起来，就得到行级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

再把所有行级数相加起来(先按列后按行相加)，即

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

它称为累级数. 如果先按行后按列把给定的无穷矩阵的项相加，就得到第二种累级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

若累极限

$$A'=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}A_n^{(m)}$$

存在,则称累级数$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}$收敛,具有和$A'$. 若累极限

$$A''=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}A_n^{(m)}$$

存在,则称累级数$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$收敛,具有和$A''$.

[二重级数与累级数的关系] 如果(i)二重级数$\sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$收敛,(ii)行级数$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}$收敛,那末累级数$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}$收敛,并且有与二重级数相同的和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}=A=\sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

对于第二种累级数$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$有类似结论(参考§1,三,2).

[正项级数]

1° 设$a_i^{(k)}\geqslant 0$,则级数$\sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$收敛的充分必要条件是它的部分和有界.

2° 设$a_i^{(k)}\geqslant 0$,如果三个级数

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)},\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

中的一个级数收敛,那末其余两个级数也收敛,并且具有相同的和.

3° 设$a_i^{(k)}\geqslant 0$,二重级数$\sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$与简单级数$\sum_{r=1}^{\infty}u_r$由相同的项组成. 在这种情形下,从一个级数的收敛性可推出另一个级数的收敛性,并且二者的和相等.

[绝对收敛级数]

1° 如果由级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 的项的绝对值所组成的级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|$ 收敛，那末级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 也收敛。

如果级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|$ 收敛，那末级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 称为绝对收敛级数。如果级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 收敛，而级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|$ 发散，那末级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 称为条件收敛级数。

2° 若级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 绝对收敛，则行(或列)级数都绝对收敛。此外，由行(或列)级数的和所组成的级数也绝对收敛，并且与二重级数有相同的和。

3° 如果由同样的项组成二重级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 与简单级数 $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$，那末从它们中一个级数的绝对收敛性可推出另一个级数的绝对收敛性，并且二者的和相等。

4° 绝对收敛的二重级数具有可交换性，即任意改变它的求和次序后级数仍然收敛，并与原级数有相同的和。

5° 如果累级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 的绝对值级数是收敛级数，那末不仅累级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 本身收敛，而且累级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 也收敛，并且二者的和相等。

6° 如果简单级数 $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ 绝对收敛，把它的项任意排列成带两个附标的元素的无穷矩阵的形状后，就可以用累级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 或 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ 来代替级数 $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$。

二重级数的基本概念及性质可推广到多重级数上去。

四、无穷乘积

[基本概念] 设

$$q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots$$

是一个给定的无穷序列，则记号

$$q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \cdots \cdot q_n \cdot \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} q_n, \quad q_n \neq 0 \ (n=1,2,\cdots)$$

称为无穷乘积。

$$P_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_n$$

称为部分乘积．如果当 $n \to \infty$ 时部分乘积序列$\{P_n\}$具有有穷的或无穷的（但有确定的正号或负号）极限

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P$$

则P称为无穷乘积的值，记作

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} q_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_n \cdot \cdots, \quad q_n \neq 0 \ (n=1,2,\cdots)$$

若无穷乘积具有非零有穷值P，则称为收敛的，否则称为发散的．若$P=0$，则称为发散于零．

为使无穷乘积的值等于零，只要乘积的因子中有一个是零就够了，在后面的讨论中，总是假定 $q_n \neq 0 \ (n=1,2,\cdots)$．

$$\pi_m = q_{m+1} \cdot q_{m+2} \cdot \cdots = \prod_{n=m+1}^{\infty} q_n$$

称为无穷乘积的余乘积．

[无穷乘积收敛判别法]

1° 无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} q_n$收敛的一个必要条件是：

$$\lim_{m\to\infty} \pi_m = 1 \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} q_n = 1$$

式中 $\pi_m = \dfrac{P}{P_m}$．

2° 无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} q_n$收敛的充分必要条件是：级数$\sum_{n=1}^{\infty} \ln q_n$ 收敛．设L是

前面级数的和，则 $P=e^L$.

3° 设 $q_n=1+a_n$ $(n=1,2,\cdots)$，对充分大的 n，若有 $a_n>0$（或 $a_n<0$），则 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

4° 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同时收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

5° 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 或 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 具有零值的充分必要条件是：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln q_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 的和为 $-\infty$.

特别，如果 $a_n<0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，或级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散，那末无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 具有零值.

6° 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛的充分必要条件是：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

［函数项无穷乘积的一致收敛］　如果函数序列

$$P_m(x)=\prod_{n=1}^{m}[1+u_n(x)] \qquad (m=1,2,\cdots)$$

一致收敛，并且极限不恒为零，那末称函数项无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}[1+u_n(x)]$$

一致收敛.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在某一区间上一致收敛，且 $u_n(x)\neq -1$，那末无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}[1+u_n(x)]$ 也在该区间上一致收敛.

[无穷乘积展开式]

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]$$

$$\operatorname{sh} x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]$$

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n}) \qquad (|x|<1)$$

$$e^{\gamma x} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x} \qquad \text{（其中}\gamma\text{为欧拉常数）}$$

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} = \frac{1}{\prod_p\left(1-\frac{1}{p^x}\right)}$$

（其中 p 跑遍一切素数，$\zeta(x)$称为黎曼 ζ 函数.）

$$\sqrt{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right]$$

$$\frac{1}{2} = \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$$

$$e = \frac{2}{1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6\cdot 8}{5\cdot 7}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{10\cdot 12\cdot 14\cdot 16}{9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots$$

§3 微　　分

一、单变量函数的微分

1. 基本概念

[导数的定义及其几何意义]　设函数 $y=f(x)$ 当自变量在点 x 有一改变量 Δx 时，函数 y 相应地有一改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，那末当 Δx 趋于零时，若比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在(一确定的有限值)，则称这个极限为函数 $f(x)$ 在点 x 的导数，记作

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

这时称函数 $f(x)$ 在点 x 是可微分的函数(或称函数 $f(x)$ 在点 x 可微)。

在几何上，函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 表示的曲线在点 x 的切线的斜率，即

$$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$$

式中 α 为曲线在点 x 的切线与 x 轴的夹角(图 5.1)。

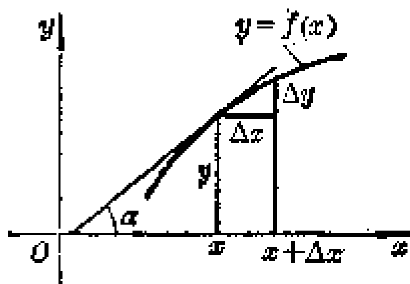


图 5.1

[单边导数]

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在点 x 的左导数和右导数。

导数 $f'(x)$ 存在的充分必要条件是：

$$f'_-(x)=f'_+(x)$$

[无穷导数]　若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\pm\infty$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x 有无穷导数。这时函数 $y=f(x)$ 的图形在点 x 的切线与 x 轴垂直(当 $f'(x)=+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的图形在点 x 的切线正向与 y 轴方向一致，当 $f'(x)=-\infty$ 时，方向相反)。

[函数的可微性与连续性的关系]　如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 有导数，那末它在点 x 一定连续。反之，连续函数不一定有导数，例如

1° 函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 连续，在点 $x=0$，左导数 $f'_-(0)=-1$，右导数 $f'_+(0)=1$，而导数 $f'(0)$ 不存在(图 5.2)。

2° 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续，但在点 $x=0$ 左右导数都不存在(图 5.3)。

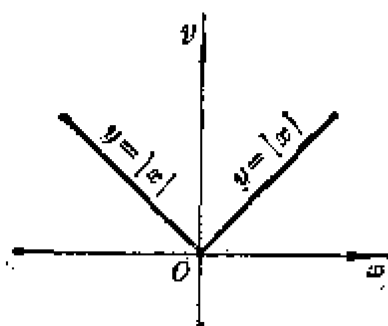


图 5.2

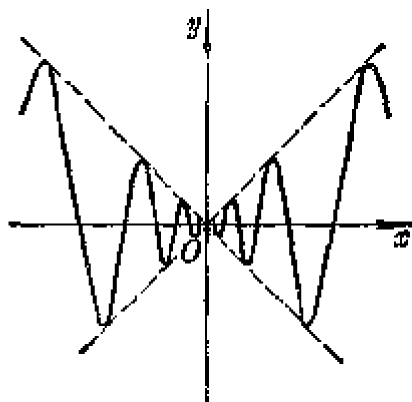


图 5.3

2. 求导数的基本法则

[四则运算求导公式] 若 c 为常数，函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都有导数，则

$$(c)'=0 \qquad (cu)'=cu'$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad (uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \quad (v\neq 0)$$

[复合函数的导数] 若 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都有导数，则

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x)$$

[反函数的导数] 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 有不等于零的导数，并且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在点 y 连续，那末 x'_y 存在并且等于 $\frac{1}{y'_x}$，即

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}$$

[隐函数的导数] 假定函数 $F(x,y)$ 连续，并且对于每个自变量都有连续的偏导数，而且 $F'_y(x,y)\neq 0$，则由

$$F(x,y)=0$$

所决定的函数 $y=f(x)$ 的导数

$$y'=y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

式中 $F'_x=\frac{\partial F}{\partial x}$，$F'_y=\frac{\partial F}{\partial y}$　（见本节，四）.

［用参数表示的函数的导数］　设方程组

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha<t<\beta)$$

式中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微分的函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则由隐函数存在定理（本节，四，1）可把 y 确定为 x 的单值连续函数

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$$

而函数的导数可用公式

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

求得.

［用对数求导数法］　求一函数的导数，有时先取其对数较为便利，然后由这函数的对数求其导数.

例　求

$$y=\frac{(x-a)^p(x-b)^q}{(x-c)^r}$$

的导数.

解　两边各取对数，得

$$\ln y=p\ln(x-a)+q\ln(x-b)-r\ln(x-c)$$

左边的 $\ln y$ 为 y 的函数，而 y 又为 x 的函数，故应用求复合函数的导数的法则得到

$$(\ln y)'=\frac{1}{y}y'$$

由此得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{p}{x-a}+\frac{q}{x-b}-\frac{r}{x-c}$$

所以

$$y'=\frac{(x-a)^p(x-b)^q}{(x-c)^r}\left\{\frac{p}{x-a}+\frac{q}{x-b}-\frac{r}{x-c}\right\}$$

3. 函数的微分与高阶导数

［函数的微分］　若函数 $y=f(x)$ 的改变量可表为

$$\Delta y=A(x)dx+o(dx)$$

式中 $dx=\Delta x$，则此改变量的线性主部 $A(x)dx$ 称为函数 y 的微分，记作

$$dy=A(x)dx$$

函数 $y=f(x)$ 的微分存在的充分必要条件是：函数存在有限的导数 $y'=f'(x)$，这时函数的微分是

$$dy=f'(x)dx$$

上式具有一阶微分的不变性，即当自变量 x 又是另一自变量 t 的函数时，上面的公式仍然成立.

［高阶导数］ 函数 $y=f(x)$ 的高阶导数由下列关系式逐次地定义出来(假设对应的运算都有意义)：

$$f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}' \qquad (n=2,3,\cdots)$$

［高阶微分］ 函数 $y=f(x)$ 的高阶微分由下列公式逐次定义：

$$d^n y=d(d^{n-1}y) \qquad (n=2,3,\cdots)$$

式中 $d^1y=dy=y'dx$. 并且有

$$d^n y=y^{(n)}dx^n$$

及

$$y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}$$

［莱布尼茨公式］ 若函数 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 有 n 阶导数（可微分 n 次），则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}$$

式中 $u^{(0)}=u,v^{(0)}=v,C_n^i$ 为二项式系数.

同样有

$$d^n(uv)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i d^{n-i}u\cdot d^i v$$

式中

$$d^0u=u,\quad d^0v=v$$

更一般地有

$$(u_1u_2\cdots u_m)^{(n)}=\sum_{\substack{\Sigma i_k=n\\ 0\leqslant i_k\leqslant n}}\frac{n!}{i_1!\,i_2!\cdots i_m!}u_1^{(i_1)}u_2^{(i_2)}\cdots u_m^{(i_m)}$$

式中 m,n 为正整数.

［复合函数的高阶导数］ 若函数 $y=f(u),u=\varphi(x)$ 有 l 阶导数，则

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(\varphi(x))) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ \sum i_k = i\\ \sum_{k=1}^{l} k i_k = n}} \frac{n!\,f^{(i)}}{i_1!\,i_2!\cdots i_l!}\left(\frac{u^{(1)}}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{u^{(2)}}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{u^{(l)}}{l!}\right)^{i_l}$$

式中 $f^{(i)}=\frac{d^i f}{du^i},\quad u^{(k)}=\frac{d^k u}{dx^k}$

[基本函数的导数表]

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\csc x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x\csc x$
x^n	nx^{n-1}	$\arcsin x$	$+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arc\,ctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\operatorname{arc\,sec} x$	$+\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x\ln a$	$\operatorname{arc\,csc} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
x^x	$x^x(1+\ln x)$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{sech}^2 x$
$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e\approx 0.4343\frac{1}{x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{csch}^2 x$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x\operatorname{th} x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{csch} x$	$-\operatorname{csch} x\operatorname{cth} x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$	$\operatorname{Arsh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$		
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x\sec x$		

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathrm{Ar\,ch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x>1$ $(\mathrm{Arch}\,x>0)$	$\mathrm{Ar\,sech}\,x$	$-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ $(\mathrm{Ar\,sech}\,x>0)$
$\mathrm{Arth}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(\|x\|<1)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{Ar\,csch}\,x$	$-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}},\ x>0$
		$\ln\|\mathrm{sh}\,x\|$	$\mathrm{cth}\,x$
		$\ln\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{th}\,x$
$\mathrm{Ar\,cth}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ $(\|x\|>1)$	$-\frac{1}{x^2-1}$	$\ln\|\mathrm{th}\,x\|$	$\frac{1}{\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x}=\mathrm{sech}\,x\,\mathrm{csch}\,x$

[简单函数的高阶导数表]

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^m	$m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ (当 m 为整数且 $n>m$ 时, $f^{(n)}(x)=0$)
$\sqrt{x}$	$(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2n-1}{2}}}$ (这里 $(2n+1)!!=(2n+1)(2n-1)\cdots5\cdot3\cdot1$)
e^x	e^x
e^{mx}	$m^n e^{mx}$
a^x	$a^x(\ln a)^n \quad (a>0)$
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\cdot\frac{1}{x^n}$
$\sin x$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin mx$	$m^n\sin\left(mx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos mx$	$m^n\cos\left(mx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{sh}\,x$ (n 为偶数), $\mathrm{ch}\,x$ (n 为奇数)
$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$ (n 为偶数), $\mathrm{sh}\,x$ (n 为奇数)

4. 数值导数

当函数用图形或表格给出时，就不可能用定义求出它的导数，只能用近似方法求数值导数。

［图解微分法］ 适用于用图形给出的函数求导数，例如机械设计中已知 s-t 图，求 v-t 图，a-t 图等，其基本步骤如下：

(1) 将原坐标系 Oxy 沿 y 轴负方向平移一段距离得坐标系 $O'x'y$(图 5.4)。

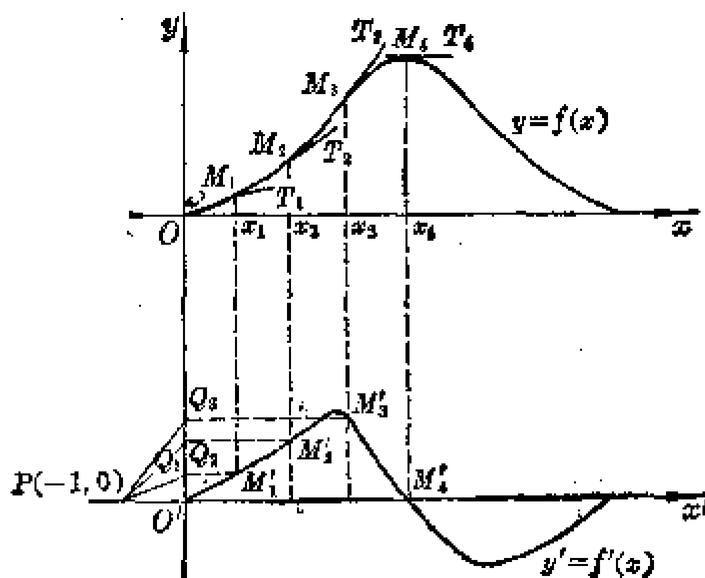


图 5.4

(2) 过曲线 $y=f(x)$ 上点 $M_1(x_1,y_1)$ 作切线 M_1T_1。在坐标系 $O'x'y$ 内，过点 $P(-1,0)$ 作 PQ_1 平行于 M_1T_1 交 y 轴于点 Q_1，那末点 Q_1(点 M_1')的纵坐标就是导数 $y_1'=f'(x_1)$。以 Q_1 的纵坐标为纵坐标，x_1 为横坐标作出点 M_1'。

(3) 在曲线 $y=f(x)$ 上取若干个点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$，在曲线弯曲程度较大处点取得密些。仿上作法，在坐标系 $O'x'y$ 内得到相应点 $M_1', M_2', \cdots, M_n'$。顺次连成光滑曲线，即是导函数 $y'=f'(x)$ 的图形。

［差商公式］ 在实用中常使用下列简单的近似公式

$$f'(a)\approx\frac{\Delta f(a)}{h},\quad f''(a)\approx\frac{\Delta^2 f(a)}{h^2},\quad \cdots,\quad f^{(k)}(a)\approx\frac{\Delta^k f(a)}{h^k}$$

式中

$\Delta f(a)=f(a+h)-f(a)$ （函数 $f(x)$ 在点 a 的 1 阶差分）

$\Delta^2 f(a)=\Delta f(a+h)-\Delta f(a)$ （函数 $f(x)$ 在点 a 的 2 阶差分）

………………………………………………

$\Delta^k f(a)=\Delta^{k-1} f(a+h)-\Delta^{k-1} f(a)$ （函数 $f(x)$ 在点 a 的 k 阶差分）

在函数的数值表中，如果有误差，则高阶差分的偏差较大，所以用以上公式不宜计算高阶导数。

［用插值多项式求数值导数］ 假定已经求出了函数 $y=f(x)$ 的插值多项式 $P_n(x)$，它可以求导，则用 $P_n'(x)$ 近似 $f'(x)$，由

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

略去余项，得

$$f'(x)\approx P_n'(x) \qquad f''(x)\approx P_n''(x)$$

等等。它们的余项相应为 $R_n'(x)$，$R_n''(x)$，等等。

应当指出，当插值多项式 $P_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ 时，$P_n'(x)$ 不一定收敛于 $f'(x)$。另外，当 h 缩小时，截断误差减小，但舍入误差却增加，因此，采用缩小步长的方法也不一定能达到提高精度的目的。由于用插值法求数值微分的不可靠性，在计算时，要特别注意误差分析，或者改用其他方法。

［拉格朗日公式］ （由拉格朗日插值公式得来，见第十七章，§2，三）

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\sum_{k=0}^{n}L_k'(x)y_k+R_n'(x)$$

式中

$$L_k'(x)=\sum_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{\pi_n(x)}{(x-x_k)(x-x_j)\pi_n'(x_k)}$$

$$\pi_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$$

$$R_n'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\pi_n'(x)+\frac{\pi_n(x)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\theta)$$

$$\theta=\theta(x) \qquad (x_0<\theta<x_n)$$

［马尔科夫公式］ （由牛顿插值公式得来，见第十七章，§2，二）

$$f'(x_0+th)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{2t-1}{2}\Delta^2y_0+\frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3y_0+\cdots+\frac{d}{dt}C_n^t\Delta^ny_0\right]$$
$$+h^nf^{(n+1)}(\theta)\frac{d}{dt}C_{n+1}^t+h^{n+1}C_{n+1}^t\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\theta) \qquad (x_0<\theta<x_n)$$

特别，当 $t=0$ 时，有

$$hf_0'=\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2y_0+\frac{1}{3}\Delta^3y_0-\frac{1}{4}\Delta^4y_0+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^ny_0-\cdots$$

$$h^2f_0^{(2)}=\Delta^2y_0-\Delta^3y_0+\frac{11}{12}\Delta^4y_0-\frac{5}{6}\Delta^5y_0+\cdots$$

$$h^3f_0^{(3)}=\Delta^3y_0-\frac{3}{2}\Delta^4y_0+\frac{7}{4}\Delta^5y_0-\frac{15}{8}\Delta^6y_0+\cdots$$

$$h^4f_0^{(4)}=\Delta^4y_0-2\Delta^5y_0+\frac{17}{6}\Delta^6y_0-\frac{7}{2}\Delta^7y_0+\cdots$$

$$h^5f_0^{(5)}=\Delta^5y_0-\frac{5}{2}\Delta^6y_0+\frac{25}{6}\Delta^7y_0-\frac{35}{6}\Delta^8y_0+\cdots$$

[等距公式]

三点公式

$$y_t'=f'(x_0+th)\approx\frac{1}{h}\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)y_{-1}-2ty_0+\left(t+\frac{1}{2}\right)y_1\right]$$

四点公式

$$y_t'=f'(x_0+th)\approx\frac{1}{h}\left(-\frac{3t^2-6t+2}{6}y_{-1}+\frac{3t^2-4t-1}{2}y_0\right.$$
$$\left.-\frac{3t^2-2t-2}{2}y_1+\frac{3t^2-1}{6}y_2\right)$$

五点公式

$$y_t'=f'(x_0+th)\approx\frac{1}{h}\left(\frac{2t^3-3t^2-t+1}{12}y_{-2}-\frac{4t^3-3t^2-8t+4}{6}y_{-1}\right.$$
$$\left.+\frac{2t^3-5t}{2}y_0-\frac{4t^3+3t^2-8t-4}{6}y_1+\frac{2t^3+3t^2-t-1}{12}y_2\right)$$

[用三次样条函数求数值导数]　这个方法能避免用插值法求数值导数的不可靠性．因为对于样条函数(曲线 $y=f(x)$ 的三次样条函数 $S(x)$ 的作法见第十七章，§2，四)，当被插值函数 $f(x)$ 有四阶连续导数，且 $h_i=x_{i+1}-x_i\to0$ 时，只要 $S(x)$ 收敛于 $f(x)$，则导数 $S'(x)$ 一定收敛于 $f'(x)$，且 $S(x)-f(x)=O(H^4)$，$S'(x)-f'(x)=O(H^3)$，$S''(x)-f''(x)=O(H^2)$，其中 H 是 h_i 的最大值．因此，可直接通过三次样条函数

$$f(x)\approx S(x)=\left[\frac{3}{h_i^2}(x_{i+1}-x)^2-\frac{2}{h_i^3}(x_{i+1}-x)^3\right]y_i$$
$$+\left[\frac{3}{h_i^2}(x-x_i)^2-\frac{2}{h_i^3}(x-x_i)^3\right]y_{i+1}$$
$$+h_i\left[\frac{1}{h_i^2}(x_{i+1}-x)^2-\frac{1}{h_i^3}(x_{i+1}-x)^3\right]m_i$$
$$-h_i\left[\frac{1}{h_i^2}(x-x_i)^2-\frac{1}{h_i^3}(x-x_i)^3\right]m_{i+1}$$

求数值导数得

$$f'(x)\approx S'(x)=\frac{6}{h_i^2}\left[\frac{1}{h_i}(x_{i+1}-x)^2-(x_{i+1}-x)\right]y_i$$

$$+\frac{6}{h_i^2}\left[(x-x_i)-\frac{1}{h_i}(x-x_i)^2\right]y_{i+1}$$

$$+\frac{1}{h_i}\left[\frac{3}{h_i}(x_{i+1}-x)^2-2(x_{i+1}-x)\right]m_i$$

$$-\frac{1}{h_i}\left[2(x-x_i)-\frac{3}{h_i}(x-x_i)^2\right]m_{i+1}$$

$$f''(x)\approx S''(x)=\frac{6}{h_i^2}\left[1-\frac{2}{h_i}(x_{i+1}-x)\right]y_i$$

$$+\frac{6}{h_i^2}\left[1-\frac{2}{h_i}(x-x_i)\right]y_{i+1}+\frac{2}{h_i}\left[1-\frac{3}{h_i}(x_{i+1}-x)\right]m_i$$

$$-\frac{2}{h_i}\left[1-\frac{3}{h_i}(x-x_i)\right]m_{i+1}$$

式中 $h_i=x_{i+1}-x_i$, $y_i=f(x_i)$, $m_i=S'(x_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$.

若仅求样点 x_i 上的导数,则

$$f'(x_i)\approx m_i$$

$$f''(x_i)\approx S''(x_i)=-\frac{6}{h_i^2}y_i+\frac{6}{h_i^2}y_{i+1}-\frac{4}{h_i}m_i-\frac{2}{h_i}m_{i+1}$$

$$f''(x_{i+1})\approx S''(x_{i+1})=\frac{6}{h_i^2}y_i-\frac{6}{h_i^2}y_{i+1}+\frac{2}{h_i}m_i+\frac{4}{h_i}m_{i+1}$$

二、多变量函数的微分

〔偏导数及其几何意义〕 设二元函数

$$u=f(x,y)$$

当变量 x 有一个改变量 Δx 而变量 y 保持不变时,得到一个改变量

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$

如果当 $\Delta x\to 0$ 时,极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

存在,那末这个极限称为函数 $u=f(x,y)$ 关于变量 x 的偏导数,记作 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$,也记作 $f_x'(x,y)$ 或 $f_x(x,y)$,即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f_x'(x,y)=f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

类似地，可以定义二元函数 $u=f(x,y)$ 关于变量 y 的偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f'_y(x,y)=f_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

偏导数可以按照单变量函数的微分法则求出，只须对所论变量求导数，其余变量都看作常数。

偏导数的几何意义如下：

二元函数 $u=f(x,y)$ 表示一曲面，通过曲面上一点 $M(x,y,u)$ 作一平行于 Oxu 平面的平面，与曲面有一条交线，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 就是这条曲线在该点的切线与 x 轴正向夹角 α 的正切，即 $\frac{\partial u}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha$。同样，有 $\frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{tg}\beta$（图 5.5）。

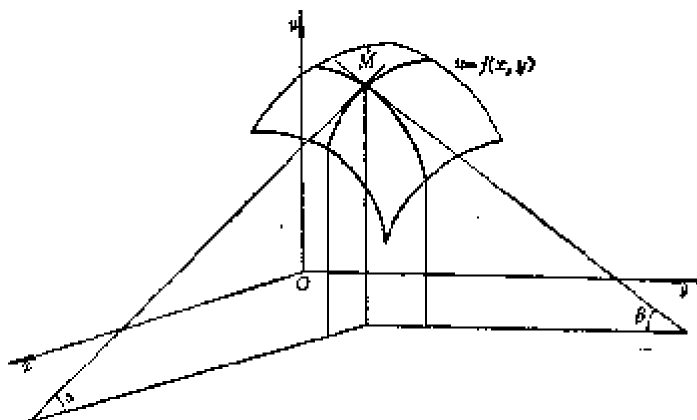


图　5.5

偏导数的定义不难推广到多变量函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的情形。

［偏微分］　多变量函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对其中一个变量（例如 x_1）的偏微分为

$$d_{x_1}u=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1$$

也可记作 $d_{x_1}f$。

［可微函数与全微分］　若函数 $u=f(x,y)$ 的全改变量可写为

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+O(\rho)$$

式中 A,B 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $u=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分（或可微），这时函数 $u=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 一定存在，而且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=B$$

改变量 Δu 的线性主部

$$A\Delta x+B\Delta y=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

称为函数 $u=f(x,y)$ 的全微分，记作

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{1}$$

函数在一点可微的充分条件：如果在点 (x,y) 函数 $u=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 存在而且连续，那末函数在该点是可微的。

公式(1)具有一阶微分的不变性，即当自变量 x,y 又是另外两个自变量 t,s 的函数时，上面的公式仍然成立。

上述结果不难推广到多变量函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的情形。

注意，在一个已知点，偏导数的存在一般说来还不能确定微分的存在。

[复合函数的微分法与全导数]

1° 设 $u=f(x,y)$，$x=\varphi(t,s)$，$y=\psi(t,s)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

2° 设 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 又都是 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 的函数，则

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_m}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

3° 设 $u=f(x,y,z)$，而 $y=\varphi(x,t)$，$z=\psi(x,t)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_x(x,\varphi(x,t),\psi(x,t))+f'_y(x,\varphi(x,t),\psi(x,t))\varphi'_x(x,t)$$
$$+f'_z(x,\varphi(x,t),\psi(x,t))\psi'_x(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f'_y(x,\varphi(x,t),\psi(x,t))\varphi'_t(x,t)+f'_z(x,\varphi(x,t),\psi(x,t))\psi'_t(x,t)$$

4° 设 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x_1=x_1(t)$，$x_2=x_2(t)$，$\cdots$，$x_n=x_n(t)$，则函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全导数为

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

[齐次函数与欧拉公式] 如果函数 $f(x,y,z)$ 恒等地满足下列关系式

$$f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$$

则称 $f(x,y,z)$ 是一个 k 次的齐次函数．对于这种函数，只要它可微，就有

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf \qquad \text{(欧拉公式)}$$

注意，齐次函数的次数 k 可以是任意实数，例如，函数

$$x^{\pi}\cdot\sin\frac{y}{x}+y^{\pi}\cdot\cos\frac{x}{y}$$

就是自变量 x 及 y 的 π 次齐次函数．

[隐函数的微分法] 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=0$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=u_{x_1}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=u_{x_2}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}=u_{x_n}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\neq 0\right)$$

(参考本节，四)．

[高阶偏导数与混合偏导数] 函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的二阶偏导数为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, $\cdots$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}$, $\cdots$，后者称为混合偏导数．三阶偏导数为 $\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}$, $\cdots$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x_n^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}$, $\cdots$．类似地可定义更高阶的偏导数．

关于函数乘积的混合偏导数有下面公式：设 u,v 都是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，则

$$\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(uv)=\sum_{\substack{j_k+k_k=i_k\\1\leqslant k\leqslant n}}\frac{i_1!\cdots i_n!}{j_1!\cdots j_n!k_1!\cdots k_n!}\cdot\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}u\cdot\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}v$$

注意，混合偏导数一般与求导的次序有关，但是，如果两个同阶的偏导数，只是求导的次序不同，那末只要这两个偏导数都连续，它们就一定彼此相等．例如，如果在某一点(x,y)函数f''_{xy}与f''_{yx}都连续，那末一定有

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$$

［高阶全微分］ 二元函数$u=f(x,y)$的二阶全微分为

$$d^2u=d(du)=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2$$

或简记作

$$d^2u=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u$$

式中偏导数符号$\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$经平方后出现$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，它们再作用到函数$u=f(x,y)$上，以下类同．

二元函数$u=f(x,y)$的n阶全微分为

$$d^nu=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^nu$$

多变量函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$的n阶全微分为

$$d^nu=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+dx_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^nu$$

［偏导数的差分形式］

（表中h为x轴方向步长，l为y轴方向步长）

图 示	差 分 公 式
$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial u_{0,0}}{\partial x}\approx\frac{1}{2h}(u_{1,0}-u_{-1,0})$
	$\frac{\partial u_{0,0}}{\partial x}\approx\frac{1}{4h}(u_{1,1}-u_{-1,1}+u_{1,-1}-u_{-1,-1})$

图　　示	差　分　公　式
$\frac{\partial u}{\partial y}$	$\frac{\partial u_{0,0}}{\partial y}\approx\frac{1}{2l}(u_{0,1}-u_{0,-1})$
	$\frac{\partial u_{0,0}}{\partial y}\approx\frac{1}{4l}(u_{1,1}-u_{1,-1}+u_{-1,1}-u_{-1,-1})$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x^2}\approx\frac{1}{h^2}(u_{1,0}-2u_{0,0}+u_{-1,0})$
	$\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x^2}\approx\frac{1}{12h^2}(-u_{2,0}+16u_{1,0}-30u_{0,0}+16u_{-1,0}-u_{-2,0})$
	$\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x^2}\approx\frac{1}{3h^2}(u_{1,1}-2u_{0,1}+u_{-1,1}+u_{1,0}-2u_{0,0}+u_{-1,0}+u_{1,-1}-2u_{0,-1}+u_{-1,-1})$
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial y^2}\approx\frac{1}{l^2}(u_{0,1}-2u_{0,0}+u_{0,-1})$
	$\frac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial y^2}\approx\frac{1}{12l^2}(-u_{0,2}+16u_{0,1}-30u_{0,0}+16u_{0,-1}-u_{0,-2})$

图 示	差 分 公 式
	$\dfrac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial y^2} \approx \dfrac{1}{3l^2}(u_{1,1}-2u_{1,0}+u_{1,-1}+u_{0,1}-2u_{0,0}+u_{0,-1}+u_{-1,1}-2u_{-1,0}+u_{-1,-1})$
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$	$\dfrac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x\partial y} \approx \dfrac{1}{4hl}(u_{1,1}-u_{1,-1}-u_{-1,1}+u_{-1,-1})$
	$\dfrac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x\partial y} \approx -\dfrac{1}{2hl}(u_{1,0}+u_{-1,0}+u_{0,1}+u_{0,-1}-2u_{0,0}-u_{1,1}-u_{-1,-1})$
	$\dfrac{\partial^2 u_{0,0}}{\partial x\partial y} \approx \dfrac{1}{2hl}(u_{1,0}+u_{-1,0}+u_{0,1}+u_{0,-1}-2u_{0,0}-u_{-1,1}-u_{1,-1})$
$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$	$\dfrac{\partial^4 u_{0,0}}{\partial x^4} \approx \dfrac{1}{h^4}(u_{2,0}-4u_{1,0}+6u_{0,0}-4u_{-1,0}+u_{-2,0})$
$\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$	$\dfrac{\partial^4 u_{0,0}}{\partial y^4} \approx \dfrac{1}{l^4}(u_{0,2}-4u_{0,1}+6u_{0,0}-4u_{0,-1}+u_{0,-2})$
$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$	$\dfrac{\partial^4 u_{0,0}}{\partial x^2\partial y^2} \approx \dfrac{1}{h^2l^2}(u_{1,1}+u_{-1,1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1}-2u_{1,0}-2u_{-1,0}-2u_{0,1}-2u_{0,-1}+4u_{0,0})$

图　　示	差　分　公　式
$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{array}$	$h^2\Delta u_{0,0}\approx -4u_{0,0}+u_{1,0}+u_{0,1}+u_{-1,0}+u_{0,-1}$
$\begin{array}{ccccc} & & -1 & & \\ & & 16 & & \\ -1 & 16 & -60 & 16 & -1 \\ & & 16 & & \\ & & -1 & & \end{array}$	$12h^2\Delta u_{0,0}\approx -60u_{0,0}+16(u_{1,0}+u_{-1,0}+u_{0,1}+u_{0,-1})-(u_{2,0}+u_{-2,0}+u_{0,2}+u_{0,-2})$
$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{array}$	$h^4\Delta\Delta u_{0,0}\approx 20u_{0,0}-8(u_{1,0}+u_{0,1}+u_{-1,0}+u_{0,-1})+2(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{-1,1}+u_{-1,-1})+(u_{2,0}+u_{0,2}+u_{-2,0}+u_{0,-2})$
$\begin{array}{ccccccc} & & & -1 & & & \\ & & -1 & 14 & -1 & & \\ & -1 & 20 & -77 & 20 & -1 & \\ -1 & 14 & -77 & 184 & -77 & 14 & -1 \\ & -1 & 20 & -77 & 20 & -1 & \\ & & -1 & 14 & -1 & & \\ & & & -1 & & & \end{array}$	$6h^4\Delta\Delta u_{0,0}\approx -(u_{0,3}+u_{0,-3}+u_{3,0}+u_{-3,0})+14(u_{0,2}+u_{0,-2}+u_{2,0}+u_{-2,0})-77(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0})+184u_{0,0}+20(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{-1,1}+u_{-1,-1})-(u_{1,2}+u_{2,1}+u_{1,-2}+u_{2,-1}+u_{-1,2}+u_{-2,1}+u_{-1,-2}+u_{-2,-1})$

三、函数行列式(或雅可比式)及其性质

设有 n 个自变量的 n 个函数

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases} \tag{1}$$

它们定义在某一 n 维区域 D 中，并关于自变量有连续偏导数，则由这些偏导数组成的行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

称为函数组(1)的函数行列式或雅可比式. 记作

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

函数行列式具有与普通导数相似的一系列性质.

1° 除函数组(1)外,再取在区域P中有定义且有连续偏导数的函数组

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \cdots, t_n) \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \cdots, t_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \cdots, t_n) \end{cases}$$

假设当点$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$在P中变动时,对应点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$并不越出区域D, 于是就可以通过$x_1, x_2, \cdots, x_n$把$y_1, y_2, \cdots, y_n$看成是$t_1, t_2, \cdots, t_n$的复合函数. 这时有

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \cdots, t_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(t_1, t_2, \cdots, t_n)} \tag{2}$$

它是一元的复合函数的微分法则

$$y = f(x), \quad x = \varphi(t); \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

的推广.

2° 特别是, 如果令$t_1 = y_1$, $t_2 = y_2, \cdots$, $t_n = y_n$ (换句话说, 由新变量x_1, $x_2, \cdots, x_n$又回到旧变量$y_1, y_2, \cdots, y_n$), 则由(2)式得到

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = 1$$

它是一元函数的反函数微分法则

$$y = f(x), \quad x = \varphi(y); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

的推广.

3° 设有n个自变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的$m(m<n)$个函数$y_1, y_2, \cdots, y_m$:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

式中$x_1, x_2, \cdots, x_n$又是m个自变量$t_1, t_2, \cdots, t_m$的函数:

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1(t_1, t_2, \cdots, t_m) \\ x_2=\varphi_2(t_1, t_2, \cdots, t_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=\varphi_n(t_1, t_2, \cdots, t_m) \end{cases}$$

假设它们都有连续偏导数．那末 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 作为 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 的函数的函数行列式的表达式为

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\partial(t_1, t_2, \cdots, t_m)}=\sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_m)} \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})} \cdot \frac{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})}{\partial(t_1, t_2, \cdots, t_m)}$$

等式右边的和式是从 n 个标号 $1, 2, \cdots, n$ 内每次取 m 个的一切可能组合而取遍的．

当 $m=1$ 时，上面的公式就是普通的复合函数的微分公式

$$\frac{dy}{dt}=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

的推广．特别当 $n=3, m=2$ 时，有

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(t_1, t_2)}=\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}+\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_2, x_3)} \cdot \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2)}+\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_3, x_1)} \cdot \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(t_1, t_2)}$$

4° 设有 $2n$ 个自变量的 n 个方程所组成的方程组

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

假定

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} \neq 0$$

将 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 看成由这方程组所确定的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，这时有

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}=(-1)^n \frac{\dfrac{\partial(F_1, \cdots, F_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}}{\dfrac{\partial(F_1, \cdots, F_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)}}$$

它是由 $F(x, y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数公式

$$y'_x=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

的推广．

5° 函数行列式可作为面积(体积)的伸缩系数．

假定函数

$$u=u(x, y), \quad v=v(x, y)$$

在 xy 平面的某个区域上连续，并且有连续的偏导数，又假定在这个区域上

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$$

那末有
$$dudv=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|dxdy$$

对更高维的空间有类似的表达式。

例 直角坐标与球面坐标的变换

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

的函数行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=-r^2\sin\theta$$

这时
$$dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|drd\theta d\varphi=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

四、隐函数

1. 单变量隐函数

对于由方程

$$F(x,y)=0$$

所确定的隐函数有下述定理:

[存在定理] 设函数 $F(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域*R 内定义并且满足下列条件:

(i) $F(x,y)$ 及其偏导数 F'_x, F'_y 在 R 内连续,

(ii) $F(x_0,y_0)=0$,

(iii) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$,

那末在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域

$$R'=(x_0-\delta,x_0+\delta;y_0-\delta',y_0+\delta')$$

内有唯一的单值函数 $y=f(x)$ 存在,具有下列性质:

1° $F[x,f(x)]\equiv 0$,且 $f(x_0)=y_0$,

2° 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内函数 $f(x)$ 连续,

3° 它在这区间内有连续的导数 $f'(x)$.

[导数的计算]

---

* 邻域的概念见第二十一章,这里 M_0 的邻域是指包含 M_0 的某一矩形.

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \quad (F'_y \neq 0)$$

$$y''_{x^2} = \frac{2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} - (F'_y)^2 \cdot F''_{x^2} - (F'_x)^2 \cdot F''_{y^2}}{(F'_y)^3} \qquad (F'_y \neq 0)$$

2. 多变量隐函数

对于由方程

$$F(x,y,z)=0$$

所确定的隐函数有下述定理:

[存在定理] 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 的某一邻域 R 内定义并且满足下列条件:

(i) $F(x,y,z)$ 及其偏导数 F'_x, F'_y, F'_z 在 R 内连续,

(ii) $F(x_0, y_0, z_0)=0$,

(iii) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

那末在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域

$$R' = (x_0-\delta, x_0+\delta;\ \ y_0-\delta', y_0+\delta';\ \ z_0-\delta'', z_0+\delta'')$$

内有唯一的单值函数 $z=h(x,y)$ 存在,具有下列性质:

1° $F[x,y,h(x,y)] \equiv 0$, 且 $h(x_0, y_0)=z_0$,

2° 函数 $h(x,y)$ 连续,

3° 它有连续的偏导数 h'_x, h'_y.

[导数的计算]

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} \qquad (F'_z \neq 0)$$

如果需要求所有一,二,三,…各阶的偏导数,只要将恒等式

$$F(x,y,z)=0$$

两边求一阶,二阶,三阶,…各阶的全微分,然后和全微分 $dz,\ d^2z, d^3z$,…的定义形式对比,即得.

注意,对于由方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)=0$$

所确定的隐函数有类似的结果.

3. 由方程组所确定的隐函数

对由方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{1}$$

所确定的隐函数有下述定理:

[存在定理] 设函数$F(x,y,z)$及$G(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域R内定义,并且满足下列条件:

(i) $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$及其所有偏导数都在R内连续,

(ii) $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $G(x_0,y_0,z_0)=0$,

(iii) 行列式

$$J(x,y,z)=\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$$

在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$不等于零: $J(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

那末在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域

$$R'=(x_0-\delta,x_0+\delta;\ y_0-\delta',y_0+\delta';\ z_0-\delta'',z_0+\delta'')$$

内有唯一的一组单值函数$y=f(x)$, $z=g(x)$存在,具有下列性质:

1° $F[x,f(x),g(x)]\equiv 0$, $G[x,f(x),g(x)]\equiv 0$, 且$f(x_0)=y_0$, $g(x_0)=z_0$,

2° 在区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内函数$f(x)$, $g(x)$连续,

3° 在这区间内有连续导数$f'(x)$, $g'(x)$.

[导数的计算] 将y和z看作x的隐函数,将方程组(1)对x微分得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial G}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

这是关于$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{dz}{dx}$的线性方程组,其行列式$J\neq 0$,由此可以解出$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{dz}{dx}$.

注意,对于由方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)=0 \\ F_2(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m)=0 \end{cases}$$

所确定的隐函数有类似的结果.

五、微分表达式中的变量替换

1. 单变量函数

设$y=f(x)$,并有一个含有自变量、因变量及其导数的表达式

$$H=F(x,y,y'_x,y''_{x^2},\cdots)$$

当作变量替换时，各导数可按下列方法计算：

［作自变量变换的情形］　设变换公式为

$$x=\varphi(t)$$

这时
$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{x^2}=\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t}{x'^3_t}$$

$$y'''_{x^3}=\frac{x'_t(x'_t y'''_{t^3}-x'''_{t^3}y'_t)-3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t)}{x'^5_t} \tag{1}$$

………………

［自变量和函数都作变换的情形］　设变换公式为

$$x=\varphi(t,u),\quad y=\psi(t,u)$$

式中 t 为新的自变量，u 为新的函数.

这时，由复合函数的微分法则得到

$$x'_t=\varphi'_t+\varphi'_u u'_t,\quad y'_t=\psi'_t+\psi'_u u'_t$$

$$x''_{t^2}=\varphi''_{t^2}+2\varphi''_{tu}u'_t+\varphi''_{u^2}(u'_t)^2+\varphi'_u u''_{t^2}$$

$$y''_{t^2}=\psi''_{t^2}+2\psi''_{tu}u'_t+\psi''_{u^2}(u'_t)^2+\psi'_u u''_{t^2}$$

………………

把这些式子代入公式(1)，即得结果.

2. 多变量函数

［作自变量变换的情形］　设 $z=f(x,y)$，并有一个含有自变量、因变量及其偏导数的表达式

$$H=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\cdots\right)$$

变换公式为

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v)$$

式中 u 和 v 为新的自变量，则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 由下列方程确定：

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v}$$

其他高次偏导数也可仿此求出.

［自变量和函数都作变换的情形］　设变换公式为

$$x=\varphi(u,v,w),\quad y=\psi(u,v,w),\quad z=\chi(u,v,w)$$

其中 u,v 为新的自变量，$w=w(u,v)$ 为新的函数，则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 由下列方程

确定:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial \chi}{\partial u}+\frac{\partial \chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial \chi}{\partial v}+\frac{\partial \chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}$$

其他高次偏导数也可仿此求出.

注意,当H内出现的不是个别的偏导数,而是已给阶次的全部偏导数,那末求逐次偏导数时利用全微分比较方便.

六、微分学的基本定理(中值定理)

[洛尔定理] 如果(i)函数$f(x)$定义在闭区间$[a,b]$上而且是连续的,(ii)在开区间(a,b)内存在有限导数$f'(x)$,(iii)在区间的两端点处函数值相等:$f(a)=f(b)$.那末在a与b之间至少存在一点c,使$f'(c)=0$.即曲线$y=f(x)$在点$(c,f(c))$处的切线是水平的(图5.6).

特别,若$f(a)=f(b)=0$,洛尔定理可简述如下:在一个函数的两个根之间,它的一阶导数至少有一个根.

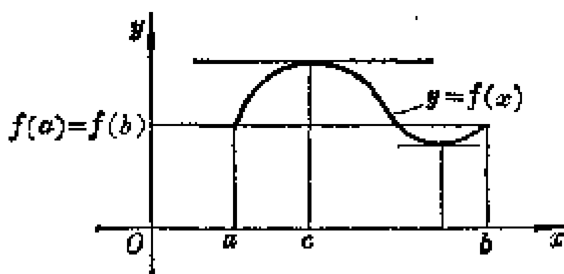


图 5.6

注意,函数$f(x)$须在闭区间$[a,b]$上连续,并且在开区间(a,b)内点点要有导数存在,这对于定理的结论的正确性是很要紧的.例如函数$f(x)=x-[x]$在区间$[0,1]$上,除去在$x=1$时有间断以外满足定理的一切条件,但在$(0,1)$内处处都是$f'(x)=1$.又例如由等式$f(x)=x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$及$f(x)=1-x\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$所定义的函数,在这区间内除去当$x=\frac{1}{2}$时(双边的)导数不存在以外,它也满足定理的一切条件;可是导数$f'(x)$在左半区间内等于$+1$,而在右半区间内等于-1.

定理的条件(iii)也是很重要的,例如函数$f(x)=x$在区间$[0,1]$上,除去条件(iii)以外满足定理的一切条件,而它的导数处处是$f'(x)=1$.

[中值定理] 如果(i)$f(x)$定义在闭区间$[a,b]$上而且是连续的,(ii)在开区间(a,b)内存在有限导数$f'(x)$,那末在a与b之间至少存在一点c,满足等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b) \tag{1}$$

即曲线 $y=f(x)$ 在点 $(c,\ f(c))$ 处的切线与弦 AB 平行(图 5.7)．这个定理也称为有限改变量定理或拉格朗日定理．

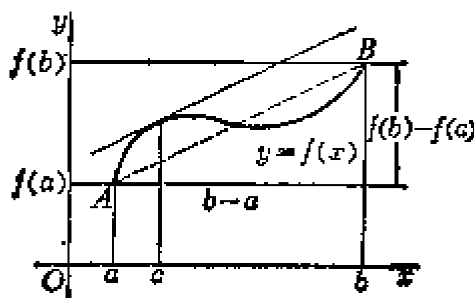


图　5.7

(1) 式也常写成以下几种形式:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(c)\Delta x \quad (x<c<x+\Delta x)$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

由中值定理可得

定理　如果在区间 $[a,b]$ 上的每一点都有 $f'(x)=0$，那末函数 $f(x)$ 在这个区间上是一个常数．

[柯西定理]　如果(i)函数 $f(t)$ 及 $g(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，(ii)在开区间 (a,b) 内有有限导数，(iii)在区间 (a,b) 内 $g'(t)\neq 0$．那末在 a 与 b 之间至少存在一点 c，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a<c<b)$$

这公式称为柯西公式(图 5.8)．柯西定理常称为微分学的广义中值定理，因 $g(t)=x$ 时，这个公式就是公式(1)．

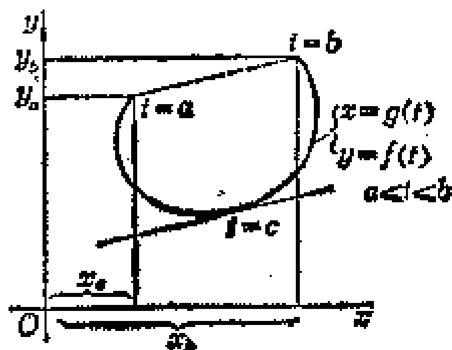


图　5.8

[多变量函数的中值定理]　如果(i)函数 $f(x,y)$ 定义在闭区域 $\bar{D}$ 上并且连续，(ii)在这区域内部(即在它的所有内点)有连续的偏导数 f'_x, f'_y，今考察 D 中的两点

$$M_0(x_0,y_0) \text{ 及 } M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$$

假设这两点能用全部位于 D 区域内的直线段 M_0M_1 来连接，则下面的公式成立:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y \quad (0<\theta<1)$$

由中值定理可得

定理　若在闭连通区域* D 内连续的函数 $f(x,y)$，在此区域内偏导数都等

* 若区域的任意两点可以用一"折线"来连接，而该折线的一切点都在这区域中，这区域就称为连通区域．

于零，即

$$f'_x = f'_y = 0$$

则这函数在区域 D 内必为常数。

七、泰勒公式与泰勒级数

1. 单变量函数的泰勒公式

[泰勒局部公式] 如果函数 $f(x)$ 满足条件: (i)在点 a 的某邻域 $|x-a|<\delta$ 内有定义，(ii)在此邻域内有一直到 $n-1$ 阶的导数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$，(iii)在点 a 处有 n 阶导数 $f^{(n)}(a)$，那末 $f(x)$ 在点 a 的邻域内可表成以下各种形式:

1° $$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+o(h^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+o(h^n) \qquad (\text{当 } h\to 0)$$

2° $$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+o(|x-a|^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o(|x-a|^n) \qquad (\text{当 } x\to a)$$

特别，当 $a=0$ 时，有

[马克劳林公式]

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

$$+o(|x|^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k+o(|x|^n) \qquad (\text{当 } x\to 0)$$

[泰勒公式] 如果函数 $f(x)$ 满足条件: (i) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，(ii) 在此闭区间上有一直到 n 阶的连续导数 $f'(x),\cdots,f^{(n)}(x)$，(iii)当 $a<x<b$ 时有有限导数 $f^{(n+1)}(x)$，那末 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可表成以下各种形式:

1° $$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_n(h) \qquad (a<a+h<b)$$

式中 $R_n(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\quad(0<\theta<1)$ （拉格朗日型余项）

或 $R_n(h)=\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\quad(0<\theta<1)$ （柯西型余项）

$$2^\circ\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k+R_n(x)\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$$

式中 $R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}\quad(a<\xi<b)$ （拉格朗日型余项）

或 $R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)](1-\theta)^n(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta<1)$

（柯西型余项）

特别，当 $a=0$ 时，有

［马克劳林公式］

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k+R_n(x)\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$$

式中 $R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}\quad(a<\xi<b)$ （拉格朗日型余项）

或 $R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$ （柯西型余项）

［泰勒级数］ 在带余项的泰勒公式 2° 中，如果把展开式进行到 $(x-a)$ 的任意高的乘幂，则有

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

不论它是否收敛，以及它的和是否等于 $f(x)$，都称它为函数 $f(x)$ 的泰勒级数．$(x-a)$ 的乘幂的系数

$$f(a),\ \frac{f'(a)}{1!},\ \frac{f''(a)}{2!},\cdots,\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\cdots$$

称为泰勒系数．

［马克劳林级数］ 在带余项的马克劳林公式中，如果展开式进行到 x 的任意高的乘幂，则有

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

不论它是否收敛，以及它的和是否等于 $f(x)$，都称它为函数 $f(x)$ 的马克劳林级数．x 的乘幂的系数

$$f(0),\ \frac{f'(0)}{1!},\ \frac{f''(0)}{2!},\ \cdots,\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \cdots$$

称为马克劳林系数.

多项式的泰勒公式(秦九韶法)见第三章, §2, 一.

2. 多变量函数的泰勒公式

[泰勒公式] 假定在某一点 (x_0, y_0) 的邻域 D 内二元函数 $f(x,y)$ 有直到 $n+1$ 阶为止的一切连续偏导数. 分别给 x 及 y 以改变量 h 及 k, 使连结点 (x_0, y_0) 及 (x_0+h, y_0+k) 的直线段不越出 D 外, 那末 $f(x,y)$ 在 D 内可表成形式:

$$1^\circ\quad f(x_0+h,\ y_0+k)=\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{q!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^q f(x_0, y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\qquad (0<\theta<1)$$

式中符号

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^q f(x,y)$$

的意义如下: 把 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ 看作一个数(而不是看作微分运算的符号), 并根据二项公式展开, 得到

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^q f(x_0, y_0)=\left[\sum_{r=0}^{q} C_q^r h^{q-r}k^r\frac{\partial^q}{\partial x^{q-r}\partial y^r}\right]f(x_0, y_0)$$

$$=\sum_{r=0}^{q} C_q^r h^{q-r}k^r\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial x^{q-r}\partial y^r}\bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}};$$

$$2^\circ\quad f(x,y)=\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{q!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^q f(x_0, y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f[x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)]$$

$$(0<\theta<1)$$

特别, 当 $x_0=0$, $y_0=0$ 时, 得到

[马克劳林公式]

$$f(x,y)=\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{q!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^q f(0,0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta x, \theta y)\qquad (0<\theta<1)$$

对二元以上的多变量函数有类似的公式.

[泰勒级数]　在上面泰勒公式2°中，如果把展开式进行到$(x-x_0)$和$(y-y_0)$的任意高的乘幂,则有

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(x_0,y_0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0)+\cdots$$

不论它是否收敛，以及它的和是否等于$f(x,y)$，都称它为$f(x,y)$的泰勒级数.

[马克劳林级数]　在上面马克劳林公式中，如果把展开式进行到x,y的任意高的乘幂,则有

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)+\cdots$$

不论它是否收敛，以及它的和是否等于$f(x,y)$，都称它为$f(x,y)$的马克劳林级数.

八、幂级数

1. 单变量的幂级数

[定义]　下列形式的级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

(式中$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$都是实常数)称为$x$的幂级数. 更一般地,级数

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

(式中a是一个实常数)也称为幂级数.

[绝对收敛]　如果级数(1)当$x=a$时收敛，那末对于满足$|x|<|a|$的任何x的值,级数(1)都绝对收敛.

[收敛半径与收敛区间]　对于任何一个幂级数，都有一个数$R(0\leqslant R<+\infty)$,使得当$|x|<R$时,级数绝对收敛,当$|x|>R$时,级数发散. 这个数R称为给定级数的收敛半径,区间$(-R,R)$称为它的收敛区间,而在区间的两个端点$x=R$和$x=-R$,级数可能收敛也可能发散.

收敛半径R可按柯西-阿达玛公式

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

或公式

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

计算(若极限存在).

[阿贝耳定理] 若幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ($|x|<R$) 在收敛区间的端点 $x=R$ 处收敛,则

$$S(R)=\lim_{x\to R-0}S(x)$$

[内闭一致收敛] 若级数(1)的收敛半径等于 R, 则对任意满足 $0<R'<R$ 的 R',级数(1)在区间$[-R', R']$上一致收敛.

[连续] 幂级数的和在收敛区间内的每一点处都连续.

[逐项积分] 在级数(1)的收敛区间内的任何一点 x, 都有

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

式中 $S(x)$表示级数(1)的和.

[逐项微分] 幂级数(1)的和 $S(x)$在这个级数的收敛区间内的任一点上都可微. 逐项微分级数(1)得到的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

与(1)具有同样的收敛半径,并且这个级数的和就等于 $S'(x)$.

[高阶导数] 若级数(1)有收敛半径 R, 则它的和 $S(x)$在区间$(-R, R)$内的任何一点都有任意阶导数, 并且函数$S^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$就是逐项微分级数(1)n 次所得到的那个级数(它的收敛半径也同样是 R)的和

$$S^{(n)}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)a_kx^{k-n}\quad(-R<x<R)$$

2. 多变量的幂级数

[双变量的幂级数] 按变量 x, y 的正整数幂次排列的形如

$$\sum_{l,k=0}^{\infty}a_{lk}x^l y^k \tag{2}$$

的重级数称为双变量 x, y 的幂级数.

多变量幂级数的收敛范围的研究有很多地方与单变量的不同，但仍有

定理 若在 $x=x_0, y=y_0$ 时级数(2)收敛，则当

$$|x|<|x_0|, \quad |y|<|y_0|$$

时，级数也收敛.

[收敛范围] 如果M是两个变数 x, y 的区域，在其中各点上幂级数(2)都收敛，而在其外各点上幂级数(2)发散，在边界点上可能发散，也可能收敛. 那末区域M称为幂级数(2)的收敛范围.

双变量的幂级数的收敛范围并不一定是$|x|<R_1, |y|<R_2$ 的形式，例如

1° 级数

$$\sum_{l,k=0}^{\infty} x^l y^k$$

的收敛范围是 $|x|<1, \quad |y|<1$.

2° 级数

$$\sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{x^l y^k}{l!k!}$$

处处收敛.

3° 级数

$$\sum_{l\geq k}^{\infty} x^l y^k = 1+x+x^2+\cdots+x^m+\cdots+xy+x^2y+x^3y+\cdots$$

$$+x^my+\cdots+x^2y^2+x^3y^2+\cdots$$

$$\left(=(1+x+x^2+\cdots)[1+xy+(xy)^2+\cdots]=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-xy}\right)$$

的收敛范围是 $|x|<1, \quad |xy|<1$.

以上结果容易推广到多变量的幂级数中去.

3. 函数的幂级数展开式

[幂级数的唯一性定理] 如果函数 $f(x)$（或 $f(x, y)$）在 $x=0$（或 $x=0, y=0$）可以展开成幂级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

或

$$f(x,y)=\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik} x^i y^k$$

那末这个幂级数就是它的马克劳林级数.

[幂级数的存在性定理]

1° 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 具有任意阶导数，且当 $-R\leqslant x\leqslant R$ 时

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

式中 $R_n(x)$ 是马克劳林公式的余项，则函数 $f(x)$ 在区间 $-R\leqslant x\leqslant R$ 上可以展开成幂级数．实际上可以证明，存在由函数 $f(x)$ 产生的马克劳林级数，它虽然收敛，但它的和却不等于 $f(x)$．

2° 若函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 具有任意阶偏导数，且当 (x,y) 是 xy 平面上某一区域 M 上的点时

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x,y)=0$$

式中 $R_n(x,y)$ 是马克劳林公式的余项，则函数 $f(x,y)$ 在区域 M 上可以展开成幂级数．

上述理论容易推广到二元以上的多变量函数的情形．

九、实数域上函数的幂级数展开式表

函　数	幂 级 数 展 开 式	收 敛 域
[二项式]		
$*(1\pm x)^m$ $(m>0)$	$1\pm mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots$ $+(\pm1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$ （当 m 为正整数时，只包含 $m+1$ 项）	$\|x\|\leqslant1$
$(1\pm x)^{\frac{1}{2}}$	$1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}x^2\pm\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\pm\cdots$	$\|x\|\leqslant1$
$(a\pm x)^m$ $(m>0)$	$a^m\pm ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2$ $\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}a^{m-3}x^3+\cdots$ $+(\pm1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n+\cdots$	$\|x\|\leqslant\|a\|$
$*(1\pm x)^{-m}$ $(m>0)$	$1\mp mx+\frac{m(m+1)}{2!}x^2\mp\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3$ $+\cdots+(\mp1)^n\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}x^n+\cdots$	$\|x\|<1$

表中标 * 者应记牢．

函 数	幂级数展开式	收敛域
$(1\pm x)^{-\frac{1}{2}}$	$1\mp\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2\mp\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\mp\cdots$	$\|x\|<1$
$*(1\pm x)^{-1}$	$1\mp x+x^2\mp x^3+x^4\mp\cdots$	$\|x\|<1$
$(1\pm x)^{-2}$	$1\mp2x+3x^2\mp4x^3+5x^4\mp\cdots$	$\|x\|<1$
$(a\pm x)^{-m}$ $(m>0)$	$a^{-m}\mp ma^{-m-1}x+\frac{m(m+1)}{2!}a^{-m-2}x^2$ $\mp\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}a^{-m-3}x^3+\cdots$ $+(\mp1)^n\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}a^{-m-n}x^n$ $+\cdots$	$\|x\|<\|a\|$
$(a-bx)^{-1}$	$\frac{1}{a}\left(1+\frac{bx}{a}+\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{b^3x^3}{a^3}+\cdots\right)$	$x<\left\|\frac{a}{b}\right\|$
$\sqrt[q]{(1+x)^p}$ $(p>0$ 或 $q>0)$	$1+\frac{p}{q}x+\frac{p(p-q)}{q\cdot2q}x^2+\frac{p(p-q)(p-2q)}{q\cdot2q\cdot3q}x^3$ $+\cdots$	$\|x\|\leqslant1$
[三角函数]		
$*\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$\sin(x+a)$	$\sin a+\cos a\cdot x-\frac{\sin a}{2!}x^2-\frac{\cos a}{3!}x^3+\frac{\sin a}{4!}x^4$ $+\cdots+\frac{\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$*\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$\cos(x+a)$	$\cos a-\sin a\cdot x-\frac{\cos a}{2!}x^2+\frac{\sin a}{3!}x^3$ $+\frac{\cos a}{4!}x^4-\cdots+\frac{\cos\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n+\cdots$	$\|x\|<\infty$

函 数	幂级数展开式	收敛域
$\operatorname{tg} x$	$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\cdots$ $+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots$ (式中B_n为伯努利数,下同,见231页的附表)	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\frac{1}{4725}x^7-\cdots$ $-\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1}-\cdots$	$0<\lvert x\rvert<\pi$
$\sec x$	$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\cdots$ $+\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$ (式中E_n为欧拉数,见231页的附表)	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\csc x$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+\frac{127}{604800}x^7$ $+\cdots+\frac{2(2^{2n-1}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots$	$0<\lvert x\rvert<\pi$
[反三角函数]		
$\arcsin x$	$x+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\cdots$ $+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2\cdot3}x^3-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7-\cdots$ $-\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
$\operatorname{arctg} x$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,$	$\lvert x\rvert<1$
	$\pm\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}-\cdots$ $+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}+\cdots$	$\lvert x\rvert>1$

函　　数	幂 级 数 展 开 式	收 敛 域
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}-\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right]$	$\|x\|<1$
[指数函数]		
$^*e^x$	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$a^x=e^{x\ln a}$	$1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\frac{(\ln a)^3}{3!}x^3+\cdots$ $+\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$\frac{x}{e^x-1}$	$1-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+\frac{1}{30240}x^6-\cdots$ $+(-1)^{n+1}\frac{B_n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$	$\|x\|<2\pi$
$e^{\sin x}$	$1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}-\frac{8x^5}{5!}-\frac{3x^6}{6!}+\frac{56x^7}{7!}+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$e^{\cos x}$	$e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{6!}+\cdots\right)$	$\|x\|<\infty$
$e^{\operatorname{tg} x}$	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{9x^4}{4!}+\frac{37x^5}{5!}+\cdots$	$\|x\|<\frac{\pi}{2}$
[对数函数]		
$\ln x$	$2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\cdots+\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}\right.$ $\left.+\cdots\right]$	$x>0$
$\ln x$	$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots$ $+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\cdots$	$0<x\leqslant 2$
$\ln x$	$\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3+\cdots$ $+\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n+\cdots$	$x>\frac{1}{2}$

函　数	幂级数展开式	收敛域
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$	$-1<x\leqslant 1$
$\ln(1-x)$	$-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right)$	$-1\leqslant x<1$
$\ln(a+x)$ $(a>0)$	$\ln a+2\left[\frac{x}{2a+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5+\cdots+\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^{2n+1}+\cdots\right]$	$-a<x<\infty$
$\ln\frac{1+x}{1-x}$	$2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right)$	$\|x\|<1$
$\ln\frac{x+1}{x-1}$	$2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}+\cdots\right]$	$\|x\|>1$
$\ln\frac{x+1}{x}$	$2\left[\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3(2x+1)^3}+\frac{1}{5(2x+1)^5}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2x+1)^{2n+1}}+\cdots\right]$	$\|2x+1\|>1$
$\ln\|\sin x\|$	$\ln\|x\|-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\cdots-\frac{2^{2n-1}B_n}{n(2n)!}x^{2n}-\cdots$	$0<\|x\|<\pi$
$\ln\cos x$	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6-\frac{17}{2520}x^8-\cdots-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n)!}x^{2n}-\cdots$	$\|x\|<\frac{\pi}{2}$
$\ln\|\operatorname{tg} x\|$	$\ln\|x\|+\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^6+\cdots+\frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n)!}x^{2n}+\cdots$	$0<\|x\|<\frac{\pi}{2}$
[双曲函数]		
$\operatorname{sh} x$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$\|x\|<\infty$

函 数	幂级数展开式	收敛域
$\operatorname{ch} x$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\infty$
$\operatorname{th} x$	$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9-\cdots$ $+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{cth} x$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3+\frac{2}{945}x^5-\frac{1}{4725}x^7+\cdots$ $+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots$	$0<\lvert x\rvert<\pi$
$\operatorname{sech} x$	$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4-\frac{61}{720}x^6+\frac{367}{8064}x^8-\cdots$ $+(-1)^n\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$	$\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{csch} x$	$\frac{1}{x}-\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3-\frac{31}{15120}x^5+\cdots$ $+(-1)^n\frac{2(2^{2n-1}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots$	$0<\lvert x\rvert<\pi$
[反双曲函数]		
$\operatorname{Ar\,sh} x$ $=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$x-\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\cdots$ $+(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots$	$\lvert x\rvert<1$
$\operatorname{Ar\,sh} x$	$\ln 2x+\frac{1}{2\cdot2x^2}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot4x^4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot6x^6}+\cdots$ $+(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2 2n\,x^{2n}}+\cdots$	$\lvert x\rvert>1$
$\operatorname{Ar\,ch} x$(双值)	$\pm\Big[\ln(2x)-\frac{1}{2\cdot2x^2}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot4x^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot6x^6}$ $-\cdots-\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2 2n\,x^{2n}}-\cdots\Big]$	$\lvert x\rvert>1$

函　数	幂级数展开式	收敛域
$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$	$\|x\|<1$
$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}+\cdots$	$\|x\|>1$

附：伯努利数 B_n 和欧拉数 E_n 表

n	B_n	E_n
1	$\frac{1}{6}$	1
2	$\frac{1}{30}$	5
3	$\frac{1}{42}$	61
4	$\frac{1}{30}$	1 385
5	$\frac{5}{66}$	50 521
6	$\frac{691}{2730}$	2 702 765
7	$\frac{7}{6}$	199 360 981
8	$\frac{3617}{510}$	19 391 512 145
9	$\frac{43867}{798}$	2 404 879 675 441
10	$\frac{174611}{330}$	370 371 188 237 525

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\cdots+\frac{1}{m^{2n}}+\cdots=\frac{\pi^{2n}2^{2n-1}}{(2n)!}B_n$$

$$1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\cdots\pm\frac{1}{(2m-1)^{2n+1}}\mp\cdots=\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!}E_n$$

十、微分的应用(I)——函数的极值

1. 单变量函数的极值

[极值(极大值或极小值)] 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的双侧邻域中有定义,并且对于某邻域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内的一切点 x,下面不等式成立:

$$f(x)<f(x_0) \quad (\text{或} f(x)>f(x_0))$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极大值(或极小值).

[极值存在的必要条件] 假定函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内存在有限导数. 若在点 $x_0(\in(a,b))$ 处函数有极值,则必有

$$f'(x_0)=0 \tag{1}$$

所以可微函数的极值只能在使(1)式成立的点达到,这种点称为稳定点.

[极值存在的充分条件]

第一法则 若函数 $f(x)$ 满足条件: (i) 在点 x_0 的某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内有定义并且连续,且在点 x_0 处,$f'(x_0)=0$ 或不存在, (ii) 在范围 $0<|x-x_0|<\delta$ 内有有限的导数 $f'(x)$, (iii) $f'(x)$ 在点 x_0 的左右两侧有固定的符号,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 有无极值见下表:

x	$x<x_0$	x_0	$x>x_0$	$f(x)$
$f'(x)$	+	0	−	极大值
	−		+	极小值
	+		+	上 升
	−		−	下 降

第二法则 若函数 $f(x)$ 有二阶导数 $f''(x)$, 并且在点 x_0 处下列条件成立:

$$f'(x_0)=0 \quad \text{及} \quad f''(x_0)\neq 0$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值,当 $f''(x_0)<0$ 时,有极大值; 当 $f''(x_0)>0$ 时,有极小值.

第三法则 设函数 $f(x)$ 在某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内有导数 $f'(x),\cdots,f^{(n)}(x)$,且

$$f^{(k)}(x_0)=0 \qquad (k=1,\cdots,n-1)$$

$$f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

若 n 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值(当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时有极大值, 当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时有极小值); 若 n 为奇数,则在点 x_0 处无极值.

以上介绍的单变量函数的极值求法中，求稳定点时最后都归结为求方程

$$f'(x)=0$$

的实根．有时上述方程的实根不易求得，就要求近似根．关于实根的近似计算法可参考第三章，§4．

2．多变量函数的极值

[极值(极大值或极小值)]　设函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(\boldsymbol{x})$$

定义于区域D中，且$\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$是这区域内的一点．

若点$\boldsymbol{x}^0$有一个邻域

$$0<|x_i-x_i^0|<\delta,\quad i=1,2,\cdots,n$$

使对于其中一切点，下面不等式成立：

$$f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{x}^0)\qquad (\text{或 } f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}^0))$$

则称函数$f(\boldsymbol{x})$在点$\boldsymbol{x}^0$处有极大值(或极小值)．

[极值存在的必要条件]　假定函数$f(\boldsymbol{x})$在区域D内存在有限偏导数．若在点$\boldsymbol{x}^0(\in D)$处函数有极值，则必有

$$\begin{cases} f'_{x_1}(\boldsymbol{x}^0)=0\\ f'_{x_2}(\boldsymbol{x}^0)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f'_{x_n}(\boldsymbol{x}^0)=0\end{cases}\tag{2}$$

所以极值只能在使(2)式成立的点达到，这种点称为稳定点．

[极值存在的充分条件(二元函数的情形)]　设点$\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0)$为函数$y=f(x_1,x_2)$的稳定点，并且函数$f(x_1,x_2)$在稳定点$\boldsymbol{x}^0$的邻域内有定义，连续，并有一阶及二阶连续偏导数．引进记号

$$y^0_{x_1^{p_1}x_2^{p_2}}\equiv\left(\frac{\partial^k y}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}}\right)_{\boldsymbol{x}^0},\quad k=p_1+p_2$$

上指标"0"表示偏导数是在$\boldsymbol{x}^0$计算的．记

$$D_1=y^0_{x_1^2},\qquad D_2=\begin{vmatrix} y^0_{x_1^2} & y^0_{x_1x_2}\\ y^0_{x_2x_1} & y^0_{x_2^2}\end{vmatrix}$$

那末(i) 稳定点$\boldsymbol{x}^0$是极小点的充分条件是：

$$D_1>0\quad 和\quad D_2>0$$

即

$$y^0_{x_1^2}>0\quad 和\quad y^0_{x_1^2}y^0_{x_2^2}-(y^0_{x_1x_2})^2>0$$

(ii) 稳定点$\boldsymbol{x}^0$是极大点的充分条件是：

$$D_1<0\quad 和\quad D_2>0$$

即　　　　$y^0_{x_1^2}<0$　和　$y^0_{x_1^2}y^0_{x_2^2}-(y^0_{x_1x_2})^2>0$

若 $D_2<0$，则 $\boldsymbol{x}^0$ 不是极值点．当 $D_2=0$ 时不能肯定 $\boldsymbol{x}^0$ 是否是极值点，必须考察更高阶的偏导数．

［极值存在的充分条件（一般情形）］　设点　$\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 为函数 $y=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的稳定点，并且函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在稳定点 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域内有定义，连续，并有一阶及二阶连续偏导数．引进记号

$$y^0_{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}}\equiv\left(\frac{\partial^k y}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}}\right)_{\boldsymbol{x}^0},\quad k=\sum_{i=1}^{n}p_i$$

上指标"0"表示偏导数是在 $\boldsymbol{x}^0$ 计算的．定义行列式 D_i 为

$$D_i\equiv\begin{vmatrix} y^0_{x_1^2} & y^0_{x_1x_2} & \cdots & y^0_{x_1x_i} \\ y^0_{x_2x_1} & y^0_{x_2^2} & \cdots & y^0_{x_2x_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^0_{x_ix_1} & y^0_{x_ix_2} & \cdots & y^0_{x_i^2} \end{vmatrix}$$

对 n 个变量依次计算 n 个行列式 $D_1,D_2,\cdots,D_n$。那末

（i）稳定点 $\boldsymbol{x}^0$ 是极小点的充分条件是：所有的行列式都是正的，即

$$D_i>0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

（ii）稳定点 $\boldsymbol{x}^0$ 是极大点的充分条件是：所有标号为偶数的行列式是正的，所有标号为奇数的行列式是负的，即

$$D_i<0,\quad i=1,3,5,\cdots$$

$$D_i>0,\quad i=2,4,6,\cdots$$

如果上列两条件都不满足，那末稳定点不是极值点．如果所有的 D_i 都是零，就必须考察更高阶的偏导数．

3．约束条件为等式的条件极值

求函数

$$y=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

在 $m(m<n)$ 个约束条件

$$g_k(\boldsymbol{x})=0,\quad k=1,2,\cdots,m$$

下的极值．

［直接代入法］　从约束条件的 m 个方程中将其 m 个变量解出，用其余 $n-m$ 个变量表示，然后直接代入函数中去，这样就变为一个求 $n-m$ 个变量的函数的无约束条件的极值问题．如果从约束方程能够将 m 个变量解出，这个方法是可行的．

[拉格朗日乘数法] 引进修正的函数

$$F=y+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k g_k$$

式中 λ_k 为待定常数. 把 F 当作 $n+m$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 的无约束的函数,对这些变量求一阶偏导数得稳定点所要满足的方程:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$g_k=0,\qquad k=1,2,\cdots,m$$

例 1 求函数

$$y=4x_1^2+5x_2^2$$

在约束条件

$$2x_1+3x_2=6$$

下的极值.

解 由于

$$y=4x_1^2+5x_2^2$$

和

$$g=2x_1+3x_2-6=0$$

可知修正的函数为

$$F=(4x_1^2+5x_2^2)+\lambda(2x_1+3x_2-6)$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=8x_1+2\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=10x_2+3\lambda=0\\ g=2x_1+3x_2-6=0\end{cases}$$

得

$$\lambda=-\frac{30}{7},\quad x_1=\frac{15}{14},\quad x_2=\frac{9}{7}$$

所以函数 F 的稳定点为

$$x_1=\frac{15}{14},\qquad x_2=\frac{9}{7}$$

由于

$$D_1=F_{x_1^2}=8>0$$

$$D_2=F_{x_1^2}F_{x_2^2}-(F_{x_1x_2})^2=80>0$$

这是一个极小点, 函数 y 的极小值为 $\frac{90}{7}$.

[惩罚函数法] 在搜索极小点时引进修正函数

$$F=y+\sum_{k=1}^{m}P_k(g_k)^2 \tag{1}$$

式中 P_k 是任意大的正整数, $\sum_{k=1}^{m}P_k(g_k)^2$ 称为惩罚函数. 这样就可把问题化为新函数 F 的无条件极值问题, 可以用不断增大 P_k 的数值来极小化. 也可引进如下形式的新函数

$$F=y+\sum_{k=1}^{m}(g_k)^{2P_k}$$

式中 P_k 是任意大的正整数.

对搜索极大点时, 惩罚函数前取负号, 即引进新函数

$$F=y-\sum_{k=1}^{m}P_k(g_k)^2$$

或

$$F=y-\sum_{k=1}^{m}(g_k)^{2P_k}$$

例 2　用惩罚函数法解例 1.

解　利用方程(1)引进修正函数

$$F=y+P(g)^2=4x_1^2+5x_2^2+P(2x_1+3x_2-6)^2$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=8x_1+4P(2x_1+3x_2-6)=0\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=10x_2+6P(2x_1+3x_2-6)=0\end{cases}$$

得

$$x_1=\frac{5}{6}x_2,\qquad x_2=\frac{9}{7+\dfrac{5}{2P}}$$

当 P 很大时, x_2 趋于 $\frac{9}{7}$, x_1 趋于 $\frac{15}{14}$, 这就是稳定点. 由于

$$D_1=F_{x_1^2}=8(1+P)>0$$

$$D_2=F_{x_1^2}F_{x_2^2}-(F_{x_1x_2})^2=16(5+14P)>0$$

所以稳定点是一个极小点, 这和例 1 的结果一致.

4. 约束条件为不等式的条件极值

比前面所考虑的更一般的极值问题是求函数

$$y=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

在m个约束条件

$$g_k(x)\leqslant 0,\quad k=1,2,\cdots,m$$

下的极值问题，这里的m不必小于n.

［松弛变量法］ 对每一约束不等式都引进一非负的松弛函数S_i，将它变为等式:

$$\varphi_i=g_i+S_i=0$$

每一松弛函数S_i仅依赖于一个松弛变量x_{n+i}，一般取

$$S_i=x_{n+i}^2$$

引进松弛函数后就把问题化为约束条件是等式的极值问题，前面的方法就可以应用了.

例 3 求函数

$$y=4x_1^2+5x_2^2$$

在约束条件

$$x_1\geqslant 1$$

下的极值.

解 约束条件可写为

$$g_1=1-x_1\leqslant 0$$

利用松弛函数$S_1(x_3)$可将这个不等式约束化为等式

$$\varphi_1=g_1+S_1=1-x_1+x_3^2=0$$

利用直接代入法可在函数y中将x_1消去得到

$$y=4(1+x_3^2)^2+5x_2^2$$

这是一个无约束问题.

稳定点是$x_2=0$，$x_3=0$，所以$x_1=1$. 由于

$$D_1=y_{x_2^2}=10>0$$

$$D_2=\begin{vmatrix} y_{x_2^2} & y_{x_2x_3} \\ y_{x_3x_2} & y_{x_3^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 16 \end{vmatrix}=160>0$$

所以稳定点是修改后的以及原来的函数的极小点，其极小值为4.

［拉格朗日乘数法］ 引进松弛函数后，将约束不等式化为等式

$$\varphi_k=g_k+S_k(x_{n+k})=0,\qquad k=1,2,\cdots,m$$

同等式约束的情形一样，引进新的目标函数

$$F=y+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k$$

这是一个 $n+2m$ 个变量的无约束问题. 稳定点可以由解下列方程组得到

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=0, \qquad j=1,2,\cdots,(n+m)$$

$$\varphi_k=0, \qquad k=1,2,\cdots,m$$

以上介绍的多变量函数的极值和条件极值求法中，求稳定点时最后都归结为求实函数方程组

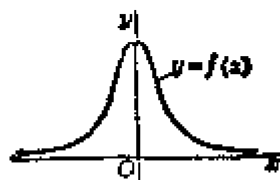
$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \quad i=1,2,\cdots,n$$

的一组实根. 有时上列方程组的实根不易求得，要求近似根. 关于实根的近似计算法可参考第三章，§4.

十一、微分的应用(Ⅱ)——曲线的性状与作图

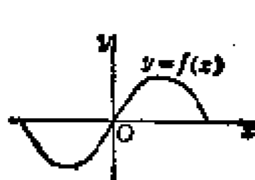
1. 曲线的性状及其条件

关于 y 轴对称



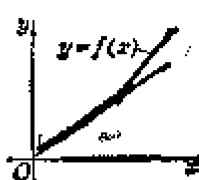
$f(-x)=f(x)$

关于原点对称



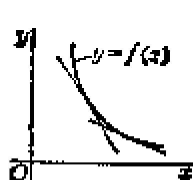
$f(-x)=-f(x)$

上 升



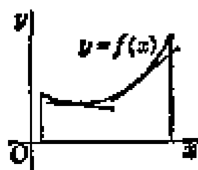
$f'(x)>0$

下 降



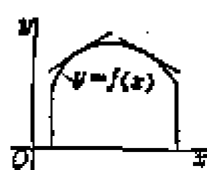
$f'(x)<0$

上 凹



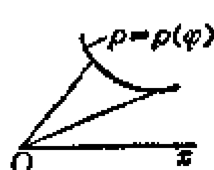
$f''(x)>0$

上 凸



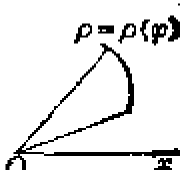
$f''(x)<0$

外 凹



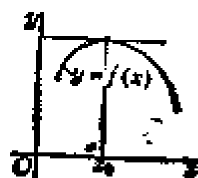
$\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''<0$

外 凸



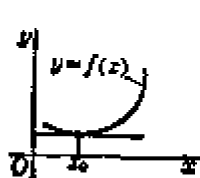
$\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''>0$

极大点



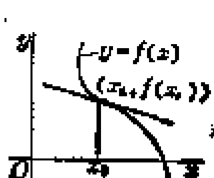
$f'(x_0)=0$（或∞），当 x 渐增通过 x_0 时，$f'(x)$由正变负. 或者 $f''(x_0)<0$

极小点



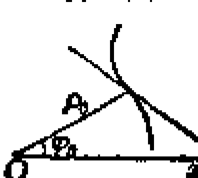
$f'(x_0)=0$（或∞），当 x 渐增通过 x_0 时，$f'(x)$ 由负变正. 或者$f''(x_0)>0$

拐 点



$f''(x_0)=0$（或∞）当 x 渐增通过 x_0 时，$f''(x)$变号

拐 点



$\rho_0^2+2\rho_0'^2-\rho_0\rho_0''=0$，
$2\rho_0\rho_0'+3\rho_0'\rho_0''-\rho_0\rho_0'''\neq 0$，
式中 $\rho_0'=\rho'(\varphi_0)$，等等

2. 奇点

设 $P_0(x_0, y_0)$是曲线

$$F(x,y)=0$$

上的一点，假定函数 $F(x,y)$在点 P_0 有连续的偏导数，并且满足条件

$$F'_x(x_0,y_0)=0,\quad F'_y(x_0,y_0)=0$$

则称 P_0 是曲线 $F(x,y)=0$ 的一个奇点。

如果函数 $F(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的二阶偏导数不全为零，那末称 P_0 为曲线的一个二重点．设

$$a=F''_{x^2}(x_0,y_0),\quad b=F''_{xy}(x_0,y_0),\quad c=F''_{y^2}(x_0,y_0)$$

则根据判别式 $ac-b^2$ 的符号在二重点中又可分出如下几种类型的奇点．

名称与图形	条件与性质	举例
结点	(i) $ac-b^2<0$, (ii) 曲线有两支通过点 P_0，且具有不同切线	双纽线 $(x^2+y^2+1)^2-4x^2=1$ 是以原点(0,0)为其结点
孤立点	(i) $ac-b^2>0$, (ii)在点 P_0 的充分小的邻域里，除了点 P_0 外，没有曲线上其他的点	曲线 $(x^2+y^2)(x-1)=0$ 的轨迹是由直线 $x=1$ 和原点(0,0)组成的，原点就是它的一个孤立点
第一种尖点	(i) $ac-b^2=0$, (ii)曲线由两支组成，在点 P_0 有公共切线，这两支在其公共法线的同侧，而在公共切线的异侧	半立方抛物线 $y^2=x^3$ 是以原点(0,0)为其第一种尖点

名称与图形	条件与性质	举　　　　例
第二种尖点	(i) $ac-b^2=0$, (ii)曲线由两支组成，在点 P_0 有公共切线，这两支在其公共法线的同侧，又在公共切线的同侧	曲线 $(y-x^2)^2-x^5=0$ 在原点的邻近有两支，即 $y=x^2+x^2\sqrt{x}$ $y=x^2-x^2\sqrt{x}$ 它们在原点有公共切线，由于 $0<x<1$，y 总取正值，所以曲线在原点的邻近的两支都在公共切线和法线的同侧
自切点	(i) $ac-b^2=0$, (ii)曲线由两支组成，而彼此在点 P_0 相切	曲线 $y^2-x^4=0$ 由两条抛物线 $y=x^2$ $y=-x^2$ 组成，它们在原点彼此相切

如果曲线由参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

表示，那末当 $x'(t_0)=0, y'(t_0)=0$ 时，由参数 t_0 确定的点 $(x(t_0), y(t_0))$ 是曲线的奇点。

特别，曲线由极坐标方程

$$\rho=\rho(\varphi)$$

表示，那末当 $\rho(\varphi_0)=\rho'(\varphi_0)=0$ 时，点 $(\rho(\varphi_0), \varphi_0)$ 是曲线的奇点．例如双曲螺线 $\rho=\dfrac{a}{\varphi}$ 当 $\varphi\to\infty$ 时，$\rho(\varphi)=\rho'(\varphi)=0$，所以极点是奇点．当极角 φ 增大到无穷时，曲线上的点无限逼近于极点，但又不能达到(图 5.9)，所以这种奇点又称为渐近点．

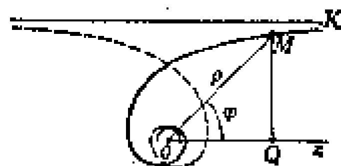
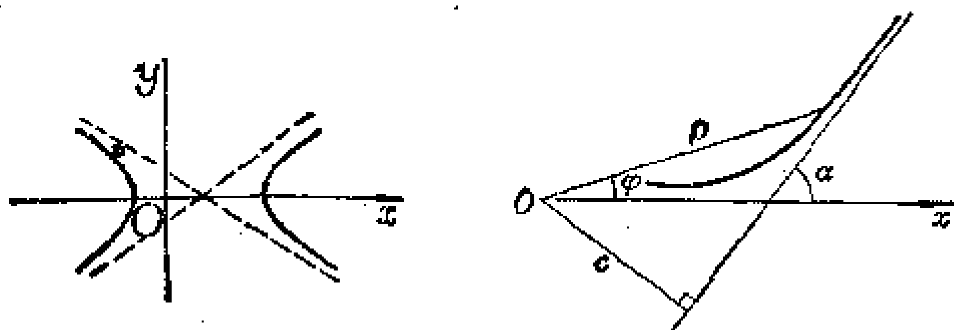


图　5.9

3. 渐近线



曲线存在渐近线的条件及渐近线方程

曲线方程	条件	渐近线方程
$F(x,y)=0$	将$F(x,y)$的最高次数各项之和用$\Phi(x,y)$表示，解方程$\Phi(x,y)=0$，得 $x=\varphi(y)$，$y=\psi(x)$ $y\to\infty$时，$x\to a$ $x\to\infty$时，$y\to b$	$x=a$ $y=b$
	将$y=kx+b$代入$F(x,y)$后按x的幂次展开： $F(x,kx+b)=f_1(k)x^m+f_2(k,b)x^{m-1}+\cdots$ 解联立方程 $\begin{cases}f_1(k)=0\\f_2(k,b)=0\end{cases}$ 得到k,b，即为渐近线的斜率和纵截距	$y=kx+b$
$y=f(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=k$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=b$	$y=kx+b$
	$x\to a$时，$y\to\infty$（或$y\to\infty$时，$x\to a$）	$x=a$
	$x\to\infty$时，$y\to b$（或$y\to b$时，$x\to\infty$）	$y=b$
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	$\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=\infty$，$\lim\limits_{t\to t_0}y(t)=\infty$ $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{y(t)}{x(t)}=k$，$\lim\limits_{t\to t_0}[y(t)-kx(t)]=b$	$y=kx+b$

曲线方程	条　　件	渐近线方程
	$\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a,\quad \lim\limits_{t\to t_0} y(t)=\infty$	$x=a$
	$\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=\infty,\quad \lim\limits_{t\to t_0} y(t)=b$	$y=b$
$\rho=\rho(\varphi)$	$\lim\limits_{\rho\to\infty} \varphi=\alpha,\quad \lim\limits_{\varphi\to\alpha} \rho\sin(\alpha-\varphi)=c$	$\rho\sin(\alpha-\varphi)=c$

4．作图

作函数

$$y=f(x)$$

的图形的步骤大致有以下几点：

(1) 确定自变量x的改变区间；讨论函数的一些基本性质，如奇偶性、对称性和周期性等；

(2) 确定曲线与坐标轴的交点；

(3) 确定曲线的顶点(极大点，极小点)；

(4) 确定曲线的凸部，凹部与拐点；

(5) 确定曲线的渐近线；

(6) 描点作图．

当然，具体问题要具体分析，以上几点不一定都要讨论．

例　画曲线

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

(1) x可以在区间$(-\infty,\infty)$上改变，不对称，也无奇偶性和周期性．

(2) 让$x=0$，得到$y=-\frac{9}{4}$；让$y=0$，得到$x=3$；就是，曲线与坐标轴交于点$\left(0,\ -\frac{9}{4}\right)$，$(3,0)$ (图 5.10)．

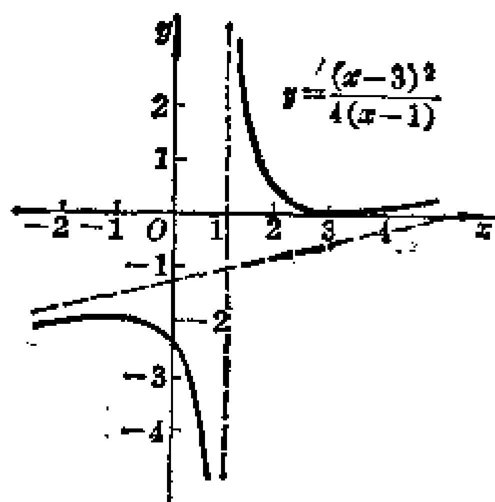


图　5.10

(3) 求出一阶与二阶导数

$$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

得到顶点$(3,0)$(极小点)和$(-1,-2)$(极大点)．

(4) 二阶导数当 $x>1$ 时为正，当 $x<1$ 时为负．因此，在区间 $(1,\infty)$ 内曲线是凹的，在区间 $(-\infty,1)$ 内曲线是凸的．因为 $f''(x)$ 只当 $x=1$ 时变号，而 x 的这个值对应于一条平行于 y 轴的渐近线，所以没有拐点．

(5) 当 $x=1$ 时，y 成为无穷大，于是这曲线有一条渐近线 $x=1$．

再求不平行于 y 轴的渐近线．

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\frac{1}{4}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{x}{4}\right]=-\frac{5}{4}$$

所以

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$$

是一条不平行于 y 轴的渐近线．

由这些性质描出曲线(图 5.10)．

第六章　积　分　学

这一章综述了单变量函数的常义积分、广义积分、含参数积分的基本概念、性质和计算方法，收集了求不定积分、定积分、多重积分、曲线积分、曲面积分的有关公式，主要的积分不等式以及积分的某些近似计算公式，简要地列举了积分在实际中的各种应用；编制了不定积分表和定积分表.

§1　单变量函数的积分

一、积分基本概念

[不定积分(原函数)]　如果在给定的区间$[a, b]$上

$$F'(x)=f(x)$$

那末$F(x)$称为$f(x)$在区间$[a, b]$上的一个不定积分(或一个原函数).

如果$f(x)$有一个原函数$F(x)$，那末它一定有无穷多个原函数，它们是形如

$$F(x)+C$$

(式中C是任意常数)的函数族. 所以用记号

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

表示$f(x)$的原函数全体，或$f(x)$的不定积分.

[定积分·黎曼积分]　设在区间$[a, b]$上给定了函数$f(x)$. 用任意方法把区间$[a, b]$分成若干部分，其分点为$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$，并设$\lambda$是$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i\ (i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$中最大的. 在每一个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上任取一点$x=\xi_i$，$x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}\ (i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$，作和$\sigma=\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$(图6.1). 当$\lambda\to0$时，如果极限

$$\lim_{\lambda\to0}\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，那末这个极限称为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，记作

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$$

此时，函数 $f(x)$ 称为区间 $[a,b]$ 上的可积函数（黎曼可积），a 和 b 分别称为积分的下限和上限，$f(x)$ 称为被积函数，x 是积分变量，“$\int$”是积分号.

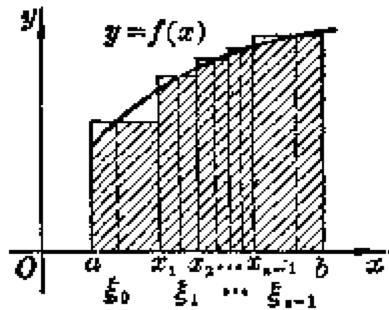


图 6.1

［牛顿-莱布尼茨公式］ 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，或分段连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数，设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

这称为牛顿-莱布尼茨公式，或微积分学基本定理，它指出了定积分与不定积分的内在联系.

［可积函数及其性质］

1° 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 是可积的.

2° 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限多个间断点，则 $f(x)$ 是可积的.

3° 单调有界函数一定是可积的.

4° 可积函数一定是有界的.

5° 若函数 $f(x)$ 可积，则 $|f(x)|$ 与 $kf(x)$ （k 为常数）也可积.

6° 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 可积，则其和、差、乘积也可积.

7° 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的任一部分区间 $[\alpha,\beta]$ 上也可积. 反之，若把 $[a,b]$ 分割成若干部分区间，并分别在每个部分区间上 $f(x)$ 可积，则它在整个区间 $[a,b]$ 上可积.

［积分中值定理］

1° 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续（图 6.2），则在区间 $[a,b]$ 内至少存在一个数 ξ $(a<\xi<b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

2° 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界且可积，$f(x)$ 连续，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内不变号，则在区间 $[a,b]$ 内至少存在一个数 ξ $(a<\xi<b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

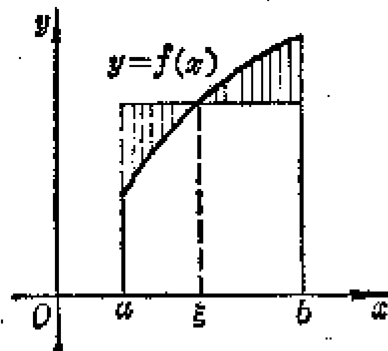


图 6.2

这称为关于积分的第一中值定理.

3° 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界且可积，而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调的，则在区间 $[a,b]$ 内至少存在一个数 ξ $(a<\xi<b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b-0)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

这称为关于积分的第二中值定理.

4° 除此条件而外，若 $f(x)$ 非负单调下降（广义的），则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi g(x)\,dx \quad (a<\xi<b)$$

若 $f(x)$ 非负单调上升（广义的），则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b-0)\int_\xi^b g(x)\,dx \quad (a<\xi<b)$$

二、积分不等式

设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则有下列不等式：

1° 若在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

2° 设 $m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$，则

$$m\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

3° $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

4° 施瓦兹不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx \int_a^b [g(x)]^2 dx$$

5° 赫尔德不等式 设 $k>1$, $k'>1$, $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$，则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^k dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_a^b |g(x)|^{k'} dx\right)^{\frac{1}{k'}}$$

等号只当 $f(x)g(x)$ 符号固定且 $|f(x)|^k = c|g(x)|^{k'}$（c 为正常数）时成立．当 $k=k'=2$ 时，就是施瓦兹不等式.

6° 闵可夫斯基不等式 设 $r>0$，则

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_a^b |g(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \quad (r \geqslant 1)$$

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \geqslant \left(\int_a^b |f(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_a^b |g(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}$$

（$r<1$，$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上同号）

等号只当$f(x)=cg(x)$（c为常数）时成立。

7° 贝塞耳不等式　设$f_n(x)$（n为正整数）在$[a,b]$上为一正规正交系：

$$\int_a^b f_n(x)f_m(x)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ 1 & (m=n)\end{cases}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b g(x)f_n(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b (g(x))^2 dx$$

8° 哈代不等式　设$f(x)$在$[0,\infty)$上可微且上升，$f'(x)$连续，$f(0)=0$，$p>1$，则

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty}(f'(x))^p dx$$

等号只当$f(x)\equiv 0$时成立。

三、原函数的求法

1. 不定积分法则

$$\int f'(x)\,dx=f(x)+C, \quad \int f''(x)\,dx=f'(x)+C$$

$$\int [af(x)+bg(x)]\,dx=a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx \quad (a,b\text{为常数})$$

（线性运算）

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

（变量替换）

$$\int uv'\,dx=uv-\int vu'\,dx$$

（分部积分）

$$\int f'[\varphi(x)]d[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]+C$$

（配元积分）

2. 有理分式的积分

［化成基本真分式法］　设$R(x)$是一个具有实系数的真分式，则$R(x)$的积分可化成它分解出的基本真分式（第一章，§1）的积分，并且

$$\int R(x)dx = R_1(x) + H(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + H(x)$$

式中 $R_1(x)$ 仍为一有理函数，并且还是真分式，$H(x)$ 一般是超越函数（对数函数和反正切函数）。

［奥斯特洛格拉特斯基方法］ 任一真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分可以写为

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$$

式中 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$，$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 为真分式，

$$Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\cdots(x-a_m)^{k_m-1}$$
$$\cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\cdots(x^2+p_nx+q_n)^{l_n-1}$$
$$Q_2(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)(x^2+p_1x+q_1)\cdots(x^2+p_nx+q_n)$$
$$Q_1Q_2 = Q$$

$P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 的系数可利用待定系数法从关系式

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

中求出。

3. 有理函数积分的变量替换公式表

表中 R 表示有理函数

积分类型	变量替换公式	$dx \to dt$
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx$ （n 为整数）	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t$， $x = -\frac{b-et^n}{a-ct^n}$	$dx = \frac{n(ae-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$
$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \cdots\right)dx$ （m, n 为整数）	$\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t$， $x = -\frac{b-et^r}{a-ct^r}$ 式中 r 为 $n, m, \cdots$ 的最小公倍数	$dx = \frac{r(ae-bc)t^{r-1}}{(a-ct^r)^2}dt$

积分类型	变量替换公式	$dx \to dt$
$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$		
$a>0$ 时	$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ $x=\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$	$dx=2\dfrac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$
$c>0$ 时	$\sqrt{ax^2+bx+c}$ $=xt+\sqrt{c}$, $x=-\dfrac{2\sqrt{c}t-b}{t^2-a}$	$dx=2\dfrac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{(t^2-a)^2}dt$
ax^2+bx+c $=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(b^2-4ac>0)$	$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$, $x=\dfrac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}$	$dx=\dfrac{2at(\beta-\alpha)}{(t^2-a)^2}dt$
$\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})dx$	$x=a\operatorname{tg}t, \sqrt{x^2+a^2}=\dfrac{a}{\cos t}$ (或 $x=a\operatorname{sh}t$, $\sqrt{x^2+a^2}=a\operatorname{ch}t$)	$dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt$ (或 $dx=a\operatorname{ch}t\,dt$)
$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$	$x=a\sin t$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$ (或 $x=a\cos t$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\sin t$)	$dx=a\cos t\,dt$ (或 $dx=-a\sin t\,dt$)
$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$	$x=a\sec t$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg}t$ (或 $x=a\operatorname{ch}t$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{sh}t$)	$dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ (或 $dx=a\operatorname{sh}t\,dt$)
$\int R[(ax+b)^\alpha, (ax+b)^\beta, \cdots, (ax+b)^\lambda]dx$ (式中 $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ 为分数)	设 m 为 $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$ 的分母的最小公倍数, $(ax+b)^{\frac{1}{m}}=t$, $x=\dfrac{t^m-b}{a}$	$dx=\dfrac{m}{a}t^{m-1}dt$

积分类型	变量替换公式	$dx\to dt$
$\int R(\cos x, \sin x)dx$	$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$
$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)dx$	$\operatorname{tg}x=t$, $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$	$dx=\frac{1}{1+t^2}dt$

4. 不定积分表

表中略去积分常数。$\ln g(x)$是指$\ln|g(x)|$。

[基本积分表]

$f(x)$		$\int f(x)dx$
k	(常数)	kx
x^n	$(n\neq-1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$		$\ln x$
e^x		e^x
a^x	$(a>0)$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$		$-\cos x$
$\cos x$		$\sin x$
$\operatorname{tg}x$		$-\ln\cos x$
$\operatorname{ctg}x$		$\ln\sin x$
$\sec x$		$\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 或 $\ln(\sec x+\operatorname{tg}x)$
$\csc x$		$\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 或 $\ln(\csc x-\operatorname{ctg}x)$
$\sin^2 x$		$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cos x$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\cos^2 x$	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cos x$
$\mathrm{tg}^2 x$	$\mathrm{tg}\,x-x$
$\mathrm{ctg}^2 x$	$-\mathrm{ctg}\,x-x$
$\sec^2 x$	$\mathrm{tg}\,x$
$\csc^2 x$	$-\mathrm{ctg}\,x$
$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$
$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{sh}\,x$
$\mathrm{th}\,x$	$\ln \mathrm{ch}\,x$
$\mathrm{cth}\,x$	$\ln \mathrm{sh}\,x$
$\mathrm{sech}\,x$	$\arcsin(\mathrm{th}\,x)$
$\mathrm{csch}\,x$	$\ln \mathrm{th}\frac{x}{2}$
$\mathrm{sech}^2 x$	$\mathrm{th}\,x$
$\mathrm{csch}^2 x$	$-\mathrm{cth}\,x$
$\frac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$	$\frac{1}{a}\mathrm{arc\,tg}\frac{x}{a}$
$\frac{1}{a^2-x^2}$ $(\|x\|<\|a\|)$	$\frac{1}{a}\mathrm{Arth}\frac{x}{a}$ 或 $\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}$
$\frac{1}{x^2-a^2}$ $(\|x\|>\|a\|)$	$-\frac{1}{a}\mathrm{Arcth}\frac{x}{a}$ 或 $\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}$ 或 $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}$
	或 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\mathrm{Arch}\frac{x}{a}$ 或 $\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\mathrm{Arch}\frac{x}{a}$
	或 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}$	$-\frac{1}{a}\operatorname{Arch}\frac{a}{x}$ 或 $-\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$
$\frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}$	$-\frac{1}{a}\operatorname{Arsh}\frac{a}{x}$ 或 $-\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}$
$\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}$	$\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}$ 或 $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$	$\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)$ 或 $\arcsin\left(\frac{x}{a}-1\right)$
$\sqrt{2ax-x^2}$	$\frac{(x-a)}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}-1\right)$

[含 $ax+b$ 的有理式的积分] ($a\neq0, b\neq0$)

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$(ax+b)^n$ $(n\neq-1)$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln(ax+b)$
$\frac{1}{(ax+b)^2}$	$-\frac{1}{a(ax+b)}$
$\frac{1}{(ax+b)^3}$	$-\frac{1}{2a(ax+b)^2}$
$x(ax+b)^n$ $(n\neq-1,-2)$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{a^2(n+2)}-\frac{b(ax+b)^{n+1}}{a^2(n+1)}$
$\frac{x}{ax+b}$	$\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln(ax+b)$
$\frac{x}{(ax+b)^2}$	$\frac{b}{a^2(ax+b)}+\frac{1}{a^2}\ln(ax+b)$
$\frac{x}{(ax+b)^3}$	$\frac{b}{2a^2(ax+b)^2}-\frac{1}{a^2(ax+b)}$
$x^2(ax+b)^n$ $(n\neq-1,-2,-3)$	$\frac{1}{a^3}\left[\frac{(ax+b)^{n+3}}{n+3}-2b\frac{(ax+b)^{n+2}}{n+2}+b^2\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\right]$
$\frac{x^2}{ax+b}$	$\frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2\ln(ax+b)\right]$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{x^2}{(ax+b)^2}$	$\dfrac{1}{a^3}\left[ax+b-2b\ln(ax+b)-\dfrac{b^2}{ax+b}\right]$
$\dfrac{x^2}{(ax+b)^3}$	$\dfrac{1}{a^3}\left[\ln(ax+b)+\dfrac{2b}{ax+b}-\dfrac{b^2}{2(ax+b)^2}\right]$
$x^m(ax+b)^n$ $(m>0,\ m+n+1\neq 0)$	$\dfrac{1}{a(m+n+1)}\left[x^m(ax+b)^{n+1}-mb\int x^{m-1}(ax+b)^n dx\right]$ 或 $\dfrac{1}{m+n+1}\left[x^{m+1}(ax+b)^n+nb\int x^m(ax+b)^{n-1}dx\right]$ 或 $x^{m+1}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{b^k n!(m+n-k)!}{(n-k)!(m+n+1)!}(ax+b)^{n-k}$
$\dfrac{1}{x(ax+b)}$	$-\dfrac{1}{b}\ln\dfrac{ax+b}{x}$
$\dfrac{1}{x^2(ax+b)}$	$-\dfrac{1}{bx}+\dfrac{a}{b^2}\ln\dfrac{ax+b}{x}$
$\dfrac{1}{x^3(ax+b)}$	$\dfrac{2ax-b}{2b^2x^2}-\dfrac{a^2}{b^3}\ln\dfrac{ax+b}{x}$
$\dfrac{1}{x(ax+b)^2}$	$\dfrac{1}{b(ax+b)}-\dfrac{1}{b^2}\ln\dfrac{ax+b}{x}$
$\dfrac{1}{x(ax+b)^3}$	$\dfrac{1}{b^3}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ax+2b}{ax+b}\right)^2-\ln\dfrac{ax+b}{x}\right]$
$\dfrac{1}{x^2(ax+b)^2}$	$-\dfrac{2ax+b}{b^2x(ax+b)}+\dfrac{2a}{b^3}\ln\dfrac{ax+b}{x}$

[含 $\sqrt{ax+b}$ 的积分] $(a\neq 0, b\neq 0)$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sqrt{ax+b}$	$\dfrac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}$
$x\sqrt{ax+b}$	$\dfrac{2(3ax-2b)}{15a^2}\sqrt{(ax+b)^3}$
$x^2\sqrt{ax+b}$	$\dfrac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)}{105a^3}\sqrt{(ax+b)^3}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^3\sqrt{ax+b}$	$\frac{2(35a^3x^3-30a^2bx^2+24ab^2x-16b^3)}{315a^4}\sqrt{(ax+b)^3}$
$x^n\sqrt{ax+b}$	$\frac{2x^n}{(2n+3)a}\sqrt{(ax+b)^3}-\frac{2nb}{(2n+3)a}\int x^{n-1}\sqrt{ax+b}\,dx$ 或 $\frac{2}{a^{n+1}}\sqrt{ax+b}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(-b)^{n-k}}{k!(n-k)!(2k+3)}(ax+b)^{k+1}$
$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$
$\frac{x}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$
$\frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)}{15a^3}\sqrt{ax+b}$
$\frac{x^3}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2(5a^3x^3-6a^2bx^2+8ab^2x-16b^3)}{35a^4}\sqrt{ax+b}$
$\frac{x^n}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2x^n}{(2n+1)a}\sqrt{ax+b}-\frac{2nb}{(2n+1)a}\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}}dx$ 或 $\frac{2(-b)^n}{a^{n+1}}\sqrt{ax+b}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{b^k k!(n-k)!(2k+1)}(ax+b)^k$
$\frac{1}{x\sqrt{ax+b}}$ $(b>0)$	$\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}$
$\frac{1}{x\sqrt{ax+b}}$ $(b<0)$	$\frac{2}{\sqrt{-b}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}$
$\frac{1}{x^2\sqrt{ax+b}}$	$-\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}-\frac{a}{2b}\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$
$\frac{1}{x^3\sqrt{ax+b}}$	$-\frac{\sqrt{ax+b}}{2bx^2}+\frac{3a\sqrt{ax+b}}{4b^2x}+\frac{3a^2}{8b^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$
$\frac{1}{x^n\sqrt{ax+b}}$ $(n>1)$	$-\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}}-\frac{(2n-3)a}{2(n-1)b}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}$
$\frac{\sqrt{ax+b}}{x}$	$2\sqrt{ax+b}+b\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^n}$ $(n>1)$	$-\dfrac{\sqrt{(ax+b)^3}}{(n-1)bx^{n-1}}-\dfrac{(2n-5)a}{2(n-1)b}\int\dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^{n-1}}dx$
$\sqrt{(ax+b)^n}$ $(n\neq-2)$	$\dfrac{2}{a(n+2)}\sqrt{(ax+b)^{n+2}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{(ax+b)^n}}$ $(n>2)$	$\dfrac{-2}{a(n-2)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(ax+b)^{n-2}}}$
$x\sqrt{(ax+b)^n}$	$\dfrac{2}{a^2}\left[\dfrac{1}{n+4}\sqrt{(ax+b)^{n+4}}-\dfrac{b}{n+2}\sqrt{(ax+b)^{n+2}}\right]$
$\dfrac{x}{\sqrt{(ax+b)^n}}$	$\dfrac{2}{a^2}\left[\dfrac{b}{n-2}\dfrac{1}{\sqrt{(ax+b)^{n-2}}}-\dfrac{1}{n-4}\dfrac{1}{\sqrt{(ax+b)^{n-4}}}\right]$
$\dfrac{1}{x\sqrt{(ax+b)^n}}$	$\dfrac{1}{b}\int\dfrac{dx}{x\sqrt{(ax+b)^{n-2}}}-\dfrac{a}{b}\int\dfrac{dx}{\sqrt{(ax+b)^n}}$
$\dfrac{\sqrt{(ax+b)^n}}{x}$	$a\int\sqrt{(ax+b)^{n-2}}\,dx+b\int\dfrac{\sqrt{(ax+b)^{n-2}}}{x}dx$

[含 $(ax+b)$,$(cx+d)$ 的积分]

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{1}{(ax+b)(cx+d)}$ $(ad\neq bc)$	$\dfrac{1}{ad-bc}\ln\dfrac{ax+b}{cx+d}$
$\dfrac{1}{(ax+b)^2(cx+d)}$ $(ad\neq bc)$	$\dfrac{-1}{ad-bc}\left(\dfrac{1}{ax+b}+\dfrac{c}{ad-bc}\ln\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)$
$\dfrac{1}{(ax+b)^m(cx+d)^n}$ $(m>0,n>1,$ $ad\neq bc)$	$\dfrac{1}{(n-1)(ad-bc)}\left[\dfrac{1}{(ax+b)^{m-1}(cx+d)^{n-1}}+a(m+n-2)\int\dfrac{dx}{(ax+b)^m(cx+d)^{n-1}}\right]$
$(ax+b)^m(cx+d)^n$	$\dfrac{1}{(m+n+1)a}\left[(ax+b)^{m+1}(cx+d)^n+n(ad-bc)\int(ax+b)^m(cx+d)^{n-1}dx\right]$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{(ax+b)^m}{(cx+d)^n}$	$\frac{1}{(n-1)(ad-bc)}\left[\frac{(ax+b)^{m+1}}{(cx+d)^{n-1}} - (m-n+2)a\int\frac{(ax+b)^m}{(cx+d)^{n-1}}dx\right]$ 或 $\frac{1}{(m-n+1)c}\left[\frac{(ax+b)^m}{(cx+d)^{n-1}} - m(ad-bc)\int\frac{(ax+b)^{m-1}}{(cx+d)^n}dx\right]$
$\frac{x}{(ax+b)(cx+d)}$ $(ad\neq bc)$	$\frac{-1}{ad-bc}\left[\frac{b}{a}\ln(ax+b)-\frac{d}{c}\ln(cx+d)\right]$
$\frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)}$ $(ad\neq bc)$	$\frac{1}{ad-bc}\left[\frac{b}{a(ax+b)}+\frac{d}{ad-bc}\ln\frac{ax+b}{cx+d}\right]$
$\frac{cx+d}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2}{3a^2}(3ad-2bc+acx)\sqrt{ax+b}$
$\frac{\sqrt{ax+b}}{cx+d}$ $(c>0, ad>bc)$	$\frac{2}{c}\sqrt{ax+b}-\frac{2}{c}\sqrt{\frac{ad-bc}{c}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{c(ax+b)}{ad-bc}}$
$\frac{\sqrt{ax+b}}{cx+d}$ $(c>0, ad<bc)$	$\frac{2}{c}\sqrt{ax+b}+\frac{1}{c}\sqrt{\frac{bc-ad}{c}}\ln\frac{\sqrt{c(ax+b)}-\sqrt{bc-ad}}{\sqrt{c(ax+b)}+\sqrt{bc-ad}}$
$\frac{1}{\sqrt{ax+b}(cx+d)}$ $(c(bc-ad)<0)$	$\frac{2}{\sqrt{c(ad-bc)}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{c(ax+b)}{ad-bc}}$
$\frac{1}{\sqrt{ax+b}(cx+d)}$ $(c(bc-ad)>0)$	$\frac{1}{\sqrt{c(bc-ad)}}\ln\frac{\sqrt{c(ax+b)}-\sqrt{bc-ad}}{\sqrt{c(ax+b)}+\sqrt{bc-ad}}$
$\frac{1}{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}$ $(ac>0)$	$\frac{2}{\sqrt{ac}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{c(ax+b)}{a(cx+d)}}$
$\frac{1}{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}$ $(ac<0)$	$\frac{2}{\sqrt{-ac}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-c(ax+b)}{a(cx+d)}}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}$	$\frac{2acx+ad+bc}{4ac}\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}-\frac{(ad-bc)^2}{8ac}\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}$
$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$	$\frac{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}{c}-\frac{ad-bc}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}\sqrt{cx+d}}$
$\sqrt{\frac{x+b}{x+d}}$	$\sqrt{x+b}\sqrt{x+d}+(b-d)\ln(\sqrt{x+b}+\sqrt{x+d})$
$\sqrt{\frac{p+x}{q-x}}$	$-\sqrt{p+x}\sqrt{q-x}-(p+q)\arcsin\sqrt{\frac{q-x}{p+q}}$
$\sqrt{\frac{p-x}{q+x}}$	$\sqrt{p-x}\sqrt{q+x}+(p+q)\arcsin\sqrt{\frac{x+q}{p+q}}$
$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{\sqrt{(x-p)(q-x)}}$	$2\arcsin\sqrt{\frac{x-p}{q-p}}$

[含 (ax^2+c) 的有理式的积分]

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{ax^2+c}$ $(a>0,\ c>0)$	$\frac{1}{\sqrt{ac}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{a}{c}}\right)$
$\frac{1}{ax^2+c}$ $(a>0,\ c<0)$	$\frac{1}{2\sqrt{-ac}}\ln\frac{x\sqrt{a}-\sqrt{-c}}{x\sqrt{a}+\sqrt{-c}}$
$\frac{1}{ax^2+c}$ $(a<0,\ c>0)$	$\frac{1}{2\sqrt{-ac}}\ln\frac{\sqrt{c}+x\sqrt{-a}}{\sqrt{c}-x\sqrt{-a}}$
$\frac{1}{(ax^2+c)^n}$ $(n>1)$	$\frac{x}{2c(n-1)(ax^2+c)^{n-1}}+\frac{(2n-3)}{2c(n-1)}\int\frac{dx}{(ax^2+c)^{n-1}}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x(ax^2+c)^n$ $(n\neq-1)$	$\frac{(ax^2+c)^{n+1}}{2a(n+1)}$
$\frac{x}{ax^2+c}$	$\frac{1}{2a}\ln(ax^2+c)$
$\frac{x^2}{ax^2+c}$	$\frac{x}{a}-\frac{c}{a}\int\frac{dx}{ax^2+c}$
$\frac{x^n}{ax^2+c}$ $(n\neq1)$	$\frac{x^{n-1}}{a(n-1)}-\frac{c}{a}\int\frac{x^{n-2}}{ax^2+c}dx$
$\frac{x^2}{(ax^2+c)^n}$ $(n>1)$	$-\frac{x}{2(n-1)a(ax^2+c)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)a}\int\frac{dx}{(ax^2+c)^{n-1}}$
$\frac{1}{x(ax^2+c)}$	$\frac{1}{2c}\ln\frac{x^2}{ax^2+c}$
$\frac{1}{x^2(ax^2+c)}$	$-\frac{1}{cx}-\frac{a}{c}\int\frac{dx}{ax^2+c}$
$\frac{1}{x^2(ax^2+c)^n}$ $(n\geqslant2)$	$\frac{1}{c}\int\frac{dx}{x^2(ax^2+c)^{n-1}}-\frac{a}{c}\int\frac{dx}{(ax^2+c)^n}$

[含 $\sqrt{ax^2+c}$ 的积分]

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sqrt{ax^2+c}$ $(a>0)$	$\frac{x}{2}\sqrt{ax^2+c}+\frac{c}{2\sqrt{a}}\ln(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c})$
$\sqrt{ax^2+c}$ $(a<0)$	$\frac{x}{2}\sqrt{ax^2+c}+\frac{c}{2\sqrt{-a}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right)$
$\sqrt{(ax^2+c)^3}$ $(a>0)$	$\frac{x}{8}(2ax^2+5c)\sqrt{ax^2+c}+\frac{3c^2}{8\sqrt{a}}\ln(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c})$
$\sqrt{(ax^2+c)^3}$ $(a<0)$	$\frac{x}{8}(2ax^2+5c)\sqrt{ax^2+c}+\frac{3c^2}{8\sqrt{-a}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right)$
$x\sqrt{ax^2+c}$	$\frac{1}{3a}\sqrt{(ax^2+c)^3}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^2\sqrt{ax^2+c}$ $(a>0)$	$\frac{x}{4a}\sqrt{(ax^2+c)^3}-\frac{cx}{8a}\sqrt{ax^2+c}-\frac{c^2}{8\sqrt{a^3}}\ln(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c})$
$x^2\sqrt{ax^2+c}$ $(a<0)$	$\frac{x}{4a}\sqrt{(ax^2+c)^3}-\frac{cx}{8a}\sqrt{ax^2+c}-\frac{c^2}{8a\sqrt{-a}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right)$
$x^n\sqrt{ax^2+c}$ $(n>0)$	$\frac{x^{n-1}}{(n+2)a}\sqrt{(ax^2+c)^3}-\frac{(n-1)c}{(n+2)a}\int x^{n-2}\sqrt{ax^2+c}\,dx$
$x\sqrt{(ax^2+c)^3}$	$\frac{1}{5a}\sqrt{(ax^2+c)^5}$
$x^2\sqrt{(ax^2+c)^3}$	$\frac{x^3}{6}\sqrt{(ax^2+c)^3}+\frac{c}{2}\int x^2\sqrt{ax^2+c}\,dx$
$x^n\sqrt{(ax^2+c)^3}$ $(n>0)$	$\frac{x^{n+1}}{n+4}\sqrt{(ax^2+c)^3}+\frac{3c}{n+4}\int x^n\sqrt{ax^2+c}\,dx$
$\frac{\sqrt{ax^2+c}}{x}$ $(c>0)$	$\sqrt{ax^2+c}+\sqrt{c}\ln\frac{\sqrt{ax^2+c}-\sqrt{c}}{x}$
$\frac{\sqrt{ax^2+c}}{x}$ $(c<0)$	$\sqrt{ax^2+c}-\sqrt{-c}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{ax^2+c}}{\sqrt{-c}}$
$\frac{\sqrt{ax^2+c}}{x^n}$ $(n>1)$	$-\frac{\sqrt{(ax^2+c)^3}}{c(n-1)x^{n-1}}-\frac{(n-4)a}{(n-1)c}\int\frac{\sqrt{ax^2+c}}{x^{n-2}}\,dx$
$\frac{1}{\sqrt{ax^2+c}}$ $(a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\ln(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c})$
$\frac{1}{\sqrt{ax^2+c}}$ $(a<0)$	$\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{(ax^2+c)^3}}$	$\frac{x}{c\sqrt{ax^2+c}}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{x}{\sqrt{ax^2+c}}$	$\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+c}$
$\frac{x^2}{\sqrt{ax^2+c}}$	$\frac{x}{a}\sqrt{ax^2+c}-\frac{1}{a}\int\sqrt{ax^2+c}\,dx$
$\frac{x^n}{\sqrt{ax^2+c}}$ $(n>0)$	$\frac{x^{n-1}}{na}\sqrt{ax^2+c}-\frac{(n-1)c}{na}\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{ax^2+c}}\,dx$
$\frac{x}{\sqrt{(ax^2+c)^3}}$	$-\frac{1}{a\sqrt{ax^2+c}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{(ax^2+c)^3}}$ $(a>0)$	$-\frac{x}{a\sqrt{ax^2+c}}+\frac{1}{a\sqrt{a}}\ln(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2+c})$
$\frac{x^2}{\sqrt{(ax^2+c)^3}}$ $(a<0)$	$-\frac{x}{a\sqrt{ax^2+c}}+\frac{1}{a\sqrt{-a}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right)$
$\frac{x^3}{\sqrt{(ax^2+c)^3}}$	$-\frac{x^2}{a\sqrt{ax^2+c}}+\frac{2}{a^2}\sqrt{ax^2+c}$
$\frac{1}{x\sqrt{ax^2+c}}$ $(c>0)$	$\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\frac{\sqrt{ax^2+c}-\sqrt{c}}{x}$
$\frac{1}{x\sqrt{ax^2+c}}$ $(c<0)$	$\frac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arc\,sec}\left(x\sqrt{\frac{-a}{c}}\right)$
$\frac{1}{x^2\sqrt{ax^2+c}}$	$-\frac{\sqrt{ax^2+c}}{cx}$
$\frac{1}{x^n\sqrt{ax^2+c}}$ $(n>1)$	$-\frac{\sqrt{ax^2+c}}{c(n-1)x^{n-1}}-\frac{(n-2)a}{(n-1)c}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{ax^2+c}}$

[含 (ax^n+c) 的积分]

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{1}{x(ax^n+c)}$ $(n>0)$	$\dfrac{1}{nc}\ln\dfrac{x^n}{ax^n+c}$
$\dfrac{1}{x\sqrt{ax^n+c}}$ $(n>0,c>0)$	$\dfrac{1}{n\sqrt{c}}\ln\dfrac{\sqrt{ax^n+c}-\sqrt{c}}{\sqrt{ax^n+c}+\sqrt{c}}$
$\dfrac{1}{x\sqrt{ax^n+c}}$ $(n>0,c<0)$	$\dfrac{2}{n\sqrt{-c}}\operatorname{arcsec}\sqrt{\dfrac{-ax^n}{c}}$
$x^m(ax^n+c)^p$	$\dfrac{x^{m+1}}{np+m+1}(ax^n+c)^p + \dfrac{npc}{np+m+1}\int x^m(ax^n+c)^{p-1}dx$
$x^m(ax^n+c)^p$ $(p\geqslant 2)$	$\dfrac{x^{m-n+1}}{a(np+m+1)}(ax^n+c)^{p+1} - \dfrac{(m-n+1)c}{(np+m+1)a}\int x^{m-n}(ax^n+c)^p dx$
$\dfrac{1}{x^m(ax^n+c)^p}$ $(n>0,p>1)$	$\dfrac{1}{n(p-1)cx^{m-1}(ax^n+c)^{p-1}} + \dfrac{m-n+np-1}{n(p-1)c}\int\dfrac{dx}{x^m(ax^n+c)^{p-1}}$
$\dfrac{(ax^n+c)^p}{x^m}$	$\dfrac{(ax^n+c)^p}{(np-m+1)x^{m-1}} + \dfrac{npc}{np-m+1}\int\dfrac{(ax^n+c)^{p-1}}{x^m}dx$
$\dfrac{x^m}{(ax^n+c)^p}$ $(n>0,p>1)$	$\dfrac{x^{m+1}}{nc(p-1)(ax^n+c)^{p-1}} - \dfrac{m-(p-1)n+1}{nc(p-1)}\int\dfrac{x^m}{(ax^n+c)^{p-1}}dx$

[含 (ax^2+bx+c) 的有理式的积分]

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$ $(b^2>4ac)$	$\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}$
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$ $(b^2<4ac)$	$\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$ $(b^2=4ac)$	$-\frac{2}{2ax+b}$
$\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$ $(n>1,\ b^2\neq 4ac)$	$\frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$
$\frac{x}{ax^2+bx+c}$	$\frac{1}{2a}\ln(ax^2+bx+c)-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$
$\frac{x^2}{ax^2+bx+c}$	$\frac{x}{a}-\frac{b}{2a^2}\ln(ax^2+bx+c)+\frac{b^2-2ac}{2a^2}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$
$\frac{x^n}{ax^2+bx+c}$ $(n>1)$	$\frac{x^{n-1}}{(n-1)a}-\frac{c}{a}\int\frac{x^{n-2}}{ax^2+bx+c}dx-\frac{b}{a}\int\frac{x^{n-1}}{ax^2+bx+c}dx$
$\frac{x}{(ax^2+bx+c)^n}$ $(n>1,\ b^2\neq 4ac)$	$\frac{bx+2c}{(n-1)(b^2-4ac)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2-4ac)}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$
$\frac{x^m}{(ax^2+bx+c)^n}$	$-\frac{x^{m-1}}{a(2n-m-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}}-\frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a}\int\frac{x^{m-1}}{(ax^2+bx+c)^n}dx+\frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a}\int\frac{x^{m-2}}{(ax^2+bx+c)^n}dx$
$\frac{1}{x(ax^2+bx+c)}$	$\frac{1}{2c}\ln\frac{x^2}{ax^2+bx+c}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$
$\frac{1}{x^2(ax^2+bx+c)}$	$\frac{b}{2c^2}\ln\frac{ax^2+bx+c}{x^2}-\frac{1}{cx}+\frac{b^2-2ac}{2c^2}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{1}{x(ax^2+bx+c)^n}$ $(n>1)$	$\dfrac{1}{2c(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}}-\dfrac{b}{2c}\int\dfrac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ $+\dfrac{1}{c}\int\dfrac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n-1}}$
$\dfrac{1}{x^m(ax^2+bx+c)^n}$	$-\dfrac{1}{(m-1)cx^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}}$ $-\dfrac{(n+m-2)b}{(m-1)c}\int\dfrac{dx}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^n}$ $-\dfrac{(2n+m-3)a}{(m-1)c}\int\dfrac{dx}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^n}$

[含 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的积分]

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a>0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c})$
$\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a<0,b^2>4ac)$	$\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}}$
$\dfrac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a}-\dfrac{b}{2a}\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
$\dfrac{x^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$\dfrac{x^{n-1}}{na}\sqrt{ax^2+bx+c}-\dfrac{(2n-1)b}{2na}\int\dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $-\dfrac{(n-1)c}{na}\int\dfrac{x^{n-2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\dfrac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}-\dfrac{b^2-4ac}{8a}\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
$x\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\dfrac{1}{3a}\sqrt{(ax^2+bx+c)^3}-\dfrac{b}{2a}\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$
$x^2\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\left(x-\dfrac{5b}{6a}\right)\dfrac{\sqrt{(ax^2+bx+c)^3}}{4a}$ $+\dfrac{5b^2-4ac}{16a^2}\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(c>0)$	$-\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}}{x}+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)$
$\frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(c<0,\ b^2>4ac)$	$\frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{bx+2c}{x\sqrt{b^2-4ac}}$
$\frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx}}$ $(c=0)$	$-\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2+bx}$
$\frac{1}{x^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n>1)$	$-\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{(n-1)cx^{n-1}}-\frac{(2n-3)b}{2(n-1)c}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $-\frac{(n-2)a}{(n-1)c}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{ax^2+bx+c}}$
$\frac{1}{\sqrt{(ax^2+bx+c)^3}}$ $(b^2\neq 4ac)$	$-\frac{2(2ax+b)}{(b^2-4ac)\sqrt{ax^2+bx+c}}$
$\frac{1}{\sqrt{(ax^2+bx+c)^3}}$ $(b^2=4ac)$	$-\frac{2\sqrt{a}}{(2ax+b)^2}$
$x^n\sqrt{2ax-x^2}$ $(n>0)$	$-\frac{x^{n-1}\sqrt{(2ax-x^2)^3}}{n+2}+\frac{a(2n+1)}{n+2}\int x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}\,dx$ 或 $\sqrt{2ax-x^2}\left[\frac{x^{n+1}}{n+2}-\sum_{r=0}^{n}\frac{(2n+1)!(r!)^2a^{n-r+1}}{2^{n-r}(2r+1)!(n+2)!n!}x^r\right]$ $+\frac{(2n+1)!a^{n+2}}{2^n n!(n+2)!}\arcsin\frac{x-a}{\|a\|}$
$\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^n}$ $(n\geqslant 2)$	$-\frac{\sqrt{(2ax-x^2)^3}}{(2n-3)ax^n}+\frac{n-3}{(2n-3)a}\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}\,dx}{x^{n-1}}$
$\frac{x^n}{\sqrt{2ax-x^2}}$ $(n>0)$	$-\frac{x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}}{n}+\frac{(2n-1)a}{n}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ 或 $-\sqrt{2ax-x^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{(2n)!\,r!(r-1)!\,a^{n-r}}{2^{n-r}(2r)!(n!)^2}x^{r-1}$ $+\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\arcsin\frac{x-a}{\|a\|}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{1}{x^n\sqrt{2ax-x^2}}$ $(n>1)$	$-\dfrac{\sqrt{2ax-x^2}}{(2n-1)ax^n}+\dfrac{n-1}{(2n-1)a}\int\dfrac{dx}{x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}}$ 或 $-\sqrt{2ax-x^2}\sum_{r=0}^{n-1}\dfrac{2^{n-r}(n-1)!n!(2r)!}{(2n)!(r!)^2a^{n-r}x^{r+1}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{(2ax-x^2)^3}}$	$\dfrac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}$
$\dfrac{x}{\sqrt{(2ax-x^2)^3}}$	$\dfrac{x}{a\sqrt{2ax-x^2}}$

［含 $\sin ax$ 的积分］

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin ax$	$-\dfrac{1}{a}\cos ax$
$\sin^2 ax$	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4a}\sin 2ax$
$\sin^3 ax$	$-\dfrac{1}{a}\cos ax+\dfrac{1}{3a}\cos^3 ax$
$\sin^4 ax$	$\dfrac{3x}{8}-\dfrac{3}{16a}\sin 2ax-\dfrac{1}{4a}\sin^3 ax\cos ax$
$\sin^n ax$ （n 为正整数）	$-\dfrac{1}{na}\sin^{n-1}ax\cos ax+\dfrac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}ax\,dx$
$\sin^{2n} ax$ （n 为正整数）	$-\dfrac{\cos ax}{a}\sum_{r=0}^{n-1}\dfrac{(2n)!(r!)^2\sin^{2r+1}ax}{2^{2n-2r}(2r+1)!(n!)^2}+\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x$
$\sin^{2n+1} ax$ （n 为正整数）	$-\dfrac{\cos ax}{a}\sum_{r=0}^{n}\dfrac{2^{2n-2r}(n!)^2(2r)!}{(2n+1)!(r!)^2}\sin^{2r}ax$
$\dfrac{1}{\sin ax}$	$\dfrac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\dfrac{ax}{2}$ 或 $\dfrac{1}{a}\ln(\csc ax-\operatorname{ctg} ax)$
$\dfrac{1}{\sin^2 ax}$	$-\dfrac{1}{a}\operatorname{ctg} ax$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{\sin^n ax}$ （n为$\geqslant 2$的整数）	$-\frac{\cos ax}{(n-1)a\sin^{n-1}ax}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}ax}$
$\frac{1}{\sin^{2n}ax}$ （n为正整数）	$-\frac{\cos ax}{a}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{2^{2n-2r-1}(n-1)!n!(2r)!}{(2n)!(r!)^2\sin^{2r+1}ax}$
$\frac{1}{\sin^{2n+1}ax}$ （n为正整数）	$-\frac{\cos ax}{a}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(2n)!(r!)^2}{2^{2n-2r}(n!)^2(2r+1)!\sin^{2r+1}ax}$ $+\frac{1}{a}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$
$\frac{1}{1\pm\sin ax}$	$\mp\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{ax}{2}\right)$
$\frac{1}{b+c\sin ax}$ （$b^2>c^2$）	$-\frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)\right]$
$\frac{1}{b+c\sin ax}$ （$b^2<c^2$）	$-\frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\frac{c+b\sin ax+\sqrt{c^2-b^2}\cos ax}{b+c\sin ax}$
$\sin ax\sin bx$ （$\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert$）	$\frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)}-\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$
$\sqrt{1+\sin x}$	$\pm 2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)$ （当$(8k-1)\frac{\pi}{2}<x\leqslant(8k+3)\frac{\pi}{2}$时，取正号；否则取负号，$k$为整数）
$\sqrt{1-\sin x}$	$\pm 2\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$ （当$(8k-3)\frac{\pi}{2}<x\leqslant(8k+1)\frac{\pi}{2}$时，取正号；否则取负号，$k$为整数）

［含 $\cos ax$ 的积分］

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\cos^2 ax$	$\frac{x}{2}+\frac{1}{4a}\sin 2ax$
$\cos^3 ax$	$\frac{1}{a}\sin ax-\frac{1}{3a}\sin^3 ax$
$\cos^4 ax$	$\frac{3x}{8}+\frac{3}{16a}\sin 2ax+\frac{1}{4a}\cos^3 ax\sin ax$
$\cos^n ax$ (n为正整数)	$\frac{1}{na}\cos^{n-1} ax\sin ax+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}ax\,dx$
$\cos^{2n} ax$ (n 为正整数)	$\frac{\sin ax}{a}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(2n)!(r!)^2\cos^{2r+1}ax}{2^{2n-2r}(2r+1)!(n!)^2}+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x$
$\cos^{2n+1} ax$ (n 为正整数)	$\frac{\sin ax}{a}\sum_{r=0}^{n}\frac{2^{2n-2r}(n!)^2(2r)!}{(2n+1)!(r!)^2}\cos^{2r}ax$
$\frac{1}{\cos ax}$	$\frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$ 或 $\frac{1}{a}\ln(\operatorname{tg} ax+\sec ax)$
$\frac{1}{\cos^2 ax}$	$\frac{1}{a}\operatorname{tg} ax$
$\frac{1}{\cos^n ax}$ (n 为$\geqslant 2$ 的整数)	$\frac{\sin ax}{(n-1)a\cos^{n-1}ax}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}ax}$
$\frac{1}{\cos^{2n} ax}$ (n 为正整数)	$\frac{\sin ax}{a}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{2^{2n-2r-1}(n-1)!n!(2r)!}{(2n)!(r!)^2\cos^{2r+1}ax}$
$\frac{1}{\cos^{2n+1} ax}$ (n 为正整数)	$\frac{\sin ax}{a}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(2n)!(r!)^2}{2^{2n-2r}(n!)^2(2r+1)!\cos^{2r+2}ax}$ $+\frac{1}{a}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ln(\sec ax+\operatorname{tg} ax)$
$\frac{1}{1+\cos ax}$	$\frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$
$\frac{1}{1-\cos ax}$	$-\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}$
$\sqrt{1+\cos x}$	$\pm 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ (当$(4k-1)\pi<x\leqslant(4k+1)\pi$时，取正号；否则取负号，$k$ 为整数)
$\sqrt{1-\cos x}$	$\mp 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$ (当 $4k\pi<x\leqslant(4k+2)\pi$时，取负号；

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
	否则取正号、k 为整数）
$\frac{1}{b+c\cos ax}$ $(\|b\|>\|c\|)$	$\frac{1}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b^2-c^2}\sin ax}{c+b\cos ax}$
$\frac{1}{b+c\cos ax}$ $(\|b\|<\|c\|)$	$\frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\operatorname{Ar\,th}\frac{\sqrt{c^2-b^2}\sin ax}{c+b\cos ax}$
$\cos ax\cos bx$ $(\|a\|\neq\|b\|)$	$\frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)}+\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$

［含 $\sin ax$ 和 $\cos ax$ 的积分］

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin ax\cos bx$ $(\|a\|\neq\|b\|)$	$-\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}-\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}$
$\sin^n ax\cos ax$ $(n\neq-1)$	$\frac{1}{(n+1)a}\sin^{n+1}ax$
$\sin ax\cos^n ax$ $(n\neq-1)$	$-\frac{1}{(n+1)a}\cos^{n+1}ax$
$\frac{\sin ax}{\cos ax}$	$-\frac{1}{a}\ln\cos ax$
$\frac{\cos ax}{\sin ax}$	$\frac{1}{a}\ln\sin ax$
$\frac{1}{b^2\cos^2 ax+c^2\sin^2 ax}$	$\frac{1}{abc}\operatorname{arc\,tg}\frac{c\cdot\operatorname{tg}ax}{b}$
$\sin^2 ax\cos^2 ax$	$\frac{x}{8}-\frac{1}{32a}\sin 4ax$
$\frac{1}{\sin ax\cos ax}$	$\frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}ax$
$\frac{1}{\sin^2 ax\cos^2 ax}$	$\frac{1}{a}(\operatorname{tg}ax-\operatorname{ctg}ax)$
$\frac{\sin^2 ax}{\cos ax}$	$-\frac{1}{a}\sin ax+\frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{\cos^2 ax}{\sin ax}$	$\dfrac{1}{a}\cos ax+\dfrac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\dfrac{ax}{2}$
$(b+c\sin ax)^n\cos ax$ $(n\neq-1)$	$\dfrac{1}{(n+1)ac}(b+c\sin ax)^{n+1}$
$(b+c\cos ax)^n\sin ax$ $(n\neq-1)$	$-\dfrac{1}{(n+1)ac}(b+c\cos ax)^{n+1}$
$\dfrac{\cos ax}{b+c\sin ax}$	$\dfrac{1}{ac}\ln(b+c\sin ax)$
$\dfrac{\sin ax}{b+c\cos ax}$	$-\dfrac{1}{ac}\ln(b+c\cos ax)$
$\dfrac{1}{b\sin ax+c\cos ax}$	$\dfrac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\ln\operatorname{tg}\dfrac{ax+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{c}{b}}{2}$
$\dfrac{1}{b+c\cos ax+d\sin ax}$ $(b^2\neq c^2+d^2,\ -\pi<ax<\pi)$	$-\dfrac{\arcsin U}{a\sqrt{b^2-c^2-d^2}}$ 或 $\dfrac{\ln V}{a\sqrt{c^2+d^2-b^2}}$ 式中 $U=\dfrac{c^2+d^2+b(c\cos ax+d\sin ax)}{\sqrt{c^2+d^2}(b+c\cos ax+d\sin ax)}$, $V=[c^2+d^2+b(c\cos ax+d\sin ax)$ $+\sqrt{c^2+d^2-b^2}(c\sin ax-d\cos ax)]/$ $\sqrt{c^2+d^2}(b+c\cos ax+d\sin ax)$
$\dfrac{1}{b+c\cos ax+d\sin ax}$ $(b^2=c^2+d^2)$	$\dfrac{b-(c+d)\cos ax+(c-d)\sin ax}{ab[b+(c-d)\cos ax+(c+d)\sin ax]}$
$\dfrac{\sin^2 ax}{b+c\cos^2 ax}$	$\dfrac{1}{ac}\sqrt{\dfrac{b+c}{b}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{b}{b+c}}\operatorname{tg}ax\right)-\dfrac{x}{c}$
$\dfrac{\sin ax\cos ax}{b\cos^2 ax+c\sin^2 ax}$	$\dfrac{1}{2a(c-b)}\ln(b\cos^2 ax+c\sin^2 ax)$
$\dfrac{1}{b^2\cos^2 ax-c^2\sin^2 ax}$	$\dfrac{1}{2abc}\ln\dfrac{b\cos ax+c\sin ax}{b\cos ax-c\sin ax}$
$\cos^m ax\sin^n ax$	$\dfrac{\cos^{m-1}ax\sin^{n+1}ax}{(m+n)a}+\dfrac{m-1}{m+n}\int\cos^{m-2}ax\sin^n ax\,dx$
$\cos^m ax\sin^n ax$ $(m,n>0)$	$-\dfrac{\sin^{n-1}ax\cos^{m+1}ax}{(m+n)a}+\dfrac{n-1}{m+n}\int\cos^m ax\sin^{n-2}ax\,dx$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{\sin^m ax}{\cos^n ax}$ $(m,n>0,n\neq-1)$	$\dfrac{\sin^{m+1}ax}{(n-1)a\cos^{n-1}ax}-\dfrac{m-n+2}{n-1}\int\dfrac{\sin^m ax}{\cos^{n-2}ax}dx$ 或 $-\dfrac{\sin^{m-1}ax}{(m-n)a\cos^{n-1}ax}+\dfrac{m-1}{m-n}\int\dfrac{\sin^{m-2}ax}{\cos^n ax}dx$
$\dfrac{\cos^n ax}{\sin^m ax}$ $(m,n>0,n\neq-1)$	$-\dfrac{\cos^{n+1}ax}{(m-1)a\sin^{m-1}ax}+\dfrac{m-n-2}{m-1}\int\dfrac{\cos^n ax}{\sin^{m-2}ax}dx$ 或 $\dfrac{\cos^{n-1}ax}{a(n-m)\sin^{m-1}ax}+\dfrac{n-1}{n-m}\int\dfrac{\cos^{n-2}ax}{\sin^m ax}dx$
$\dfrac{1}{\sin^m ax\cos^n ax}$	$\dfrac{1}{(n-1)a\sin^{m-1}ax\cos^{n-1}ax}+\dfrac{m+n-2}{n-1}\int\dfrac{dx}{\sin^m ax\cos^{n-2}ax}$ 或 $-\dfrac{1}{(m-1)a\sin^{m-1}ax\cos^{n-1}ax}+\dfrac{m+n-2}{m-1}\int\dfrac{dx}{\sin^{m-2}ax\cos^n ax}$

[含 $\operatorname{tg}ax$, $\operatorname{ctg}ax$, $\sec ax$ 和 $\csc ax$ 的积分]

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\operatorname{tg}ax$	$-\dfrac{1}{a}\ln\cos ax$
$\operatorname{tg}^2 ax$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{tg}ax-x$
$\operatorname{tg}^3 ax$	$\dfrac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax+\dfrac{1}{a}\ln\cos ax$
$\operatorname{tg}^n ax$ (n 为≥2 的整数)	$\dfrac{1}{(n-1)a}\operatorname{tg}^{n-1}ax-\int\operatorname{tg}^{n-2}ax\,dx$
$\operatorname{ctg}ax$	$\dfrac{1}{a}\ln\sin ax$
$\operatorname{ctg}^2 ax$	$-\dfrac{1}{a}\operatorname{ctg}ax-x$
$\operatorname{ctg}^3 ax$	$-\dfrac{1}{2a}\operatorname{ctg}^2 ax-\dfrac{1}{a}\ln\sin ax$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\operatorname{ctg}^n ax$ (n为≥2的整数)	$-\frac{1}{(n-1)a}\operatorname{ctg}^{n-1}ax-\int \operatorname{ctg}^{n-2}ax\,dx$
$\frac{1}{b+\operatorname{ctg} ax}$	$\frac{bx}{b^2+c^2}+\frac{c}{a(b^2+c^2)}\ln(b\cos ax+c\sin ax)$
$\frac{1}{b+c\operatorname{ctg} ax}$	$\frac{bx}{b^2+c^2}-\frac{c}{a(b^2+c^2)}\ln(c\cos ax+b\sin ax)$
$\frac{1}{\sqrt{b+\operatorname{ctg}^2 ax}}$ ($b>0$, $\|b\|>\|c\|$)	$\frac{1}{a\sqrt{b-c}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{b-c}{b}}\sin ax\right)$
$\operatorname{tg} ax\sec ax$	$\frac{1}{a}\sec ax$
$\operatorname{tg}^n ax\sec^2 ax$ ($n\neq-1$)	$\frac{1}{(n+1)a}\operatorname{tg}^{n+1}ax$
$\operatorname{tg} ax\sec^n ax$ ($n\neq0$)	$\frac{1}{na}\sec^n ax$
$\operatorname{ctg} ax\csc ax$	$-\frac{1}{a}\csc ax$
$\operatorname{ctg}^n ax\csc^2 ax$ ($n\neq-1$)	$-\frac{1}{(n+1)a}\operatorname{ctg}^{n+1}ax$
$\operatorname{ctg} ax\csc^n ax$ ($n\neq0$)	$-\frac{1}{na}\csc^n ax$
$\frac{\csc^2 ax}{\operatorname{ctg} ax}$	$-\frac{1}{a}\ln\operatorname{ctg} ax$

[含 x^m, $\frac{1}{x^n}$, $\sin ax$ 和 $\cos ax$ 的积分]

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x\sin ax$	$\frac{1}{a^2}\sin ax-\frac{1}{a}x\cos ax$
$x^2\sin ax$	$\frac{2x}{a^2}\sin ax+\frac{2}{a^3}\cos ax-\frac{x^2}{a}\cos ax$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^3\sin ax$	$\frac{3x^2}{a^2}\sin ax-\frac{6}{a^4}\sin ax-\frac{x^3}{a}\cos ax+\frac{6x}{a^3}\cos ax$
$x\sin^2 ax$	$\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4a}\sin 2ax-\frac{1}{8a^2}\cos 2ax$
$x^2\sin^2 ax$	$\frac{x^3}{6}-\left(\frac{x^2}{4a}-\frac{1}{8a^3}\right)\sin 2ax-\frac{x}{4a^2}\cos 2ax$
$x^3\sin^2 ax$	$\frac{x^4}{8}-\left(\frac{x^3}{4a}-\frac{3x}{8a^3}\right)\sin 2ax-\left(\frac{3x^2}{8a^2}-\frac{3}{16a^4}\right)\cos 2ax$
$x\sin^3 ax$	$\frac{x}{12a}\cos 3ax-\frac{1}{36a^2}\sin 3ax-\frac{3x}{4a}\cos ax+\frac{3}{4a^2}\sin ax$
$x^n\sin ax$	$-\frac{x^n}{a}\cos ax+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$ 或 $\cos ax\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^{r-1}\frac{n!}{(n-2r)!}\cdot\frac{x^{n-2r}}{a^{2r+1}}$ $+\sin ax\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^{r}\frac{n!}{(n-2r-1)!}\cdot\frac{x^{n-2r-1}}{a^{2r+2}}$
$\frac{\sin ax}{x}$	$ax-\frac{(ax)^3}{3\cdot 3!}+\frac{(ax)^5}{5\cdot 5!}-\frac{(ax)^7}{7\cdot 7!}+\cdots$
$\frac{\sin ax}{x^n}$　$(n>1)$	$-\frac{\sin ax}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{a}{n-1}\int\frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx$
$x\cos ax$	$\frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{x}{a}\sin ax$
$x^2\cos ax$	$\frac{2x}{a^2}\cos ax-\frac{2}{a^3}\sin ax+\frac{x^2}{a}\sin ax$
$x^3\cos ax$	$\frac{3a^2x^2-6}{a^4}\cos ax+\frac{a^2x^3-6x}{a^3}\sin ax$
$x\cos^2 ax$	$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4a}\sin 2ax+\frac{1}{8a^2}\cos 2ax$
$x^2\cos^2 ax$	$\frac{x^3}{6}+\left(\frac{x^2}{4a}-\frac{1}{8a^3}\right)\sin 2ax+\frac{x}{4a^2}\cos 2ax$
$x^3\cos^2 ax$	$\frac{x^4}{8}+\left(\frac{x^3}{4a}-\frac{3x}{8a^3}\right)\sin 2ax+\left(\frac{3x^2}{8a^2}-\frac{3}{16a^4}\right)\cos 2ax$
$x\cos^3 ax$	$\frac{x}{12a}\sin 3ax+\frac{1}{36a^2}\cos 3ax+\frac{3x}{4a}\sin ax+\frac{3}{4a^2}\cos ax$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^n\cos ax \quad (n>0)$	$\frac{x^n}{a}\sin ax-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx$ 或 $\sin ax\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{n!}{(n-2r)!}\cdot\frac{x^{n-2r}}{a^{2r+1}}$ $+\cos ax\sum_{r=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^r\frac{n!}{(n-2r-1)!}\cdot\frac{x^{n-2r-1}}{a^{2r+2}}$
$\frac{\cos ax}{x}$	$\ln ax-\frac{(ax)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(ax)^4}{4\cdot 4!}-\frac{(ax)^6}{6\cdot 6!}+\cdots$
$\frac{\cos ax}{x^n} \quad (n>1)$	$-\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{a}{n-1}\int\frac{\sin ax}{x^{n-1}}dx$

[含 e^{ax} 的积分]

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
b^{ax}	$\frac{b^{ax}}{a\ln b}$
xe^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$
xb^{ax}	$\frac{xb^{ax}}{a\ln b}-\frac{b^{ax}}{a^2(\ln b)^2}$
x^2e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2-2ax+2)$
$x^ne^{ax} \quad (n>0)$	$\frac{x^n}{a}e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$
x^ne^{ax} (n为正整数)	$\frac{e^{ax}}{a^{n+1}}[(ax)^n-n(ax)^{n-1}+n(n-1)(ax)^{n-2}$ $-\cdots+(-1)^n n!]$
x^ne^{-ax} (n为正整数)	$-\frac{e^{-ax}}{a^{n+1}}[(ax)^n+n(ax)^{n-1}+n(n-1)(ax)^{n-2}+\cdots+n!]$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^n b^{ax}$　　$(n>0)$	$\frac{x^n b^{ax}}{a\ln b}-\frac{n}{a\ln b}\int x^{n-1}b^{ax}dx$
$\frac{e^{ax}}{x}$	$\ln x+ax+\frac{(ax)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(ax)^3}{3\cdot 3!}+\cdots$
$\frac{e^{ax}}{x^n}$ (n为$\geqslant 2$的整数)	$\frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}}+a\int\frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx\right)$
$\frac{xe^{ax}}{(1+ax)^2}$	$\frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}$
$\frac{1}{b+ce^{ax}}$	$\frac{x}{b}-\frac{1}{ab}\ln(b+ce^{ax})$
$\frac{e^{ax}}{b+ce^{ax}}$	$\frac{1}{ac}\ln(b+ce^{ax})$
$\frac{1}{be^{ax}+ce^{-ax}}$ $(b,c>0)$	$\frac{1}{a\sqrt{bc}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b}{c}}e^{ax}\right)$
$\frac{1}{be^{ax}-ce^{-ax}}$ $(b,c>0)$	$\frac{1}{2a\sqrt{bc}}\ln\frac{\sqrt{b}\,e^{ax}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}\,e^{ax}+\sqrt{c}}$ 或　$-\frac{1}{a\sqrt{bc}}\operatorname{Arth}\left(\sqrt{\frac{b}{c}}e^{ax}\right)$
$e^{ax}\sin bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$
$e^{ax}\cos bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$
$e^{ax}\sin bx\sin cx$	$\frac{e^{ax}[(b-c)\sin(b-c)x+a\cos(b-c)x]}{2[a^2+(b-c)^2]}$ $-\frac{e^{ax}[(b+c)\sin(b+c)x+a\cos(b+c)x]}{2[a^2+(b+c)^2]}$
$e^{ax}\cos bx\cos cx$	$\frac{e^{ax}[(b-c)\sin(b-c)x+a\cos(b-c)x]}{2[a^2+(b-c)^2]}$ $+\frac{e^{ax}[(b+c)\sin(b+c)x+a\cos(b+c)x]}{2[a^2+(b+c)^2]}$
$e^{ax}\sin bx\cos cx$	$\frac{e^{ax}[a\sin(b-c)x-(b-c)\cos(b-c)x]}{2[a^2+(b-c)^2]}$ $+\frac{e^{ax}[a\sin(b+c)x-(b+c)\cos(b+c)x]}{2[a^2+(b+c)^2]}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$e^{ax}\sin bx\sin(bx+c)$	$\frac{e^{ax}\cos c}{2a}-\frac{e^{ax}[a\cos(2bx+c)+2b\sin(2bx+c)]}{2(a^2+4b^2)}$
$e^{ax}\cos bx\cos(bx+c)$	$\frac{e^{ax}\cos c}{2a}+\frac{e^{ax}[a\cos(2bx+c)+2b\sin(2bx+c)]}{2(a^2+4b^2)}$
$e^{ax}\sin bx\cos(bx+c)$	$-\frac{e^{ax}\sin c}{2a}+\frac{e^{ax}[a\sin(2bx+c)-2b\cos(2bx+c)]}{2(a^2+4b^2)}$
$e^{ax}\cos bx\sin(bx+c)$	$\frac{e^{ax}\sin c}{2a}+\frac{e^{ax}[a\sin(2bx+c)-2b\cos(2bx+c)]}{2(a^2+4b^2)}$
$xe^{ax}\sin bx$	$\frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$ $-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\sin bx-2ab\cos bx]$
$xe^{ax}\cos bx$	$\frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$ $-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\cos bx+2ab\sin bx]$
$e^{ax}\cos^n bx$	$\frac{e^{ax}\cos^{n-1}bx(a\cos bx+nb\sin bx)}{a^2+n^2b^2}$ $+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx$
$e^{ax}\sin^n bx$	$\frac{e^{ax}\sin^{n-1}bx(a\sin bx-nb\cos bx)}{a^2+n^2b^2}$ $+\frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx$

[含 $\ln ax$ 的积分]

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\ln ax$	$x\ln ax-x$
$x\ln ax$	$\frac{x^2}{2}\ln ax-\frac{x^2}{4}$
$x^2\ln ax$	$\frac{x^3}{3}\ln ax-\frac{x^3}{9}$
$(\ln ax)^2$	$x(\ln ax)^2-2x\ln ax+2x$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$(\ln ax)^n$ $(n\neq-1)$	$x(\ln ax)^n-n\int(\ln ax)^{n-1}dx$
	或 $(-1)^n n!\,x\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r\dfrac{(\ln x)^r}{r!}$
$x^n\ln ax$ $(n\neq-1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln ax-\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$
$x^n(\ln ax)^m$ $(n\neq-1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}(\ln ax)^m-\dfrac{m}{n+1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}dx$
	或 $(-1)^m\dfrac{m!}{n+1}x^{n+1}\sum\limits_{r=0}^{m}\dfrac{(-1)^r(\ln x)^r}{r!(n+1)^{m-r}}$
$\dfrac{(\ln ax)^n}{x}$ $(n\neq-1)$	$\dfrac{(\ln ax)^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x\ln ax}$	$\ln\ln ax$
$\dfrac{1}{x(\ln ax)^n}$ $(n\neq1)$	$-\dfrac{1}{(n-1)(\ln ax)^{n-1}}$
$\dfrac{x^n}{(\ln ax)^m}$ $(m\neq1)$	$-\dfrac{x^{n+1}}{(m-1)(\ln ax)^{m-1}}+\dfrac{n+1}{m-1}\int\dfrac{x^n}{(\ln ax)^{m-1}}dx$
$\dfrac{1}{\ln ax}$	$\dfrac{1}{a}\left(\ln\lvert\ln ax\rvert+\ln ax+\dfrac{(\ln ax)^2}{2\cdot2!}+\dfrac{(\ln ax)^3}{3\cdot3!}+\cdots\right)$
$\sin(\ln ax)$	$\dfrac{x}{2}[\sin(\ln ax)-\cos(\ln ax)]$
$\cos(\ln ax)$	$\dfrac{x}{2}[\sin(\ln ax)+\cos(\ln ax)]$
$e^{ax}\ln bx$	$\dfrac{e^{ax}}{a}\ln bx-\dfrac{1}{a}\int\dfrac{e^{ax}}{x}dx$

[含 arcsinax, arccosax, arctgax, arcctgax, arcsecax, arccscax 的积分]

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\arcsin ax$	$x\arcsin ax+\frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}$
$(\arcsin ax)^2$	$x(\arcsin ax)^2-2x+\frac{2}{a}\sqrt{1-a^2x^2}\arcsin ax$
$x\arcsin ax$	$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4a^2}\right)\arcsin ax+\frac{x}{4a}\sqrt{1-a^2x^2}$
$x^n\arcsin ax$ $(n\neq-1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsin ax-\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx$
$\frac{\arcsin ax}{x}$ $(\lvert ax\rvert<1)$	$ax+\frac{1}{2\cdot3\cdot3}(ax)^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}(ax)^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}(ax)^7+\cdots$
$\frac{\arcsin ax}{x^2}$	$-\frac{1}{x}\arcsin ax-a\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2x^2}}{ax}$
$\arccos ax$	$x\arccos ax-\frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2}$
$(\arccos ax)^2$	$x(\arccos ax)^2-2x-\frac{2}{a}\sqrt{1-a^2x^2}\arccos ax$
$x\arccos ax$	$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4a^2}\right)\arccos ax-\frac{x}{4a}\sqrt{1-a^2x^2}$
$x^n\arccos ax$ $(n\neq-1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\arccos ax+\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx$
$\frac{\arccos ax}{x}$ $(\lvert ax\rvert<1)$	$\frac{\pi}{2}\ln\lvert ax\rvert-ax-\frac{1}{2\cdot3\cdot3}(ax)^3-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}(ax)^5-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}(ax)^7-\cdots$
$\frac{\arccos ax}{x^2}$	$-\frac{1}{x}\arccos ax+a\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2x^2}}{ax}$
$\mathrm{arctg}\, ax$	$x\,\mathrm{arctg}\, ax-\frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2)$
$x^n\mathrm{arctg}\, ax$ $(n\neq-1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{arctg}\, ax-\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{1+a^2x^2}dx$
$\frac{\mathrm{arctg}\, ax}{x^2}$	$-\frac{1}{x}\mathrm{arctg}\, ax-\frac{a}{2}\ln\frac{1+a^2x^2}{a^2x^2}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\operatorname{arc\,ctg} ax$	$x \operatorname{arc\,ctg} ax+\frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2)$
$x^n \operatorname{arc\,ctg} ax$ $(n\neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arc\,ctg} ax+\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{1+a^2x^2}dx$
$\frac{\operatorname{arc\,ctg} ax}{x^2}$	$-\frac{1}{x}\operatorname{arc\,ctg} ax+\frac{a}{2}\ln\frac{1+a^2x^2}{a^2x^2}$
$\operatorname{arc\,sec} ax$	$x\operatorname{arc\,sec} ax-\frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2-1})$
$x^n\operatorname{arc\,sec} ax$ $(n\neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arc\,sec} ax\pm\frac{1}{n+1}\int\frac{x^n}{\sqrt{a^2x^2-1}}dx$ (当$\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,sec} ax<\pi$时，取正号；当 $0<\operatorname{arc\,sec} ax<\frac{\pi}{2}$时，取负号)
$\operatorname{arc\,csc} ax$	$x\operatorname{arc\,csc} ax+\frac{1}{a}\ln(ax+\sqrt{a^2x^2-1})$
$x^n\operatorname{arc\,csc} ax$ $(n\neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arc\,csc} ax\pm\frac{1}{n+1}\int\frac{x^n}{\sqrt{a^2x^2-1}}dx$ (当 $0<\operatorname{arc\,csc} ax<\frac{\pi}{2}$ 时，取正号；当$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,csc} ax<0$ 时，取负号)

四、定积分的求法

[定积分的性质]

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b[k_1 f(x)\pm k_2 g(x)]dx=k_1\int_a^b f(x)\,dx\pm k_2\int_a^b g(x)\,dx$$

[分部积分法]

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\int_a^b f(x)\,dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

式中 $f(x)g(x)\Big|_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a)$

[变量替换法] 设函数 $\varphi(x)$在区间$[a, b]$上有连续的导数 $\varphi'(x)$，同时函数 $f(u)$在区间$[\varphi(a), \varphi(b)]$上连续，并且 u 从 $\varphi(a)$单调地变到 $\varphi(b)$，则

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

[利用函数奇偶性求积法]

若 $f(x)$为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

若 $f(x)$为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

[利用积分对参数求导法] 设 $f(x,t)$ 在有界区域$R(a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta)$上连续，并且存在连续偏导数 $\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)$，则当 $\alpha<t<\beta$ 时，有

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\,dx$$

例 计算积分 $I=\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}\,dx$

解 设 $f(x,t)=\frac{x^t-1}{\ln x}$, $F(t)=\int_0^1 f(x,t)\,dx$

则 $F(0)=0$, $F(1)=I$. 因

$$\frac{dF}{dt}=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^t-1}{\ln x}\right)dx=\int_0^1 x^t\,dx=\frac{1}{t+1}$$

$$\int_0^1 dF(t)=\int_0^1\frac{1}{t+1}dt$$

所以 $I=F(1)=\ln 2$.

[定积分表]

定积分	定积分值
$\int_0^\infty\frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{\pi}{2a}\quad(a\neq0)$
$\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$	$\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$
$\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{1+x}dx$	$\frac{\pi}{\sin n\pi}\quad(0<n<1)$

定 积 分	定 积 分 值
$\int_0^{\pi}\sin^2 ax\,dx$	$\frac{\pi}{2}$
$\int_0^{\pi}\cos^2 ax\,dx$	$\frac{\pi}{2}$
$\left.\begin{array}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\end{array}\right\}$	$\begin{cases}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} & (n>-1)\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & (n \text{ 为正偶数})\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ 为正奇数})\end{cases}$
$\int_0^{\infty}\sin(x^2)dx$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\int_0^{\infty}\cos(x^2)dx$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx$	$\begin{cases}\frac{\pi}{2} & (a>0)\\ -\frac{\pi}{2} & (a<0)\end{cases}$
$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{tg} x}{x}dx$	$\frac{\pi}{2}$
$\int_0^{1}\frac{\arcsin x}{x}dx$	$\frac{\pi}{2}\ln 2$
$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 ax}{x^2}dx$	$\frac{\pi}{2}a$
$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\int_0^{\frac{\pi}{a}}\sin ax\cos ax\,dx$	0
$\int_0^{\pi}\sin ax\cos ax\,dx$	0

表中$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdots(2n)$，$(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)$。

定 积 分	定 积 分 值
$\int_0^{\pi} \sin ax \sin bx dx$	$0 \quad (a \neq b)$
$\int_0^{\pi} \cos ax \cos bx dx$	$0 \quad (a \neq b)$
$\int_0^{\pi} \sin ax \cos bx dx$	$\begin{cases} \dfrac{2a}{a^2-b^2} & (a-b\ \text{为奇数}) \\ 0 & (a-b\ \text{为偶数}) \end{cases}$
$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \quad (a, b>0)$	$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (a>b) \\ \dfrac{\pi}{4} & (a=b) \\ 0 & (a<b) \end{cases}$
$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x^2} dx$	$\frac{a\pi}{2} \quad (a \leqslant b)$
$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$	$\ln \frac{b}{a}$
$\int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x} - \frac{\operatorname{arc\,tg} bx}{x} \right) dx$	$\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$
$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$	$\ln \frac{b}{a}$
$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$	$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (a>b>0)$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+b\cos x}$	$\frac{\arccos \frac{b}{a}}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (a>b)$
$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$	$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} e^{-a} & (a>0) \\ \dfrac{\pi}{2} e^{a} & (a<0) \end{cases}$
$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$	$\frac{1}{a} \quad (a>0)$
$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx$	$\frac{n!}{a^{n+1}} \quad (n\ \text{为正整数},\ a>0)$
$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-ax} dx$	$\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0)$
$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} dx$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0)$

定 积 分	定 积 分 值
$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$	$\frac{a}{a^2+b^2}$ $(a>0)$
$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$	$\frac{b}{a^2+b^2}$ $(a>0)$
$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{ch} bx\,dx$	$\frac{a}{a^2-b^2}$ $(\lvert b\rvert<a)$
$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sh} bx\,dx$	$\frac{b}{a^2-b^2}$ $(\lvert b\rvert<a)$
$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x}{x}dx$	$\operatorname{arcctg} a$ $(a>0)$
$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ $(a>0)$
$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx$	$\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a>0)$
$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx$	$\frac{e^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{2a}\sqrt{\pi}$ $(a>0)$
$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx$	$\frac{e^{-2a}}{2}\sqrt{\pi}$ $(a>0)$
$\int_0^1 (\ln x)^n dx$	$(-1)^n n!$ (n为正整数)
$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$	$-\frac{\pi^2}{6}$
$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}dx$	$-\frac{\pi^2}{12}$
$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$	$\frac{\pi^2}{12}$
$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$	$-\frac{\pi^2}{8}$
$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$-\frac{\pi}{2}\ln 2$
$\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x}$	$\frac{\pi^2}{4}$
$\int_0^\infty \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}dx$	$\frac{\pi^2}{4}$
$\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

定积分	定积分值
$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}dx$	$\sqrt{\pi}$
$\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$	$-\frac{3}{2}$
$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$	$\ln\frac{1+b}{1+a}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$	$-\frac{\pi}{2}\ln 2$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx$	$-\frac{\pi}{2}\ln 2$
$\int_0^{\pi} x\ln\sin x dx$	$-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$
$\int_0^{\pi} \ln(a\pm b\cos x)dx$	$\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ $(a\geqslant b)$
$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx$	$\pi\arcsin a$
$\int_0^1 \ln\ln x dx$	$-\gamma$ （欧拉常数，下同）
$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$	$-\gamma$
$\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$	γ
$\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)dx$	γ
$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}}}{x}dx$	γ
$\int_0^{\infty} xe^{-ax}\sin bx dx$	$\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$ $(a>0)$
$\int_0^{\infty} xe^{-ax}\cos bx dx$	$\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$ $(a>0)$
$\int_0^{\infty} x^2e^{-ax}\sin bx dx$	$\frac{2b(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^3}$ $(a>0)$
$\int_0^{\infty} x^2e^{-ax}\cos bx dx$	$\frac{2a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^3}$ $(a>0)$
$\int_0^{\infty} x^3e^{-ax}\sin bx dx$	$\frac{24ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^4}$ $(a>0)$

定积分	定积分值
$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax}\cos bx\,dx$	$\dfrac{6(a^4-6a^2b^2+b^4)}{(a^2+b^2)^4}$ $(a>0)$
$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\sin bx\,dx$	$\dfrac{in![(a-ib)^{n+1}-(a+ib)^{n+1}]}{2(a^2+b^2)^{n+1}}$ $(i=\sqrt{-1},a>0)$
$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\cos bx\,dx$	$\dfrac{n![(a-ib)^{n+1}+(a+ib)^{n+1}]}{2(a^2+b^2)^{n+1}}$ $(i=\sqrt{-1},a>0)$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$	$\dfrac{\pi}{2ab}$
$\int_0^{\pi} \dfrac{a-b\cos x}{a^2-2ab\cos x+b^2}dx$	$\begin{cases}\dfrac{\pi}{a} & (\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)\\ \dfrac{\pi}{2a} & (a=b)\\ 0 & (\lvert a\rvert<\lvert b\rvert)\end{cases}$

五、广义积分

1. 广义积分的概念

[无穷限广义积分] 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积，$u>a$, $v<b$, $u>v$, 当下列各式右边的极限存在时，

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{v\to-\infty}\int_v^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{u\to\infty\\ v\to-\infty}}\int_v^u f(x)dx$$

这时称无穷限广义积分收敛，否则称为发散。

[无界函数的广义积分] 设函数 $f(x)$ 在给定区间 $[a,b]$ 上只有一个瑕点 $x=c$，即函数 $f(x)$在 $x=c$ 点的邻域内无界，而在$[a,c-\varepsilon]$及$[c+\varepsilon',b]$上可积，ε,ε'为任意小的正数，当 ε 和 ε' 独立地趋于零，极限

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon'\to0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx\right] \tag{1}$$

存在时，则用上式定义无界函数 $f(x)$从a到b的瑕积分，记作

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx\right]$$

［柯西主值］ 有时极限(1)不存在，但如果设 $\varepsilon'=\varepsilon\to 0$，这个极限(1)存在，就称它为瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的主值，记作

$$\text{P.V.}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right]$$

这时称无界函数广义积分在主值意义下收敛，否则称为发散.

［绝对收敛与条件收敛］ 如果 $f(x)$的广义积分与$|f(x)|$的广义积分同时收敛，那末称 $f(x)$的广义积分是绝对收敛，$f(x)$ 称为绝对可积；如果仅前者收敛，后者不收敛，那末称 $f(x)$的广义积分是条件收敛.

2. 广义积分收敛判别法

1° $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛的充分必要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在 $N=N(\varepsilon)>0$，只要 $N_1>N$，$N_2>N$，就有 $\left|\int_{N_1}^{N_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

2° 设 $f(x)$是非负的，则 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛的充分必要条件是：

$$F(u)=\int_a^u f(x)\,dx \text{ 是有界函数.}$$

3° 设当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=O\left(\frac{1}{x^p}\right)$. 若 $p>1$，则 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛；若 $p\leqslant 1$，则 $\int_a^\infty f(x)dx$ 发散.

4° 若 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收敛，$g(x)$单调有界($x\geqslant a$)，则 $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ 收敛.

5° 设 $f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$，且 $f(x)\leqslant cg(x)$ ($x\geqslant a$, c 是一个大于零的常数). 若 $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 也收敛；若 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 发散，则 $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 也发散.

6° 无穷级数与广义积分的关系：设 $f(x)$是定义在区间$[a,\infty)$上的一个正的非增连续函数，则级数 $f(a)+f(a+1)+\cdots+f(a+k)+\cdots$ 与积分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 同时收敛或同时发散.

7° 广义积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ (以 a 为瑕点)收敛的充分必要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在 δ ($a<\delta<b$)，使当 $a<u'<u''<\delta$ 时 $\left|\int_{u'}^{u''} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

8° 设 $g(x)$有连续的导数，并是恒正的、单调下降的函数，且$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$。若有常数 M，使对一切$u>a$ 都有$\left|\int_a^u f(x)\,dx\right|<M$，则广义积分$\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$收敛。

六、含参数积分

1. 含参数常义积分

[连续性] 若二元函数 $f(x,y)$在有界区域$R\,(a\leqslant x\leqslant A,\ \ b\leqslant y\leqslant B)$上有定义且连续，则

$$F(y)=\int_a^A f(x,y)\,dx$$

是闭区间$[b,B]$上的连续函数。

[积分号下的微分法] 若$f(x,y)$在有界区域$R\,(a\leqslant x\leqslant A,\ b\leqslant y\leqslant B)$上连续，并且存在连续偏导数$f'_y(x,y)$，则当$b<y<B$时，

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x,y)\,dx=\int_a^A f'_y(x,y)\,dx$$

一般情况下，当积分限为参数y的可微函数$\varphi(y)$和$\psi(y)$，且当$b\leqslant y\leqslant B$，$a\leqslant\varphi(y)\leqslant A, a\leqslant\psi(y)\leqslant A$时，

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx=f\,[\psi(y),y]\psi'(y)-f\,[\varphi(y),y]\varphi'(y)+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx \tag{1}$$

[积分的求导运算] 以下公式为(1)的特殊情况。

$$\frac{d}{dt}\int_a^{b(t)} f(x)\,dx=f\,[b(t)]\,\frac{db(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^{t} f(x)\,dx=f(t)$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^{b} f(x,t)\,dx=\int_a^{b} f'_t(x,t)\,dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^{b(t)} f(x,t)\,dx=\int_a^{b} f'_t(x,t)\,dx+f\,[b(t),t]\,\frac{db(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx=\int_{a(t)}^{b(t)} f'_t(x,t)\,dx+f\,[b(t),\,t]\,\frac{db(t)}{dt}-f\,[a(t),\,t]\,\frac{da(t)}{dt}$$

[积分号下的积分法] 若函数$f(x,y)$在有界区域$[a\leqslant x\leqslant A,\ b\leqslant y\leqslant B]$上连续，则

$$\int_b^B\left[\int_a^A f(x,y)\,dx\right]dy=\int_a^A\left[\int_b^B f(x,y)\,dy\right]dx$$

2. 含参数广义积分

[一致收敛性] 设函数 $f(x,y)$ 是定义在区域 $R(a\leqslant x<\infty, y_1<y<y_2)$ 上的连续函数，若对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在只与 ε 有关的正数 $B=B(\varepsilon)$，使得当 $b\geqslant B$ 时，对区间 (y_1, y_2) 内一切 y 不等式

$$\left|\int_b^\infty f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$$

都成立，则称广义积分 $\int_a^\infty f(x,y)dx$ 在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛，并且在该区间内是参数 y 的连续函数。

[一致收敛判别法]

1° 柯西判别法积分

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛的充分必要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，都存在正数 $B=B(\varepsilon)$，使得当 $b'>B, b''>B$ 时，对于区间 (y_1, y_2) 内的一切 y，都有

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$$

2° 外尔斯特拉斯判别法 设函数 $f(x, y)$（x 的函数）在任一有限区间 $[a, A]$ 上可积，若存在与参数 y 无关的函数 $F(x)$，它在区间 $[a, \infty)$ 上可积，并且对于区间 (y_1, y_2) 内的一切 y

$$|f(x,y)|\leqslant F(x) \qquad (x\geqslant a)$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛。

[对参数的微分法] 若(i)函数 $f(x,y)$ 在区域 R $(a\leqslant x<\infty, y_1<y<y_2)$ 内连续，并对参数 y 可微，(ii)积分 $\int_a^\infty f(x,y)dx$ 收敛，(iii)积分 $\int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx$ 在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛，则当 $y_1<y<y_2$ 时，

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x, y)dx=\int_a^\infty f'_y(x,y)dx$$

[对参数的积分法] 若函数 $f(x,y)$ 在区域 $R(a\leqslant x<\infty, y_1<y<y_2)$ 内连续，并且 $\int_a^\infty f(x,y)dx$ 在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛，则

$$\int_{y_1}^{y_2}\left[\int_a^x f(x,y)\,dx\right]dy=\int_a^x\left[\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\right]dx$$

七、斯蒂尔吉斯积分

[定义] 设在区间$[a,\ b]$上给定两个有界函数$f(x)$和$g(x)$. 用任意方法把区间$[a,b]$分成若干部分,其分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

并设λ是 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$中最大的. 在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上任取一点 $x=\xi_i,\ x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$, 作和

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)]$$

当$\lambda\to0$时, 如果极限$\lim\limits_{\lambda\to0}\sigma$存在, 那末这个极限称为函数 $f(x)$对函数$g(x)$的斯蒂尔吉斯积分, 记作

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)]$$

特别是, 当函数$g(x)$在区间上连续可微时, 函数$f(x)$对$g(x)$的斯蒂尔吉斯积分就是通常的黎曼积分

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

[可积性]

1° 若函数$f(x)$连续, 函数$g(x)$有有界变差, 则积分

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)\tag{1}$$

存在.

2° 若函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上黎曼可积, 函数$g(x)$满足李普希茨条件:

$$|g(x')-g(x'')|\leqslant L(x'-x'')$$
$$(L\text{ 为常数}, a\leqslant x''<x'\leqslant b)$$

则积分(1)存在.

3° 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上黎曼可积, 函数$g(x)$可表成

$$g(x)=C+\int_a^x\varphi(t)\,dt$$

式中C为常数，函数$\varphi(t)$在区间$[a,b]$上绝对可积，则积分(1)存在.

[积分法则与不等式]

1° 积分法则

$$\int_a^b dg(x)=g(b)-g(a)$$

$$\int_a^b[f_1(x)\pm f_2(x)]\,dg(x)=\int_a^b f_1(x)\,dg(x)\pm\int_a^b f_2(x)\,dg(x)$$

$$\int_a^b f(x)d[g_1(x)\pm g_2(x)]=\int_a^b f(x)\,dg_1(x)\pm\int_a^b f(x)\,dg_2(x)$$

$$\int_a^b kf(x)\,d[lg(x)]=kl\int_a^b f(x)\,dg(x)\qquad (k,l\text{ 为常数})$$

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^c f(x)\,dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x)$$

($a<c<b$，三个积分都存在．当上式右边两个积分存在时，一般不能推出积分$\int_a^b f\,dg$存在)

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,df(x)\qquad (\text{分部积分公式})$$

2° 若$g(x)$在区间$[a,b]$上为一非减函数，则

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dg(x)$$

3° 若$g(x)$在区间$[a,b]$上为一非减函数，则 $f(x)\leqslant F(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)\leqslant\int_a^b F(x)\,dg(x)$$

八、积分的近似计算

1. 内插求积公式

[等距内插求积一般公式(柯特斯公式)]

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k)$$

式中x_k为等距节点：

$$x_k=a+kh,\qquad k=0,1,2,\cdots,n$$

$$h=\frac{b-a}{n}$$

$C_k^{(n)}$为柯特斯系数(见下页表)。

柯特斯系数表

$C_k^{(n)}$ n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$								
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$							
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$						
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$					
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$				
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$			
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$		
9	$\frac{2857}{89600}$	$\frac{15741}{89600}$	$\frac{1080}{89600}$	$\frac{19344}{89600}$	$\frac{5778}{89600}$	$\frac{5778}{89600}$	$\frac{19344}{89600}$	$\frac{1080}{89600}$	$\frac{15741}{89600}$	$\frac{2857}{89600}$	
10	$\frac{16067}{598752}$	$\frac{106300}{598752}$	$\frac{-48525}{598752}$	$\frac{272400}{598752}$	$\frac{-260550}{598752}$	$\frac{427368}{598752}$	$\frac{-260550}{598752}$	$\frac{272400}{598752}$	$\frac{-48525}{598752}$	$\frac{106300}{598752}$	$\frac{16067}{598752}$

当区间$[a,b]$愈小，柯特斯公式所给出的结果愈精确．因此，当区间$[a,b]$较大时，为了避免采用n值较大的柯特斯公式，常把$[a,b]$ N等分，对其中各个等份应用n值较小的柯特斯公式求积，然后再把各个等份的积分值相加，即得到区间$[a,b]$上的积分值，如下述的梯形公式($n=1$)和辛卜生公式($n=2$)．

［梯形公式］

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_N = h\left\{\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]+\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right\}$$

$$x_k = a+kh,\quad k=1,2,\cdots,N-1,\quad h=\frac{b-a}{N}$$

若$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\leqslant M_2$，则截断误差为

$$r_T \leqslant \frac{b-a}{12}h^2M_2$$

［辛卜生公式］

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_N = \frac{h}{6}\left[f(a)+f(b)+\frac{4}{6}\sum_{k=1}^{N} f(x_{2k-1})+\frac{2}{6}\sum_{k=1}^{N-1} f(x_{2k})\right]$$

$$x_k = a+k\frac{h}{2},\quad h=\frac{b-a}{N}$$

若$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|\leqslant M_4$，则截断误差为

$$r_S \leqslant \frac{b-a}{2880}h^4M_4$$

［龙贝公式］ 设

$$R_{0,0} = T_1 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$R_{0,k} = T_{2^k} = \frac{1}{2}T_{2^{k-1}}+\frac{b-a}{2^k}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} f\left[a+\frac{b-a}{2^k}(2i-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^k-1} f\left[a+\frac{b-a}{2^k}i\right]\right\}$$

$$R_{m,k} = \frac{4^m R_{m-1,k+1}-R_{m-1,k}}{4^m-1}$$

则

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ k\text{固定}}} R_{m,k} = \lim_{\substack{k\to\infty\\ m\text{固定}}} R_{m,k} = \int_a^b f(x)dx$$

一般地,可适当选取 m,使之固定,再增大 k,使近似截断误差

$$|R_{m-1,k+1}-R_{m,k}|$$

在允许误差范围内即可,这时

$$\int_a^b f(x)dx \approx R_{m,k}$$

具体计算过程可按下表自左而右、自上而下地进行(表中箭头方向表示计算顺序).

k	区间等分数 2^k	$R_{0,k}=T_{2^k}$	$R_{1,k-1}$	$R_{2,k-2}$	$R_{3,k-3}$	$R_{4,k-4}$	$R_{5,k-5}$	…
0	1	$R_{0,0}$						
1	2	$R_{0,1}$	$R_{1,0}$					
2	4	$R_{0,2}$	$R_{1,1}$	$R_{2,0}$				
3	8	$R_{0,3}$	$R_{1,2}$	$R_{2,1}$	$R_{3,0}$			
4	16	$R_{0,4}$	$R_{1,3}$	$R_{2,2}$	$R_{3,1}$	$R_{4,0}$		
5	32	$R_{0,5}$	$R_{1,4}$	$R_{2,3}$	$R_{3,2}$	$R_{4,1}$	$R_{5,0}$	
6	64	$R_{0,6}$	$R_{1,5}$	$R_{2,4}$	$R_{3,3}$	$R_{4,2}$	$R_{5,1}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

例 用龙贝公式计算积分

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

误差不超过 0.0000001.

解 这里 $f(x)=\frac{4}{1+x^2}$; $a=0, b=1$. 可按五步进行计算,结果如下:

(1) $R_{0,0}=T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=\frac{1}{2}(4+2)=3$

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{5}$, $R_{0,1}=T_2=\frac{1}{2}\left[T_1+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=3.1$

$$R_{1,0}=\frac{4R_{0,1}-R_{0,0}}{3}=3.133333333$$

(3) $R_{0,2}=\frac{1}{2}R_{0,1}+\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=3.131176471$

$$R_{1,1}=\frac{4R_{0,2}-R_{0,1}}{3}=3.141568627$$

$$R_{2,0}=\frac{16R_{1,1}-R_{1,0}}{15}\approx 3.142117647$$

(4) $R_{0,3}=\frac{1}{2}R_{0,2}+\frac{1}{8}\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]$

$=3.138988496$

$$R_{1,2}=\frac{4R_{0,3}-R_{0,2}}{3}=3.141592503$$

$$R_{2,1}=\frac{16R_{1,2}-R_{1,1}}{15}=3.141594095$$

$$R_{3,0}=\frac{64R_{2,1}-R_{2,0}}{63}=3.141585786$$

(5) 可以继续算出

$R_{0,4}=3.140941614$ $\quad$ $R_{1,3}=3.141592655$

$R_{2,2}=3.141592665$ $\quad$ $R_{3,1}=3.141592643$

因为

$$|R_{3,1}-R_{2,2}|=|3.141592643-3.141592665|<0.0000001$$

所以

$$\int_0^1\frac{4}{1+x^2}dx\approx 3.14159264$$

而准确值为

$$\int_0^1\frac{4}{1+x^2}dx=4\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^1=\pi\approx 3.141592654\cdots$$

在等距内插求积公式中，以辛卜生公式和龙贝公式为好，计算简单，便于在电子计算机上实现（都有标准程序），精确度也相当高。特别龙贝公式是采用区间逐次分半的方法，前一次分割得到的函数值在区间分半后仍可利用，具有计算有规律，不需存储柯特斯系数和节点等优点。

但等距内插求积公式不能计算广义积分。广义积分只能用下面的高斯型求积公式来计算。

[不等距内插求积公式(高斯型求积公式)]

高斯型求积公式为

$$\int_a^b w(x)f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}f(\xi_k^{(n)})\tag{1}$$

$$n=1,2,\cdots$$

式中(a,b)区间可以是有限或无限，$w(x)$为(a,b)区间内的非负权函数，

$$-\infty\leqslant a\leqslant\xi_1^{(n)}<\xi_2^{(n)}<\cdots<\xi_n^{(n)}<b\leqslant\infty$$

为求积节点（相应的正交多项式的根），$\lambda_k^{(n)}(k=1,2,\cdots,n)$为求积系数．$f(x)$为不超过$2n-1$次的多项式时，上述求积公式(1)成为等式．

下面列出几种特例．

1° $$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(1-\xi_k^{(n)2})[P_n'(\xi_k^{(n)})]^2}f(\xi_k^{(n)})+\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}f^{(2n)}(\theta)\qquad(-1<\theta<1)$$

式中$\xi_k^{(n)}$为勒让德多项式$P_n(x)$（见第十二章，§2，一）的根．

2° $$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+\frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!}f^{(2n)}(\theta)\qquad(-1<\theta<1)$$

式中 $\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$为第一类契贝谢夫多项式$T_n(x)$（见第十二章，§2，二）的根．它也可表为

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

3° $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}f(x)\,dx=\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}f\left(\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)+\frac{\pi}{2^{2n+1}(2n)!}f^{(2n)}(\theta)\qquad(-1<\theta<1)$$

式中 $\cos\frac{k\pi}{n+1}$ 为第二类契贝谢夫多项式$U_n(x)$（见第十二章，§2，三）的根．

4° $$\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}f(x)\,dx=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}f\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)+\frac{\pi}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\theta)\qquad(-1<\theta<1)$$

5° $$\int_{a}^{b}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}f(x)\,dx\approx\frac{(b-a)2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{2k-1}{2n+1}\,\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left[a+(b-a)\cos^2\left(\frac{2k-1}{2n+1}\,\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

2. 高斯型求积公式的求积节点和求积系数表

[高斯求积公式]

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} f(\xi_k^{(n)})$$

式中 $\xi_k^{(n)}$为勒让德多项式 $P_n(x)$的根.

n	求积节点 $\xi_k^{(n)}$	求积系数 $\lambda_k^{(n)}$
2	±0.57735 02692	1
3	0	0.88888 88889
	±0.77459 66692	0.55555 55556
4	±0.33998 10436	0.65214 51549
	±0.86113 63116	0.34785 48451
5	0	0.56888 88889
	±0.53846 93101	0.47862 86705
	±0.90617 98459	0.23692 68851
6	±0.23861 91861	0.46791 39346
	±0.66120 93865	0.36076 15731
	±0.93246 95142	0.17132 44924
7	0	0.41795 91837
	±0.40584 51514	0.38183 00505
	±0.74153 11853	0.27970 53915
	±0.94910 79123	0.12948 49662
8	±0.18343 46425	0.36268 37834
	±0.52553 24099	0.31370 66459
	±0.79666 64774	0.22238 10345
	±0.96028 98565	0.10122 85363

n	求积节点 $\xi_k^{(n)}$	求积系数 $\lambda_k^{(n)}$
9	0	0.33023 93550
	±0.32425 34234	0.31234 70770
	±0.61337 14327	0.26061 06964
	±0.83603 11073	0.18064 81607
	±0.96816 02395	0.08127 43884
10	±0.14887 43390	0.29552 42247
	±0.43339 53941	0.26926 67193
	±0.67940 95683	0.21908 63625
	±0.86506 33667	0.14945 13492
	±0.97390 65285	0.06667 13443

[勒贝陶求积公式]

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \lambda_1^{(n)} f(-1) + \sum_{k=2}^{n-1} \lambda_k^{(n)} f(\xi_k^{(n)}) + \lambda_n^{(n)} f(1)$$

式中 $\xi_k^{(n)}$为 $P'_{n-1}(x)$的根.

n	求积节点 $\xi_k^{(n)}$	求积系数 $\lambda_k^{(n)}$
3	±1	0.33333 333
	0	1.33333 333
4	±1	0.16666 667
	±0.44721 360	0.83333 333
5	±1	0.10000 000
	±0.65465 367	0.54444 444
	0	0.71111 111
6	±1	0.06666 667
	±0.76505 532	0.37847 496
	±0.28523 152	0.55485 838

n	求积节点 $\xi_k^{(n)}$	求积系数 $\lambda_k^{(n)}$
7	±1	0.04761 904
	±0.83022 390	0.27682 604
	±0.46884 879	0.43174 538
	0	0.48761 904
8	±1	0.03571 428
	±0.87174 015	0.21070 422
	±0.59170 018	0.34112 270
	±0.20929 922	0.41245 880
9	±1	0.02777 77778
	±0.89975 79954	0.16549 53616
	±0.67718 62795	0.27453 87126
	±0.36311 74638	0.34642 85110
	0	0.37151 92744
10	±1	0.02222 22222
	±0.91953 39082	0.13330 59908
	±0.73877 38651	0.22488 93420
	±0.47792 49498	0.29204 26836
	±0.16527 89577	0.32753 97612

【拉盖尔求积公式】

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} f(\xi_k^{(n)})$$

$$\int_0^{\infty} g(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} e^{\xi_k^{(n)}} g(\xi_k^{(n)})$$

式中 $\xi_k^{(n)}$ 为拉盖尔多项式 $L_n(x)$（见第十二章，§2，四）的根.

n	求积节点 $\xi_k^{(n)}$	求积系数 $\lambda_k^{(n)}$	$\lambda_k^{(n)}e^{\xi_k^{(n)}}$
2	0.58578 64376	(−1)8.53553 39059*	1.53332 50331
	3.41421 35624	(−1)1.46446 60941	4.45095 73351
3	0.41577 45568	(−1)7.11093 00993	1.07769 28593
	2.29428 03603	(−1)2.78517 73357	2.76214 29619
	6.28994 50829	(−1)1.03892 56502	5.60109 46254
4	0.32254 76896	(−1)6.03154 10434	0.83273 91238
	1.74576 11012	(−1)3.57418 69244	2.04810 24385
	4.53662 02969	(−2)3.88879 08515	3.63114 63058
	9.39507 09123	(−4)5.39294 70556	6.48714 50844
5	0.26356 03197	(−1)5.21755 61058	0.67909 40422
	1.41340 30591	(−1)3.98666 81108	1.63848 78736
	3.59642 57710	(−2)7.59424 49682	2.76944 32424
	7.08581 00059	(−3)3.61175 86799	4.31565 69009
	12.64080 08443	(−5)2.33699 72386	7.21918 63544
6	0.22284 66042	(−1)4.58964 67395	0.57353 55074
	1.18893 21017	(−1)4.17000 83077	1.36925 25907
	2.99273 63261	(−1)1.13373 38207	2.26068 45934
	5.77514 35691	(−2)1.03991 97453	3.35052 45824
	9.83746 74184	(−4)2.61017 20282	4.88682 68002
	15.98287 39806	(−7)8.98547 90643	7.84901 59456
7	0.19304 36766	(−1)4.09318 95170	0.49647 75975
	1.02666 48953	(−1)4.21831 27786	1.17764 30609
	2.56787 67450	(−1)1.47126 34866	1.91824 97817
	4.90035 30845	(−2)2.06335 14469	2.77184 86362
	8.18215 34446	(−3)1.07401 01433	3.84124 91225
	12.73418 02918	(−5)1.58654 64349	5.38067 82079
	19.39572 78623	(−8)3.17031 54790	8.40543 24868

* (−1) 8.5355339059 表示数 $8.5355339059\times10^{-1}$，其他类同，$(-j)a=a\times10^{-j}$。

n	求积节点 $\xi_k^{(n)}$	求积系数 $\lambda_k^{(n)}$	$\lambda_k^{(n)} e^{\xi_k^{(n)}}$
8	0.17027 96323	(−1)3.69188 58934	0.43772 34105
	0.90370 17768	(−1)4.18786 78081	1.03386 93477
	2.25108 66299	(−1)1.75794 98664	1.66970 97657
	4.26670 01703	(−2)3.33434 92261	2.37692 47018
	7.04590 54024	(−3)2.79453 62352	3.20854 09134
	10.75851 60102	(−5)9.07650 87734	4.26857 55108
	15.74067 86413	(−7)8.48574 67163	5.81808 33637
	22.86313 17369	(−9)1.04800 11749	8.90622 62153
9	0.15232 22277	(−1)3.36126 42180	0.39143 11243
	0.80722 00227	(−1)4.11213 98042	0.92180 50285
	2.00513 51556	(−1)1.99287 52537	1.48012 79099
	3.78347 39733	(−2)4.74605 62766	2.08677 08076
	6.20495 67779	(−3)5.59962 66108	2.77292 13897
	9.37298 52517	(−4)3.05249 76709	3.59162 60681
	13.46623 69111	(−6)6.59212 30261	4.64876 60021
	18.83359 77890	(−8)4.11076 93304	6.21227 54198
	26.37407 18909	(−11)3.29087 40304	9.36321 82377

[埃尔米特求积公式]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} f(\xi_k^{(n)})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} e^{\xi_k^{(n)2}} g(\xi_k^{(n)})$$

式中 $\xi_k^{(n)}$ 为埃尔米特多项式 $H_n(x)$(见第十二章, §2,五)的根.

n	求积节点 $\xi_k^{(n)}$	求积系数 $\lambda_k^{(n)}$	$\lambda_k^{(n)} e^{\xi_k^{(n)2}}$
2	±0.70710 67812	(−1)8.86226 92545*	1.46114 11827
3	0	(0)1.18163 59006	1.18163 59006
	±1.22474 48714	(−1)2.95408 97515	1.32393 11752

* (−1)8.8622692545 表示数 $8.8622692545\times10^{-1}$, 其他类同.

n	求积节点 $\xi_k^{(n)}$	求积系数 $\lambda_k^{(n)}$	$\lambda_k^{(n)} e^{\xi_k^{(n)2}}$
4	±0.52464 76233	(−1)8.04914 09001	1.05996 44829
	±1.65068 01239	(−2)8.13128 35447	1.24022 58177
5	0	(−1)9.45308 72048	0.94530 87205
	±0.95857 24646	(−1)3.93619 32315	0.98658 09968
	±2.02018 28705	(−2)1.99532 42059	1.18148 86255
6	±0.43607 74119	(−1)7.24629 59522	0.87640 13344
	±1.33584 90740	(−1)1.57067 32032	0.93558 05576
	±2.35060 49737	(−3)4.53000 99055	1.13690 83327
7	0	(−1)8.10264 61756	0.81026 46176
	±0.81628 78829	(−1)4.25607 25261	0.82868 73033
	±1.67355 16288	(−2)5.45155 82819	0.89718 46002
	±2.65196 13568	(−4)9.71781 24510	1.10133 07296
8	±0.38118 69902	(−1)6.61147 01256	0.76454 41287
	±1.15719 37123	(−1)2.07802 32582	0.79289 00484
	±1.98165 67567	(−2)1.70779 83007	0.86675 26066
	±2.93063 74203	(−4)1.99604 07221	1.07193 01443
9	0	(−1)7.20235 21561	0.72023 52156
	±0.72355 10188	(−1)4.32651 55900	0.73030 24528
	±1.46855 32892	(−2)8.84745 27394	0.76460 81251
	±2.26658 05845	(−3)4.94362 42755	0.84175 27015
	±3.19099 32018	(−5)3.96069 77263	1.04700 35810
10	±0.34290 13272	(−1)6.10862 63374	0.68708 18540
	±1.03661 08298	(−1)2.40138 61108	0.70329 63231
	±1.75668 36493	(−2)3.38743 94456	0.74144 19319
	±2.53273 16742	(−3)1.34364 57468	0.82066 61264
	±3.43615 91188	(−6)7.64043 28552	1.02545 16914

§2 多重积分、曲线积分与曲面积分

一、多重积分

1. 二重积分

连续函数 $f(x,y)$在有限可求积的平面区域Ω内的二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}}\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j$$

式中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$, $\sum\limits_i\sum\limits_j$ 是对Ω中的所有(x_i,y_j)的下标 i, j 求和.

[特定区域内二重积分的计算公式]

积分区域 Ω	$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ 计算公式(积分限应从小到大)
$y=\varphi_2(x)$, $y=\varphi_1(x)$, $x=a$, $x=b$, Ω	$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$
$y=\beta$, $y=\alpha$, $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, Ω	$\int_\alpha^\beta dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$
$\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$, φ_1, φ_2, Ω (极在区域外)	设 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$, 则 $dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$ $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho$

积 分 区 域 Ω	$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ 计算公式(积分限应从小到大)
$\rho=\rho(\varphi)$ (极在区域内)	$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$

[二重积分的变量替换(雅可比式)] 若连续可微分的函数

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$$

把平面 Oxy 上的有界闭区域 Ω 单值映射到平面 $O'uv$ 上的闭区域 Ω'，其雅可比式为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

则

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]|J|du\,dv$$

例 若

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

则

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho$$

所以

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi$$

2. 三重积分

[直角坐标下的三重积分] 假设有界区域 V 由下列不等式

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), \quad z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$$

确定，其中 $y_1(x), y_2(x), z_1(x,y), z_2(x,y)$ 都是连续函数，且函数 $f(x,y,z)$ 在 V 上是连续的，则函数 $f(x,y,z)$ 在有界区域 V 上的三重积分

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz$$

有时采用下面公式计算:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b dx\iint\limits_{S_x} f(x,y,z)\,dy\,dz$$

式中 $S_x=S_x(y,z)$是用平行于 Oyz 的平面截区域 V 所得的截断面(图 6.3).

例　设 V 表示在第一卦限中由曲面 $\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r=1$ 和坐标平面所围成的封闭区域,则当一切常数都是正的时候,有

$$\iiint\limits_V x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}\,dx\,dy\,dz=\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{pqr\,\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}\right)}$$

这种类型的积分称为狄利克莱积分,它在计算重积分时经常用到.

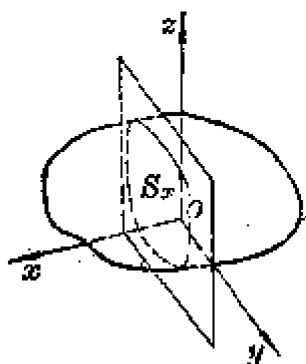


图　6.3

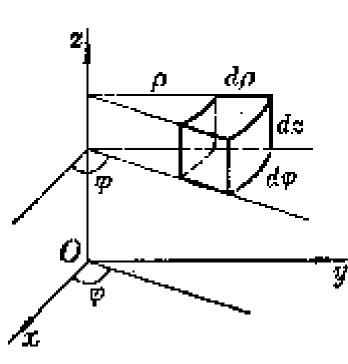


图　6.4

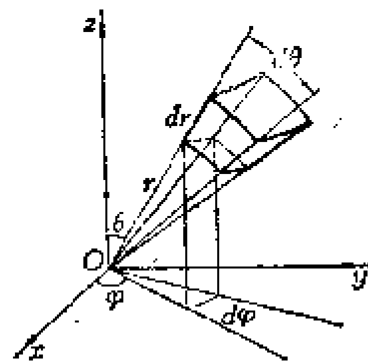


图　6.5

[圆柱坐标下的三重积分]　(图 6.4)

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

(一般地, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$)

式中 V 为直角坐标系中的有界区域, V' 是区域 V 在圆柱坐标系中的表达式.

[球面坐标下的三重积分]　(图 6.5)

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint\limits_{V'}f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

(一般地, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi$)

式中 V' 是区域 V 在球面坐标系中的表达式.

[三重积分的变量替换(雅可比式)]　若连续可微函数

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

把 $Oxyz$ 空间的有界三维闭区域双方单值地映射到 $O'uvw$ 空间的闭区域 V'，并且当 $(u, v, w) \in V'$ 时其雅可比式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

则

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]\, |J|\, du\, dv\, dw$$

8. 多重积分

[直接计算多重积分]　若函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在由下列不等式所确定的有界闭区域 Ω 内是连续的：

$$a \leqslant x_1 \leqslant b$$

$$x_2'(x_1) \leqslant x_2 \leqslant x_2''(x_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n'(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant x_n''(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$$

式中 a, b 为常数，$x_2'(x_1), x_2''(x_1), \cdots, x_n'(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n''(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 为连续函数，则对应的多重积分可按下面公式计算：

$$\iint_\Omega \cdots \int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_a^b dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \cdots \int_{x_n'(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})}^{x_n''(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n$$

[多重积分的变量替换(雅可比式)]　若连续可微函数

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

把 $Ox_1x_2\cdots x_n$ 空间内的有界闭区域 Ω 双方单值地映射成 $O'\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ 空间内的

有界闭区域 Ω'，并且在闭区域 Ω' 内雅可比式

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}\neq 0$$

则

$$\iint\cdots\int_{\Omega} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint\cdots\int_{\Omega'} f(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)|J|\,d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_n$$

特别，根据公式

$$\begin{cases}x_1=r\cos\varphi_1\\x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}\\x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}\end{cases}$$

变换成极坐标 $(r,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$ 时，有

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}$$

二、曲线积分

［对弧长的曲线积分］ 若函数 $f(x,y,z)$ 在光滑曲线 C：

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant T)\end{cases}$$

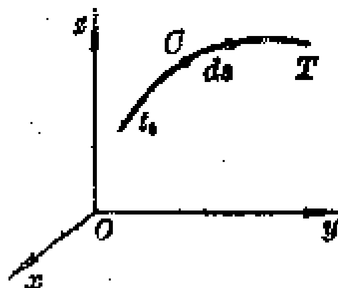


图 6.6

的各点上有定义并且连续(图 6.6)，则

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_{t_0}^{T} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt$$

式中 ds 为弧的微分，$\dot{x}(t)=\frac{dx(t)}{dt}$，等．这个积分与曲线 C 的方向无关．

［对坐标的曲线积分］ 若函数 $P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$在光滑曲线 C：

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant T)\end{cases}$$

的各点上连续，这曲线的正方向为 t 增加的方向，则

$$\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\int_{t_0}^{T}\{P[x(t),y(t),z(t)]\dot{x}(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]\dot{y}(t)$$
$$+R[x(t),y(t),z(t)]\dot{z}(t)\}dt$$

当曲线 C 的正向变更时，积分的符号改变。

［全微分的情形］　若函数 $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ 在区域 V 中的任一条光滑曲线 C 上连续，并且

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du$$

式中 $u=u(x,y,z)$ 为区域 V 内的单值可微函数，则

$$\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1,z_1)$$

式中 (x_1,y_1,z_1) 为积分曲线 C 的始点，(x_2,y_2,z_2) 为积分曲线 C 的终点．这说明在假定的条件下，积分值与曲线 C 的形状无关，只与曲线的始点和终点有关（图 6.7）．

在单连通区域 V 内有连续的一阶偏导数的函数 P,Q,R 能表成全微分

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du$$

的充分必要条件是：在区域 V 内等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

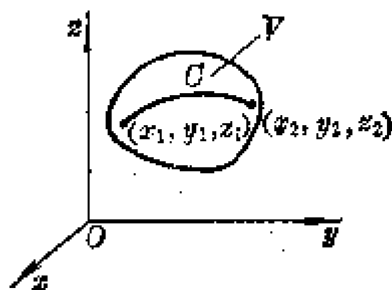


图　6.7

成立．这时函数 u 可按下面公式求得：

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\,dz$$

式中 (x_0,y_0,z_0) 为区域 V 内的某一固定点．

［格林公式］

1° 曲线积分与二重积分的关系．设 C 为逐段光滑的简单（无自交点）闭曲线，围成单连通的有界区域 S，这围线的方向使区域 S 保持在左边．若函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 及它们的一阶偏导数在 $S+C$ 上连续，则有格林公式：

$$\oint_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

2° 曲线积分与积分线路的关系．若函数 $P,Q,\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在区域 S 上连

续，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

则沿S内的任一光滑闭曲线的积分为零，即

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=0$$

因而由S中的A到B的积分与线路无关(图6.8)，即

$$\int_{C_1(A,B)} P\,dx+Q\,dy=\int_{C_2(A,B)} P\,dx+Q\,dy$$

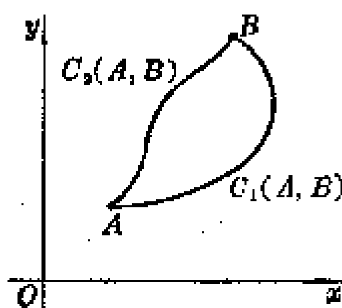


图 6.8

三、曲面积分

[对曲面面积的曲面积分]

1° 若S为逐片光滑的双侧曲面*

$$z=z(x,y)\qquad ((x,y)\in\sigma)$$

式中σ为曲面S在Oxy坐标面上的投影，$z(x,y)$为单值连续可微函数．函数$f(x,y,z)$在曲面S的各点上有定义并连续，则

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_\sigma f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

此积分与曲面S的方向(法线的方向)无关。

2° 若曲面S由连续可微函数

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\qquad ((u,v)\in\Omega)\end{cases}$$

给定，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_\Omega f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

式中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

---

* 曲面上某一点的法线方向的选定，唯一确定了曲面上所有其他点的法线方向，它们就是选定方向的法线在曲面上连续移动(不经过曲面边缘)的指向，所以也就决定了曲面的一侧．如果改变原来选定的法线方向，曲面上的所有其他点的法线方向都随着改变，曲面就从一侧移到另一侧．这种曲面称为双侧曲面。

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

[对坐标的曲面积分] 若S为光滑的双侧曲面，S^+为它的正面，即由法线方向$n(\cos\alpha,\ \cos\beta,\cos\gamma)$所确定的一侧，$P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$为在曲面$S$上有定义并且连续的函数，则

$$\iint\limits_{S^+}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint\limits_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

若曲面S由连续可微函数

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\qquad((u,v)\in\Omega)\end{cases}$$

给定，则

$$\iint\limits_{S^+}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega}(AP+BQ+CR)\,du\,dv$$

式中

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

[斯托克斯公式] 若C是包围逐片光滑有界双侧曲面S的逐段光滑简单闭曲线，$P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$是在$S+C$上连续可微函数，则

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

[高斯公式] 若S为包含体积V的逐片光滑曲面，$P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$及其一阶偏导数在$V+S$上连续，则有高斯公式：

$$\iint\limits_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

式中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面$S$的法线正方向的方向余弦。

四、重积分、曲线积分与曲面积分的近似计算

[二重积分的近似计算公式]

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = A_{\Omega}\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k, y_k) + R$$

式中 A_{Ω} 对于不同的积分区域 Ω 选取不同的常数，w_k 是求积系数，R 是余项．

Ω 为圆形 C：$x^2+y^2 \leqslant h^2$．$A_C = \pi h^2$

n	图　示	$(x_k,\ y_k)$	w_k	R
5		$(0,0)$ $(\pm h,0)$ $(0,\pm h)$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$	$O(h^6)$
4		$\left(\pm\frac{h}{2},\pm\frac{h}{2}\right)$	$\frac{1}{4}$	$O(h^6)$
7		$(0,0)$ $(\pm h,0)$ $\left(\pm\frac{h}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$	$O(h^6)$
9		$(0,0)$ $(\pm h,0)$ $(0,\pm h)$ $\left(\pm\frac{h}{2},\pm\frac{h}{2}\right)$	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{6}$	$O(h^8)$

n	图示	(x_k, y_k)	w_k	R
7		$(0, 0)$	$\frac{1}{4}$	$O(h^8)$
		$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}h, 0\right)$	$\frac{1}{8}$	
		$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{6}}h, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)$	$\frac{1}{8}$	
21		$(0, 0)$	$\frac{1}{9}$	$O(h^{12})$
		$\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{6}}{10}}\cos\frac{2k\pi}{10}\cdot h, \sqrt{\frac{6-\sqrt{6}}{10}}\sin\frac{2k\pi}{10}\cdot h\right)$ $k=1, 2, \cdots, 10$	$\frac{16+\sqrt{6}}{360}$	
		$\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{6}}{10}}\cos\frac{2k\pi}{10}\cdot h, \sqrt{\frac{6+\sqrt{6}}{10}}\sin\frac{2k\pi}{10}\cdot h\right)$ $k=1, 2, \cdots, 10$	$\frac{16-\sqrt{6}}{360}$	

Ω 为正方形 S: $|x|\leqslant h$, $|y|\leqslant h$, $A_S=4h^2$

n	图示	(x_k, y_k)	w_k	R
9		$(0, 0)$	$\frac{4}{9}$	$O(h^6)$
		$(\pm h, \pm h)$	$\frac{1}{36}$	
		$(\pm h, 0)$	$\frac{1}{9}$	
		$(0, \pm h)$	$\frac{1}{9}$	

n	图 示	$(x_k,\ y_k)$	w_k	R
4		$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}h,\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}}h\right)$	$\frac{1}{4}$	$O(h^4)$
9		$(0,0)$	$\frac{16}{81}$	$O(h^6)$
		$\left(\pm\sqrt{\frac{3}{5}}h,\ \pm\sqrt{\frac{3}{5}}h\right)$	$\frac{25}{324}$	
		$\left(0,\ \pm\sqrt{\frac{3}{5}}h\right)$	$\frac{10}{81}$	
		$\left(\pm\sqrt{\frac{3}{5}}h,\ 0\right)$	$\frac{10}{81}$	

Ω 为正三角形 T：外接圆半径为 h，$A_T=\frac{3}{4}\sqrt{3}\,h^2$

n	图 示	$(x_k,\ y_k)$	w_k	R
4		$(0,0)$	$\frac{3}{4}$	$O(h^5)$
		$(h,0)$	$\frac{1}{12}$	
		$\left(-\frac{h}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)$	$\frac{1}{12}$	
7		$(0,0)$	$\frac{9}{20}$	$O(h^3)$
		$(h,0)$	$\frac{1}{20}$	
		$\left(-\frac{h}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)$	$\frac{1}{20}$	
		$\left(-\frac{h}{2},\ 0\right)$	$\frac{2}{15}$	
		$\left(\frac{h}{4},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{4}h\right)$	$\frac{2}{15}$	

n	图 示	(x_k, y_k)	w_k	R
7		$(0,0)$	$\frac{9}{40}$	$O(h^6)$
		$\left(\frac{\sqrt{15}+1}{7}h, 0\right)$	$\frac{155-\sqrt{15}}{1200}$	
		$\left(-\frac{\sqrt{15}+1}{14}h, \pm\frac{\sqrt{3}(\sqrt{15}+1)}{14}h\right)$	$\frac{155-\sqrt{15}}{1200}$	
		$\left(-\frac{\sqrt{15}-1}{7}h, 0\right)$	$\frac{155+\sqrt{15}}{1200}$	
		$\left(\frac{\sqrt{15}-1}{14}h, \pm\frac{\sqrt{3}(\sqrt{15}-1)}{14}h\right)$	$\frac{155+\sqrt{15}}{1200}$	

Ω为正六边形H：外接圆半径为h．$A_H=\frac{3}{2}\sqrt{3}h^2$

n	图 示	(x_k, y_k)	w_k	R
7		$(0,0)$	$\frac{7}{12}$	$O(h^4)$
		$\left(\pm\frac{h}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)$	$\frac{5}{72}$	
		$(\pm h, 0)$	$\frac{5}{72}$	
7		$(0,0)$	$\frac{258}{1008}$	$O(R^6)$
		$\left(\pm\frac{\sqrt{14}}{10}h, \pm\frac{\sqrt{42}}{10}h\right)$	$\frac{125}{1008}$	
		$\left(\pm\frac{\sqrt{14}}{5}h, 0\right)$	$\frac{125}{1008}$	

[三重积分的近似计算公式]

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = A_V \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k, y_k, z_k) + R$$

式中 A_V 对于不同的积分区域V选取不同的常数，w_k 是求积系数，R是余项.

V为球体S：$x^2+y^2+z^2 \leqslant h^2$，$A_S=\frac{4}{3}\pi h^3$

n	图示	(x_k, y_k, z_k)	w_k	R
7		$(0,0,0)$	$\frac{2}{5}$	$O(h^7)$
		$(\pm h,0,0)$	$\frac{1}{10}$	
		$(0,\pm h,0)$	$\frac{1}{10}$	
		$(0,0,\pm h)$	$\frac{1}{10}$	

V为立方体C：$|x|\leqslant h, |y|\leqslant h, |z|\leqslant h$. $A_C=8h^3$

n	图示	(x_k, y_k, z_k)	w_k	R
6		$(\pm h,0,0)$	$\frac{1}{6}$	$O(h^7)$
		$(0,\pm h,0)$	$\frac{1}{6}$	
		$(0,0,\pm h)$	$\frac{1}{6}$	
21		$(0,0,0)$	$-\frac{496}{360}$	$O(h^9)$
		中心到6个面的距离的6个中点	$\frac{128}{360}$	
		6个面的中心	$\frac{8}{360}$	
		8个顶点	$\frac{5}{360}$	

n	图 示	(x_k, y_k, z_k)	w_k	R
42		6 个面的中心 12 个棱的中点 每个面的对角线上到每个面中心距离为 $\frac{h}{2}\sqrt{5}$ 的 4 个点 (共24点)	$\frac{91}{450}$ $-\frac{40}{450}$ $\frac{16}{450}$	$O(h^8)$

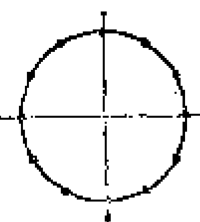
Ω 为四面体 T. $A_T=V$ 为四面体体积

n	图 示	(x_k, y_k, z_k)	w_k	R
8		4 个顶点 4 个面的重心	$\frac{1}{40}$ $\frac{9}{40}$	
11		T 的重心 4 个顶点 6 个棱的中点	$\frac{8}{15}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{15}$	

[曲线积分的近似计算公式]

圆周 Γ: $x^2+y^2=h^2$ 上的曲线积分

$$\int_\Gamma f(x,y)\,ds = \frac{\pi h}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(h\cos\frac{k\pi}{n}, h\sin\frac{k\pi}{n}\right)+O(h^{2n-2})$$



[曲面积分的近似计算公式]

球面 Σ: $x^2+y^2+z^2=h^2$ 上的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = 4\pi h^2 \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k, y_k, z_k) + R$$

n	图 示	$(x_k,\ y_k,\ z_k)$	w_k	R
6		$(\pm h, 0, 0)$	$\frac{1}{6}$	$O(h^6)$
		$(0, \pm h, 0)$	$\frac{1}{6}$	
		$(0, 0, \pm h)$	$\frac{1}{6}$	
18		$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}h, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}h, 0\right)$	$\frac{1}{15}$	$O(h^8)$
		$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}h, 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}h\right)$	$\frac{1}{15}$	
		$\left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}h, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}h\right)$	$\frac{1}{15}$	
		$(\pm h, 0, 0)$	$\frac{1}{30}$	
		$(0, \pm h, 0)$	$\frac{1}{30}$	
		$(0, 0, \pm h)$	$\frac{1}{30}$	
26		$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}h, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}h, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}h\right)$	$\frac{9}{280}$	$O(h^{10})$
		$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}h, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}h, 0\right)$	$\frac{4}{105}$	
		$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}h, 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}h\right)$	$\frac{4}{105}$	
		$\left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}h, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}h\right)$	$\frac{4}{105}$	
		$(\pm h, 0, 0)$	$\frac{1}{21}$	
		$(0, \pm h, 0)$	$\frac{1}{21}$	
		$(0, 0, \pm h)$	$\frac{1}{21}$	

§3　积分的应用

一、求面积

［平面图形面积计算公式］

图　　形	面　积　S
$y=\varphi_2(x)$，$y=\varphi_1(x)$，$x=a$，$x=b$，Ω	$\int_a^b [\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx$
曲边梯形 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，$a=x(t_0)$，$b=x(T)$	$\int_{t_0}^{T} y(t)\dot{x}(t)\,dt$
扇形 $\rho=\rho(\varphi)$，φ_1，φ_2	$\iint_S \rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi$
C，S	$\iint_S dx\,dy=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$

[曲面面积计算公式]

图　　形	面　积　S
旋转面 曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转	$S=2\pi\int_0^s y\,ds=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ 或 $S=2\pi\bar{y}s$ 式中 $y=f(x)$ 表示 $[a,b]$ 上的曲线方程，s 表示 $[a,b]$ 上的曲线的长度，ds 为弧的微分，$\bar{y}$ 为曲线重心 G 到旋转轴的距离
曲面 在 Oxy 平面的区域 Ω 上	$S=\iint_\Omega\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$
曲面 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$ 在 u,v 的区域 Ω 上	$S=\iint_\Omega\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ 式中 $E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$ $F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$ $G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$
柱面 柱面 $F(x,y)=0$ 夹在曲面 $z=z(x,y)$ 和 Oxy 平面之间	$S=\int_{C(A,B)}z(x,y)\,ds$ 式中 C 为柱面的准线，ds 为曲线 $C(A,B)$ 上的弧的微分

二、求体积

图 形	体 积 V
旋转体 曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转	$V=\pi\int_a^b y^2dx$ 式中 $y=f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的曲线方程
旋转体 平面图形绕 x 轴旋转	$V=2\pi\bar{y}A$ 式中 A 为所旋转的平面图形的面积，$\bar{y}$ 为该平面图形重心 G 到旋转轴（x 轴）的距离，此公式对计算环状体积较为方便，重心求法见本节，四
	$V=\int_a^b S(x)dx$ 式中 $S(x)$ 为垂直于 x 轴的截面面积
直柱体 在曲面 $z=z(x,y)$ 与区域 Ω 之间	$V=\iint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy$

图形	体积 V
空间区域V由下列曲面围成： $z=z_1(x,y),\ z=z_2(x,y)$ （曲面） $y=y_1(x),\ y=y_2(x)$ （直柱面） $x=a,\ x=b$ （平面）	$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$ $=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}[z_2(x,y)-z_1(x,y)]\,dy$ $=\iint\limits_\Omega [z_2(x,y)-z_1(x,y)]\,dx\,dy$ 式中Ω为Oxy平面上的区域，它由曲线$y=y_1(x),y=y_2(x),x=a,x=b$围成

三、n维空间中凸体体积公式

n维空间的点的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 所谓n维空间中的凸体$\mathscr{R}$，是指$\mathscr{R}$中任意两点A和B的连线仍在$\mathscr{R}$中，即设$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，若$A,B\in\mathscr{R}$，则点$T=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathscr{R}$. 其中

$$t_i=\frac{a_i+tb_i}{1+t},\quad t>0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

下面列出几种凸体体积的计算公式.

［单纯形］ 已知n维空间中的$n+1$个点$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n+1}$，包含这$n+1$个点的最小凸体称为由$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n+1}$张成的单纯形，记作$\mathscr{R}$，若设$\boldsymbol{x}_i$的$n$个坐标为

$$(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})\qquad i=1,2,\cdots,n+1$$

则单纯形$\mathscr{R}$的体积

$$V=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots x_{1n} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots x_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & \cdots x_{n+1,n} & 1 \end{vmatrix}$$

$n=2$时为三角形，$n=3$时为四面体.

［超立方体］

$$\mathscr{R}:\ |x_i|\leqslant\lambda_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$V=\int\cdots\int\limits_{\substack{|x_i|\leqslant\lambda_i\\1\leqslant i\leqslant n}} dx_1\cdots dx_n=2^n\lambda_1\cdots\lambda_n$$

[广义八面体]

1°　$\mathscr{R}_1$: $\lambda_1|x_1|+\cdots+\lambda_n|x_n|\leqslant r,\ \lambda_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$

$$V=\underset{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i|x_i|\leqslant r}{\int\cdots\int}dx_1\cdots dx_n=\frac{2^n r^n}{n!\lambda_1\cdots\lambda_n}$$

2°　$\mathscr{R}_2$: $\lambda_i|x_i|+\lambda_n|x_n|\leqslant r,\ \lambda_i>0,\ \lambda_n>0,\ i=1,2,\cdots,n-1$

$$V=\underset{\substack{\lambda_i|x_i|+\lambda_n|x_n|\leqslant r\\ 1\leqslant i\leqslant n-1}}{\int\cdots\int}dx_1\cdots dx_n=\frac{2^n r^n}{n\lambda_1\cdots\lambda_n}$$

[n 维球体]

$$\mathscr{R}:\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant r^2$$

$$V=\underset{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\leqslant r^2}{\int\cdots\int}dx_1\cdots dx_n=\frac{r^n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

[凸体的线性变换]　设有线性变换

$$\xi_i=\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_j,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$J=\det(d_{ij})\neq 0$$

将凸体 R 映成 R_ξ，则 R_ξ 的体积为

$$\int\cdots\int_{R_\xi}dx_1\cdots dx_n=\int\cdots\int_{R_\xi}\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(\xi_1,\cdots,\xi_n)}\right|d\xi_1\cdots d\xi_n=\frac{V}{|J|}$$

这里 $\dfrac{\partial(\xi_1,\cdots,\xi_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\det(d_{ij})=J$ 为该线性变换的雅可比式.

四、求重心

[平面图形几何重心坐标的计算公式]

图　形	几何重心 $G(\bar{x},\bar{y})$
平面曲线 (图: $y=f(x)$, G, $\bar{y}$, O, a, $\bar{x}$, b, x, y)	$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx}\\ \bar{y}=f(\bar{x})\end{cases}$

图　　形	几何重心 $G(\bar{x}, \bar{y})$
曲边梯形	$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int_a^b x f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \\ \bar{y} = \dfrac{\int_a^b f^2(x)dx}{2\int_a^b f(x)dx} \end{cases}$
平面图形 平面图形由曲线 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$， $x=a$，　$x=b$ 围成	$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int_a^b x[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx}{\int_a^b [\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx} \\ \bar{y} = \dfrac{\int_a^b [\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]^2 dx}{2\int_a^b [\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx} \end{cases}$

[物体总质量与重心坐标的计算公式]

物体形状及密度 ρ	总质量 M 与重心 $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$
薄板 $\rho(x, y)$ 是薄板的面密度	$M = \iint_\Omega \rho(x, y)\, dx\, dy$ $\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{M}\iint_\Omega x\, \rho(x, y)\, dx\, dy \\ \bar{y} = \dfrac{1}{M}\iint_\Omega y\, \rho(x, y)\, dx\, dy \end{cases}$

物体形状及密度 ρ	总质量M与重心$G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$
一般物体 $\rho(x,y,z)$是物体的密度	$M=\iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ $\begin{cases}\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\\ \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_V y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\\ \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_V z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\end{cases}$
空间线状物体 $\rho(x,y,z)$是曲线C的线密度	$M=\int_C \rho(x,y,z)ds$ $\begin{cases}\bar{x}=\frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)\,ds\\ \bar{y}=\frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)\,ds\\ \bar{z}=\frac{1}{M}\int_C z\,\rho(x,y,z)\,ds\end{cases}$ 式中ds为弧的微分，以上积分为曲线积分.

五、求转动惯量

[薄板的转动惯量] 设Oxy平面内薄板Ω的密度为$\rho=\rho(x,y)$，对于x轴，y轴，原点O的转动惯量分别为J_x, J_y, J_O，则

$$J_x=\iint_\Omega y^2\rho(x,y)\,dx\,dy \qquad J_y=\iint_\Omega x^2\rho(x,y)\,dx\,dy$$

$$J_O=\iint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy=J_x+J_y$$

[一般物体的转动惯量] 设物体V的密度$\rho=\rho(x,y,z)$. 若物体对于坐标平面的转动惯量分别为J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}; 物体对于某轴l的转动惯量为J_l; 物体对于坐标轴的转动惯量分别为J_x, J_y, J_z; 物体对于原点的转动惯量为J_O，则

$$J_{xy}=\iiint_V z^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad J_{yz}=\iiint_V x^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$J_{xz}=\iiint\limits_{V} y^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad J_l=\iiint\limits_{V} r^2\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

式中 r 为物体的动点到轴 l 的距离。

$$J_x=J_{xy}+J_{zx},\quad J_y=J_{yz}+J_{yz},\quad J_z=J_{zx}+J_{zy}$$

$$J_O=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$J_O=J_{xy}+J_{yz}+J_{xz}$$

六、求流体压力

设流体接触面的边缘曲线为 $y=f(x)$（图 6.9），流体密度为 w，则单侧压力

$$P=\int_a^b w\,x\,f(x)\,dx$$

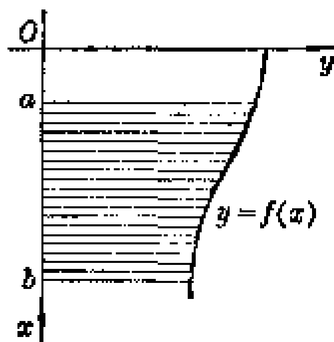


图 6.9

七、求变力所做的功

1° 若 s 为路程，$f(s)$为变力，则

$$W=\int_a^b f(s)\,ds$$

2° 若 s 为路程，运动路线为 C，$f(x,\ y)$为变力，θ 为变力 f 与路线C切线的夹角，则

$$W=\int_{C(A,B)} f(x,y)\cos\theta\,ds$$

3° 若变力沿坐标轴的三个分力分别为 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$，C 为空间运动路线，则

$$W=\int_{C(A,B)}P(x,y,z)\,dx+\int_{C(A,B)}Q(x,y,z)\,dy+\int_{C(A,B)}R(x,y,z)\,dz$$

§4 区域函数

一、区域函数与密度函数

设 σ 是空间Ω的区域，当变量 u 随区域σ 的变化而变化时，称 u 是区域σ 的函数，记作 $u=u(\sigma)$。把区域的度量（长度、面积或体积）仍记作 σ，把 σ 无限细分，使包含 M（区域中的一点）的小区域的度量 $\Delta\sigma\to0$，如果 u 的改变量为Δu，

并且极限

$$\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\sigma}=\mu(M)$$

存在，则称 $\mu(M)$ 为区域函数 $u(\sigma)$ 的密度，记作

$$\frac{du}{d\sigma}=\mu(M)$$

它是点M的函数，称为密度函数，它的微分形式是

$$du=\mu(M)\,d\sigma \tag{1}$$

例如，当 σ 是三维空间的曲面时，$\mu(M)$ 就是曲面的面密度．当 σ 是三维空间的物体时，$\mu(M)$ 就是体密度．实际上，$\mu(M)$ 都是 x, y, z 的三变量函数．

二、密度函数的积分

由(1)得到

$$u(\sigma)=\int_{\sigma}\mu d\sigma$$

由于积分区域的变化，这些积分又是各种形式的区域函数，例如

[直线上的线密度与单积分] 令 $\sigma=I=[a,b]$，则非均匀细杆的质量

$$m(I)=\int_I dm=\int_I \mu_1(M)dl=\int_a^b \mu_1(x)dx$$

式中 μ_1 为线密度．

[平面上的面密度与二重积分] 设薄片的密度为 $\mu_2(x,y)$，则薄片质量为

$$m(D)=\iint_D \mu_2(x,y)\,d\sigma$$

式中 D 表示薄片在平面上的区域．

[体密度与三重积分] 设物体的密度为 $\mu_3(x,y,z)$，则物体的质量为

$$m(V)=\iiint_V \mu_3(x,y,z)\,dV$$

式中 V 表示物体在空间中的区域．

[线密度关于弧长元素的积分] 由于曲线段 l 的质量元素是

$$dm=\mu_1(M)ds \quad (ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2})$$

所以曲线段的质量为

$$m(l)=\int_l \mu_1(M)ds$$

〔曲面上的面密度与关于曲面元素的积分〕 分布在曲面S上的质量为

$$m(S)=\iint_S \mu_2(M)\,dS=\iint_D \mu_2(M)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

式中D为S在Oxy平面上的投影区域，S的方程为$z=f(x,y)$，$x,y\in D$。这种形式的积分称为函数$\mu_2(M)$关于曲面元素dS的积分。

三、δ-函数概念

在讨论直线上有集中质量分布时，例如只在原点$x=0$处有集中质量m，而在其他各点都没有质量，这时，对直线上坐标不等于零的点，总可以取包含这个点的充分小的区间Δl，使Δl不包含点$x=0$，则区间Δl上的平均密度为零，所以在点$x(\neq 0)$的密度也是零；而在点$x=0$处，若Δl包含这个点，由于

$$\frac{\Delta m}{\Delta l}=\frac{m}{\Delta l}$$

当$\Delta l\to 0$时，平均密度趋于无穷大。在包含点$x=0$的任何区间$[a,b]$内，质量总等于m，这时仍认为存在密度函数$\mu(x)$，

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (x\neq 0)\\ \infty & (x=0)\end{cases}$$

$$\int_a^b \mu(x)\,dx=m$$

特别，当$m=1$时，记这种密度函数为$\delta(x)$，即

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & (x\neq 0)\\ \infty & (x=0)\end{cases}$$

对包含点$x=0$的任何区间I，有

$$\int_I \delta(x)dx=1 \qquad 或 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$$

称这个函数$\delta(x)$为δ-函数(也称为狄拉克函数或脉冲函数)。

δ-函数具有一个重要性质：对任一连续函数$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx=f(0)$$

这个性质表明，δ-函数虽然不符合古典的"一点对应一点"的函数定义，但它和任意连续函数的乘积在$(-\infty,\infty)$内的积分却有明确的定义。因此δ-函数在近代物理和工程技术中有着比较广泛的应用。

第七章　解析几何与微分几何

解析几何是运用代数方法研究几何图形的性质，它的主要研究对象是直线、平面、二次曲线与二次曲面．微分几何是运用无穷小分析方法研究几何图形的性质，它的主要研究对象是曲线与曲面．

本章的所有内容都只在欧氏（没有包括仿射和射影）空间中讨论．

全章有十一节．前六节属于解析几何，叙述了平面及空间的坐标系、坐标变换与基本计算公式；平面上和空间中直线与平面方程的各种形式以及它们之间的相互关系．较详细地列出了各种类型的二次曲线和二次曲面的基本元素、标准方程、主要性质和各量的计算公式．最后还从一般的二次方程出发研究了二次曲线与二次曲面的一般性质，并利用不变量写出标准方程和形状的判定．

后五节的内容属于微分几何，关于曲线论这里给出了：平面曲线和空间曲线的雪列-弗莱纳公式和基本定理，以及它们的曲率、挠率的概念和计算公式；等距线、渐开线、渐屈线和包络线的定义和方程．较详细地收集了重要平面曲线和一些特殊空间曲线的方程、图形及其各种特征．关于曲面论这里只叙述了几个特殊曲面的方程、图形和性质，并且给出曲面的基本元素（弧长、面积、夹角、切面、法面等方程和公式）、基本形式、基本方程、基本定理、曲率线、渐近曲线、共轭曲线、测地线与法曲率、测地曲率、总曲率、平均曲率、波恩涅公式等．

本章中凡是有关矢量的概念、运算和公式，请查阅第八章．

§1 坐标系与坐标变换

一、平面坐标系及其变换表

<table>
<tr><th>坐标系与图形</th><th>公式与说明</th></tr>
<tr><td>[笛卡儿直角坐标系]
y, M(x, y), Ⅱ, Ⅰ, O, x, Ⅲ, Ⅳ</td><td>Ox 为横轴，Oy 为纵轴
$M(x,y)$ x 为横坐标
y 为纵坐标
Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 为四个象限，在各个象限里点的坐标 x 和 y 的符号为
<table><tr><th>象限</th><th>Ⅰ</th><th>Ⅱ</th><th>Ⅲ</th><th>Ⅳ</th></tr><tr><td>x</td><td>+</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>+</td><td>+</td><td>−</td><td>−</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>[极坐标系]
M(ρ, φ), ρ, φ, O, x</td><td>O 为极点，Ox 为极轴
$M(\rho,\varphi)$ ρ 为矢径($0\leqslant\rho<\infty$)
φ 为极角($-\infty<\varphi<\infty$)
φ 从极轴开始，逆时针转动为正，顺时针转动为负</td></tr>
<tr><td>[直角坐标与极坐标的互换]
y, M, ρ, y, φ, O, x, x</td><td>$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} & (x>0) \\ \pi+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} & (x<0) \end{cases} \end{cases}$$</td></tr>
</table>

坐标变换	公式与说明
[坐标轴的平移]	$\begin{cases} x=X+g \\ y=Y+h \end{cases}$ 这里 x,y 表示旧坐标，X,Y 表示新坐标．g,h 是新坐标系原点 O' 在旧坐标系内的坐标
[坐标轴的旋转]	$\begin{cases} x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha \\ y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha \end{cases}$ α 为坐标轴绕原点转动的角．任一坐标变换都可以分解为坐标轴的平移与坐标轴的旋转两部分 $\begin{cases} x=g+X\cos\alpha-Y\sin\alpha \\ y=h+X\sin\alpha+Y\cos\alpha \end{cases}$

二、空间坐标系及其变换表

坐标系与图形	公式与说明
[笛卡儿直角坐标系] (a)右手系　(b)左手系　(c)	Ox 为横轴，Oy 为纵轴，Oz 为竖轴 $M(x,y,z)$　x 为横坐标，y 为纵坐标，z 为竖坐标．Ⅰ～Ⅷ为八个卦限，在各个卦限里点的坐标 x,y,z 的符号为

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

坐标系与图形	公 式 与 说 明
[圆柱面坐标系]	ρ，φ 为点M在 Oxy 平面上投影的极坐标，z 为点M到Oxy 平面的距离．这里 $0\leqslant\rho<\infty$ $-\infty<\varphi<\infty$ $-\infty<z<\infty$
[球面坐标系(极坐标系)]	r 为矢径长(OM)，φ 为经度，θ 为纬度(或极距角)．这里 $0\leqslant r<\infty$ $-\infty<\varphi<\infty$ $0\leqslant\theta\leqslant\pi$
[圆柱面坐标与直角坐标的互换]	$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$ $\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}=\operatorname{arc\,sin}\dfrac{y}{\rho}\\ z=z\end{cases}$
[球面坐标与直角坐标的互换]	$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$ $\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\\ \theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\end{cases}$
[坐标轴的平移]	$\begin{cases}x=X+g\\ y=Y+h\\ z=Z+k\end{cases}$ 式中x,y,z 为旧坐标；X,Y,Z 为新坐标；g,h,k 为新坐标系原点 O' 在旧坐标系内的坐标

<table>
<tr><th>坐标系与图形</th><th>公　式　与　说　明</th></tr>
<tr><td>[坐标轴的旋转]</td><td>按下表给出新坐标轴 OX,OY,OZ 的方向余弦时,

新坐标轴	方向余弦(见 § 4)
OX	$l_1\quad m_1\quad n_1$
OY	$l_2\quad m_2\quad n_2$
OZ	$l_3\quad m_3\quad n_3$

则有
$$\begin{cases} x=l_1X+l_2Y+l_3Z \\ y=m_1X+m_2Y+m_3Z \\ z=n_1X+n_2Y+n_3Z \end{cases}$$
</td></tr>
</table>

[欧拉角]　新坐标轴的位置也可以用三个所谓欧拉角来确定(见上图):

(i) 章动角 θ 为 OZ 与 Oz 两轴正向夹角($0\leqslant\theta<\pi$).

(ii) 进动角 ψ 为 OA 与 Ox 的夹角($0\leqslant\psi<2\pi$), OA 为 OXY 与 Oxy 两平面的交线,面对 Oz 轴的正向, ψ 按逆时针方向从 Ox 轴开始计算.

(iii) 自转角 φ 为 OA 与 OX 的夹角($0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$),面对 OZ 轴正向, φ 按逆时针方向从 OX 轴开始计算

若设

$$c_1=\cos\theta,\quad c_2=\cos\psi,\quad c_3=\cos\varphi$$
$$s_1=\sin\theta,\quad s_2=\sin\psi,\quad s_3=\sin\varphi$$

则

$$l_1=c_2c_3-c_1s_2s_3,\qquad m_1=s_2c_3+c_1c_2s_3,\qquad n_1=s_1s_3$$
$$l_2=-c_2s_3-c_1s_2c_3,\quad m_2=-s_2s_3+c_1c_2c_3,\quad n_2=s_1c_3$$
$$l_3=s_1s_2,\qquad m_3=-s_1c_2,\qquad n_3=c_1$$

变换行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}=\pm1$$

当右手系变为右手系(或左手系变为左手系)时, $\Delta=1$. 当右手系变为左手系(或左手系变为右手系)时, $\Delta=-1$.

§ 2　解析几何中的基本计算

图　形	计　算　公　式
[两点间的距离]	平面上　$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 空间中　$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
[分线段为定比的分点坐标] (a)	平面上 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} -\infty<\lambda<\infty \\ \lambda\neq-1 \end{matrix}\right)$
(b) $M(x,y,z)$为A_1A_2的分点，分割比例 $\lambda=\dfrac{A_1M}{MA_2}$	空间中 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \\ z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} -\infty<\lambda<\infty \\ \lambda\neq-1 \end{matrix}\right)$ $\lambda>0$称为内分，$\lambda<0$称为外分．$\lambda=1$时，M为A_1A_2的中点： $x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\quad y=\dfrac{y_1+y_2}{2},\quad z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$
[平面上三角形的面积] A_1, A_2, A_3构成逆时针回路	$S_\triangle=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 当$S_\triangle=0$时，A_1, A_2, A_3三点共线

图　形	计　算　公　式
[平面上多角形的面积] $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$, $A_n(x_n,y_n)$, O, x, y $A_1, A_2, \cdots, A_n$构成逆时针回路	$S=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}x_n & y_n\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right)$ 当$S=0$时，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ n个点共线
[空间中四面体的体积] $M(x,y,z)$, $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, O, x, y, z 这里$\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA_2}, \overrightarrow{MA_3}$构成右手系	$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2\\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3\end{vmatrix}$ 当$V=0$时，M, A_1, A_2, A_3四个点共面
[二面角的角度] $M(x,y,z)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, θ M_0, M, A_1, A_2为空间中不共面的四点，θ为二面角$A_1\text{-}M_0M\text{-}A_2$ $(0\leqslant\theta\leqslant 180°)$	$\cos\theta=\frac{(\overrightarrow{M_0M}\times\overrightarrow{M_0A_1})\cdot(\overrightarrow{M_0M}\times\overrightarrow{M_0A_2})}{\lvert\overrightarrow{M_0M}\times\overrightarrow{M_0A_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{M_0M}\times\overrightarrow{M_0A_2}\rvert}$ 当M_0为原点，$\overrightarrow{M_0A_1}$为x轴的正向，$\overrightarrow{M_0A_2}$为y轴的正向时，则 $\cos\theta=-\frac{xy}{\sqrt{(y^2+z^2)(z^2+x^2)}}$ 当M_0为原点，$\overrightarrow{M_0A_1}$为x轴的正向时，则 $\cos\theta=\frac{(y^2+z^2)x_2-x(yy_2+zz_2)}{\sqrt{(y^2+z^2)\left[\begin{vmatrix}y & z\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z & x\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x & y\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2\right]}}$

图　形	计　算　公　式
[质点系的重心坐标] 空间中各质点的质量为 m_i，坐标为 (x_i, y_i, z_i)　$i=1,2,\cdots,n$	重心 G 的坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 为 $\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\\ \bar{y}=\dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\\ \bar{z}=\dfrac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}\end{cases}$ 式中 $\sum$ 表示对 i 从 1 到 n 求和

§ 3　平面上的直线

一、平面上直线的方程与图形

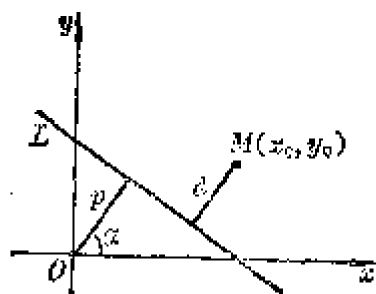
方　程　与　图　形	说　明
[斜截式] $y=kx+b$ $(k>0, b>0)$ $(k>0, b<0)$　$(k<0, b>0)$　$(k<0, b<0)$ $(k=0)$　$(k=\infty)$　$(b=0)$	k 为斜率，若直线与 x 轴的交角为 α，则 $k=\operatorname{tg}\alpha$，这里 $0\leqslant\alpha<\pi$. b 为纵截距

方 程 与 图 形	说 明
[截距式] $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a,b\neq 0)$	a,b 分别为 x 轴,y 轴上的截距. 该直线通过 $A(a,0)$ 和 $B(0,b)$ 两点. 与 x 轴的交角 $\alpha=\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ 或 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right)$
[点斜式] $y-y_0=k(x-x_0)$	k 为斜率 该直线通过点 $M(x_0,y_0)$ 与 x 轴的交角 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}k$
[两点式] $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ 或 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$	该直线通过 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$ 两点. 与 x 轴的交角 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
[一般式] $Ax+By+C=0$ (A,B,C 为常数, A,B 不同时等于零)	斜 率 $k=-\frac{A}{B}$ 纵截距 $b=-\frac{C}{B}$ [注]一般方程可根据需要化成上面四种形式

方 程 与 图 形	说 明
[参数式] $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt\end{cases}$ $(-\infty<t<\infty)$	斜率 $k=\frac{m}{l}=\mathrm{tg}\alpha$ 该直线通过点$M(x_0,y_0)$ 与x轴的交角为α
[极坐标式] $\rho=\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$	O为极点，Ox为极轴，p为极点到该直线的距离．α为极轴与从极点引到直线的垂线之间的夹角（逆时针方向为正），φ为该直线上任一点M的极角，ρ为M点的矢径
[法线式] $x\cos\beta+y\sin\beta-p=0\quad(p\geqslant0)$	p为法线长(原点O到直线的垂线长)，β为法线与x轴的交角，p,β称为直线的位置参数． [注]直线一般式可化为法线式 $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$ 式中 $\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$称为直线的法化因子，当$C<0$（或$C=0$而$B>0$)时，取正号；当$C>0$（或$C=0$而$B<0$)时，取负号
[矢量式] $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$ $(-\infty<t<\infty)$	该直线通过矢径$\boldsymbol{r}_0$的终点，且与已知矢量$\boldsymbol{a}$平行

方 程 与 图 形	说 明
[复数式] (a) $z=z_0+te^{i\alpha}$	(a)直线通过点 z_0，并与 x 轴的交角为 α。
(b) $z=z_1+t(z_2-z_1)$ $(-\infty<t<\infty)$	(b)直线通过 z_1，z_2 两点(t 为实参数)

二、平面上点与直线的相互关系

方程与图形	计 算 公 式 与 说 明
[点线的距离] 法线式 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ 一般式 $Ax+By+C=0$ 	$d_{法}=\lvert x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\rvert$ $d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 式中 d 为点 $M(x_0,y_0)$ 到直线 L 的距离

方程与图形	计 算 公 式 与 说 明
［二直线的夹角］ L_1　$A_1x+B_1y+C_1=0$ 斜率为 k_1 L_2　$A_2x+B_2y+C_2=0$ 斜率为 k_2 φ 为二直线的夹角（从 L_1 到 L_2 为逆时针时为正），$G(x_0,y_0)$ 为二直线的交点	$\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\dfrac{1+k_1k_2}{\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{1+k_2^2}}$ $\sin\varphi=\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\dfrac{k_2-k_1}{\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{1+k_2^2}}$ $x_0=\dfrac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}$，$y_0=\dfrac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}$ 特别，当 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$（或 $k_1=k_2$）时，$L_1/\!/L_2$； 当 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ 时，L_1 与 L_2 重合； 当 $A_1A_2+B_1B_2=0$（或 $1+k_1k_2=0$）时，$L_1\perp L_2$
［直线束·三直线共点的条件］ L_λ　$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$， （$\lambda$ 为参数，$-\infty<\lambda<\infty$）	对 λ 的一个确定值，L_λ 表示一条通过二直线（L_1 和 L_2）的交点 G 的直线，当 λ 取一切值时，L_λ 所表示的通过 G 的直线的全体称为直线束，G 称为直线束的顶点（或中心）． 设 L_3 为 $A_3x+B_3y+C_3=0$，则三条直线 L_1，L_2，L_3 共点的条件为行列式 $\begin{vmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\\A_3&B_3&C_3\end{vmatrix}=0$ 如果二直线方程以法线式给定，则 $\lvert\lambda\rvert$ 为直线 L_λ 上任一点到二给定直线之间的距离之比．对应于 $\lambda=1$ 和 $\lambda=-1$ 的直线为给定二直线夹角的平分线

§4 空间中的直线与平面

一、直线的方向

名称与说明	图形
[方向角] 通过原点O的直线OM与三条坐标轴的夹角α,β,γ称为该直线的方向角(OM的方向为离开原点O的方向): $\alpha=\angle MOx,\ \beta=\angle MOy,$ $\gamma=\angle MOz$ [方向余弦] 直线的方向角的余弦称为方向余弦: $l=\cos\alpha=\frac{x}{\rho},\quad m=\cos\beta=\frac{y}{\rho},$ $n=\cos\gamma=\frac{z}{\rho}$ 式中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ l^2+m^2+n^2=1$	z, $M(x,y,z)$, ρ, γ, O, β, α, y, x
[方向数] 通过原点且平行于直线L的直线OM上任意一点W的坐标(p,q,r)称为直线L的方向数,而 $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ 为直线OM的方向余弦	z, M, $W(p,q,r)$, L, γ, α, β, O, y, x
[过两点的直线的方向余弦] $\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d},\ \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{d},\ \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{d}$ 式中 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ 这时直线的正向为$M_1(x_1,y_1,z_1)$到$M_2(x_2,y_2,z_2)$的方向.	z, d, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, O, y, x

二、平面的方程

方　程　与　图　形	说　明
[截距式] $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $(a, b, c\neq 0)$	a, b, c 分别称为平面在三条坐标轴上的截距
[点法式] $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (A,B,C 不同时等于零)	平面通过点 $M(x_0, y_0, z_0)$，且法线 N 的方向数为 A, B, C
[三点式] $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ 或 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	平面通过三点：$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，$M_3(x_3, y_3, z_3)$

方 程 与 图 形	说 明
[一般式] $Ax+By+Cz+D=0$ (A,B,C 为该平面的法线的方向数，且不同时等于零)	当 $D=0$ 时，平面通过原点。 当 $A=0$(或 $B=0$，或 $C=0$)时，平面与 x 轴(或 y 轴，或 z 轴)平行。 当 $A=B=0$ (或 $A=C=0$，或 $B=C=0$)时，平面与 Oxy 平面(或 Ozx，或 Oyz)平行
[法线式] $x\cos\alpha+y\cos\beta$ $+z\cos\gamma-p=0$ (α,β,γ 为平面的法线的方向角，$p\geqslant 0$ 为法线长即原点到平面的距离)	平面的一般式可化为法线式 $\dfrac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$ 式中 $\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 称为平面的法化因子，当 $D<0$ 时取正号；$D>0$ 时取负号
[矢量式] $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{a}=0$	平面通过矢径 $\boldsymbol{r}_0$ 的终点，且与已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 垂直，$\boldsymbol{r}$ 为平面上任意一点的矢径

三、直线的方程

方程与图形	说明
[一般式(或交面式)] $L\quad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	把直线L作为两个平面的交线，它的方向数为 $p=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ $q=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$ $r=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$
[对称式(或参数式)] $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ 或 $\begin{cases} x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases}$ $(-\infty<t<\infty)$	直线L通过点$M(x_0,y_0,z_0)$，且具有方向数p,q,r
[两点式] $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	直线L通过$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$两点

方程与图形	说明
[射影式] $L\quad \begin{cases} y=ax+g \\ z=bx+h \end{cases}$	直线 L 是 $y=ax+g$ 和 $z=bx+h$ 两个平面的交线；通过点 $(0,g,h)$ 且具有方向数 $1,a,b$
[矢量式] $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a}$ $(-\infty<t<\infty)$	直线 L 通过矢径 $\boldsymbol{r}_0$ 的终点，且与已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 平行，$\boldsymbol{r}$ 为 L 上任意一点的矢径

四、空间中点、直线、平面的相互关系

方程与图形	公式与说明
[二平面的夹角] $P_1\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $P_2\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ 式中 φ 就是二平面 P_1 和 P_2 的二面角

方程与图形	公式与说明

[平面束·三平面共线的条件]

$$P_\lambda \quad (A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

(λ为参数, $-\infty<\lambda\leqq\infty$)

对λ的一个确定值, P_λ表示一个通过二平面P_1和P_2交线L的平面，当λ取一切值时，P_λ所表示的通过L的平面的全体称为平面束，L称为束的轴。

设P_3为$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$，则三个平面P_1，P_2，P_3共线的条件为矩阵

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix}$$

的秩等于2。

[平面把·四平面共点的条件]

$$P_{\lambda\mu} \quad (A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\mu(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0$$

(λ,μ为两个独立参数, $-\infty<\lambda,\mu<\infty$)

对λ,μ的一对确定值, $P_{\lambda\mu}$表示通过三平面P_1, P_2和P_3交点G的一个平面，当λ,μ取一切值时，$P_{\lambda\mu}$所表示的通过G的平面的全体称为平面把，G称为把的顶点。

设P_4为$A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$，则四个平面P_1，P_2，P_3，P_4共点的条件为行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0$$

[点面的距离]

法线式

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

$$d_{法}=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|$$

方程与图形	公式与说明
一般式　$Ax+By+Cz+D=0$	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 式中 d 为点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到平面的距离
[点线的距离] $L\quad \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$	$d=\left\lvert\frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1\end{vmatrix}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\right\rvert$ 式中 d 为点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 L 的距离，i,j,k 为三个坐标轴上的单位矢量，最外面的符号"| |"表示矢量的模
[二直线的夹角] $L_1\quad \frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ $L_2\quad \frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$	$\cos\varphi=\frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\cdot\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$ 式中 φ 为二直线 L_1 和 L_2 的夹角

方 程 与 图 形	公 式 与 说 明
[二不平行直线的最短距离] $L_1 \quad \dfrac{x-x_1}{p_1}=\dfrac{y-y_1}{q_1}=\dfrac{z-z_1}{r_1}$ $L_2 \quad \dfrac{x-x_2}{p_2}=\dfrac{y-y_2}{q_2}=\dfrac{z-z_2}{r_2}$	$d=\dfrac{\pm\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix}^2}}$ 所谓最短距离是指L_1, L_2的公共垂线与此两线交点之间的距离，式中正负号与行列式取同号．从此推出二直线共面的条件为$d=0$，所在平面的方程为 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0$
[直线与平面的夹角] $L \quad \dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ $P \quad Ax+By+Cz+D=0$	$\sin\varphi=\dfrac{\lvert pA+qB+rC\rvert}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 式中φ为直线L与平面P的夹角

[直线与平面的平行与垂直条件]

平 行 条 件	垂 直 条 件
线与线 $\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{q_1}{q_2}=\dfrac{r_1}{r_2}$	$p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0$
面与面 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
线与面 $pA+qB+rC=0$	$\dfrac{p}{A}=\dfrac{q}{B}=\dfrac{r}{C}$

§5 二次曲线

一、圆

[圆的方程、圆心与半径]

方程与图形	圆心与半径
$x^2+y^2=R^2$ 或 $\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases}$ (参数方程，t 为动径 OM 与 x 轴正方向的夹角)	圆心 $G(0,0)$ 半径 $r=R$
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 或 $\begin{cases}x=a+R\cos t\\ y=b+R\sin t\end{cases}$ (参数方程，t 为动径 OM 与 x 轴正方向的夹角)	圆心 $G(a,b)$ 半径 $r=R$
$x^2+y^2+2mx+2ny+q=0$ $m^2+n^2>q$ $\rho^2+2\rho(m\cos t+n\sin t)+q=0$ (极坐标方程)	圆心 $G(-m,-n)$ 半径 $r=\sqrt{m^2+n^2-q}$
$\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2=R^2$ (极坐标方程)	圆心 $G(\rho_0,\varphi_0)$ 半径 $r=R$
$x^2+y^2=2Rx$ 或 $\rho=2R\cos\varphi$ (极坐标方程)	圆心 $G(R,0)$ 半径 $r=R$

方 程 与 图 形	圆心与半径
$x^2+y^2=2Ry$ 或 $\rho=2R\sin\varphi$ (极坐标方程)	圆心 $G(0,R)$ 半径 $r=R$

[圆的切线]

圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $M(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$$x_0x+y_0y=R^2$$

圆 $x^2+y^2+2mx+2ny+q=0$ 上一点 $M(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$$x_0x+y_0y+m(x+x_0)+n(y+y_0)+q=0$$

[两个圆的交角、圆束与根轴]

方 程 与 图 形	公 式 与 说 明
两个圆的交角 C_1 $x^2+y^2+2m_1x+2n_1y+q_1=0$ C_2 $x^2+y^2+2m_2x+2n_2y+q_2=0$ 两个圆的交角是指它们在交点的两条切线的夹角	$\cos\theta=\dfrac{2m_1m_2+2n_1n_2-q_1-q_2}{2\sqrt{m_1^2+n_1^2-q_1}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2-q_2}}$ 式中 θ 表示两个圆 C_1 和 C_2 的交角。因为公式中不包含交点的坐标，所以在两交点的两交角必相等. 两个圆 C_1 和 C_2 正交条件为 $2m_1m_2+2n_1n_2-q_1-q_2=0$
圆束·两个圆的根轴 C_λ $C_1+\lambda C_2=0$ (λ为参数) 或 $(\lambda+1)(x^2+y^2)+2(m_1+\lambda m_2)x$ $+2(n_1+\lambda n_2)y+(q_1+\lambda q_2)=0$	对$\lambda(\lambda\neq-1)$的一个确定值，C_λ 表示一个圆. 当 λ 取一切值 ($\lambda\neq-1$) 时，C_λ 所表示的圆的全体，称为圆束. $\lambda=-1$ 时，为一直线，称为两个圆C_1和C_2的根轴. 根轴与 C_1 和 C_2 的连心线垂直，束中任一圆 C_λ 的圆心在C_1和 C_2 的连心线上，且分连

方 程 与 图 形	公 式 与 说 明
根轴方程为 $2(m_1-m_2)x+2(n_1-n_2)y$ $+(q_1-q_2)=0$	心线的比等于 λ.
M_1 M_2 (a)	(a)如果 C_1 和 C_2 相交于两点 M_1, M_2, 则束中一切圆都通过两交点 M_1, M_2, 它们的根轴就是它们的公共弦. 这时圆束称为共轴圆系(图(a)).
M (b)	(b)如果 C_1 和 C_2 切于一点 M, 则束中一切圆都在一点 M 相切, 根轴就是在点 M 的公切线(图(b)).
(c)	(c)如果 C_1 和 C_2 不相交, 则束中一切圆都不相交, 根轴也与圆束中一切圆都不相交(图(c)).
	从点 P 作两个圆 C_1 和 C_2 的切线, 具有相等切线长的点 P 的轨迹就是根轴. 两个同心圆的根轴是从公共圆心到无穷远处的直线. 三个圆中每对圆的根轴(共三个)交于一点, 它称为根心. 若三个圆心共线, 则其根心在无穷远处.

［反演］　设 C 为一定圆, O 为圆心, r 为半径(图 7.1), 对平面上任一点 M, 有一点 M' 与它对应, 使得满足下列两个条件:

(i) O, M, M' 共线,

(ii) $OM \cdot OM' = r^2$,

这种点 M' 称为点 M 关于定圆 C 的反演点, C 称为反演圆, O 称为反演中心, r 称为反演半径.

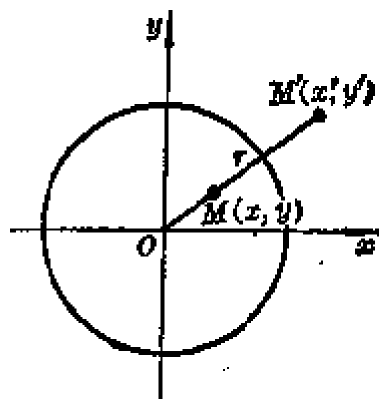


图　7.1

由于 M 和 M' 的关系是对称的, 所以 M 也是 M' 的反演点. 因 $r^2>0$, 所以 M 和 M' 都在 O 的同侧. M 和 M' 之间的对应称为关于定圆 C 的反演.

取 O 为原点, 则一切反演点 $M(x, y)$ 和 $M'(x', y')$ 的对应方程为

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2+y^2}$$

反演具有性质：

1° 不通过反演中心的一条直线变为通过反演中心的一个圆.

2° 通过反演中心的圆变为不通过反演中心的直线.

3° 通过反演中心的一条直线变为它自己.

4° 不通过反演中心的圆变为不通过反演中心的圆.

5° 反演圆变为它自己.

6° 与反演圆正交的圆变为它自己，其逆也真.

7° 如果两条曲线 C_1, C_2 交于一点M，则经过反演后的曲线 C_1', C_2' 必交于M的反演点 M'.

8° 如果两条曲线 C_1, C_2 在一点M相切，则经过反演后的曲线C_1', C_2' 必在M的反演点 M' 相切.

9° 两条曲线的交角在反演下是不变的. 由此可见，反演是一个保角变换.

二、椭圆

1. 椭圆的基本元素

主轴(对称轴)

$$\begin{cases} \text{长　轴}\quad AB = 2a \\ \text{短　轴}\quad CD = 2b \end{cases} \qquad (a>b>0)$$

顶　　点　A, B, C, D

椭圆中心　G

焦　　点　F_1, F_2

焦　　距　$F_1F_2 = 2c$，$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

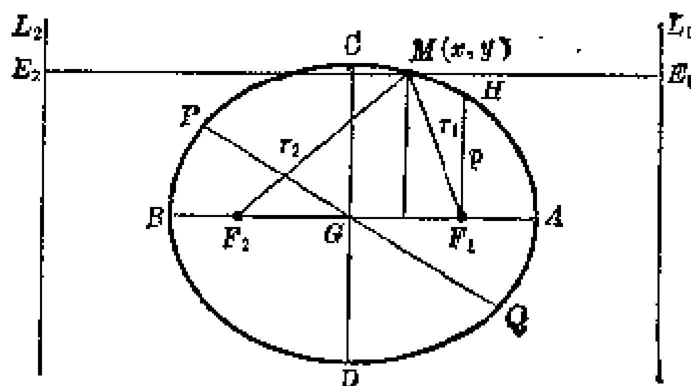


图　7.2

离心率　$e=\frac{c}{a}<1$

压缩系数　$\mu=\frac{b}{a}$，$\mu^2=1-e^2$

焦点参数　$p=\frac{b^2}{a}$　（等于过焦点且垂直于长轴的弦长之半，即 F_1H）

焦点半径　r_1, r_2（椭圆上一点 (x, y) 到焦点的距离）

$$r_1=a-ex,\quad r_2=a+ex$$

直　　径　PQ（通过椭圆中心的弦）

共轭直径　二直径斜率为 k, k'，且满足 $kk'=-\frac{b^2}{a^2}$

准　　线　L_1 和 $L_2\left(\text{平行于短轴，到短轴的距离为}\frac{a}{e}\right)$

2. 椭圆的方程、顶点、中心与焦点

方　程　与　图　形	顶点·中心·焦点
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　（标准方程） 或 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ （参数方程，t 为与 M 点对应的同心圆（半径为 a，b）的半径与 x 轴正方向的夹角）	顶点　$A, B(\pm a, 0)$ 　　　$C, D(0, \pm b)$ 中心　$G(0, 0)$ 焦点　$F_1, F_2(\pm c, 0)$ 　　　$c=\sqrt{a^2-b^2}$
$\frac{(x-g)^2}{a^2}+\frac{(y-h)^2}{b^2}=1$ 或 $\begin{cases}x=g+a\cos t\\ y=h+b\sin t\end{cases}$ （t 同上）	顶点　$A, B(g\pm a, h)$ 　　　$C, D(g, h\pm b)$ 中心　$G(g, h)$ 焦点　$F_1, F_2(g\pm c, h)$ 　　　$c=\sqrt{a^2-b^2}$

方程与图形	顶点·中心·焦点
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b>0)$	顶点 $A,B(0,\pm a)$ $C,D(\pm b,0)$ 中心 $G(0,0)$ 焦点 $F_1,F_2(0,\pm c)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$
$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$, $e<1$ (极坐标方程, 极点位于椭圆一焦点上, 极轴为从焦点指向最近一个顶点的射线, φ为极角, p, e如前述)	长轴 $2a=\frac{2p}{1-e^2}$ 短轴 $2b=\frac{2p}{\sqrt{1-e^2}}$ 焦距 $2c=\frac{2pe}{1-e^2}$

3. 椭圆的性质

1° 椭圆是到两定点(即焦点)的距离之和为常数(即长轴)的动点M的轨迹$(r_1+r_2=2a)$.

2° 椭圆也是到一定点(即焦点之一)的距离与到一定直线(即一准线L)的距离之比为小于1的常数(即离心率)的动点M的轨迹$(MF_1/ME_1=MF_2/ME_2=e)$.

3° 椭圆是将半径为a的圆沿y轴方向按比$\mu=\frac{b}{a}$(即压缩系数)压缩而得到.

4° 椭圆上一点$M(x_0,y_0)$的切线(MT)方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

切线把点M的两焦点半径间的外角(即$\angle F_1MH$)平分$\Big($即$\alpha=\beta$, $\operatorname{tg}\alpha=$

$\mathrm{tg}\beta=\frac{b^2}{cy_0}\Big)$，$M$点的法线$MN$把内角（即$\angle F_1MF_2$）平分(图 7.3)．

如果椭圆的切线(MT)的斜率为k，则其方程为

$$y=kx\pm\sqrt{k^2a^2+b^2}$$

式中正负号表示直径两端点的两切线．

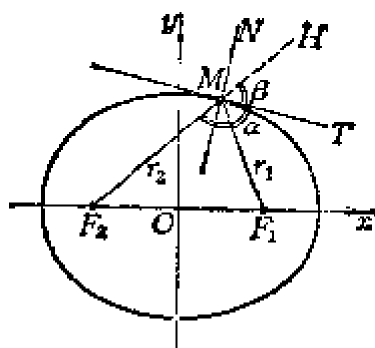


图 7.3

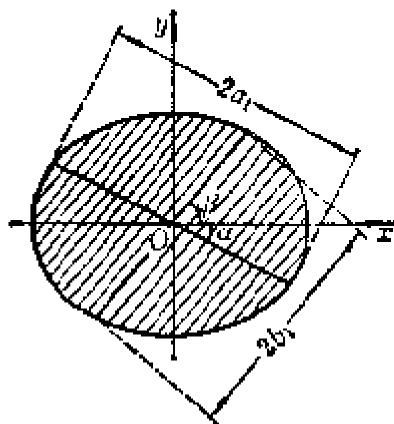


图 7.4

5° 椭圆的任一直径把平行于其共轭直径的弦平分(图 7.4)．

如果两共轭直径的长分别为$2a_1$和$2b_1$，两直径与长轴的夹角(锐角)分别为α和β，则

$$a_1b_1\sin(\alpha+\beta)=ab$$

$$a_1^2+b_1^2=a^2+b^2$$

6° 椭圆上任一点M的焦点半径之积等于它的对应半共轭直径的平方．

7° 设MM'，NN'为椭圆的两共轭直径，通过M，M'分别作直线平行于NN'；又通过N，N'分别作直线平行于MM'，则这四条直线构成的平行四边形的面积为一常数$4ab$(图 7.5)．

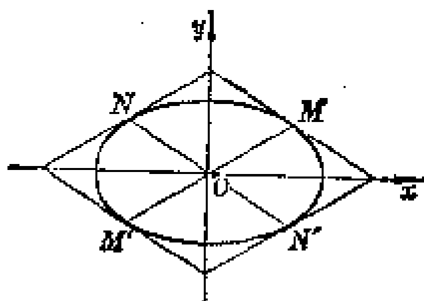
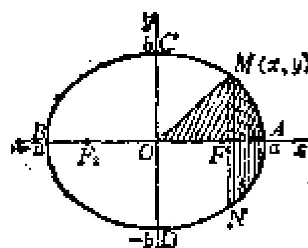


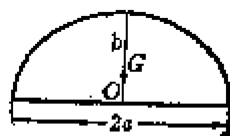
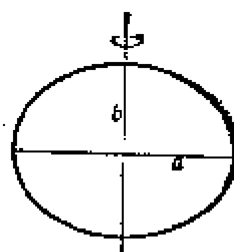
图 7.5

4. 椭圆各量计算公式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



椭圆各量	计　算　公　式
[曲率半径] R	$R=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab}=\frac{p}{\sin^3\alpha}$ 式中 r_1, r_2 为焦点半径, p 为焦点参数, α 为点 $M(x,y)$ 的焦点半径与切线的夹角. 特别, 顶点的曲率半径 $R_A=R_B=p=\frac{b^2}{a},\quad R_C=R_D=\frac{a^2}{b}$
[弧长] $L_{\widehat{AM}}$	$L_{\widehat{AM}}=a\int_0^{\arccos\frac{x}{a}}\sqrt{1-e^2\cos^2t}\,dt=a\int_{\arcsin\frac{x}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2t}\,dt$ 式中 e 为离心率
[周长] L	$L=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2t}\,dt=4aE\left(e,\frac{\pi}{2}\right)$ 式中 $E\left(e,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2e^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{e^6}{5}-\cdots\right]$ 设 $\lambda=\frac{a-b}{a+b}$, 则 $L=\pi(a+b)\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{64}+\frac{\lambda^6}{256}+\frac{25\lambda^8}{16384}+\cdots\right)$ $L\approx\pi[1.5(a+b)-\sqrt{ab}]$ 或 $L\approx\pi(a+b)\frac{64-3\lambda^4}{64-16\lambda^2}$
[面积] S	扇形(OAM)面积　$S_{OAM}=\frac{1}{2}ab\arccos\frac{x}{a}$ 弓形(MAN)面积　$S_{MAN}=ab\arccos\frac{x}{a}-xy$ 椭 圆 面 积　$S=\pi ab$

椭圆各量	计　算　公　式
[几何重心] G	椭圆形　G与O重合 半椭圆形　$GO=\frac{4}{3\pi}b$ (a,b为椭圆的半轴长) 
[转动惯量] J	椭圆的转轴通过b轴 $J=\frac{a^2}{4}m$ 式中m为质量 

三、双曲线

1. 双曲线的基本元素

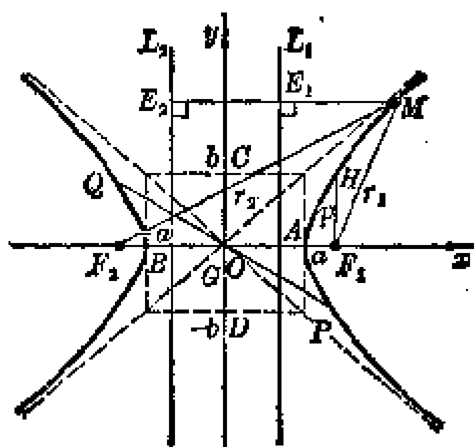


图 7.6

主轴(对称轴)

$\begin{cases}\text{实　轴}\quad AB=2a & (a>0)\\ \text{虚　轴}\quad CD=2b & (b>0)\end{cases}$

顶　　点　A,B

中　　心　G

焦　　点　F_1, F_2

焦　　距　$F_1F_2=2c$,　$c=\sqrt{a^2+b^2}$

离 心 率　$e=\frac{c}{a}>1$

焦点参数　$p=\frac{b^2}{a}$　（等于过焦点且垂直于实轴的弦长之半，即F_1H）

焦点半径　r_1,r_2　（双曲线上一点(x,y)到焦点的距离，即MF_1,MF_2）

$r_1=\pm(ex-a)$, $r_2=\pm(ex+a)$

直　　径　PQ(通过中心的弦)

共轭直径　二直径斜率为k,k'，且满足$kk'=\frac{b^2}{a^2}$

准　　线　L_1和L_2　$\left(\text{垂直于实轴，到中心的距离为}\frac{a}{e}\right)$

3. 双曲线的方程、顶点、中心、焦点与渐近线

方程与图形	顶点·中心·焦点·渐近线
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（标准方程） 或 $\begin{cases}x=a\operatorname{ch}t\\y=b\operatorname{sh}t\end{cases}$（参数方程） 或 $\begin{cases}x=a\sec t\\y=b\operatorname{tg}t\end{cases}$	顶　点 $A,B(\pm a,0)$ 中　心 $G(0,0)$ 焦　点 $F_1,F_2(\pm c,0)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$
$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （与$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$成共轭双曲线）	顶　点 $C,D(0,\pm b)$ 中　心 $G(0,0)$ 焦　点 $F_1,F_2(0,\pm c)$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$
$\frac{(x-g)^2}{a^2}-\frac{(y-h)^2}{b^2}=1$	顶　点 $A,B(g\pm a,h)$ 中　心 $G(g,h)$ 焦　点 $F_1,F_2(g\pm c,h)$ 渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}(x-g)+h$
$\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi}$，$e>1$ （极坐标方程．极点位于一焦点上，极轴为从焦点背向顶点的射线，p,e如前述．由此方程只能确定一支，另一支可由对称性而得到）	实　轴 $2a=\frac{2p}{e^2-1}$ 虚　轴 $2b=\frac{2p}{\sqrt{e^2-1}}$ 焦　距 $2c=\frac{2pe}{e^2-1}$

方 程 与 图 形	顶点·中心·焦点·渐近线
$y=\frac{k}{x}$ (等轴双曲线)	顶　点 A,B $(\pm\sqrt{\vert k\vert},\pm\sqrt{\vert k\vert})$ 中　心 $G(0,0)$ 焦　点 F_1,F_2 $(\pm2\sqrt{\vert k\vert},\pm2\sqrt{\vert k\vert})$ (当 $k>0$ 时取同号, $k<0$ 时取异号) 轴　长 $AB=2\sqrt{2\vert k\vert}$ 渐近线 $x=0,y=0$
$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (等轴双曲线) $D=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$	顶　点 A,B $\left(-\frac{d\pm\sqrt{\vert D\vert}}{c},\frac{a\pm\sqrt{\vert D\vert}}{c}\right)$ (当 $D<0$ 时取同号, $D>0$时取异号) 中　心 $G\left(-\frac{d}{c},\ \frac{a}{c}\right)$ 轴　长 $AB=\frac{2\sqrt{2\vert D\vert}}{\vert c\vert}$ 渐近线 $x=-\frac{d}{c},y=\frac{a}{c}$

8. 双曲线的性质

1° 双曲线是到两定点(焦点)的距离之差为常数(等于实轴 $2a$)的动点 M 的轨迹(使 $r_1-r_2=2a$ 的各点属于双曲线的一支, 而使 $r_2-r_1=2a$ 的各点属于其另一支).

2° 双曲线也是到一定点(焦点之一)的距离与到一定直线(准线 L_1)的距离之比为大于 1 的常数(即离心率)的动点M的轨迹 ($MF_1/ME_1=MF_2/ME_2=e$).

3° 双曲线上一点$M(x_0,y_0)$的切线(MT)的方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$$

它把M点两焦点半径间的内角（即$\angle F_1MF_2$）平分$\left(\text{即 } \alpha=\beta,\ \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta=\frac{b^2}{cy_0}\right)$，而$M$点的法线$MN$把外角（即$\angle F'_1MH$）平分（图 7.7）．

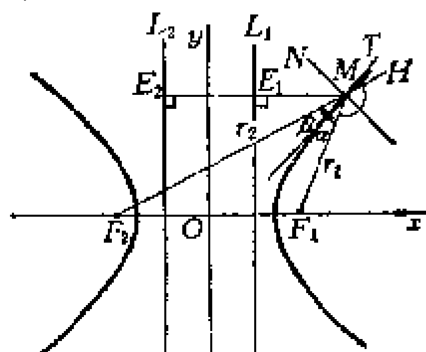


图　7.7

如果双曲线的切线的斜率为k，则其切线的方程为

$$y=kx\pm\sqrt{k^2a^2-b^2}$$

式中正负号表示在直径两端点的两切线．

4°　两条渐近线$y=\pm\frac{b}{a}x$之间的切线线段TT_1被切点M平分（$TM=MT_1$），且

$\triangle OTT_1$的面积$S_{OTT_1}=ab$，

平行四边形$OJMI$的面积（图 7.8 的阴影部分）

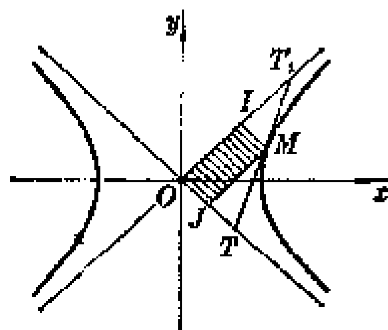


图　7.8

$$S_{OJMI}=\frac{c^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{4}$$

5°　双曲线的任一直径把平行于共轭直径的弦平分（图 7.9）．

如果两共轭直径的长分别为$2a_1$，$2b_1$，两直径与实轴夹角（锐角）分别为α和β（$\alpha<\beta$），则

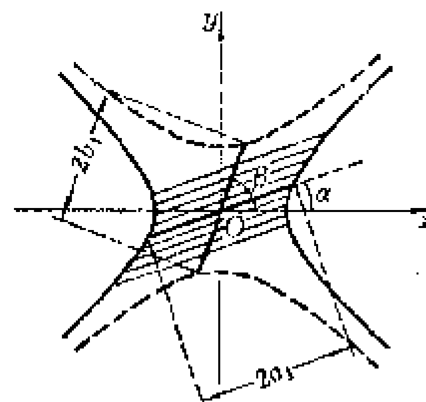


图　7.9

$$a_1b_1\sin(\beta-\alpha)=ab$$

$$a_1^2-b_1^2=a^2-b^2$$

6°　双曲线上任一点M的焦点半径之积等于它的对应半共轭直径的平方．

7°　设MM'，NN'为双曲线的两共轭直径，通过M，M'分别作直线平行于NN'；又通过N，N'分别作直线平行于MM'，则这四条直线构成的平行四边形的面积为一常数$4ab$（图 7.10）．

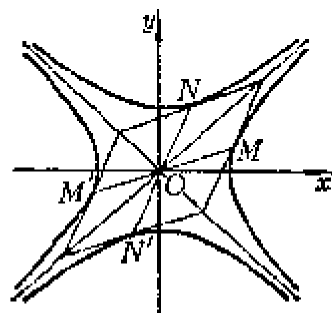
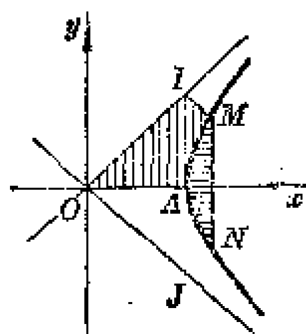


图　7.10

4. 双曲线各量计算公式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



双曲线各量	计　算　公　式
[曲率半径] R	$R=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab}=\frac{p}{\sin^3\alpha}$ 式中 r_1,r_2 为焦点半径，p 为焦点参数，α 为点 $M(x,y)$ 的焦点半径与切线的夹角，特别，顶点 A,B 的曲率半径 $R_A=R_B=p=\frac{b^2}{a}$
[弧长] $L_{\widehat{AM}}$	$L_{\widehat{AM}}=a\int_0^{\mathrm{Ar\ ch}\frac{x}{a}}\sqrt{1+e^2\mathrm{ch}^2t}\,dt$ 式中 e 为离心率
[面积] S	弓形(AMN)的面积： $S_{AMN}=xy-ab\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=xy-ab\,\mathrm{Ar\ ch}\frac{x}{a}$ $OAMI$ 的面积：$S_{OAMI}=\frac{ab}{4}+\frac{ab}{2}\ln\frac{2OI}{c}$ 这里 OI,OJ 为渐近线，$MI\parallel OJ$

四、抛物线

1. 抛物线的基本元素

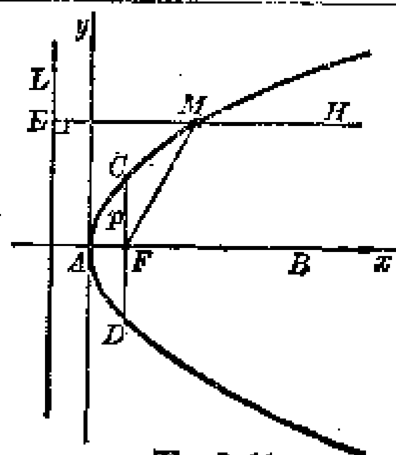


图　7.11

抛物线的主轴　AB

顶　　点　A

焦　　点　F

焦点参数　p（等于过焦点且垂直于轴的弦 CD 之长的一半）

焦点半径　MF（抛物线上一点到焦点

的距离)

直　　径　EMH(平行于抛物线的轴的直线)

准　　线　L(与抛物线的轴垂直，到顶点A的距离等于$\frac{p}{2}$，到焦点F的距离等于p)

2. 抛物线的方程、顶点、焦点与准线

方程与图形	顶点·焦点·准线
$y^2=2px$ （标准方程）或 $\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi}$ (极坐标方程．极点位于焦点F上，极轴与抛物线的轴重合，背向顶点)	顶点 $A(0,0)$ 焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 准线 $L\left(x=-\frac{p}{2}\right)$
$y^2=-2px$	顶点 $A(0,0)$ 焦点 $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$ 准线 $L\left(x=\frac{p}{2}\right)$
$x^2=2py$	顶点 $A(0,0)$ 焦点 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ 准线 $L\left(y=-\frac{p}{2}\right)$
$x^2=-2py$	顶点 $A(0,0)$ 焦点 $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ 准线 $L\left(y=\frac{p}{2}\right)$

方　程　与　图　形	顶点·焦点·准线
$(y-h)^2=2p(x-g)$	顶点　$A(g,h)$ 焦点　$F\left(g+\frac{p}{2},h\right)$ 准线　$L\left(x=g-\frac{p}{2}\right)$
$(x-g)^2=2p(y-h)$	顶点　$A(g,h)$ 焦点　$F\left(g,h+\frac{p}{2}\right)$ 准线　$L\left(y=h-\frac{p}{2}\right)$
$y=ax^2+bx+c$	顶点 $A\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ （当 $a>0$ 时，开口向上， 当 $a<0$ 时，开口向下） 焦点参数　$p=\frac{1}{2\|a\|}$ 与 x 轴的交点 A_1,A_2 $\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$　$(a>0)$ 或 $\begin{cases}x=a\cos^4t\\y=a\sin^4t\end{cases}$　$(a>0)$	顶　　点 $A\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$ 焦点参数 $p=\frac{a}{\sqrt{2}}$

3. 抛物线的性质

1° 抛物线是到一定点 F(焦点)的距离与到一定直线 L(准线)的距离相等的动点M的轨迹($MF=ME$)(图 7.12)。

2° 抛物线上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线 MT 的方程为

$$y=\frac{p}{y_0}(x+x_0)$$

它把 M 点的焦点半径与直径的夹角($\angle FMG$)平分($\angle FMT=\angle TMG$)，并且一切与切线 MT 平行的弦被过 M 点的直径平分($PI=IQ$)。

如果抛物线的切线的斜率为 k，则其切线的方程为

$$y=kx+\frac{p}{2k}$$

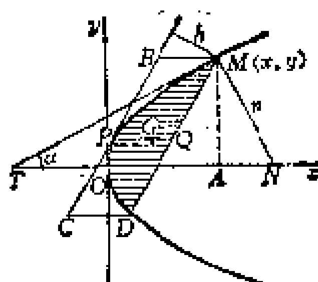
图 7.12

3° 抛物线的任两切线的夹角等于两切点的焦点半径的夹角的一半。

4° 从焦点F作抛物线在点M的切线的垂线，则垂足的轨迹为在顶点的切线。

4. 抛物线各量计算公式

$y^2=2px$



抛物线各量	计　算　公　式
[曲率半径] R	$R=\frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}=\frac{p}{\sin^3\alpha}=\frac{n^3}{p^2}$ 式中 α 为点 $M(x,y)$的切线与主轴的夹角，n 为法线 MN 之长。特别，顶点的曲率半径 $R_0=p$

抛物线各量	计 算 公 式
[弧长] $L_{\widehat{OM}}$	$L_{\widehat{OM}}=\sqrt{x\left(x+\frac{p}{2}\right)}+\frac{p}{2}\mathrm{Ar\,sh}\sqrt{\frac{2x}{p}}$ $=\frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)}+\ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}}+\sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right]$
[面积] S	弓形 (MOD) 的面积$=\frac{2}{3}\times$平行四边形 $(MBCD)$ 的面积 即 $S_{MOD}=\frac{2}{3}MD\cdot h$ 这里 MD 为弓形弦长，CD平行于主轴，BC 与抛物线相切，h 为该平行四边形的高(即弓形拱高)．特别，$S_{OMA}=\frac{2}{3}xy$
[几何重心] G	弓形(MOD)的重心 $GQ=\frac{2}{5}PQ$ (BC 平行于 MD，P为切点，PQ 平行于 Ox)

五、一般二次曲线

1．二次曲线的一般性质

上面所列举的椭圆、双曲线、抛物线等，它们的方程关于 x,y 都是二次的，关于 x,y 的一般二次方程的形式是

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

它所表示的曲线称为一般二次曲线．这里列举它们的一些共同性质．

[直线与二次曲线的交点] 一直线与一个二次曲线交于两点(实的，虚的，重合的)．

[二次曲线的直径与中心] 一个二次曲线的平行于已知方向的弦的中点在一直线上，称它为二次曲线的直径，它平分某一组弦．设已知方向的方向数为 α，β，则直径的方程为

$$(a\alpha+b\beta)x+(b\alpha+c\beta)y+d\alpha+e\beta=0$$

或改写为

$$(ax+by+d)\alpha+(bx+cy+e)\beta=0$$

由此可见，二次曲线的直径组成一个直线束．束内任一直径通过下列两直线

交点：

$$ax+by+d=0,\quad bx+cy+e=0$$

1° $\frac{a}{b}\neq\frac{b}{c}$，即 $ac-b^2\neq 0$.

这时二次曲线的一切直径通过同一点，称为中心，这种曲线称为有心二次曲线，中心的坐标为

$$x_0=\frac{be-cd}{ac-b^2},\quad y_0=\frac{ae-bd}{ac-b^2}$$

2° $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，即 $ac-b^2=0$：

(i) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\neq\frac{d}{e}$，这时曲线无中心；

(ii) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{d}{e}$，这时曲线有无限个中心，即中心在同一直线上（中心直线）.

这两种曲线称为无心二次曲线.

[二次曲线的主轴(或对称轴)] 如果直径垂直于被它所平分的弦，则称它为二次曲线的主轴(对称轴)，无心二次曲线有一条实的主轴；有心二次曲线有两条实的主轴，它们是互相垂直的，交点就是中心.

[二次曲线的切线与法线]

二次曲线上一点 $M(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$$ax_0x+cy_0y+b(x_0y+y_0x)+d(x+x_0)+e(y+y_0)+f=0$$

在点 M 与二次曲线的切线垂直的直线称为在点 M 的法线，它的方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0+by_0+d}=\frac{y-y_0}{bx_0+cy_0+e}$$

2. 二次曲线的不变量

由一般二次曲线的方程

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \tag{1}$$

的系数所组成的下列三个函数：

$$D=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=ac-b^2,\quad S=a+c$$

称为二次曲线的不变量，即经过坐标变换后，这些量是不变的. 行列式 D 称为二次方程(1)的判别式.

3. 二次曲线的标准方程与形状

不变量			坐标变换后的标准方程	曲线形状
$\delta\neq0$ 有心二次曲线	$\delta>0$	$D\neq0$	$AX^2+CY^2+\frac{D}{\delta}=0$ 式中 $A=\frac{1}{2}\left[a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}\right]$ $C=\frac{1}{2}\left[a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}\right]$ A,C是特征方程 $u^2-Su+\delta=0$ 的两特征根	$D\cdot S<0$ 时为椭圆 $D\cdot S>0$ 时为虚椭圆
		$D=0$		有一公共实点的一对虚直线
	$\delta<0$	$D\neq0$		双曲线
		$D=0$		相交两直线
$\delta=0$ 无心二次曲线		$D\neq0$	$Y^2=2pX$ 式中 $p=\frac{ae-bd}{(a+c)\sqrt{a^2+b^2}}$	抛物线
		$D=0$	$(a+c)Y^2+2\frac{ad+be}{\sqrt{a^2+b^2}}Y+f=0$	$d^2-af>0$ 时为平行两直线， $d^2-af=0$ 时为重合二直线， $d^2-af<0$ 时为一对虚直线

4. 二次曲线 $y^2=ax^2+bx+c$ 的几种情况

a	图形	顶点·中心·焦点参数
$a=0$ 抛物线		顶点 $A\left(-\frac{c}{b},0\right)$ 焦点参数 $p=\frac{b}{2}$

a	图　形	顶点·中心·焦点参数
$a<0$ 椭圆		顶点 $A,B\left(\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},0\right)$ $C,D\left(-\frac{b}{2a},\pm\sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}\right)$ 其中 $\Delta=b^2-4ac$ 中心 $G\left(-\frac{b}{2a},0\right)$
$a>0$ 双曲线		

5. 圆锥截线

二次曲线都是用平面切割正圆锥面的截线. 因此二次曲线也称为圆锥截线(图7.13).

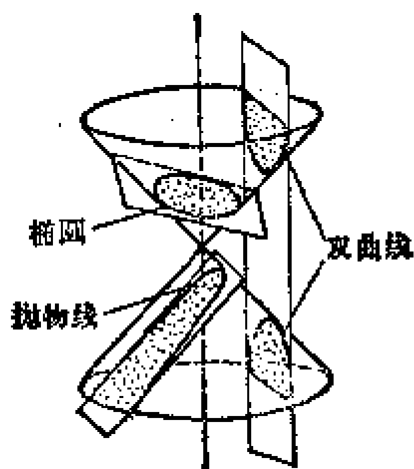


图　7.13

用一平面P切割正圆锥时, 若P不通过锥顶,且不平行于任一母线,则截线为椭圆; 若P不通过锥顶,而平行于一条母线时,截线为抛物线; 若P不通过锥顶,而平行于两条母线时,截线为双曲线; 若P垂直于锥轴,截线为圆.

若P通过锥顶,则椭圆变为一点,双曲线变为一对相交直线, 抛物线变为P与圆锥相切的一直线.

§6　二次曲面

一、球面

［球面的方程、球心与半径］

方程与图形	球心与半径
$x^2+y^2+z^2=R^2$ 或 $\begin{cases}x=R\sin\theta\cos\varphi\\y=R\sin\theta\sin\varphi\\z=R\cos\theta\end{cases}$ （球面坐标方程，式中 φ 为经度，θ 为余纬度）	球心　$G(0,0,0)$ 半径　R
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 或 $\begin{cases}x=a+R\sin\theta\cos\varphi\\y=b+R\sin\theta\sin\varphi\\z=c+R\cos\theta\end{cases}$ （球面坐标方程，式中 φ,θ 同上）	球心　$G(a,b,c)$ 半径　R
$x^2+y^2+z^2+2px+2qy+2rz+d=0$，$p^2+q^2+r^2>d$	球心　$G(-p,-q,-r)$ 半径　$\sqrt{p^2+q^2+r^2-d}$

[球面的切面与法线]　设一平面P通过球面上一点M且垂直于半径GM，则称P为球面在点M的切面。直线MG称为球面在点M的法线。

设球面方程为

$$x^2+y^2+z^2+2px+2qy+2rz+d=0$$

则球面在点$M(x_0,y_0,z_0)$的切面方程为

$$x_0x+y_0y+z_0z+p(x+x_0)+q(y+y_0)+r(z+z_0)+d=0$$

球面在点$M(x_0,y_0,z_0)$的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0+p}=\frac{y-y_0}{y_0+q}=\frac{z-z_0}{z_0+r}$$

[两个球面的交角]　设两个球面

$$S_1\quad x^2+y^2+z^2+2p_1x+2q_1y+2r_1z+d_1=0 \tag{1}$$

$$S_2\quad x^2+y^2+z^2+2p_2x+2q_2y+2r_2z+d_2=0$$

两个球面的交角是指它们在交点的两个切面的夹角，记作θ，则

$$\cos\theta=\frac{2p_1p_2+2q_1q_2+2r_1r_2-d_1-d_2}{2\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2-d_1}\ \sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2-d_2}}$$

因公式中不包含交点的坐标，所以在两个球面的交线上的各点的交角必相等。

两个球面的正交条件为

$$2p_1p_2+2q_1q_2+2r_1r_2-d_1-d_2=0$$

[球面束·两个球面的根面]　设

$$S_\lambda\quad S_1+\lambda S_2=0$$

式中S_1和S_2如(1)式定义，λ为参数，则有

$$(1+\lambda)(x^2+y^2+z^2)+2(p_1+\lambda p_2)x+2(q_1+\lambda q_2)y+2(r_1+\lambda r_2)z+(d_1+\lambda d_2)=0$$

对$\lambda(\lambda\neq-1)$的一个确定值，S_λ表示一个球面，当λ取一切值$(\lambda\neq-1)$时，S_λ所表示的球面的全体称为球面束。$\lambda=-1$时为一平面，称为两个球面S_1,S_2的根面，其方程为

$$2(p_1-p_2)x+2(q_1-q_2)y+2(r_1-r_2)z+(d_1-d_2)=0$$

根面与S_1和S_2的连心线垂直，束中任一球面S_λ的中心在连心线上，且分连心线的比为λ。

[球面汇·三个球面的根轴]　设S_1和S_2如(1)式定义，又设

$$S_3\quad x^2+y^2+z^2+2p_3x+2q_3y+2r_3z+d_3=0$$

设

$$S_{\lambda\mu}\quad S_1+\lambda S_2+\mu S_3=0$$

式中 λ,μ 为二独立参数，则有

$$(1+\lambda+\mu)(x^2+y^2+z^2)+2(p_1+\lambda p_2+\mu p_3)x$$
$$+2(q_1+\lambda q_2+\mu q_3)y+2(r_1+\lambda r_2+\mu r_3)z$$
$$+(d_1+\lambda d_2+\mu d_3)=0$$

对 $\lambda,\mu(\lambda+\mu\neq-1)$ 的一对确定值，$S_{\lambda\mu}$ 表示一个球面，当 λ,μ 取一切值 $(\lambda+\mu\neq-1)$ 时，$S_{\lambda\mu}$ 所表示的球面的全体称为球面汇。

三个球面中每对球面的根面分别为

$$S_1-S_2=0,\quad S_2-S_3=0 \text{ 和 } S_3-S_1=0$$

这三个平面交于一条直线，称为 S_1,S_2,S_3 的根轴。

二、椭球面

方程与图形	基本元素	特　征
[椭球面] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a\geqslant b\geqslant c)$ 当 $a=b$ 时为旋转椭球面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (在 Ozx 平面上的曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而得到) 当 $a=b=c$ 时为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$	顶点 $\begin{cases}A,A'(\pm a,0,0)\\B,B'(0,\pm b,0)\\C,C'(0,0,\pm c)\end{cases}$ 主轴 $\begin{cases}\text{长轴}\quad AA'=2a\\\text{中轴}\quad BB'=2b\\\text{短轴}\quad CC'=2c\end{cases}$ 主平面及其方程: Oxy 平面　$z=0$ Oyz 平面　$x=0$ Ozx 平面　$y=0$ 主轴的方程: AA'　$y=z=0$ BB'　$z=x=0$ CC'　$x=y=0$ 中　心　$O(0,0,0)$ 直径平面　通过中心的平面	任一平面与椭球面的交线为一椭圆（特殊情况下为一圆）。 平行于一已知方向 $\boldsymbol{d}$ 的一组弦的中点在一个平面上，该平面是一直径平面，它共轭于方向 $\boldsymbol{d}$。 三个主平面是分别共轭于主轴的直径平面。 椭球体的体积: $V=\frac{4}{3}\pi abc$ $\approx 4.1888\,abc$

三、双曲面

方程与图形	基本元素	特　征
[单叶双曲面] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	主轴 $\begin{cases}\text{实长轴} & 2a\\ \text{实短轴} & 2b\\ \text{虚　轴} & 2c\end{cases}$ 中心　$O(0,0,0)$ 主平面及其方程: Oxy 平面　$z=0$ Oyz 平面　$x=0$ Ozx 平面　$y=0$	平行于 z 轴的平面与双曲面的交线都是双曲线(对于单叶双曲面,可能是一对相交直线). 平行于 Oxy 平面的平面与双曲面的交线都是椭圆. 单叶双曲面上有两族直母线,它们的方程是 $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ 1-\frac{y}{b}=\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\end{cases}$ (λ 为参数) 与 $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ 1+\frac{y}{b}=\mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\end{cases}$ (μ 为参数)
[双叶双曲面] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 当 $a=b$ 时,为 [旋转双曲面] (在 Oxz 平面上的曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$ 绕 z 轴旋转而得到)		

四、抛物面

方程与图形	基本元素	特　征
[椭圆抛物面] $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	顶点　$O(0,0,0)$ 主轴　z 轴 主平面及其方程: Oyz 平面　$x=0$ Ozx 平面　$y=0$	椭圆抛物面与平行于 z 轴的平面的交线是抛物线；与平行于 Oxy 的平面的交线都是椭圆. 体积　$V=\frac{1}{2}\pi abh^2$
当 $a=b$ 时，为旋转抛物面　$z=\frac{x^2+y^2}{a^2}$ （在 Ozx 平面上的曲线 $z=\frac{x^2}{a^2}$ 绕 z 轴旋转而得到）		体积　$V=\frac{1}{2}\pi a^2h^2$
[双曲抛物面] $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$		双曲抛物面与平行于 Oyz 的平面（或平行于 Ozx 的平面）的交线是抛物线，与平行于 Oxy 的平面的交线是双曲线. 双曲抛物面的形状呈马鞍形，所以也称为马鞍面. 双曲抛物面上有两族直母线，它们的方程是 $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\end{cases}$　（λ 为参数） 与 $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\mu z\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{\mu}\end{cases}$　（μ 为参数）

五、锥面与柱面

方程与图形	基本元素	特　征
[椭圆锥面] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 当 $a=b$ 时，为圆锥面（在 Oxz 平面上的直线 $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$ 绕 z 轴旋转而得到）	主轴　z 轴 顶点　原点 O a,b 为 $z=c$ 的平面与锥面的交线（椭圆）的半轴	椭圆锥面与平行于 Oxy 的平面 $z=h$ 的交线是椭圆 $\begin{cases}\frac{x^2}{\left(\frac{ha}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{hb}{c}\right)^2}=1\\ z=h\end{cases}$ 与 Oxy 平面交于原点 O.
[椭圆柱面] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 当 $a=b$ 时，为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$	准线的方程为 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ 母线的方向数为 $(0,0,1)$	椭圆柱面与任何平行于 Oxy 的平面的交线都是同样的椭圆 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=h\end{cases}$

方程与图形	基本元素	特　征
[双曲柱面] $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	准线的方程为 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ 母线的方向数为 (0,0,1)	
[抛物柱面] $y^2=2px$	准线的方程为 $\begin{cases}y^2=2px\\ y=0\end{cases}$ 母线的方向数为 (0,0,1)	
[渐近锥面] 二次锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 为双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm1$ 的渐近锥面		与双曲线的渐近线类似，通过 z 轴的每个平面与双曲面的交线为一对共轭双曲线，与锥面的交线是两条直线，即这对双曲线的渐近线

六、一般二次曲面

1. 二次曲面的一般性质

上面所列举的椭球面、双曲面、抛物面等，它们的方程关于 x,y,z 都是二次的．关于 x,y,z 的一般二次方程的形式是

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2px+2qy+2rz+d=0$$

它表示的曲面称为一般二次曲面．这里列举这种曲面的一些共同性质．

［直线与二次曲面的交点］　一直线与一个二次曲面交于两点（实的，虚的，重合的），或者这直线全在曲面上．此时称它为二次曲面的直母线或母线．

［平面与二次曲面的交线］　任一平面与一个二次曲面的交线为一个二次曲线．

［二次曲面的直径平面与中心］　一个二次曲面的平行于已知方向的弦的中点在一个平面上，称为直径平面，它平分某一组平行弦．设已知方向的方向数为 l,m,n，则直径平面的方程为

$$(al+hm+gn)x+(hl+bm+fn)y+(gl+fm+cn)z+(pl+qm+rn)=0$$

或改写为

$$(ax+hy+gz+p)l+(hx+by+fz+q)m+(gx+fy+cz+r)n=0$$

当 l,m,n 变动时，这个方程表示一个平面把，由此，二次曲面的直径平面组成一个平面把．把内任一平面都通过下列三个平面的交点：

$$ax+hy+gz+p=0$$

$$hx+by+fz+q=0$$

$$gx+fy+cz+r=0$$

如果交点不在曲面上，则称它为二次曲面的中心，如果交点在曲面上，则称它为二次曲面的顶点．凡有中心的二次曲面称为有心二次曲面，其余的都称为无心二次曲面．

［二次曲面的主平面与主轴］　如果直径平面垂直于被它所平分的弦，则称为主平面（对称平面），每个二次曲面至少有一个实主平面，非旋转二次曲面的任两主平面是互相垂直的，它们的交线为主轴．

［二次曲面的切面与法线］　二次曲面在一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切面的方程为

$$ax_0x+by_0y+cz_0z+f(y_0z+z_0y)+g(z_0x+x_0z)$$
$$+h(x_0y+y_0x)+p(x+x_0)+q(y+y_0)+r(z+z_0)+d=0$$

在点 M 与二次曲面的切面垂直的直线称为曲面在点 M 的法线，它的方程可

写为

$$\frac{x-x_0}{ax_0+hy_0+gz_0+p}=\frac{y-y_0}{hx_0+by_0+fz_0+q}=\frac{z-z_0}{gx_0+fy_0+cz_0+r}$$

[二次曲面的圆截面] 如果一个平面与一个二次曲面的交线为一个圆，则称该平面为曲面的圆截面.

如果二次曲面不是球面，则通过空间中一点，二次曲面有六个圆截面；其中一般有两个实圆截面，四个虚圆截面；而且六个圆截面中有几个是重合的.

2. 二次曲面的不变量

由二次曲面的一般方程

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2px+2qy+2rz+d=0 \tag{1}$$

的系数组成的下列四个函数：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix}, \quad D=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

$$I=a+b+c, \quad J=ab+bc+ca-f^2-g^2-h^2$$

称为二次曲面的不变量，即经过坐标变换后，这些量是不变的. 行列式 Δ 称为二次方程(1)的判别式.

3. 二次曲面的标准方程及形状

<table>
<tr><th colspan="2">不变量</th><th>坐标变换后的方程</th><th>曲线形状</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$D\neq0$
有心二次曲面</td><td>$\Delta>0$</td><td rowspan="3">$Ax^2+By^2+Cz^2+\frac{\Delta}{D}=0$
式中 A,B,C，为特征方程
$u^3-Iu^2+Ju-D=0$
的三个特征根</td><td>A,B,C 异号时为单叶双曲面.
A,B,C 同号时无轨迹</td></tr>
<tr><td>$\Delta<0$</td><td>A,B,C 同号时为椭球面.
A,B,C 异号时为双叶双曲面</td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td>A,B,C 同号时无轨迹.
A,B,C 异号时为二次锥面</td></tr>
</table>

不变量			坐标变换后的方程	曲线形状
$D=0$ 无心二次曲面	$\Delta<0$		$Ax^2+By^2\pm2\sqrt{-\frac{\Delta}{J}}z=0$	椭圆抛物面 （A,B 都是正的时，根号前取负号；A，B 都是负的时，根号前取正号）
	$\Delta>0$			双曲抛物面
	$\Delta=0$	$J\neq0$	$Ax^2+By^2+\delta=0$	$\delta\neq0$：A，B 同号时为椭圆柱面或无轨迹，A，B 异号时为双曲柱面 $\delta=0$：A，B 异号时为一对相交平面． A,B 同号时无轨迹
		$J=0$	$Ax^2+py=0$ $x^2-a^2=0$ $x^2+a^2=0$ $x^2=0$	抛物柱面 一对平行平面 无轨迹 一对重合平面

§ 7　平面曲线

［曲线方程与正方向］

曲线方程的形式	曲线的正向
直角坐标系 隐　式　$F(x,y)=0$ 显　式　$y=f(x)$	x 增加时，曲线上一点运动的方向
参数式　$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=x(s)\\y=y(s)\end{cases}$ （t 为任意参数，s 为曲线的弧长）	t 或 s 增加时，曲线上一点运动的方向
极坐标系 $\rho=\rho(\varphi)$	φ 增加(即逆时针方向)时，曲线上一点运动的方向

[曲线的切线与法线]　当曲线上的点 Q 趋于 M 时，割线 MQ 的极限位置称为曲线在点 M 处的切线，通过点 M 并垂直于切线的直线称为法线．切线的正向就是曲线在切点处的正向，法线的正向就是切线的正向按逆时针方向旋转 $90°$ 而得到的方向．

[曲线的切距、法距、次切距、次法距与切线倾斜度公式]

	直角坐标系	极坐标系
图　形	$y=f(x)$, Q, $M(x_0,y_0)$, α, O, T, P, N, x, y	$\rho=\rho(\varphi)$, N, μ, $M(\rho_0,\varphi_0)$, ρ_0, φ_0, O, x, T
切　距	$MT=\left\lvert\dfrac{y_0}{y_0'}\sqrt{1+y_0'^2}\right\rvert$	$MT=\left\lvert\dfrac{\rho_0}{\rho_0'}\sqrt{\rho_0^2+\rho_0'^2}\right\rvert$
法　距	$MN=\left\lvert y_0\sqrt{1+y_0'^2}\right\rvert$	$MN=\sqrt{\rho_0^2+\rho_0'^2}$
次切距	$PT=\lvert y_0/y_0'\rvert$	$OT=\lvert\rho_0^2/\rho_0'\rvert$
次法距	$PN=\lvert y_0y_0'\rvert$	$ON=\lvert\rho_0'\rvert$
切线倾斜度	$\operatorname{tg}\alpha=y_0'$	$\operatorname{tg}\mu=\rho_0/\rho_0'$

表中 $y_0'=f'(x_0)$，$\rho_0'=\rho'(\varphi_0)$．对于参数式表达的曲线，表中 $y_0'=\dfrac{\dot y(t_0)}{\dot x(t_0)}=\left.\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}=\dfrac{\dot y_0}{\dot x_0}$．

[曲线的切线方程与法线方程]

曲线方程	切线方程(MT)	法线方程(MN)
$F(x,y)=0$	$F'_{x_0}(x-x_0)+F'_{y_0}(y-y_0)=0$	$\dfrac{x-x_0}{F'_{x_0}}=\dfrac{y-y_0}{F'_{y_0}}$
$y=f(x)$	$y-y_0=y_0'(x-x_0)$	$y-y_0=-\dfrac{1}{y_0'}(x-x_0)$
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	$\dfrac{y-y_0}{\dot y_0}=\dfrac{x-x_0}{\dot x_0}$	$\dot x_0(x-x_0)+\dot y_0(y-y_0)=0$
$\rho=\rho(\varphi)$	$\rho=\dfrac{\rho_0^2}{\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)-\rho_0'\sin(\varphi-\varphi_0)}$	$\rho=\dfrac{\rho_0\rho_0'}{\rho_0'\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0\sin(\varphi-\varphi_0)}$

表中 F'_{x_0}, F'_{y_0} 分别表示 $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的值，y'_0, ρ'_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ 同前.

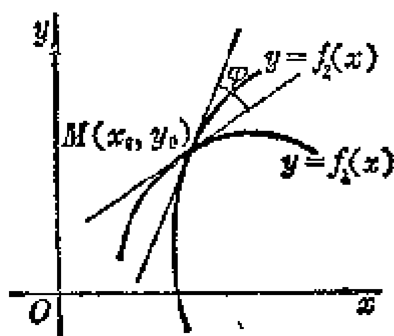


图 7.14

［曲线的夹角］ 两条相交于点 $M_0(x_0, y_0)$ 的曲线 $y=f_1(x)$ 和 $y=f_2(x)$ 在交点的切线斜率分别为 $k_1=f'_1(x_0)$ 和 $k_2=f'_2(x_0)$，其夹角 φ 称为两条曲线的夹角（图 7.14），且

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

［弧的微分］

曲线方程与图形	弧的微分 ds
$y=f(x)$	$\sqrt{1+y'^2}\,dx$
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$
$\rho=\rho(\varphi)$	$\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$

［曲率、曲率半径、曲率圆（或密切圆）与曲率中心的定义］ 曲线上两点 M 和 Q 的切线正向的夹角 δ 与弧长 $\overset{\frown}{MQ}$ 之比，当 Q 趋于 M 时的极限，即

$$k=\lim_{Q\to M}\frac{\delta}{\overset{\frown}{MQ}}=\frac{d\alpha}{ds}$$

称为曲线在点 M 的曲率，也就是切线的方向角对于弧长的转动率. 当 $k>0$ 时，表明曲线凹向朝法线的正向；当 $k<0$ 时，表明曲线凹向朝法线的负向（图 7.15）.

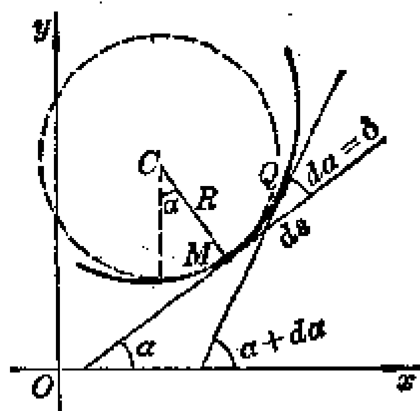


图 7.15

$$R=\frac{1}{k}=\frac{ds}{d\alpha}$$

称为曲线在点 M 的曲率半径. 在曲线凹向的法线上截 $MC=|R|$，则称 C 为曲线在点 M 的曲率中心，以 C 为圆心，R 为半径的圆称为曲线在点 M 的曲率圆，又称为密切圆. C 点的坐标为

$$\begin{cases} x_C = x - R\sin\alpha = x - R\dfrac{dy}{ds} \\ y_C = y + R\cos\alpha = y + R\dfrac{dx}{ds} \end{cases}$$

[曲率半径与曲率中心坐标的计算公式] 设R为曲率半径,(x_C, y_C)为曲率中心的坐标,则有

1° 曲线方程为 $F(x,y)=0$ 时

$$R = \frac{(F_x'^2 + F_y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}$$

$$x_C = x - \frac{F'_x(F_x'^2 + F_y'^2)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}} \qquad y_C = y + \frac{F'_y(F_x'^2 + F_y'^2)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}$$

2° 曲线方程为 $y=f(x)$ 时

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$x_C = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \qquad y_C = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

3° 曲线方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 时

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

$$x_C = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \qquad y_C = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

4° 曲线方程为 $\rho = \rho(\varphi)$ 时

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

$$x_C = \rho\cos\varphi - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)(\rho\cos\varphi + \rho'\sin\varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

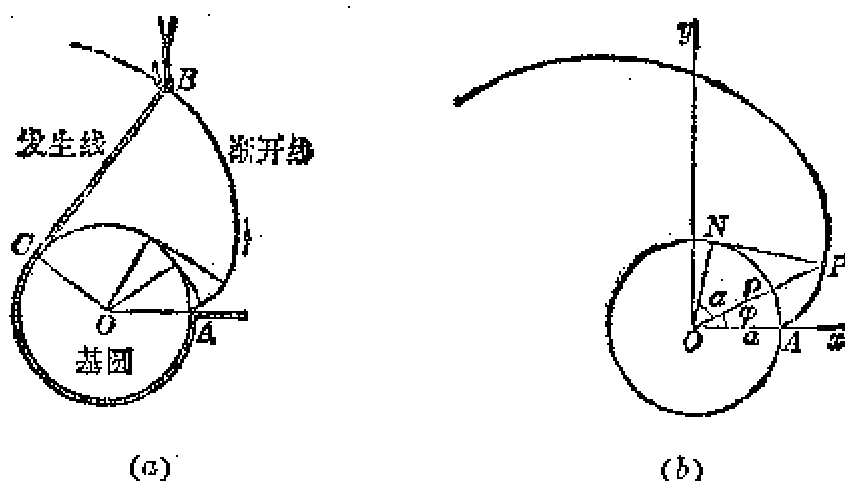
$$y_C = \rho\sin\varphi - \frac{(\rho^2 + \rho'^2)(\rho\sin\varphi - \rho'\cos\varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

[等距线、渐屈线、渐开线与包络线]

定 义 与 图 形	方程与说明（$\Gamma: y=f(x)$）
等距线　曲线Γ上的每点沿Γ在该点法线的一定方向（正负两个方向）移动等距离a得到新的点，这些点的轨迹Γ_1(和Γ_2)称为曲线Γ的等距线	$\Gamma_{1,2}\quad \begin{cases} X=x\pm\dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ Y=y\mp\dfrac{a}{\sqrt{1+y'^2}} \end{cases}\quad (a>0)$ 式中正负号上边对应于Γ_1，下边对应于Γ_2. 这个方程是以x为参数的参数方程. 如果Γ为参数式方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 则有以t为参数的方程 $\Gamma_{1,2}\quad \begin{cases} X=x\pm\dfrac{a\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \\ Y=y\mp\dfrac{a\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \end{cases}\quad (a>0)$
渐屈线　曲线Γ上每点的曲率中心的轨迹C称为曲线Γ的渐屈线，也称为曲线Γ的法包线（即曲线的法线的包络线）	$C\quad \begin{cases} X=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ Y=y+\dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$ 这个方程是以x为参数的参数方程. 其他形式表达的曲线Γ的渐屈线的方程参见曲率中心的公式
渐开线　曲线Γ对它的渐屈线C而言，就是渐开线（或称渐伸线）	设C的方程为 $y=f(x)$，则 $\Gamma\quad Y=Y(x)$ 或

定义与图形	方程与说明 $(\Gamma: y=f(x))$
渐开线的性质 1° 渐开线Γ上任一点的法线与曲线C相切 2° 渐开线上两点M_1, M_2的曲率半径的改变量等于相对应的曲线C的弧长，即$M_2C_2-M_1C_1=\widehat{C_1C_2}$ 3° 渐开线的等距线是和它一样的渐开线，它们仅仅是起点不同	$\begin{cases}X=X(x)\\ Y=Y(x)\end{cases}$ （x为参数） 它是微分方程组 $\begin{cases}X-\dfrac{Y'(1+Y'^2)}{Y''}=x\\ Y+\dfrac{1+Y'^2}{Y''}=f(x)\end{cases}$ 的解，式中$Y'=\dfrac{dY}{dx}$ 其他形式表达的曲线的渐开线方程可由表示曲率中心的坐标的微分方程组而解出
包络线　与曲线族所有曲线都相切的曲线称为该曲线族的包络线	隐式$\begin{cases}F(x,y,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial F(x,y,\lambda)}{\partial\lambda}=0\end{cases}$ （λ为参数） 显式$\begin{cases}y=f(x,\lambda)\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}-\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}=0\end{cases}$ （λ为参数） 参数式$\begin{cases}x=x(t,\lambda)\\ y=y(t,\lambda)\\ \dfrac{\partial y}{\partial t}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}-\dfrac{\partial y}{\partial\lambda}\dfrac{\partial x}{\partial t}=0\end{cases}$ （λ为参数） 消去λ得到不同形式的方程，它们所表示的曲线称为判别曲线，包含包络线与由奇点组成的曲线（例如，曲线族$F(x,y,\lambda)=0$上的点满足$\partial F/\partial x=0, \partial F/\partial y=0$的轨迹为由奇点组成的曲线）。所以若曲线族$F=0$都无奇点，则判别曲线即是包络线

例　在圆盘周围绕上一根不会伸缩的细线，线端栓一支铅笔，拉紧线端A逐渐拉开，铅笔尖在纸上画出来的曲线就是圆的渐开线．这个圆盘称为渐开线的基圆．细线称为渐开线的发生线(图 7.16(a))．



(a)　(b)

图　7.16

现在来寻求渐开线的方程．设基圆的圆心是O，半径是a．开始画时，发生线的外端在A点，取OA为x轴(极轴)，如图 7.16(b)．再设线外端P的坐标为(x, y)或(ρ, φ)，因为发生线原来对着圆心角为$\alpha+\varphi$($\alpha=\angle PON$，在齿轮设计中，通称为压力角)的一段弧$\widehat{NA}$，展开成为切线NP，所以切线NP的长是$a(\alpha+\varphi)$，从直角三角形ONP得：$OP=\frac{a}{\cos\alpha}$，又因$\operatorname{tg}\alpha=\frac{NP}{a}=\alpha+\varphi$，由此得到圆的渐开线的方程

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\alpha}\cos\varphi \\ y=\dfrac{a}{\cos\alpha}\sin\varphi \end{cases}$$

式中α是依赖于极角φ的，这个关系决定于$\varphi=\operatorname{tg}\alpha-\alpha$，把上式写为极坐标方程

$$\begin{cases} \rho=\dfrac{a}{\cos\alpha} \\ \varphi=\operatorname{tg}\alpha-\alpha \end{cases} \quad (\alpha\text{ 单位为弧度})$$

设$t=\alpha+\varphi$，可得直角坐标参数方程

$$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases} \quad (a\text{ 为基圆半径})$$

[置列-弗莱纳公式]

$$\frac{dt}{ds}=\frac{n}{R},\quad \frac{dn}{ds}=-\frac{t}{R}$$

式中 t 和 n 分别为曲线的切线和法线的单位矢量，s 为弧长，R 为曲率半径.

[基本定理与自然方程] 在闭区间 $[a,b]$ 上给定一个连续函数 $k(s)$，则除了在平面上的位置差别外，唯一地存在一条平面曲线，以 s 为弧长，$k(s)$ 为曲率.

$k=k(s)$ 称为曲线的自然方程.

[两条平面曲线构成 n 阶接触的概念与条件]

设两条曲线 C_1 和 C_2 有一共同点 O，在 C_2 上取一点 M，从 M 到 C_1 的距离设为 h，以 d 表示 M 到 O 的距离(图 7.17)，如果

$$\frac{h}{d^n}\to 0\ (M\to O)$$

则称两条曲线 C_1 与 C_2 在点 O 构成 n 阶接触.

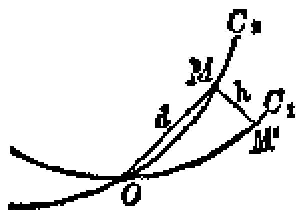


图 7.17

检验两条平面曲线构成 n 阶接触的准则:

1° 设曲线 C_1 的方程为 $F(x,y)=0$，曲线 C_2 的方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，并设在点 $t=t_0$ (即 $O(x_0,y_0)$)处 $F_x'^2+F_y'^2\neq 0$，$\dot{x}^2(t_0)+\dot{y}^2(t_0)\neq 0$，则两条曲线 C_1 与 C_2 在点 O 构成 n 阶接触的充分必要条件是:

$$\varphi(t_0)=\varphi'(t_0)=\cdots=\varphi^{(n)}(t_0)=0$$

式中 $\varphi(t)\equiv F[x(t),y(t)]$，$\varphi^{(n)}$ 表示 $\varphi(t)$ 的 n 阶导数.

从此还可推出下面的检验准则:

2° 假定 C_1: $F(x,y)=0$ 是一条代数曲线 (即 $F(x,y)$ 是关于 x 和 y 的多项式)，C_2 在原点(0,0)的展开式为

$$y=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

则 C_1 与 C_2 在原点构成 n 阶接触的充分必要条件是: 把 C_2 的展开式代进 $F(x,y)=0$ 后，关于 x 的乘幂 $x,x^2,\cdots,x^n$ 的系数都等于零.

§8 重要平面曲线表

〔三次曲线〕

方程与图形	特征
$y=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$ $(a>0,b>0,c>0)$ $(a>0,b<0,c>0)$ $(a>0,b>0,c<0)$ $(a>0,b<0,c<0)$	曲线由两支组成. 渐近线 $y=a$ 与 $x=0$ 曲线与$y=a$的交点 $A\left(-\dfrac{c}{b},a\right)$ 曲线与x轴的交点 $B,C\left(\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$ 极值点 $D\left(-\dfrac{2c}{b},a-\dfrac{b^2}{4c}\right)$ 拐点 $E\left(-\dfrac{3c}{b},a-\dfrac{2b^2}{9c}\right)$
$y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ $(\Delta=b^2-4ac)$ $(a>0,b<0,\Delta>0)$ (a) $(a>0,b<0,\Delta=0)$ (b)	(a) 不连续点 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ 极大点 $A\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{4a}{\Delta}\right)$ 渐近线 $y=0$ 与 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ (b) 不连续点 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 渐近线 $y=0$ 与 $x=-\dfrac{b}{2a}$

方 程 与 图 形	特 征
$(a>0,\ b<0,\ \Delta<0)$ (c) 这些曲线都是关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称的	(c) 极大点 $A\left(-\frac{b}{2a},-\frac{4a}{\Delta}\right)$ 拐 点 $B,\ C\left(-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a\sqrt{3}},-\frac{3a}{\Delta}\right)$ 在这两点的切线斜率分别为 $\mp a^2\left(\frac{3}{-\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$ 渐近线 $y=0$
$y=\frac{x}{ax^2+bx+c}\quad(\Delta=b^2-4ac)$ $(a>0,\Delta>0,\alpha\cdot\beta<0)$ (a)	(a) 不连续点 $x=\alpha,x=\beta$ 渐 近 线 $y=0$ 和 $x=\alpha,x=\beta$
$(a>0,\ \Delta>0,$ $\alpha,\beta<0)$ (b)	(b) 不连续点 $x=\alpha,x=\beta$ 极大点 $A\left(\sqrt{\frac{c}{a}},\ \frac{b-2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$ 极小点 $B\left(-\sqrt{\frac{c}{a}},\frac{b+2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$ 拐 点 C 渐近线 $y=0$ 和 $x=\alpha,x=\beta$
$(a>0,\ \Delta>0,$ $\alpha,\beta>0)$ (c)	(c) 不连续点 $x=\alpha,x=\beta$ 极大点 $A\left(\sqrt{\frac{c}{a}},\ \frac{b-2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$ 极小点 $B\left(-\sqrt{\frac{c}{a}},\frac{b+2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$ 拐 点 C 渐近线 $y=0$ 和 $x=\alpha,\ x=\beta$

方 程 与 图 形	特 征
($a>0, b>0, \Delta=0$) (d)	(d) 不连续点 $x=-\frac{b}{2a}$ 极大点 $A\left(\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right)$ 拐 点 C 渐近线 $y=0$ 和 $x=-\frac{b}{2a}$
($a>0, b<0, \Delta=0$) (e)	(e) 不连续点 $x=-\frac{b}{2a}$ 极小点 $A\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}, -\frac{1}{b+2\sqrt{ac}}\right)$ 拐 点 C 渐近线 $y=0$ 和 $x=-\frac{b}{2a}$
($a>0, \Delta<0$) (f)	(f) 极大点 $A\left(\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{b-2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$ 极小点 $B\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{b+2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$ 拐 点 C, D, E 三点 渐近线 $y=0$
[注] α, β 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，并设 $\alpha<\beta$	

上述三次曲线的图形，只列出 $a>0$ 的情况，对于 $a<0$ 时，除曲线 $y=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$（当 $a>0$ 时渐近线在 x 轴上方，当 $a<0$ 时，渐近线在 x 轴下方）外，一般作适当变化后，与 $a>0$ 时的曲线都是关于 x 轴对称的。例如 $a<0$ 时，两条曲线：$y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$ 与 $y=\frac{1}{-ax^2-bx-c}$ 是关于 x 轴对称的，而后者 x^2 的系数 $-a>0$。

[抛物型曲线]

方程与图形	特征
$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ (n为大于3的整数) ($a_0>0$, n为偶数) (a) ($a_0>0$, n为奇数) (b)	(a) $a_0>0$, n为偶数: y由$+\infty$变到$+\infty$. 极值点 奇数个($1\sim n-1$) 拐 点 偶数个($0\sim n-2$) (b) $a_0>0$, n为奇数: y由$-\infty$变到$+\infty$. 极值点 偶数个($0\sim n-1$) 拐 点 奇数个($1\sim n-2$)
$y=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a>0$, $\Delta=b^2-3ac$) (立方抛物线) ($\Delta>0$) ($\Delta=0$) ($\Delta<0$)	曲线与x轴的交点 A_1, A_2, A_3 (或一个交点A_1)为方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$的实根 与y轴的交点 $B(0,d)$ 极值点($\Delta>0$时) C, D $\left(-\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{3a}, \frac{2b^3-9abc\pm2\sqrt{\Delta^3}}{27a^2}+d\right)$ (C取正号, D取负号) 拐 点 $E\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3-9abc}{27a^2}+d\right)$ 它是曲线的对称中心，该点的切线斜率为$-\frac{\Delta}{3a}$

方　程　与　图　形	特　征
$y=ax^n$（n 为大于 1 的整数） (a)　(b)	(a) $a>0$, n 为偶数: 顶点(同极值点) $O(0,0)$ 曲线关于 y 轴对称 (b) $a>0$, n 为奇数: 拐点　$O(0,0)$ 曲线关于原点对称

$y=ax^{\frac{m}{n}}$　(m, n为两个互素的正整数)

曲线 $y=ax^{\frac{m}{n}}$ 的各种情况($a>0$)

	n 为偶数 m 为奇数	n 为奇数 m为偶数	n 为奇数 m 为奇数	相切情况
$m>n$	$y=x^{\frac{3}{2}}$ 尖点　$O(0,0)$	$y=x^2$ 顶点　$O(0,0)$	$y=x^3$ 拐点　$O(0,0)$	在原点处与 x 轴相切
$m<n$	$y=x^{\frac{1}{2}}$ 顶点　$O(0,0)$	$y=x^{\frac{2}{3}}$ 尖点　$O(0,0)$	$y=x^{\frac{1}{3}}$ 拐点　$O(0,0)$	在原点处与 y 轴相切
对称情况	关于 x 轴对称	关于 y 轴对称	关于原点对称	

方 程 与 图 形	特　　征
[双曲型曲线] $y=ax^{-n}$（n为正整数） (a)　　(b)	(a) n为偶数: 不连续点　$O(0,0)$ 渐 近 线　$y=0$与$x=0$ 曲线关于y轴对称 (b) n为奇数: 曲线关于原点对称
$y=ax^{\frac{m}{n}}$（m,n为两个互素的正整数） (a)　　(b)　　(c)	(a) $a>0$, n为偶数, m为奇数: 不连续点　$O(0,0)$ 渐 近 线　$y=0$与$x=0$ 曲线关于x轴对称 (b) $a>0$, n为奇数, m为偶数: 曲线关于y轴对称 (c) $a>0$, n为奇数, m为奇数: 曲线关于原点对称
[半立方抛物线] $y=ax^{\frac{3}{2}}$ 或 $\begin{cases}x=t^2\\y=at^3\end{cases}$	尖点　$O(0,0)$ 在该点与x轴相切 曲率半径　$R=\frac{\sqrt{x}(4+9a^2x)^{\frac{3}{2}}}{6a}$ 弧长 $L_{\widehat{OM}}=\frac{1}{27a^2}[(4+9a^2x)^{\frac{3}{2}}-8]$

方 程 与 图 形	特　征
[箕舌线] $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$ 或 $\begin{cases}x=a\,\mathrm{tg}\,t\\ y=a\cos^2 t\end{cases}$	极大点　$A(0,a)$，在该点的曲率半径为$\dfrac{a}{2}$ 拐　点　$B,C\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ \dfrac{3}{4}a\right)$，在这两点的切线斜率分别为$\mp\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ 渐近线　$y=0$ 曲线与渐近线之间的面积 $S=\pi a^2$
[笛卡儿叶形线] $x^3+y^3=3axy$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3}\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}$ $(t=\mathrm{tg}\,\theta)$	结　点　$O(0,0)$，在该点与x轴和y轴相切，曲率半径为$\dfrac{3a}{2}$ 顶　点　$A\left(\dfrac{3a}{2},\ \dfrac{3a}{2}\right)$ 渐近线　$x+y+a=0$ 圈套所围成的面积　$S_1=\dfrac{3a^2}{2}$ 曲线与渐近线之间的面积 $S_2=\dfrac{3a^2}{2}$
[蔓叶线] $y^2=\dfrac{x^3}{a-x}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{at^2}{1+t^2}\\ y=\dfrac{at^3}{1+t^2}\end{cases}$ $(t=\mathrm{tg}\,\theta)$ 或 $\rho=\dfrac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$	曲线是使$OM=PQ$的点M的轨迹（P是直径为a的母圆与OQ的交点） 尖　点　$O(0,0)$，在该点曲线与x轴相切 渐近线　$x=a$ 曲线与渐近线之间的面积 $S=\dfrac{3}{4}\pi a^2$

方 程 与 图 形	特 征
[环索线] $y^2=x^2\frac{a-x}{a+x}$ 或 $\begin{cases}x=a\frac{1-t^2}{1+t^2}\\y=at\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$ $(t=\text{tg}\,\theta)$ 或 $\rho=a\frac{\cos2\varphi}{\cos\varphi}$	曲线是使 $PM_1=PM_2=OP$ 的点M_1, M_2 的轨迹（P为y轴上一点，M_1, M_2在过A, P两点的射线上） 顶　点　$A(a,0)$ 结　点　$O(0,0)$ 渐近线　$x=-a$ 圈套所围成的面积 $S_1=2a^2-\frac{\pi}{2}a^2$ 曲线与渐近线之间的面积 $S_2=2a^2+\frac{\pi}{2}a^2$
[尼哥米德蚌线] $(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2$ 或 $\begin{cases}x=a\pm b\cos t\\y=a\,\text{tg}\,t\pm b\sin t\end{cases}$ 或 $\rho=\frac{a}{\cos\varphi}\pm b\quad(b>0)$ (外支线取正号，内支线取负号) $(a>b)$　$(a=b)$　$(a<b)$	曲线是使 $OM_1=OP+b$, $OM_2=OP-b$ 的点 M_1,M_2 的轨迹(分别称为外支线(右)和内支线(左)) 外支线 顶点　$A(a+b,0)$ 拐点　B,C，它们的横坐标等于方程 $x^3-3a^2x+2a(a^2-b^2)=0$ 的最大根 内支线 顶点　$D(a-b,0)$ 拐点($a>b$时)　E,F，它们的横坐标等于方程 $x^3-3a^2x+2a(a^2-b^2)=0$ 的第二个正根 尖点($a=b$时)　$O(0,0)$ 结点($a<b$时)　$O(0,0)$ 内外支线的渐近线　$x=a$

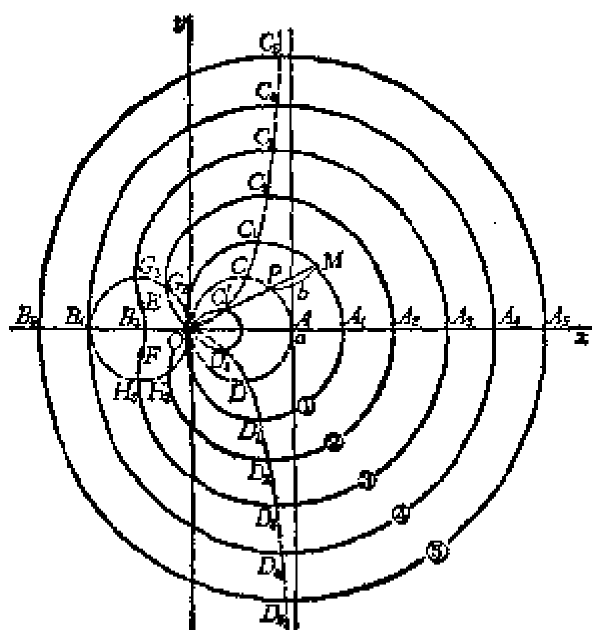
方 程 与 图 形	特 征

[帕斯卡蜗线]

$$(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$$

或 $\begin{cases} x=a\cos^2 t+b\cos t \\ y=a\cos t\sin t+b\sin t \end{cases}$

或 $\rho=a\cos\varphi+b$ （a 为圆的直径）



曲线是使 $OM=OP\pm b$ 的点M的轨迹（P点在直径为 a 的圆周上）.

顶 点 $A_k, B_k(a\pm b, 0)$ $(k=1,2,3,4,5)$, B_2 与原点重合

结 点 （$b<a$ 时） $O(0,0)$, 在该点的切线的斜率为$\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, 该点的曲率半径为$\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$

尖 点 （$b=a$时） $O(0,0)$

孤立点 （$b>a$时） $O(0,0)$

极值点 当 $b<a$ 时有 4 个，当$b\geqslant a$ 时有 2 个：

$$C_1', D_1' \text{ 和 } C_k, D_k \left(\cos\varphi=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+8a^2}}{4a}\right) \quad (k=1,2,3,4,5)$$

当 b 从 0 变到∞时，所有极值点构成蔓叶线 $\rho=\frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$

方 程 与 图 形	特　征

拐 点（$a<b<2a$ 时）　$E, F\left(\cos\varphi=-\frac{2a^2+b^2}{3ab}\right)$

二重切线的切点（$b<2a$ 时）：

$$G_k, H_k\left(-\frac{b^2}{4a}, \pm\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4a}\right)\qquad (k=2, 3)$$

这些切点在圆 $\rho=-a\cos\varphi$ 上蜗线所围成的面积

$$S=\frac{\pi}{2}a^2+\pi b^2$$

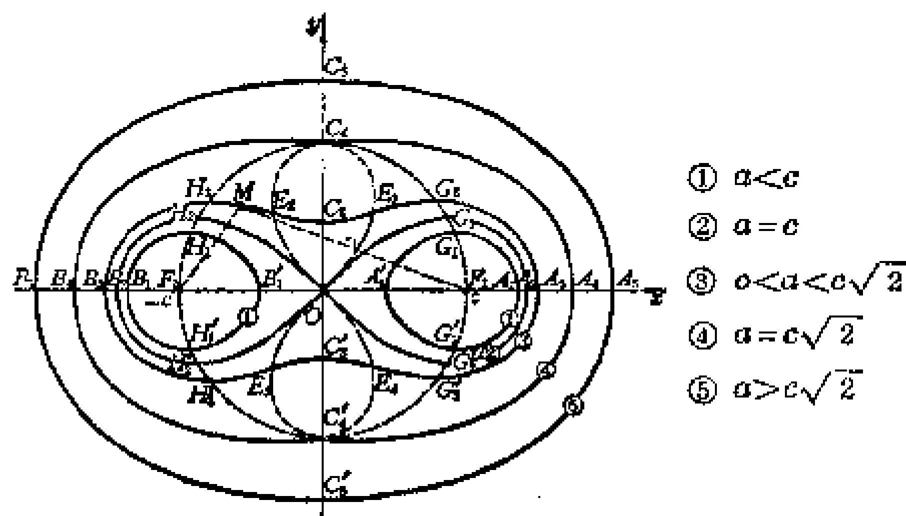
（当$b<a$时，内圈的面积计算了两次）

［注］ 当 $b=a$ 时，即为心脏线.

［卡西尼卵形线］

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4$$

或　$\rho^2=c^2\cos2\varphi\pm\sqrt{a^4-c^4\sin^2 2\varphi}\quad (c>0)$



曲线是使 $MF_1\cdot MF_2=a^2$ 的点 M 的轨迹（F_1, F_2 为固定焦点，$F_1F_2=2c$，a 为常数）.

顶　点　A_1', B_1'（$\pm\sqrt{c^2-a^2}$, 0）

A_k, B_k（$\pm\sqrt{a^2+c^2}$, 0）　　($k=1, 2, 3, 4, 5$)

极值点　C_k, C_k'（0, $\pm\sqrt{a^2-c^2}$）　　($k=3, 4, 5$)

方程与图形	特征

$G_k, H_k, G'_k, H'_k\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right)$　$(k=1,2,3)$

或 $\left(\rho=c, \sin 2\varphi=\frac{a^2}{2c^2}\right)$

当 a 从 0 变到 $c\sqrt{2}$ 时，所有极值点构成一个圆(半径为 c)。

拐　点　($0<a<c\sqrt{2}$ 时)

$$E_k\left(\pm\sqrt{\frac{m-n}{2}}, \pm\sqrt{\frac{m+n}{2}}\right)\quad (k=1,2,3,4)$$

其中

$$m=\sqrt{\frac{a^4-c^4}{3}}, \quad n=\frac{a^4-c^4}{3c^2}$$

或

$$\left(\rho=\sqrt{m}, \quad \cos 2\varphi=-\frac{m}{a^2}\right)$$

当 a 从 c 变到 $c\sqrt{2}$ 时，所有拐点构成双纽线。

[注]　当 $a=c$ 时，即为双纽线。

[心脏线]

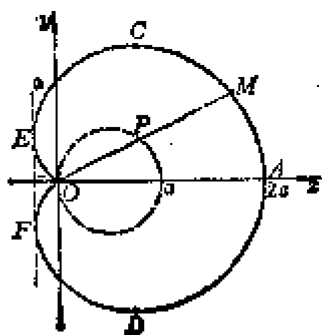
$$(x^2+y^2)^2-2ax(x^2+y^2)=a^2y^2$$

或

$$\begin{cases} x=a\cos t(1+\cos t) \\ y=a\sin t(1+\cos t) \end{cases}$$

或

$$\rho=a(1+\cos\varphi)$$



(i) 它是使 $OM=OP\pm a$ 的点 M 的轨迹(a 为圆的直径，P 为圆周上一点)

(ii) 它是圆外旋轮线的特例(动圆与定圆的直径相等)

尖　点　$O(0,0)$

顶　点　$A(2a,0)$

极值点　$C, D\left(\frac{3}{4}a, \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a\right)$

二重切线的切点

$$E, F\left(-\frac{a}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$$

曲线长　$L=8a$

面　积　$S=\frac{3}{2}\pi a^2$

方程与图形	特征
[双纽线] $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$ 或 $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$	(i) 它是使 $MF_1\cdot MF_2=a^2$ 的点M的轨迹($OF_1=a$) (ii) 它是使 $OM=PQ$ 的点 M 的轨迹(P,Q 在圆心为 F_1, 半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的圆周上) 结　点　(同拐点) $O(0,0)$, 在该点的切线的斜率为±1 顶　点　$A,B(\pm a\sqrt{2},0)$ 极值点　C,D,C',D', 即 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \pm\frac{a}{2}\right)$ 曲率半径　$R=\frac{2a^2}{3\rho}$ 双纽面积　$S=2a^2$
[普通旋轮线(摆线)] $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ (a 为圆周半径) 或 $x+\sqrt{y(2a-y)}=a\operatorname{Arc}\cos\frac{a-y}{a}$	曲线是一圆周沿 x 轴滚动而无滑动时, 圆周上一点 M 所描成的轨迹(圆的半径为 a) 周　期　$T=2\pi a$ 极值点　$A_k((2k-1)\pi a, 2a)$ ($k=1,2,\cdots$) 曲率半径　$R=4a\sin\frac{t}{2}$ 渐屈线　为一旋轮线(图中虚线) 拱　长　$L_{OA_1O_1}=8a$ 面　积　$S_{OA_1O_1O}=3\pi a^2$
[长(或短)辐旋轮线(次摆线)] $\begin{cases}x=a(t-\lambda\sin t)\\y=a(1-\lambda\cos t)\end{cases}$ (a 为圆周半径)	曲线是一圆周沿 x 轴滚动而无滑动时, 圆外一点 M(或圆内一点 N)所描成的轨迹(圆的半径为 a)

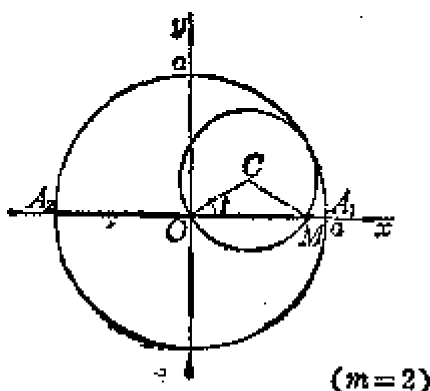
方　程　与　图　形	特　　征
长幅($\lambda>1$) 短幅($\lambda<1$)	周　期　$T=2\pi a$ 结　点　($\lambda>1$ 时) $D_k(2k\pi a, a(1-\sqrt{\lambda^2-t_0^2}))$ (式中 $k=0, 1, 2, \cdots$, t_0 是方程 $t=\lambda\sin t$ 的最小正根) 拐　点　($\lambda<1$ 时) $E_k(a(\mathrm{Arccos}\lambda-\lambda\sqrt{1-\lambda^2}), a(1-\lambda^2))$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ 极大值点 A_k　$((2k-1)\pi a, (1+\lambda)a)$ 极小值点　$B_k(2k\pi a, (1-\lambda)a)$ 曲率半径 $R=a\dfrac{(1+\lambda^2-2\lambda\cos t)^{\frac{3}{2}}}{\lambda(\cos t-\lambda)}$ 对应于极值点($\lambda<1$ 时)处的曲率半径为 $R_{A_k}=-a\dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$, $R_{B_k}=a\dfrac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$
[圆外旋轮线(外摆线)] $\begin{cases} x=(a+b)\cos t-b\cos\dfrac{a+b}{b}t \\ y=(a+b)\sin t-b\sin\dfrac{a+b}{b}t \end{cases}$ (a 为定圆的半径, b 为动圆的半径, $t=\angle COx$) ($m=3$)	曲线是一圆周沿另一圆周外部滚动而无滑动时，圆周上一点M所描成的轨迹，曲线的形状由 $m=\dfrac{a}{b}$ 的值而定 (i) 当 $m=1$时, 曲线是心脏线 (ii) 当m 为整数时, 曲线由m 支组成, 动点M描完m支后(即动圆绕定圆一周), 返回起始位置 (iii) 当m 为分数 ($m=\dfrac{g}{h}$, g, h 为互素的整数) 时, 曲线由 g 支组成, 动点M描完 g 支后(即动圆绕定圆 h 周), 返回起始位置

方 程 与 图 形	特 征
$(m=4)$ $\left(m=\frac{3}{2}\right)$	(iv) 当 m 为无理数时，有无穷多的分支，动点 M 不能返回起始位置 尖 点 $A_k\left(\rho=a,\ \varphi=\frac{2(k-1)\pi}{m}\right)$ 顶 点 $B_k\left(\rho=a+2b,\ \varphi=\frac{2\pi}{m}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)$ (式中 k 为整数，当 m 为整数时，$1\leqslant k\leqslant m$；当 $m=\frac{g}{h}$ 时，$1\leqslant k\leqslant g$；当 m 为无理数时，$1\leqslant k<\infty$) 曲线长(一支) $L_{\widehat{A_1B_1A_2}}=\frac{8(a+b)}{m}$ 曲率半径 $R=\frac{4b(a+b)}{a+2b}\sin\frac{a\varphi}{2b}$ 扇形 $A_1B_1A_2A_1$ 的面积（不包括定圆的面积） $S=\frac{\pi b^2}{a}(3a+2b)$

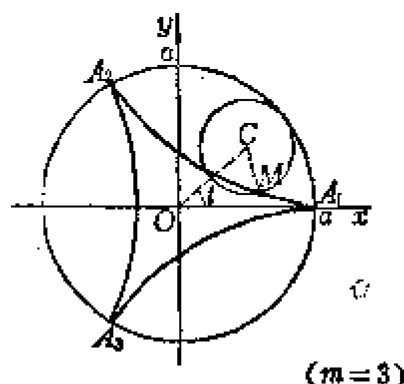
[圆内旋轮线(内摆线)]

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos t+b\cos\frac{a-b}{b}t \\ y=(a-b)\sin t-b\sin\frac{a-b}{b}t \end{cases}$$

(a 为定圆半径，b 为动圆半径，$t=\angle COx$)

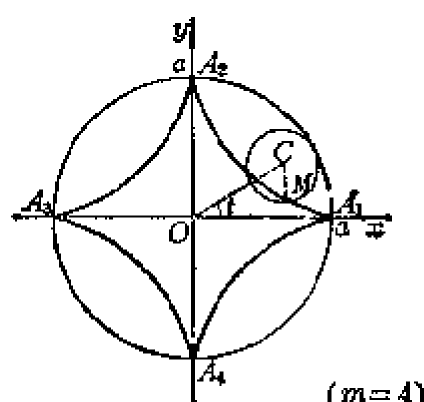


$(m=2)$

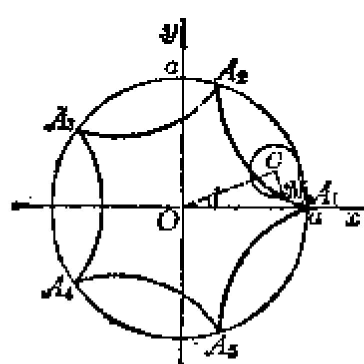


$(m=3)$

方 程 与 图 形	特 征



$(m=4)$



$(m=5)$

曲线是一圆周沿另一圆周的内部滚动而无滑动时，圆周上一点M所描成的轨迹.

圆内旋轮线的尖点、顶点的坐标，弧长，曲率半径及面积公式都与圆外旋轮线一样，只须把"$+b$"换成"$-b$". $m=\dfrac{a}{b}$总是大于1. 特别，当$m=4$时，曲线有4支，称为星形线，其方程为

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases} \qquad 或 \qquad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

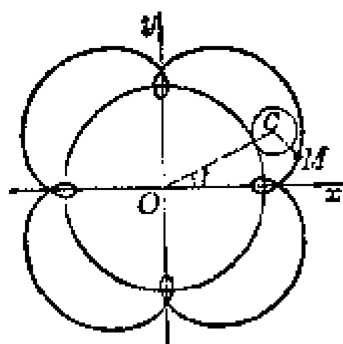
全曲线长 $L=6a$

曲线所围成的面积 $S=\dfrac{3}{8}\pi a^2$

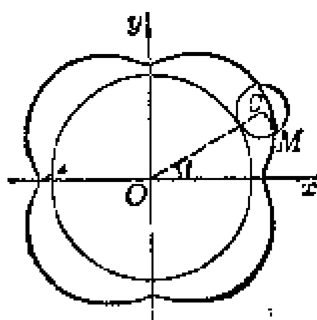
[长(或短)辐圆外旋轮线(外次摆线)]

$$\begin{cases}x=(a+b)\cos t-\lambda\cos\dfrac{a+b}{b}t\\ y=(a+b)\sin t-\lambda\sin\dfrac{a+b}{b}t\end{cases}$$

(a为定圆半径，b为动圆半径)



长辐($\lambda>1$)



短辐($\lambda<1$)

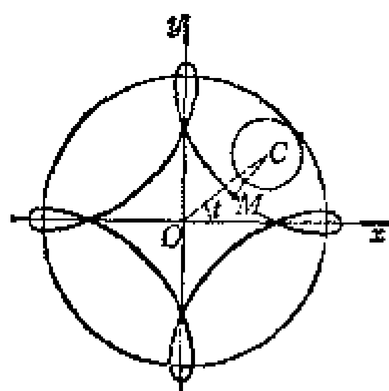
方 程 与 图 形	特 征

曲线是一圆周沿另一圆周的外部滚动而无滑动时，圆周外部(或内部)一点M所描成的轨迹。

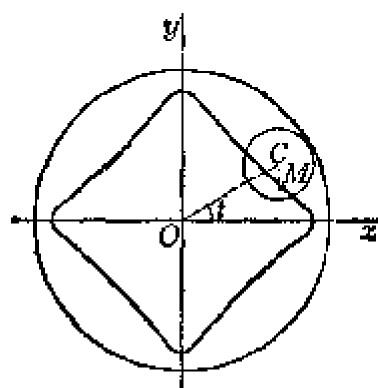
[长(或短)辐圆内旋轮线(内次摆线)]

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos t+\lambda\cos\frac{a-b}{b}t \\ y=(a-b)\sin t-\lambda\sin\frac{a-b}{b}t \end{cases}$$

(a为定圆半径，b为动圆半径)

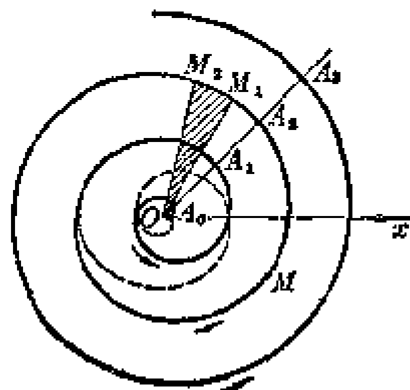


长辐($\lambda>1$)



短辐($\lambda<1$)

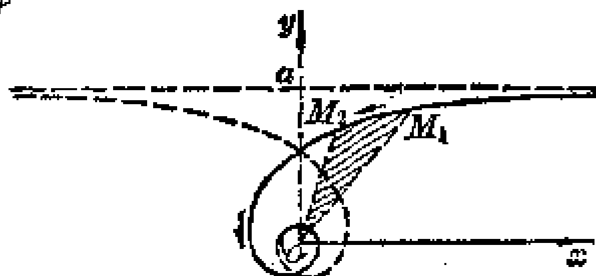
曲线是一圆周沿另一圆周的内部滚动而无滑动时，圆周外部(或内部)一点M所描成的轨迹。特别，当$a=2b$时，长短辐圆内旋轮线是一个椭圆；当$a=b$时，是帕斯卡蜗线。

方 程 与 图 形	特 征
[阿基米德螺线] $\rho=a\varphi$ 	曲线为一动点以常速v沿一射线运动，而这一射线又以定角速度ω绕极点O转动时，该动点所描成的轨迹。曲线由两支曲线组成，它们关于x轴对称。 (方程$\rho=a\varphi$中，$a=\frac{v}{\omega}$) 等距性 过极点的射线与曲线交于A_0, A_1, A_2 …，它们是等间隔($2\pi a$)的 弧 长

方程与图形	特 征
	弧长$L_{\widehat{OM}}=\frac{a}{2}(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\mathrm{Arsh}\,\varphi)$ 曲率半径 $R=a\frac{(\varphi^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^2+2}$ 扇形 M_1OM_2 的面积 $S=\frac{a^2}{6}(\varphi_2^3-\varphi_1^3)$
[对数螺线(等角螺线)] $\rho=ae^{k\varphi}$	曲线与所有过极点的射线的交角都相等(α)($k=\mathrm{ctg}\,\alpha$)，当 $\varphi\to-\infty$ 时，曲线沿顺时针方向绕极点转动而趋于极点 等比性 过极点的射线与曲线交于…，A_{-1}，A_0，A_1，…，则…，OA_{-1}，OA_0，OA_1，…，各线段成等比级数(公比为 $e^{2k\pi}$) 弧长 $L_{\widehat{M_1M_2}}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(\rho_2-\rho_1)$ $L_{\widehat{OM}}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\rho$ 曲率半径 $R=\sqrt{1+k^2}\,\rho$ [注] 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，即为一圆

[双曲螺线(反螺线)]

$\rho=\frac{a}{\varphi}$



渐近点 极点 O（当 $\varphi\to\pm\infty$时）

渐近线 $y=a$

曲率半径　$R=\frac{a}{\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3$

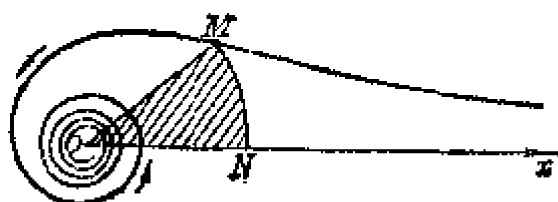
扇形 M_1OM_2 的面积

$$S=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1}-\frac{1}{\varphi_2}\right)$$

曲线由两支组成，它们关于 y 轴对称

[连锁螺线]

$$\rho=\frac{a}{\sqrt{\varphi}}$$



曲线是当N在x轴上移动时，使圆扇形 OMN 的面积保持一定 $\left(\frac{a^2}{2}\right)$ 的点M的轨迹

渐近点　极点O（当 $\varphi\to+\infty$时）

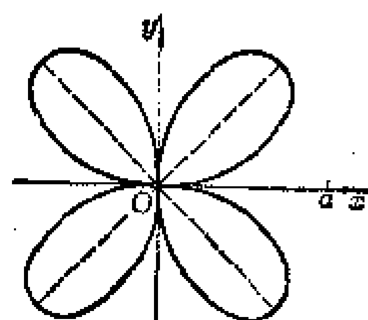
渐近线　x 轴（当 $\varphi\to0$ 时）

方程与图形	特　征
[圆的渐开线] $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ (a 为圆的半径，$t=\angle COx$)	尖点　$A(a,0)$ 与 x 轴的交点 $B\left(\frac{a}{\cos t_0},0\right)$ (式中 t_0 为方程 $t=\operatorname{tg}t$ 的根) 弧长　$L_{\widehat{AM}}=\frac{1}{2}at^2$ 曲率半径 $R_M=at=\sqrt{2aL_{\widehat{AM}}}$ 曲率中心　C在圆周上 曲线由两支组成，它们关于x轴对称

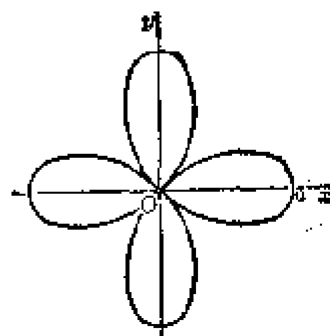
方程与图形	特　征
[回旋曲线] $\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^t \cos u^2\, du \\ y=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^t \sin u^2\, du \end{cases}$	拐　点　$O(0,0)$ 渐近点　$A\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ $B\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ 弧　长　$L_{\widehat{OM}}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,t$ 曲线关于原点对称
[悬链线] $y=a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$	顶点　$A(0,a)$ 弧长　$L_{\widehat{AM}}=a\,\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}$ 曲边梯形 $OAMP$ 的面积 $S=aL_{\widehat{AM}}=a^2\,\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}$ 曲率半径　$R=a\,\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{a}$ 曲线关于 y 轴对称，位于抛物线 $y=a+\dfrac{x^2}{2a}$（图中虚线）的上方 [注] 把一条柔软而不能伸长的重绳悬挂于两点，便得到悬链线的形状
[曳物线] $x=a\,\mathrm{Arch}\dfrac{a}{y}\pm\sqrt{a^2-y^2}$ 或 $x=a\ln\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-y^2}}{y}\mp\sqrt{a^2-y^2}$	尖点　$A(0,a)$，在该点与 y 轴相切 弧长　$L_{\widehat{AM}}=a\ln\dfrac{a}{y}$ 曲率半径　$R=a\,\mathrm{ctg}\dfrac{x}{y}$ 曲线关于 y 轴对称，是悬链线的渐

方程与图形	特　征
	开线，从顶点A开始展开，这一曲线的切线与x轴的交点到切点的距离为一常数 [注] 把长度为a的柔软而不能伸长的绳子的一端系一质点M，另一端P沿x轴移动，则点M便描成曳物线形状

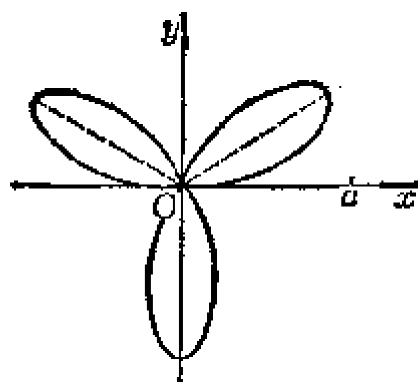
[玫瑰线]（$\rho=a\sin n\varphi$, $\rho=a\cos n\varphi$）



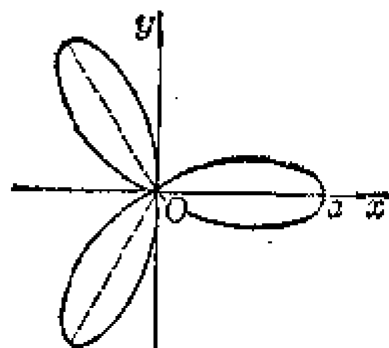
$\rho=a\sin 2\varphi$



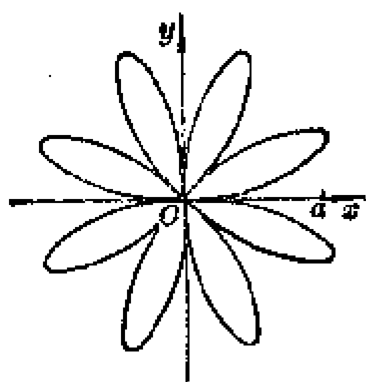
$\rho=a\cos 2\varphi$



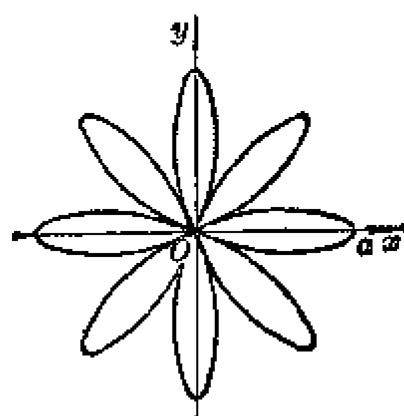
$\rho=a\sin 3\varphi$



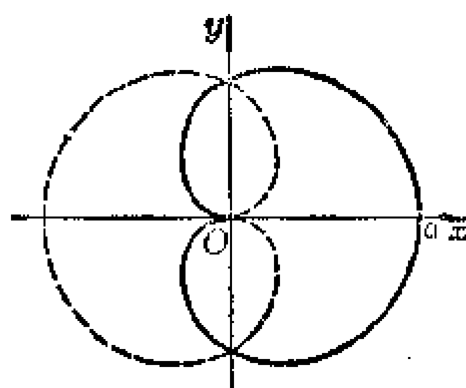
$\rho=a\cos 3\varphi$



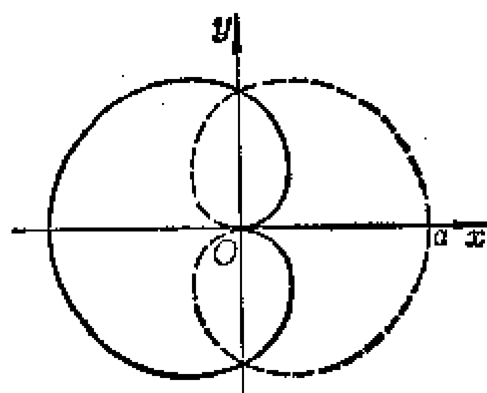
$\rho=a\sin 4\varphi$



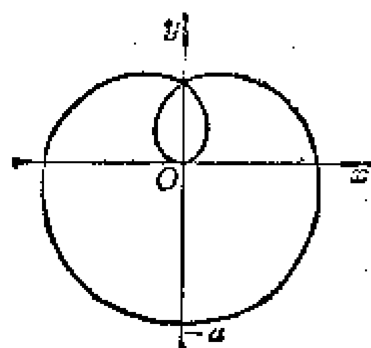
$\rho=a\cos 4\varphi$



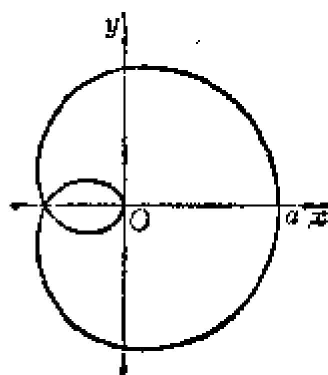
$\rho=a\sin\frac{\varphi}{2}$



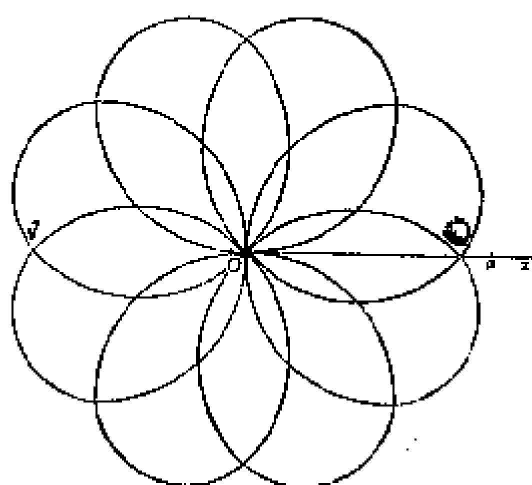
$\rho=a\cos\frac{\varphi}{2}$



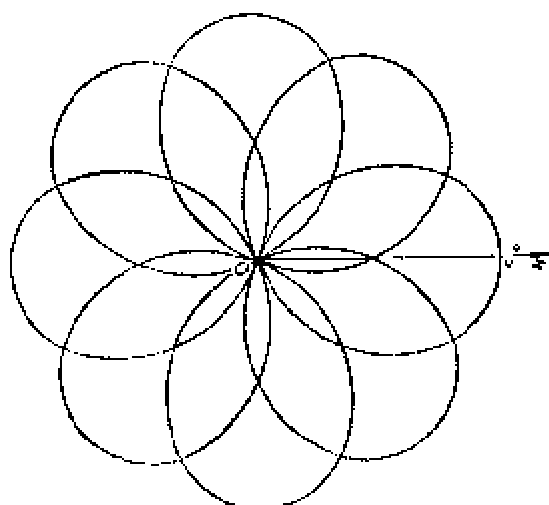
$\rho=a\sin\frac{\varphi}{3}$



$\rho=a\cos\frac{\varphi}{3}$



$\rho = a\sin\frac{4}{3}\varphi$



$\rho = a\cos\frac{4}{3}\varphi$

方程与图形	特　征
[概率曲线] $y = ae^{-k^2x^2}\quad (a>0,\ k>0)$	顶点(同极大点)　$A(0, a)$ 拐点　$B, C\left(\pm\frac{1}{k\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{e}}\right)$ 该点切线的斜率为$\mp ak\sqrt{\frac{2}{e}}$ 曲线与x轴之间的面积 $S = \frac{a}{k}\sqrt{\pi}$ 曲线关于y轴对称
[标准正态分布曲线(高斯曲线)] $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	顶点　$A\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.3989\right)$ 拐点　$B, C\left(\pm 1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ 曲线与x轴之间的面积为1 曲线关于y轴对称

方程与图形	特 征
[一般正态分布曲线] $y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	顶点 (同极大点) $A\left(m,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ 拐点 $B, C\left(m\pm\sigma,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ 曲线与 x 轴之间的面积为 1 曲线关于直线 $x=m$ 对称
[阻尼振动曲线] $y=Ae^{-ax}\sin(\omega x+\varphi_0)\quad(A>0)$	与 x 轴的交点 $B_k\left(\frac{k\pi-\varphi_0}{\omega},0\right)\ (k=1,2,\cdots)$ 与 y 轴的交点 $C(0, A\sin\varphi_0)$ 极值点 A_k 的横坐标为 $\frac{k\pi-\varphi_0+\alpha}{\omega}\left(式中 \operatorname{tg}\alpha=\frac{\omega}{a}\right)$ 拐点 D_k 的横坐标为 $\frac{k\pi-\varphi_0+2\alpha}{\omega}\left(式中 \operatorname{tg}\alpha=\frac{\omega}{a}\right)$ 曲线与两条指数曲线 $y=\pm Ae^{-ax}$ 相切,切点 $P_k\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\varphi_0}{\omega},\ (-1)^k Ae^{-ax}\right)$

§9　空间曲线

一、曲线的基本概念与公式

[曲线的方程与正向]

曲线方程的形式	曲线的正向
交面式 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases}$ 参数式 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \\ z=z(s) \end{cases}$ (t 为任意参数, s 为曲线的弧长) 矢量式　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ ($\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$, t, s 同上)	t(或 s)增加时，曲线上一点运动的方向

[活动标架的三个单位矢量]　$\boldsymbol{t}$ 为单位切线矢量，方向与曲线的正向一致；$\boldsymbol{n}$ 为单位主法线矢量，它指向曲线的凹方；$\boldsymbol{b}$ 为单位副法线矢量，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ 构成右手系(图 7.18)．这三个矢量称为曲线在点 M 的活动标架(或叫动标三面形、伴随三面形，也叫活动标形)．

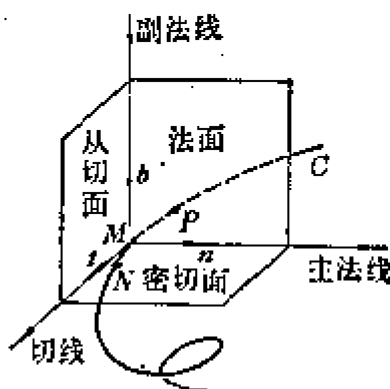


图　7.18

[活动标架所在直线和平面的方程]　设M为(x_0, y_0, z_0)(图 7.18)．

1°　切线　过曲线上两点N, M的直线NM，当$N\to M$时的极限位置．其方程为

参数式　$$\frac{x-x_0}{\dot{x}_0}=\frac{y-y_0}{\dot{y}_0}=\frac{z-z_0}{\dot{z}_0}$$

(以 t 为参数)

式中$\dot{x}_0$表示$\frac{dx}{dt}$在点$M(x_0, y_0, z_0)$处的值，等等．参数 t 可以取为弧长 s，这时 $\dot{x}_0$ 用 x_0' 表示，等等．

矢量式　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\dot{\boldsymbol{r}}_0$　(以 t 为参数)

式中$\dot{\boldsymbol{r}}_0$表示$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$在点$M(x_0, y_0, z_0)$处的值，$\lambda$ 为另一个参数．

交面式

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F'_{y_0} & F'_{z_0}\\ \Phi_{y_0} & \Phi_{z_0}\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F'_{z_0} & F'_{x_0}\\ \Phi_{z_0} & \Phi_{x_0}\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F'_{x_0} & F'_{y_0}\\ \Phi_{x_0} & \Phi_{y_0}\end{vmatrix}}$$

式中 F'_{x_0}表示$\frac{\partial F'}{\partial x}$在点$M$的值，等等.

2° 法面 与切线垂直的平面(通过 M 的法面上一切直线都称为曲线在M的法线)．其方程为

参数式 $\dot{x}_0(x-x_0)+\dot{y}_0(y-y_0)+\dot{z}_0(z-z_0)=0$ (以 t 为参数)

式中也可取弧长 s 为参数.

矢量式 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_0=0$ (以 t 为参数)

交面式

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ F'_{x_0} & F'_{y_0} & F'_{z_0}\\ \Phi_{x_0} & \Phi_{y_0} & \Phi_{z_0}\end{vmatrix}=0$$

3° 密切面 通过曲线上三点 M, P, N 作一平面，当 $N, P\to M$ 时，平面的极限位置(切线在密切面上)．其方程为

参数式

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0\\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0\end{vmatrix}=0 \quad (以\ t\ 为参数)$$

式中$\ddot{x}_0$表示$\frac{d^2x}{dt^2}$在M点的值，等等，参数 t 也可取为弧长 s.

矢量式 $((\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\dot{\boldsymbol{r}}_0\ddot{\boldsymbol{r}}_0)=0$ (以 t 为参数)

4° 主法线 法面与密切面的交线．其方程为

参数式

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\dot{y}_0 & \dot{z}_0\\ m & n\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\dot{z}_0 & \dot{x}_0\\ n & l\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\dot{x}_0 & \dot{y}_0\\ l & m\end{vmatrix}} \quad (以\ t\ 为参数)$$

式中

$$l=\begin{vmatrix}\dot{y}_0 & \dot{z}_0\\ \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0\end{vmatrix},\quad m=\begin{vmatrix}\dot{z}_0 & \dot{x}_0\\ \ddot{z}_0 & \ddot{x}_0\end{vmatrix},\quad n=\begin{vmatrix}\dot{x}_0 & \dot{y}_0\\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0\end{vmatrix} \tag{1}$$

$$\frac{x-x_0}{x''_0}=\frac{y-y_0}{y''_0}=\frac{y-z_0}{z''_0} \quad (以\ s\ 为参数)$$

x''_0 表示$\frac{d^2x}{ds^2}$在点M的值，等等.

矢量式 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\dot{\boldsymbol{r}}_0\times(\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\ddot{\boldsymbol{r}}_0)$ (以 t 为参数)

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{r}''_0$ (以 s 为参数)

式中 λ 为另一个参数.

5° 副法线　垂直于密切面的直线. 其方程为

参数式

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\qquad\text{(以 } t \text{ 为参数)}$$

式中 l,m,n 如(1)式定义.

矢量式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda(\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\ddot{\boldsymbol{r}}_0)\qquad\text{(以 } t \text{ 为参数)}$$

6° 从切面　通过切线与副法线的平面. 其方程为

参数式

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0\qquad\text{(以 } t \text{ 为参数)}$$

$$x_0''(x-x_0)+y_0''(y-y_0)+z_0''(z-z_0)=0\qquad\text{(以 } s \text{ 为参数)}$$

矢量式

$$((\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\dot{\boldsymbol{r}}_0(\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\ddot{\boldsymbol{r}}_0))=0\qquad\text{(以 } t \text{ 为参数)}$$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{r}_0''=0\qquad\text{(以 } s \text{ 为参数)}$$

[曲率与挠率的定义公式]

公式与意义	图　形
曲率 $k=\lim\limits_{N\to M}\left\lvert\dfrac{\Delta\boldsymbol{t}}{\overset{\frown}{MN}}\right\rvert=\left\lvert\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right\rvert=\lvert\boldsymbol{t}'\rvert$ 曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{k}$ k 表示包含点 M 的部分曲线偏离直线的程度,也是切线方向对于弧长的转动率	
挠率 $\lvert\kappa\rvert=\lim\limits_{N\to M}\left\lvert\dfrac{\Delta\boldsymbol{b}}{\overset{\frown}{MN}}\right\rvert=\left\lvert\dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right\rvert=\lvert\boldsymbol{b}'\rvert$ 挠率半径 $\tau=\dfrac{1}{\kappa}$ κ 表示包含点 M 的部分曲线偏离平面	(a)

公式与意义	图　形
曲线的程度：$\kappa=0$ 的曲线是平面曲线。 $\lvert\kappa\rvert$ 是曲线在点 M 的挠率 κ 的绝对值，它等于副法线方向对于弧长的转动率。 挠率 κ 的符号：当点 M 沿曲线的正向移动时，矢量 $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 反向，则 κ 取正号，反之取负号(图(b))	$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ (+)　$\boldsymbol{b}$　$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ (−)　$\boldsymbol{n}$　$\boldsymbol{t}$ (b)

表中 $\boldsymbol{t}',\boldsymbol{b}'$ 分别表示 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{b}$ 对 s 的导数.

[曲率与挠率的计算公式]

1° 曲率

参数式

$$k=\sqrt{\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2)-(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})^2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}}\quad(\text{以 } t \text{ 为参数})$$

$$k=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}\quad(\text{以 } s \text{ 为参数})$$

矢量式

$$k=\sqrt{\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2\ddot{\boldsymbol{r}}^2-(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}})^2}{|\dot{\boldsymbol{r}}^2|^3}}\text{ 或 }\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}\quad(\text{以 } t \text{ 为参数})$$

$$k=|\boldsymbol{r}''|\quad(\text{以 } s \text{ 为参数})$$

2° 挠率的绝对值

参数式

$$|\kappa|=\left|\frac{\begin{vmatrix}\dot{x}&\dot{y}&\dot{z}\\\ddot{x}&\ddot{y}&\ddot{z}\\\dddot{x}&\dddot{y}&\dddot{z}\end{vmatrix}}{k^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}\right|\quad(\text{以 } t \text{ 为参数})$$

$$|\kappa|=\left|\frac{\begin{vmatrix}x'&y'&z'\\x''&y''&z''\\x'''&y'''&z'''\end{vmatrix}}{x''^2+y''^2+z''^2}\right|\quad(\text{以 } s \text{ 为参数})$$

矢量式

$$|\kappa|=\frac{|(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}})|}{k^2|\dot{\boldsymbol{r}}^2|^3}\text{ 或 }\frac{|(\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}\dddot{\boldsymbol{r}})|}{(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}})^2}\quad(\text{以 } t \text{ 为参数})$$

$$|\kappa|=\frac{|(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}''')|}{k^2}\quad(\text{以 } s \text{ 为参数})$$

式中 s 为弧长，t 为任意参数，"$'$"表示对 s 求导，"$\cdot$"表示对 t 求导.

[雪列-弗莱纳公式(或基本公式)]

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{\boldsymbol{n}}{\rho},\quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\frac{-\boldsymbol{t}}{\rho}+\frac{\boldsymbol{b}}{\tau},\quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{n}}{\tau}$$

式中 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 为活动标架的三个基本单位矢量，ρ 为曲率半径，τ 为挠率半径. 这组公式的特点就是基本矢量 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 关于弧长 s 的导数可以用 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 的线性组合来表达，它的系数组成一个反对称方阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{bmatrix}$$

这组公式与 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t}$ 合并起来描述了点 M 在曲线上移动时活动标架的运动规律.

把活动标架看作一个刚体，就是当 M 沿曲线移动时，M 的活动标架象刚体那样绕 M 转动. 这时把 s 看作时间，则根据运动学的原理可以得出活动标架的瞬时转动速度的表达式为

$$\boldsymbol{\omega}=\kappa\boldsymbol{t}+k\boldsymbol{b}$$

这表明转动矢量落在从法面上. 这个瞬时转动矢量称为达布矢量. 它仅分解为两个支量 $\kappa\boldsymbol{t}$ 和 $k\boldsymbol{b}$，因此活动标架的瞬时转动可以看作两个转动之和. 一个转动对应于 $\kappa\boldsymbol{t}$，按转动速度的定义，它绕着方向为 $\kappa\boldsymbol{t}$ 的轴转动；另一个绕着方向为 $k\boldsymbol{b}$ 的轴转动. 因此得到曲率与挠率的运动学意义：

曲线的曲率等于活动标架绕着副法线的转动支量，挠率等于绕着切线的转动支量.

最后，由 $\boldsymbol{\omega}=\kappa\boldsymbol{t}+k\boldsymbol{b}$ 可以验证，空间曲线的雪列-弗莱纳公式就是

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{t} \\ \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n} \\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b} \end{cases}$$

这就是雪列-弗莱纳公式的运动学意义.

[基本定理与自然方程] 在一闭区间 $a\leqslant s\leqslant b$ 上给定任意两个连续函数 $k(s)$ 和 $\kappa(s)$，其中 $k(s)>0$，则除了空间的位置差别外，唯一地存在一条空间曲

线，它以 s 为弧长，$k(s)$为曲率，$\kappa(s)$为挠率。

方程组

$$k=k(s),\quad \kappa=\kappa(s)$$

称为空间曲线的自然方程.

二、螺旋线的方程与图形

［一般螺旋线］ 与柱面母线的交角为定角(α)的空间曲线称为一般螺旋线(或定倾曲线). 这种曲线具有性质：

1° 曲率与挠率的比等于常数($k=\kappa\operatorname{tg}\alpha$).

2° 切线与一固定方向的交角为定角(α).

3° 主法线与一固定方向垂直.

4° 副法线与一固定方向的交角为定角$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

［圆柱螺旋线］ 一动点绕一直线作等速转动，并沿这直线作等速移动，则称这个动点的轨迹为圆柱螺旋线(图7.19)，其参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\\ z=\pm b\theta=\pm\dfrac{h}{2\pi}\theta=\pm a\theta\operatorname{ctg}\beta\end{cases}$$

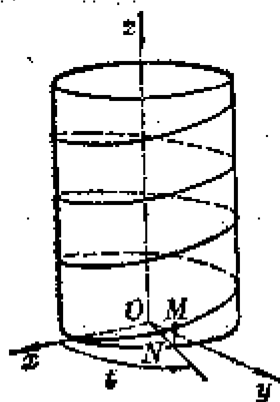


图 7.19

式中 $\theta=\omega t$，ω为角速度，h称为螺距，β称为螺旋角，式中对右螺旋线取正号，对左螺旋线取负号. 如果以弧长 s 为参数，则其方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ y=a\sin\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ z=\pm\dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

曲率与挠率都是常数： $k=\dfrac{a}{a^2+b^2}$， $\kappa=\dfrac{\pm b}{a^2+b^2}$

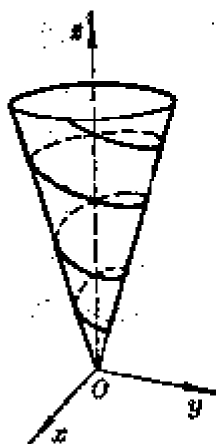


图 7.20

［圆锥螺旋线］ 与一圆锥面母线的交角为定角的曲线称为圆锥螺旋线 (图7.20)，其方程为

$$\begin{cases} x=\rho\sin\alpha_0\cos\theta \\ y=\rho\sin\alpha_0\sin\theta \\ z=\rho\cos\alpha_0 \\ \rho=\rho_0\exp\left(\dfrac{\sin\alpha_0}{\operatorname{tg}\beta}\theta\right) \end{cases}$$

式中 α_0 为圆锥顶角的一半，β 为螺旋角，ρ_0，α_0，β 都是常数．由于把这种曲线投影到 Oxy 平面上是对数螺线，所以又称其为圆锥对数螺线．

§10 螺 旋 面

［一般螺旋面的方程］ 已知空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

Γ 绕 z 轴作螺旋运动而形成的曲面称为一般螺旋面，其方程为

$$\begin{cases} x=x(t)\cos\theta-y(t)\sin\theta \\ y=x(t)\sin\theta+y(t)\cos\theta \\ z=z(t)+\dfrac{h}{2\pi}\theta \end{cases}$$

式中 h 为螺距(或导程)．

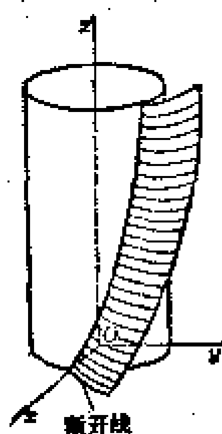


图 7.21

［渐开线螺旋面］ Oxy 平面上一条已知渐开线绕 z 轴作螺旋运动而形成的曲面称为渐开螺旋面(图 7.21)，其方程为

$$\begin{cases} x=a[\cos(\theta+\varphi)+\varphi\sin(\theta+\varphi)] \\ y=a[\sin(\theta+\varphi)-\varphi\cos(\theta+\varphi)] \\ z=\dfrac{h}{2\pi}\theta \end{cases}$$

式中 θ 和 φ 是两个参数．“$\varphi=$常数”表示曲面上不同的螺旋线，它们有相同的螺距 h，但有不同的螺旋角；“$\theta=$常数”表示不同位置的渐开线．

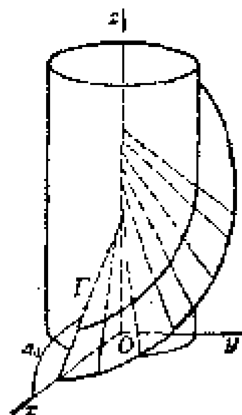


图 7.22

［阿基米德螺旋面］ 一条与 z 轴相交并与 Oxy 平面的交角为 α_0 的直线 Γ 作螺旋运动而形成的螺旋面称为阿基米德螺旋面(图 7.22)，其方程为

$$\begin{cases} x=-t\cos\alpha_0\cos\theta \\ y=-t\cos\alpha_0\sin\theta \\ z=t\sin\alpha_0+\dfrac{h}{2\pi}\theta \end{cases}$$

它与 Oxy 平面的交线是阿基米德螺线.

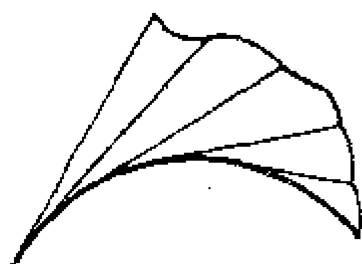
§11 可展曲面

[单参数曲面族的包络面]

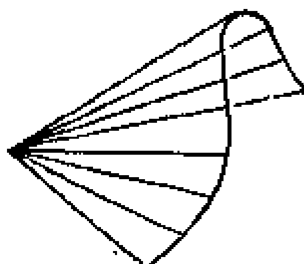
定 义	方 程
包络面 与曲面族 S_λ 的所有曲面相切的曲面称为 S_λ 的包络面.	$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial\lambda}=0 \end{cases}$
脊线 族 S_λ 中两个邻近曲面的交线的极限位置称为 S_λ 的特征线，特征线的包络(如果存在)称为族 S_λ 的脊线	$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial\lambda}=0 \\ \dfrac{\partial^2 F(x,y,z,\lambda)}{\partial\lambda^2}=0 \end{cases}$

[单参数平面族的包络面]

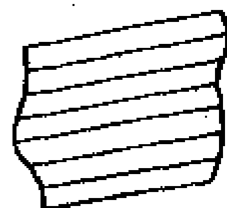
定义与性质	方程与图形
可展曲面 单参数平面族的包络面称为族的可展曲面. 包络面是空间曲线的切线所构成的曲面、锥面或柱面(图(a), (b), (c))	单参数平面族方程为 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{\alpha}(\lambda)+p(\lambda)=0$ (λ为参数) 其包络面满足方程组 $\begin{cases} \boldsymbol{r}\boldsymbol{\alpha}(\lambda)+p(\lambda)=0 \\ \boldsymbol{r}\boldsymbol{\alpha}'(\lambda)+p'(\lambda)=0 \end{cases}$ 式中 $\boldsymbol{\alpha}(\lambda)$ 为平面族的法矢量



(a)

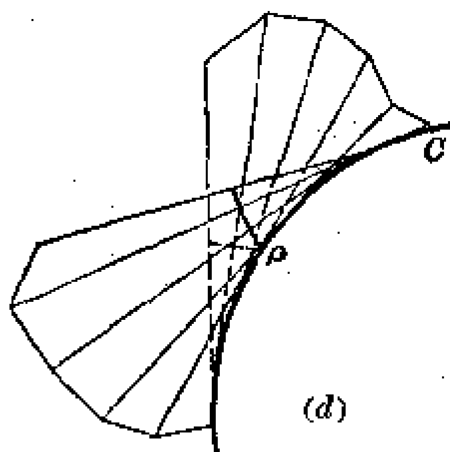


(b)



(c)

定义与性质	方程与图形
脊线 平面族中两个邻近平面的交线的极限位置称为族的特征线，特征线的包络(如果存在)称为族的脊线，它把包络面分为两叶，以脊线作为曲面的"尖锐的棱边"(图(*d*))	脊线满足方程组 $\begin{cases} ra+p=0 \\ ra'+p'=0 \\ ra''+p''=0 \end{cases}$



例 一条空间曲线C的法面的包络面称为C的配极可展曲面，它是曲率轴(即通过曲率中心并平行于副法线)的轨迹．脊线的方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\rho\boldsymbol{n}+\tau\rho'\boldsymbol{b}$$

式中ρ为曲线C的曲率半径，τ为曲线C的挠率半径，$\rho'=\dfrac{d\rho}{ds}$．

[空间曲线的渐开线与渐屈线]

定义与性质	方程与图形
渐开线 在一条空间曲线$\boldsymbol{r}(s)$的可展曲面上与曲线$\boldsymbol{r}(s)$正交的曲线称为$\boldsymbol{r}(s)$的渐开线． 沿$\boldsymbol{r}(s)$的切线上两条渐开线之间的距离保持不变(右图)	$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+(c-s)\boldsymbol{t}$ (c为常数)

定义与性质	方程与图形
渐屈线　空间曲线 $r(s)$ 对它的渐开线而言就是渐屈线，也就是渐开线的一族法线的包络. 渐屈线 C_1 的一点 M_1 落在 C 的对应点 M 的曲率轴上（上页下图） 如果这族法线组成可展曲面时，则在法面上旋转一个定角，所得到的法线仍然组成一个可展曲面（右图）	$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\rho\boldsymbol{n}+\rho\operatorname{tg}\varphi\boldsymbol{b}$ 式中 ρ 为曲率半径，φ 为渐屈线的切线与主法线的交角 $r(s)$ 渐屈线　φ　渐开线

§ 12　一 般 曲 面

一、曲面的方程与曲线坐标

曲面方程的形式有

隐　式　$F(x, y, z)=0$

显　式　$z=f(x, y)$

参数式　$\begin{cases}x=x(u, v)\\ y=y(u, v)\\ z=z(u, v)\end{cases}$

矢量式　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$

或 $\boldsymbol{r}=x(u, v)\boldsymbol{i}+y(u, v)\boldsymbol{j}+z(u, v)\boldsymbol{k}$

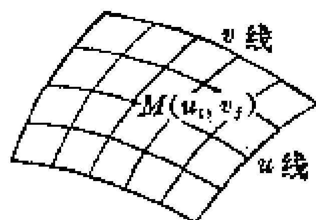


图　7.23

对于参数式或矢量式表示的曲面，如果取 v 为一列数值 $v_1, v_2, \cdots$，而让 u 连续变动，则 $\boldsymbol{r}(u, v_i)(i=1, 2, \cdots)$ 表示一族曲线，称为 u 线（图 7.23）；同样，如果取 u 为一列数值 $u_1, u_2, \cdots$，而让 v 连续变动，则 $\boldsymbol{r}(u_i, v)(i=1, 2, \cdots)$ 表示另一族曲线，称为 v 线. u 线与 v 线在曲面上构成曲线网，称为坐标线或坐标网. 于是 $u=u_i$, $v=v_j$ 这个数对就可以确定曲面上一点 M，这数对 (u_i, v_j) 称为点 M 的曲线坐标（或高斯坐标）.

二、切面、法线与曲面的方向

［法线单位矢量］　通过曲面上一点 M 的所有曲面曲线（即该曲面上的曲

线），在点M的切线落在同一平面上（奇点除外），称这平面为曲面在点M的切面。通过点M与切面垂直的直线称为曲面在点M的法线。

切面通过的矢量

$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \text{和} \boldsymbol{r}_v=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$$

称为坐标矢量，它们分别是u线和v线在点M的切矢量(图 7.24)。

曲面上点M的法线单位矢量为

$$\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

这里为了区别曲线的法线单位矢量和曲面的法线单位矢量，前者以$\boldsymbol{n}$表示，后者以$\boldsymbol{N}$表示。

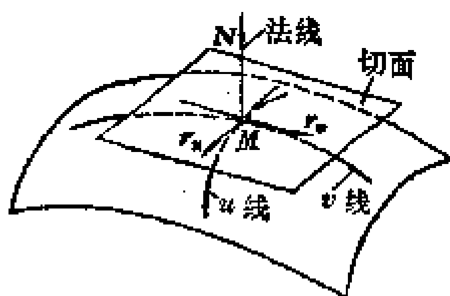


图　7.24

[曲面的方向]　曲面的方向规定如下：朝$\boldsymbol{N}$的正向那一面是曲面的正面(图 7.24 中看到的一面)；另一面为反面。

[曲面的切面方程与法线方程]

曲面方程	切面方程	法线方程
$F(x,y,z)=0$	$F'_{x_0}\cdot(x-x_0)+F'_{y_0}\cdot(y-y_0)+F'_{z_0}\cdot(z-z_0)=0$	$\dfrac{x-x_0}{F'_{x_0}}=\dfrac{y-y_0}{F'_{y_0}}=\dfrac{z-z_0}{F'_{z_0}}$
$z=f(x,y)$	$z-z_0=z_{x_0}\cdot(x-x_0)+z_{y_0}\cdot(y-y_0)$	$\dfrac{x-x_0}{z_{x_0}}=\dfrac{y-y_0}{z_{y_0}}=\dfrac{z-z_0}{-1}$
$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$	$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_{u_0} & y_{u_0} & z_{u_0}\\ x_{v_0} & y_{v_0} & z_{v_0}\end{vmatrix}=0$	$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}y_{u_0} & z_{u_0}\\ y_{v_0} & z_{v_0}\end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}z_{u_0} & x_{u_0}\\ z_{v_0} & x_{v_0}\end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}x_{u_0} & y_{u_0}\\ x_{v_0} & y_{v_0}\end{vmatrix}}$
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$	$((\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_{u_0}\boldsymbol{r}_{v_0})=0$ 或 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{N}_0=0$	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda(\boldsymbol{r}_{u_0}\times\boldsymbol{r}_{v_0})$ 或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{N}_0$ 式中λ为参数

表中F_{x_0}，z_{x_0}，x_{u_0}分别表示$\dfrac{\partial F}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial x}{\partial u}$在点$M(x_0,y_0,z_0)$的值，$\boldsymbol{r}_0$是点$M$的矢径，$\boldsymbol{r}_{u_0}$，$\boldsymbol{r}_{v_0}$分别表示$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$在点$M$的值，$\boldsymbol{N}_0$为点$M$的法线单位矢量。

[曲面的奇点] 若曲面 $F(x,y,z)=0$ 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的三个偏导数同时等于零，即

$$F'_{x_0}=F'_{y_0}=F'_{z_0}=0$$

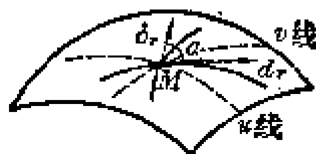
则称点 M 为该曲面的奇点.

三、第一基本二次型与曲面的度量

[第一基本二次型与第一基本量]

曲面方程	第一基本二次型与第一基本量
$z=f(x,y)$	$ds^2=E\,dx^2+2F\,dxdy+G\,dy^2$ 式中 $E=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$, $F=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$ $G=1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ ds 为点 $M(x,y,z)$ 处的弧的微分，ds^2 称为第一基本二次型，E,F,G 称为第一基本量
$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$ 或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$	$ds^2=\|d\boldsymbol{r}\|^2=E\,du^2+2F\,dudv+G\,dv^2$ 式中 $E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\boldsymbol{r}_u^2$ $F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v$ $G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=\boldsymbol{r}_v^2$ 第一基本量 E,F,G 都在点 M 处取值. 曲面上每点（奇点除外）的第一基本二次型是正定的，即 $E>0,\ G>0,\ EG-F^2>0$

［曲面上的弧长、面积、夹角等计算公式］

各量与图形	计算公式
曲面曲线的弧长 L $\begin{cases}u=u(t)\\v=v(t)\end{cases}$	$L=\int_{t_0}^{t_1}ds=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}dt$
曲面面积 S （由曲线围成）	$S=\iint_S dS=\iint_S\sqrt{EG-F^2}dudv$
曲线夹角 α （两条曲线交于点 M） 	$\cos\alpha=\frac{dr\cdot\delta r}{\sqrt{(dr)^2(\delta r)^2}}=\Theta$

式中
$$\Theta=\frac{Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}$$
E,F,G 为曲面的第一基本量（在点 M 取值）．坐标线 $u=$ 常数和 $v=$ 常数的交角 θ 决定于
$$\cos\theta=\frac{F}{\sqrt{EG}}$$
因此坐标线正交的充分必要条件是：$F=0$

［曲面的变形］ 保持曲面曲线长度不变的变换称为曲面的变形．具有相同的第一基本二次型的两个曲面 S,S' 称为贴合的或等距的．从 S 到 S' 和从 S' 到 S 的这种变换都称为等距变换．关于曲面的几何量经过等距变换不变者都称为等距不变量．

等距变换的一种具体表现是把一个曲面连续弯曲而保持曲面曲线的长度不变，使这个曲面最后与另一个曲面相贴合；因此，等距变换又称为变形．

从定义可以推出，两个曲面互为变形的充分必要条件是：经过适当地选择参数后，它们具有相同的第一基本二次型．

四、第二基本二次型与曲面曲线的曲率

[第二基本二次型与第二基本量]

曲面方程	第二基本二次型与第二基本量
$z=f(x,y)$	$\varphi_2=L\,dx^2+2M\,dx\,dy+N\,dy^2$ 式中 $L=\frac{r}{h},\quad M=\frac{s}{h},\quad N=\frac{t}{h}$ $r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ $p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad h=\sqrt{1+p^2+q^2}$ φ_2 称为第二基本二次型，L,M,N 称为第二基本量
$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$ 或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$	$\varphi_2=\boldsymbol{N}d^2\boldsymbol{r}=-d\boldsymbol{N}d\boldsymbol{r}=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$ $L=-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{N}_u=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\begin{vmatrix}x_{uu}&y_{uu}&z_{uu}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$ $M=-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{N}_v=\frac{(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\begin{vmatrix}x_{uv}&y_{uv}&z_{uv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$ $N=-\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{N}_v=\frac{(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\begin{vmatrix}x_{vv}&y_{vv}&z_{vv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$ 式中偏导数 $x_{uv}=\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$ 等在点 $M(x,y,z)$ 取值，E,F,G 为第一基本量，$\boldsymbol{N}$ 为曲面在点 M 的法线单位矢量. φ_2 表示曲面上两个无限邻近点中，一点到另外一点的切面的距离的主要部分的两倍，它表明曲面与切面的离差的特征，也反映曲面在空间中的弯曲程度

[主法截线(主方向、主曲率半径与脐点)]　通过曲面上一点M的法线的平面与曲面的交线($C_{法}$)都称为点M的法截线. 所以通过曲面上一点的法截线有无穷多条，给定点M的一个切线方向就有一条确定的法截线. 在点M的法截线中曲率最大和最小的两条分别记为C_1, C_2, 它们称为主法截线，C_1, C_2在点M所对应的切线方向称为主方向，这两个方向互相垂直. C_1, C_2的曲率半径(R_1, R_2)称为主曲率半径，它们等于下列方程的两个根:

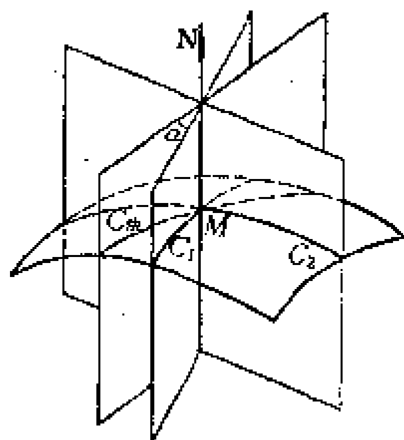


图　7.25

对于曲面 $z=f(x,y)$，方程为

$$(rt-s^2)R^2+h[2pqs-(1+p^2)t-(1+q^2)r]R+h^4=0$$

式中　p, q, r, s, t, h 见上页表.

对于曲面 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$，方程为

$$(LN-M^2)R^2-(EN-2FM+GL)R+(EG-F^2)=0$$

式中 E, F, G为曲面的第一基本量，L, M, N为曲面的第二基本量.

主曲率半径相等的点称为曲面的脐点，在脐点上

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}$$

[曲率线与罗德里克公式]　主方向$\frac{dv}{du}$是二次方程

$$(GM-FN)\left(\frac{dv}{du}\right)^2+(GL-EN)\frac{dv}{du}+(FL-EM)=0$$

的两个根. 满足这个微分方程的曲面曲线称为曲率线. 曲率线上每点的切线方向都是主方向，曲率线构成曲面上一个正交曲线网. 曲率线还有如下的一个特征:

一条曲面曲线C是曲率线的充分必要条件是: 沿C的曲面法线组成一个可展曲面，即当C上的点M变动时，曲面在M点的法线有包络线C_1.

这个特征也可表示为

$$d\boldsymbol{r}+\lambda\,d\boldsymbol{N}=0\ (\lambda\text{为参数})$$

这个公式称为罗得里克公式.

五、曲面曲线的曲率半径

[法截线的曲率半径与欧拉公式]　设

$$R_{法}=\frac{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}$$

右边为正时，表示法截线的法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 与曲面的法线单位矢量 $\boldsymbol{N}$ 一致，则法截线的曲率半径为 $R_{法}$；右边为负时，表示 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 相反，则法截线的曲率半径为 $-R_{法}$。

若通过法截线 $C_{法}$ 的截平面与通过主法截线 C_1 的截平面之间的夹角为 α，则

$$\frac{1}{R_{法}}=\frac{\cos^2\alpha}{R_1}+\frac{\sin^2\alpha}{R_2}$$

式中 R_1，R_2 为主曲率半径，$\frac{1}{R_{法}}$ 称为法曲率，这个等式称为欧拉公式。

［任意平截线的曲率半径］ 用通过点 M 的任意平面 π 截曲面得截线 C（图 7.26），它在点 M 的切线为 PQ，曲线 C 的法线单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，通过直线 PQ 和曲面的法线单位矢量 $\boldsymbol{N}$ 作一平面 $\pi_{法}$，截曲面得法截线 $C_{法}$。若矢量 $\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 夹角为 φ，而 $C_{法}$ 的曲率半径为 $R_{法}$，则截线 C 的曲率半径为

$$R_C=|R_{法}\cos\varphi| \tag{1}$$

［曲面上任意曲线的曲率半径与梅尼埃定理］

设曲面上任意曲线 B 上一点 M 的密切面与曲面交线为 C，则曲线 B 的曲率半径 ρ 等于截线 C 的曲率半径 R_C，于是从式(1)得到梅尼埃定理：曲面上任意曲线 B 的曲率半径等于在曲面法线上所截取的对应法截线的曲率半径在曲线 B 的主法线上的正射影。

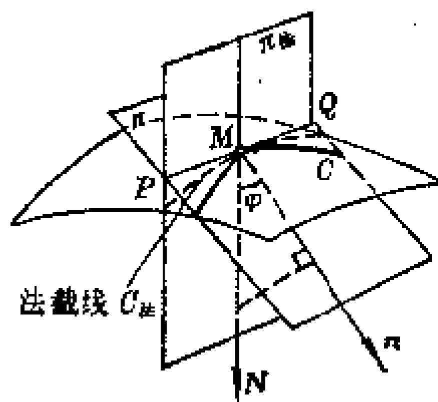


图 7.26

六、第三基本二次型与曲面的曲率

［第三基本二次型与第三基本量］

$$\varphi_3=(d\boldsymbol{N})^2=E_0du^2+2F_0dudv+G_0dv^2$$

称为第三基本二次型，式中 $\boldsymbol{N}$ 为曲面的法线单位矢量，

$$E_0=\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u}\right)^2,\quad F_0=\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial u}\,\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial v},\quad G_0=\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial v}\right)^2$$

称为第三基本量。

[曲面的平均曲率与总曲率(或高斯曲率)]

曲面方程	曲率定义	公　式
$r=r(u,v)$	主曲率的平均数称为平均曲率，记作H，$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ 主曲率的乘积称为总曲率（或高斯曲率），记作 K，$K=\frac{1}{R_1R_2}$	$H=\frac{1}{2}\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}$ $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\sqrt{\frac{E_0G_0-F_0^2}{EG-F^2}}$
$z=f(x,y)$		$H=\frac{1}{2}\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$ $K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$ 式中 p,q,r,s,t 见前表

注：1° R_1,R_2,H和K都是曲面上点的函数，与所取的曲线坐标u,v无关.

2° $K>0$ 的点称为椭圆点，这种点邻近的曲面在该点切面的同侧；$K<0$ 的点称为双曲点，这种点邻近的曲面象马鞍形；$K=0$ 的点称为抛物点，这种点邻近的曲面象半马鞍形.

3° 三个基本二次型 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 有如下的线性关系：

$$K\varphi_1-2H\varphi_2+\varphi_3=0$$

或

$$E_0=-KE+2HL$$
$$F_0=-KF+2HM$$
$$G_0=-KG+HN$$

七、渐近曲线、共轭曲线与极小曲面

[渐近曲线] 在曲面上一点$M(u,v)$的法曲率$\frac{1}{R_{法}}$等于零的方向$\frac{dv}{du}$称为渐近方向．假定一条曲面曲线C上所有点的切线方向都是渐近方向，则称C为曲面的一条渐近曲线．$\frac{dv}{du}$是渐近方向的条件是第二基本二次型等于零：

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0$$

或

$$r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0$$

这就是渐近曲线的微分方程．这种曲线有一个简单的几何特征：

渐近曲线的密切面与曲面的切面一致．

由此可见，渐近曲线在其上一点与曲面构成二阶接触．

此外还有爱涅勃定理：

渐近曲线的挠率 $\kappa=\pm\sqrt{-K}$，K为曲面的总曲率（$K>0$时，无渐近曲线）．

［共轭曲线］　在曲面上一点$M(u,v)$的两个方向 $\frac{dv}{du}$ 与 $\frac{\delta v}{\delta u}$ 满足

$$L+M\left(\frac{dv}{du}+\frac{\delta v}{\delta u}\right)+N\frac{dv}{du}\frac{\delta v}{\delta u}=0$$

则称它们互为共轭方向．

渐近方向是自己共轭的．

曲面上一条曲线C的切面族的特征线的方向为C的切线的共轭方向．

满足上面的微分方程的两族曲线构成的网称为共轭网．

［极小曲面］　平均曲率$H(u,v)=0$的曲面称为极小曲面，它也可定义为张在已知边界上面积最小的曲面．一个曲面为极小曲面的充分必要条件是：渐近曲线构成正交网．

注意：坐标线（u＝常数和v＝常数）是共轭的充分必要条件是：$M=0$；坐标线是曲率线的充分必要条件是：$F=M=0$；坐标线是渐近曲线的充分必要条件是：$L=N=0$．

八、曲面的基本公式与基本方程

［高斯公式与外因格尔登公式］　设曲面的参数方程为$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，在曲面上每点$M$取三个不共面的矢量$\boldsymbol{r}_u$，$\boldsymbol{r}_v$，$\boldsymbol{N}$，由这三个矢量组成的三面形称为曲面的活动标架或伴随三面形；要注意，这里$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$不互相垂直，但它们都在切面上而垂直于法线单位矢量$\boldsymbol{N}$．

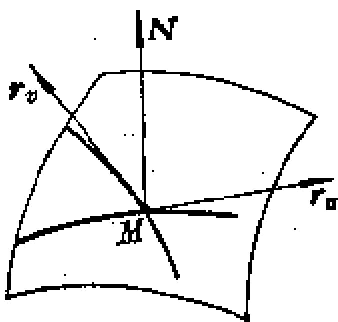


图　7.27

可以把$\boldsymbol{r}_u$,$\boldsymbol{r}_v$,$\boldsymbol{N}$关于u，v的偏导数表示为下列形式的线性组合：

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_{uu}=\Gamma_{11}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{11}^{2}\boldsymbol{r}_v+L\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{r}_{uv}=\Gamma_{12}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{12}^{2}\boldsymbol{r}_v+M\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{r}_{vv}=\Gamma_{22}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{22}^{2}\boldsymbol{r}_v+N\boldsymbol{N}\end{cases}\quad(1)$$

$$\begin{cases} N_u = \dfrac{MF-LG}{EG-F^2}r_u + \dfrac{LF-ME}{EG-F^2}r_v \\ N_v = \dfrac{NF-MG}{EG-F^2}r_u + \dfrac{MF-NE}{EG-F^2}r_v \end{cases} \tag{2}$$

式中 E, F, G 和 L, M, N 分别为曲面的第一和第二基本量；六个系数 Γ_{ij}^{k} 称为第一基本二次型的第二类克里斯托弗尔记号，它们的表达式是

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{11}^{2} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{12}^{2} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{22}^{2} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}$$

方程组(1)称为曲面的偏微分方程，又称为高斯公式；方程组(2)称为外因格尔登公式；(1)、(2)合称为曲面的基本公式。这些公式的特点是，把矢量 r_u, r_v, N 的导数用矢量 r_u, r_v, N 本身的线性组合来表达，其系数仅与曲面的第一、第二基本量有关。

[高斯方程与柯达奇方程]　方程组(1)的可积条件为

$$\begin{cases} KF = (\Gamma_{12}^{1})_u - (\Gamma_{11}^{1})_v + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} \\ KE = (\Gamma_{11}^{2})_v - (\Gamma_{12}^{2})_u + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{22}^{1}\Gamma_{11}^{2} - (\Gamma_{12}^{2})^2 \\ KG = (\Gamma_{22}^{1})_u - (\Gamma_{12}^{1})_v + \Gamma_{22}^{2}\Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{22}^{1}\Gamma_{11}^{1} - \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1} - (\Gamma_{12}^{1})^2 \\ KF = (\Gamma_{12}^{2})_v - (\Gamma_{22}^{2})_u + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{22}^{1}\Gamma_{11}^{2} \end{cases} \tag{3}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial v} - \dfrac{\partial M}{\partial u} = L\Gamma_{12}^{1} + M(\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1}) - N\Gamma_{11}^{2} \\ \dfrac{\partial M}{\partial v} - \dfrac{\partial N}{\partial u} = L\Gamma_{22}^{1} + M(\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{1}) - N\Gamma_{12}^{2} \end{cases} \tag{4}$$

方程组(2)的可积条件是(4)。方程组(4)称为柯达奇方程。

从(3)可以得到下列定理：

1° 高斯定理　曲面的总曲率 K 可以用第一基本量和它们的一阶，二阶偏导数来表示；因而总曲率是曲面的一个等距不变量。

2° 在等距对应下，曲面的对应点必有相同的总曲率。

这个重要结果表明，总曲率不同的两个曲面具有很大的差别性，即使允许曲面经过任意的弯曲，也不能使这两个曲面互相贴合。

总曲率 K 以 E，F，G 的表达式称为高斯方程，与柯达奇方程合并起来称为曲面的基本方程。

[波恩涅定理] 给定任意两个二次型

$$\varphi_1 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$\varphi_2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

其中 φ_1 是正定的，假定 φ_1 和 φ_2 的系数满足高斯方程和柯达奇方程，则除了空间位置的差别外，唯一地存在一个曲面，以 φ_1 和 φ_2 分别作为它的第一和第二基本二次型.

九、曲面曲线的测地曲率、测地线与测地坐标

[测地曲率与贝尔特拉米公式] 设 M 为曲面 S 上一点，C 为 S 上通过点 M 的一条曲线，π 为 S 在 M 的切面，$\bar{C}$ 为 C 在 π 上的正射影，则 $\bar{C}$ 在 M 的曲率称为 C 在 M 的测地曲率，记作 $\frac{1}{R_{测}}$.

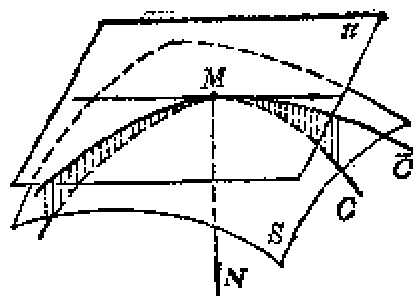


图 7.28

设曲面 S 的参数方程为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$，曲面曲线 C 的方程为 $u = u(t)$，$v = v(t)$，则 C 的测地曲率

$$\frac{1}{R_{测}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{\frac{3}{2}}}(\ddot{u}\dot{v} - \ddot{v}\dot{u} + A\dot{v} - B\dot{u}) \tag{1}$$

式中 $$A = \Gamma_{11}^{1}\dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^{1}\dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^{1}\dot{v}^2$$

$$B = \Gamma_{11}^{2}\dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^{2}\dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^{2}\dot{v}^2$$

如果曲线 C 以弧长 s 为参数，则

$$\frac{1}{R_{测}} = \sqrt{EG - F^2}\,(u''v' - v''u' + Av' - Bu') \tag{2}$$

式中

$$A = \Gamma_{11}^{1}u'^2 + 2\Gamma_{12}^{1}u'v' + \Gamma_{22}^{1}v'^2$$

$$B = \Gamma_{11}^{2}u'^2 + 2\Gamma_{12}^{2}u'v' + \Gamma_{22}^{2}v'^2$$

公式(1)和(2)称为测地曲率的贝尔特拉米公式.

测地曲率是等距不变量.

[测地线] 如果一条曲面曲线 C 上每点的测地曲率都等于零，则称 C 为曲面上的一条测地线.

测地线的微分方程是

$$\ddot{u}\dot{v} - \ddot{v}\dot{u} + A\dot{v} - B\dot{u} = 0$$

也可写为

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\Gamma_{11}^1\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma_{12}^1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2v}{ds^2}+\Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\Gamma_{12}^2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\Gamma_{22}^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

或

$$\frac{d^2v}{du^2}=\Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{du}\right)^3+(2\Gamma_{12}^1-\Gamma_{22}^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2+(\Gamma_{11}^1-2\Gamma_{12}^2)\frac{dv}{du}-\Gamma_{11}^2$$

对于曲面 $z=f(x,y)$上的测地线的微分方程为

$$(1+p^2+q^2)\frac{d^2y}{dx^2}=pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+(2ps-qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(pr-2qs)\frac{dy}{dx}-qr$$

式中p，q，r，s，t见前表。

测地线具有性质：

1° 测地线在每点M的曲率小于与它在M相切的任何曲线在M的曲率。

2° 如果把曲面曲线C的可展曲面变成平面时，那末只有测地线所对应的曲线是直线。

3° 一条曲面曲线C是测地线的充分必要条件是：在C上每点的主法线与该点的曲面法线重合，即C的密切面包含曲面法线。

4° 如果两个曲面沿一共同曲线C相切，假设C是其中一个曲面的测地线，则C也是另一个曲面的测地线。

5° 通过曲面上每点沿每一方向有一条且只有一条测地线。

6° 在充分小的邻域里，测地线是短程线，即连接曲面上两个邻近点的一切曲面曲线中，测地线的长度为最短。

[测地坐标]　若取坐标线 $u=$常数为测地线 $v=$常数的正交轨线，则称(u,v)为测地坐标，这族正交轨线称为测地平行线，这时

$$ds^2=du^2+G(u,v)dv^2$$

以测地坐标表示的总曲率为

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=\frac{G_u^2-2GG_{uu}}{4G^2}$$

若测地线$v=$常数交于一点O，v表示测地线v和测地线$v=0$的交角，则称(u,v)为测地极坐标，这时的测地平行线称为测地圆，其半径等于u。

[高斯-波恩涅公式]　设G为曲面S上一个单连通区域，G的边界C是一条逐段光滑并无自交点的闭曲线，其运行的方向是使G总是在它的左侧。

设$\frac{1}{R_{测}}$表示曲线C上任一点的测地曲率，dS为曲面面积元素，α_1，α_2，…，α_n

分别为C的角点$A_1, A_2, \cdots, A_n$的内角(图7.29)，则在G上的二重积分

$$\iint_G K\,dS = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - (n-2)\pi - \oint_C \frac{1}{R_{测}}\,ds$$

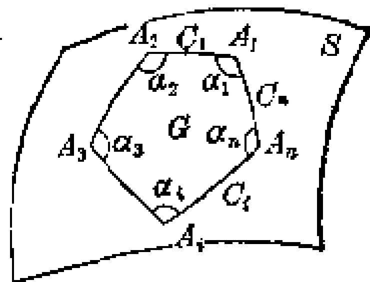


图 7.29

这称为高斯-波恩涅公式．特别

1° 如果C是一条正则曲线（即无角点)，这时$n=0$，则

$$\iint_G K dS = 2\pi - \oint_C \frac{1}{R_{测}} ds$$

2° 如果C是由n条测地线C_1, C_2, …, C_n组成的测地多角形，这时$\left(因\frac{1}{R_{测}}=0\right)$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = (n-2)\pi + \iint_G K dS$$

当$n=3$时，C为由三条测地线组成的测地三角形，这时

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \pi + \iint_G K dS$$

因此，$K>0$的曲面上的测地三角形三内角之和大于π；$K<0$的曲面上测地三角形三内角之和小于π；$K=0$的曲面上测地三角形三内角之和等于π。

第八章　矢量算法与场论初步·张量算法与黎曼几何初步

本章包括两个部分.

第一部分是矢量代数、矢量分析及其在场论中的应用. 主要内容有：矢量的概念、矢量的算法与矢量的坐标表示；以矢量作为工具介绍了场论中的一些基本内容. 例如梯度、散度与旋度等基本概念及其计算公式和性质，以及它们在不同坐标系中的表达式；叙述了矢量的积分定理（高斯公式、斯托克斯公式和格林公式）；引进了仿射坐标系，阐述了三维空间中的协变矢量和逆变矢量，同时把这些概念推广到 n 维空间中去.

第二部分是张量代数、张量分析及其在黎曼几何中的应用. 介绍了张量的概念和一些张量算法，然后以张量作为工具来阐述仿射联络空间的基本内容. 例如，仿射联络、矢量和张量的平行移动，及协变微分法与自平行曲线等；并在 n 维空间中引进度量的概念，来定义黎曼空间，从而由具有特殊条件的仿射联络引出了黎曼联络，于是有关仿射联络空间中的一些性质可以搬到黎曼空间中来. 可是，因为黎曼空间是由度量定义的，所以与度量有关的一些性质在仿射联络空间中是没有的.

§1　矢量算法

一、矢量代数

［矢量概念］　只有大小的量称为标量（也称为数量或纯量）. 例如温度、时间、质量、面积、能量等都是标量.

具有大小和方向的量称为矢量（也称为向量）. 例如力、速度、力矩、加速度、角速度、动量等都是矢量.

在几何中的有向线段就是一个直观的矢量. 通常用空间中的有向线段 AB 来表示矢量. 用长度 $|AB|$ 表示大小，用端点的顺序 $A\to B$ 表示方向. A 称为始点，B 称为终点，这个矢量记作 $\overrightarrow{AB}$，或用黑正体字母 $\mathbf{a}$ 表示. 矢量的大小（或长度）的数值称为它的模或绝对值. 用记号 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$ 表示.

矢量按其效能可分成三种基本类型：

具有大小和方向而无特定位置的矢量称为自由矢量．例如力偶．

沿直线作用的矢量称为滑动矢量．例如作用于刚体的力．

作用于一点的矢量称为束缚矢量．例如电场强度．

在这里所讨论的矢量，除特别说明外，都指自由矢量，就是说，所有方向相同、长度相等的矢量，不管始点如何，都看作相同的矢量．

模等于 1 的矢量称为单位矢量．

模等于零的矢量称为零矢量，记作 $\mathbf{0}$，它是始点和终点重合的矢量．

模与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的矢量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负矢量，记作 $-\boldsymbol{a}$．

始点与原点 O 重合而终点位于一点 M 的矢量 $\overrightarrow{OM}$（图 8.1）称为点 M 的矢径（或向径），记作 $\boldsymbol{r}$．原点称为极点．如果 M 的直角坐标为 x, y, z，则有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

式中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正向单位矢量，称为坐标单位矢量（或基本矢量）．

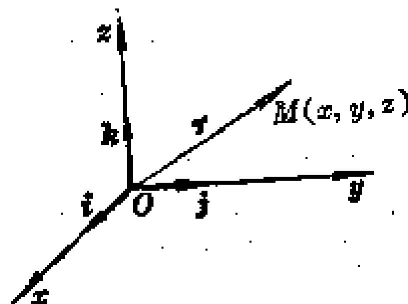


图　8.1

［矢量的基本公式］

名　称	公　式	图　形
矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示	$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ $=(a_x, a_y, a_z)$	
坐标单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的坐标表示	$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$ $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$ $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$	
零矢量的坐标表示	$\mathbf{0}=(0,0,0)$（$\mathbf{0}$ 无方向）	
$\boldsymbol{a}$ 的长度（或模）$\|\boldsymbol{a}\|$	$\|\boldsymbol{a}\|=a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$	
$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦（α, β, γ 为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角）	$\frac{\cos\alpha}{a_x}=\frac{\cos\beta}{a_y}=\frac{\cos\gamma}{a_z}$ $=\frac{1}{a}$	

名　称	公　式	图　形
矢量 $\overrightarrow{AB}$（两端点 A, B 的坐标分别为 (a_x,a_y,a_z), (b_x,b_y,b_z)）	$\overrightarrow{AB}=(b_x-a_x)\boldsymbol{i}+(b_y-a_y)\boldsymbol{j}+(b_z-a_z)\boldsymbol{k}$	$B(b_x,b_y,b_z)$, $A(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, O, x, y, z

［加法］ 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$$

把矢量的始点移到原点 O，以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形，由原点作出的对角线就表示和矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（称为平行四边形法则，见图 8.2）；或者把二矢量首尾相接，由始点到终点的矢量即为和矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（称为三角形法则，见图 8.3）。

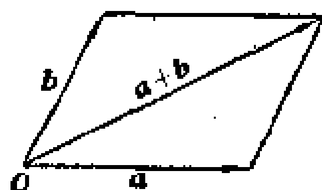


图　8.2

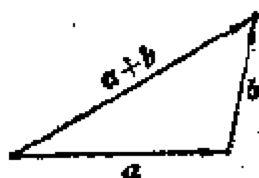


图　8.3

加法运算适合如下规律：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　　　　（交换律）

$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$　　　　（结合律）

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

［减法］ 若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z)$$

把矢量 $\boldsymbol{b}$ 的负矢量与矢量 $\boldsymbol{a}$ 相加，得矢量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图 8.4）。

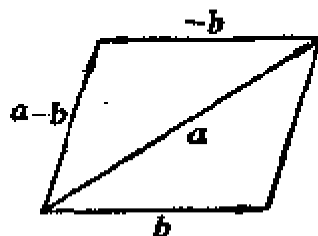


图　8.4

对任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 成立三角形不等式：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

［数乘］ 以实数 λ 乘矢量 $\boldsymbol{a}$ 称为数乘，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$。当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 的模伸缩 λ 倍，方向保持不变；当 $\lambda<0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 的模伸缩 $|\lambda|$ 倍，而方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反（图 8.5）。如果 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 则

$$\lambda a=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

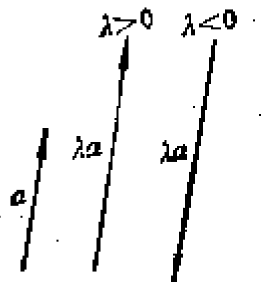


图 8.5

设 λ, μ 为两实数, a, b 为两矢量, 则数乘运算适合下列规律:

$$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a \qquad \text{(结合律)}$$

$$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a \qquad \text{(分配律)}$$

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b \qquad \text{(分配律)}$$

[矢量的分解]

1° 设 a, b, c 为三个共面的矢量, 而 b 和 c 为非共线矢量, 如果把它们移到公共始点 O, 由矢量 c 的终点 C 作两条平行于 a, b 的直线, 各交 a, b (或延长线)于 M, N(图 8.6), 则

$$c=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda a+\mu b$$

这称为矢量 c 对 a, b 的分解.

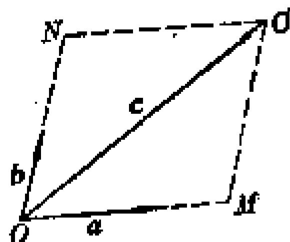


图 8.6

2° 设 a, b, c 为非共面矢量, 而 d 为任一矢量, 把它们移到公共始点 O, 由矢量 d 的终点 D 作三个平面分别平行于 (b, c)平面, (c, a)平面和(a, b)平面, 且与 a, b, c (或延长线)分别交于 L, M, N(图 8.7), 则

$$d=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda a+\mu b+\nu c$$

称为矢量 d 对 a, b, c 的分解.

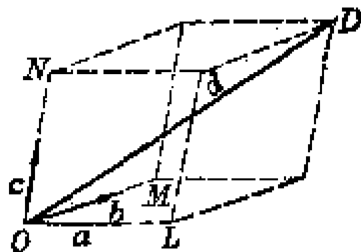


图 8.7

3° 如果两个非零矢量 a 与 b 有线性关系

$$\lambda a+\mu b=0$$

式中 λ, μ 不全为 0, 则称这两个矢量共线 (即 $a /\!/ b$); 反之也真. 称这两个矢量 a, b 为线性相关.

4° 设 a, b 为两个非零矢量, 若 $\lambda a+\mu b=0$, 则有 $\lambda=0, \mu=0$, 这时称 a, b 为线性无关.

5° 若三个非零矢量 a, b, c 有线性关系 $\lambda a+\mu b+\nu c=0$, 式中 λ, μ, ν 不全为零, 则这三个矢量共面, 反之也真. 这时, 称 a, b, c 为线性相关. 如果 a, b, c 为三个非零矢量, 而 $\lambda a+\mu b+\nu c=0$, 则有 $\lambda=\mu=\nu=0$, 这时, 称 a, b, c 为线性无关.

6° 四个(或四个以上)矢量 a, b, c, d 必有线性关系; 就是说它们一定线性相关. 这时, 必有不全为 0 的四个数 λ, μ, ν, ξ, 成立 $\lambda a+\mu b+\nu c+\xi d=0$.

[标量积 (数量积、点积、内积)] 设 $a=(a_x, a_y, a_z)$, $b=(b_x, b_y, b_z)$, $|a|=a$, $|b|=b$, a, b 两矢量的夹角为 θ, 则称数值 $ab\cos\theta$ 为矢量 a, b 的标

量积(也称为数量积、点积或内积). 记作

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{ab}=ab\cos\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

可以看作矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长度乘以矢量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的长度(图 8.8).

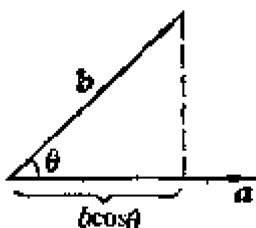


图 8.8

标量积运算适合以下的规律:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \quad \text{(交换律)}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \quad \text{(分配律)}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \quad \text{(数乘的结合律)}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=a^2$$

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零矢量, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$; 反之也真.

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \quad \text{(即对应坐标相乘之和)}$$

[矢量积(叉积、外积)]　设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $|\boldsymbol{a}|=a$, $|\boldsymbol{b}|=b$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两矢量的夹角为 θ, 则定义 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为两矢量的矢量积 (也称为叉积或外积), 它是一个矢量, 即长度等于以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积(图 8.9 阴影部分)

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=ab\sin\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

它的方向垂直于两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 并且 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系(图 8.9).

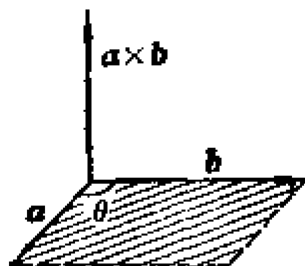


图 8.9

矢量积运算适合下列规律:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \quad \text{(反交换律)}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \quad \text{(分配律,次序不能交换)}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$[(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{b}=(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零矢量, 则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线(即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$)的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

[两矢量的夹角]

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|}$$

$$\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|}$$

[拉格朗日恒等式]

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

特别　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=a^2b^2-(\boldsymbol{ab})^2$

即　$(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2$

$$=(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2$$

[三个矢量的混合积]　设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$ 为三个矢量,则它们的混合积定义为

$$(\boldsymbol{abc})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$$=a_x(b_yc_z-b_zc_y)+a_y(b_zc_x-b_xc_z)+a_z(b_xc_y-b_yc_x)$$

混合积具有性质:

1°　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

注意,一般情况下等式

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

不成立.

2°　$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{cab})=-(\boldsymbol{acb})=-(\boldsymbol{bac})=-(\boldsymbol{cba})$

即有轮换性:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$=-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$$

3°　混合积$(\boldsymbol{abc})$是一个数，它的绝对值等于以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体的体积.

4°　三个矢量共面的充分必要条件是：$(\boldsymbol{abc})=0$.

[三重矢积]

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

采用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 轮换法还可推出其余两个同类公式.

[多重积的几个公式]

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{abd})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{abc})\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{cda})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{cdb})\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{abc})^2$$

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3\end{vmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}\ \ \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{abd})(\boldsymbol{cef})-(\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{def})$$

二、矢量分析

1. 矢量微分

[矢函数]　对于自变量 t(标量)的每一个数值都有变动矢量 $\boldsymbol{a}$ 的确定量(长度与方向都确定的一个矢量)和它对应，则变(矢)量 $\boldsymbol{a}$ 称为变量 t 的矢函数，记作

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f}(t)$$

矢函数也可表为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

式中

$$a_x=f_x(t),\quad a_y=f_y(t),\quad a_z=f_z(t)$$

为三个标函数.

若把变动矢量表成点M的矢径形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

则当 t 变动时，点M在空间中描出一条曲线，称为矢函数的矢端曲线. 它的坐标由三个等式给定:

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

[矢函数的极限与连续性]　若对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta>0$，使得当 $|t-t_0|<\delta$ 时

$$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|<\varepsilon$$

成立，则称 $\boldsymbol{r}_0$ 为矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{t\to t_0} r(t)=r_0$$

若 $\lim\limits_{t\to t_0} r(t)$存在，则

$$\lim_{t\to t_0} r(t)=\lim_{t\to t_0}x(t)\,i+\lim_{t\to t_0}y(t)\,j+\lim_{t\to t_0}z(t)k$$

若 $\lim\limits_{t\to t_0} r(t)=r(t_0)$，则称矢函数 $r(t)$在 $t=t_0$处连续。

[矢函数的导数与微分] 如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

存在，就称它为矢函数 $a=f(t)$的导数，记作$\frac{da}{dt}$. 矢函数 $a=f(t)$ 的导数仍为矢函数，从而还可求它的导数，即二阶导数，记作$\frac{d^2a}{dt^2}$，等等。

$$da=\frac{da}{dt}dt$$

称为矢函数 $a=f(t)$的微分。

[矢函数求导公式]

$$\frac{dc}{dt}=0\ (c\text{为常矢量})$$

$$\frac{d}{dt}(ka)=k\frac{da}{dt}\ (k\text{为常数})$$

$$\frac{d}{dt}(a+b+c)=\frac{da}{dt}+\frac{db}{dt}+\frac{dc}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi a)=\frac{d\varphi}{dt}a+\varphi\frac{da}{dt}\ (\varphi\text{是}\ t\ \text{的标函数})$$

$$\frac{d}{dt}(a\cdot b)=\frac{da}{dt}\cdot b+a\cdot\frac{db}{dt}\ (\text{顺序可以交换})$$

$$\frac{d}{dt}(a\times b)=\frac{da}{dt}\times b+a\times\frac{db}{dt}\ (\text{顺序不可以交换})$$

$$\frac{d}{dt}(abc)=\left(\frac{da}{dt}bc\right)+\left(a\frac{db}{dt}c\right)+\left(ab\frac{dc}{dt}\right)\ (\text{顺序不可以交换})$$

$$\frac{d}{dt}a[\varphi(t)]=\frac{da}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

（φ是 t 的标函数，这是复合函数的求导公式）

[矢径形式的矢函数求导公式] 设

$$r=r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$$

表示矢函数的矢端曲线，则

1° $\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}$

表示矢端曲线的切线矢量(图 8.10)，指向 t 增加的方向，式中 $\dot{x}=\frac{dx}{dt},\dot{y}=\frac{dy}{dt},$ $\dot{z}=\frac{dz}{dt}$

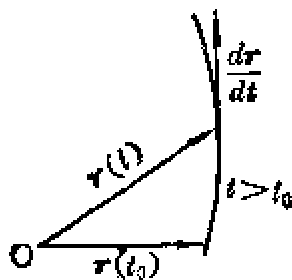


图 8.10

2° $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t}$

式中 s 为矢端曲线的弧长，$\boldsymbol{t}$ 为切线的单位矢量.

3° $\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}$

式中 $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2},\ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2},\ddot{z}=\frac{d^2z}{dt^2}$

[矢函数的泰勒公式]

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\dot{\boldsymbol{r}}(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(t)(\Delta t)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t)(\Delta t)^n$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{R}_n\ (\Delta t)^{n+1}$$

式中

$$\boldsymbol{R}_n=x^{(n+1)}(t_1)\boldsymbol{i}+y^{(n+1)}(t_2)\boldsymbol{j}+z^{(n+1)}(t_3)\boldsymbol{k}\quad(t<t_1,t_2,t_3<t+\Delta t)$$
$$\boldsymbol{r}^{(n)}(t)=x^{(n)}(t)\boldsymbol{i}+y^{(n)}(t)\boldsymbol{j}+z^{(n)}(t)\boldsymbol{k}$$
$$x^{(n)}=\frac{d^nx}{dt^n},\ y^{(n)}=\frac{d^ny}{dt^n},\ z^{(n)}=\frac{d^nz}{dt^n}$$

[矢量函数的几个常用性质]

1° 定长矢量 $\boldsymbol{r}(t)\perp\dot{\boldsymbol{r}}(t)$，反之也真. 从而切线的单位矢量 $\boldsymbol{t}$ 的导数与原矢量垂直.

2° 定向矢量 $\boldsymbol{r}(t)\,//\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)$，反之也真.

3° 一个变动矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 平行于一个定平面的充分必要条件是：混合积

$$(\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}})=0$$

2. 矢量积分

[不定积分] 设 $\boldsymbol{a}(t),\boldsymbol{b}(t)$ 为矢函数，则矢量微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{b}(t)}{dt}=\boldsymbol{a}(t)$$

的解

$$\int\boldsymbol{a}(t)\,dt=\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{c}\quad(\text{式中 }\boldsymbol{c}\text{ 为任意常矢量})$$

称为矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的不定积分.

[定积分] 设 $\boldsymbol{a}(t)$ 和 $\boldsymbol{b}(t)$ 为矢函数,则

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{a}(t)dt=\boldsymbol{b}(t_2)-\boldsymbol{b}(t_1)$$

称为矢函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的定积分,t_1, t_2 分别称为下、上限.

[平面面积矢量] 设

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}dx+\boldsymbol{j}dy+\boldsymbol{k}dz$$

则

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\oint_L\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}$$

式中 L 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 矢端所画的闭曲线, $\boldsymbol{S}$ 为 L 所包围的面积矢量, 原点在闭曲线 L 内.

§2 场论初步

一、场论的基本概念及梯度、散度与旋度

[标量场] 空间区域 D 的每点 $M(x,y,z)$ 对应一个数量值 $\varphi(x,y,z)$, 它在此空间区域 D 上就构成一个标量场, 用点 $M(x,y,z)$ 的标函数 $\varphi(x,y,z)$ 表示. 若 M 的位置用矢径 $\boldsymbol{r}$ 确定,则标量 φ 可以看作变矢 $\boldsymbol{r}$ 的函数 $\varphi=\varphi(\boldsymbol{r})$.

例如温度场 $u(x,y,z)$, 密度场 $\rho(x,y,z)$, 电位场 $e(x,y,z)$ 都是标量场.

[矢量场] 空间区域 D 的每点 $M(x,y,z)$ 对应一个矢量值 $\boldsymbol{R}(x,y,z)$, 它在此空间区域 D 上就构成一个矢量场. 用点 $M(x,y,z)$ 的矢量函数 $\boldsymbol{R}(x,y,z)$ 表示. 若 M 的位置用矢径 $\boldsymbol{r}$ 确定,则矢量 $\boldsymbol{R}$ 可以看作变矢 $\boldsymbol{r}$ 的矢函数 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})=X(x,y,z)\boldsymbol{i}+Y(x,y,z)\boldsymbol{j}+Z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

例如流速场 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$, 电场 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$, 磁场 $\boldsymbol{H}(x,y,z)$ 都是矢量场.

与标量场的情况一样,矢量场概念与矢函数概念,实质上是一样的. 沿用这些术语(标量场、矢量场)是为了保留它们的自身起源与物理意义.

[梯度]

$$\operatorname{grad}\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\nabla\varphi$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

式中 $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}$ 称为哈密顿 算子，也称为耐普拉算子。grad φ 有的书刊中记作 del φ.

grad φ 的方向与过点(x, y, z)的等量面 $\varphi=C$ 的法线方向N重合，并指向 φ 增加的一方，是函数 φ 变化率最大的方向，它的长度等于$\frac{\partial\varphi}{\partial N}$.

梯度具有性质：

$$\mathrm{grad}\,(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda\,\mathrm{grad}\,\varphi+\mu\,\mathrm{grad}\,\psi \quad (\lambda, \mu \text{ 为常数})$$

$$\mathrm{grad}\,(\varphi\psi)=\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi+\psi\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{grad}\,F(\varphi)=F'(\varphi)\mathrm{grad}\,\varphi$$

[方向导数]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=l\cdot\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma$$

式中$l=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为方向 l 的单位矢量，α, β, γ 为其方向角。

方向导数为 φ 在方向 l 上的变化率，它等于梯度在方向 l 上的投影。

[散度]

$$\mathrm{div}\,R=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\nabla\cdot R=\mathrm{div}(X, Y, Z)$$

式中∇ 为哈密顿算子。

散度具有性质：

$$\mathrm{div}(\lambda a+\mu b)=\lambda\,\mathrm{div}\,a+\mu\,\mathrm{div}\,b \quad (\lambda, \mu \text{ 为常数})$$

$$\mathrm{div}(\varphi a)=\varphi\,\mathrm{div}\,a+a\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{div}(a\times b)=b\cdot\mathrm{rot}\,a-a\cdot\mathrm{rot}\,b$$

[旋度]

$$\mathrm{rot}\,R=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)k$$

$$=\nabla\times R=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

式中∇ 为哈密顿算子，旋度也称涡度，rot R 有的书刊中记作 curl R.

旋度具有性质：

$$\mathrm{rot}(\lambda a+\mu b)=\lambda\,\mathrm{rot}\,a+\mu\,\mathrm{rot}\,b \quad (\lambda, \mu \text{ 为常数})$$

$\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{a})=\varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times \operatorname{grad}\varphi$

$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\operatorname{div}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\operatorname{div}\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$

[梯度、散度、旋度混合运算] 运算 grad 作用到一个标量场 φ 产生矢量场 $\operatorname{grad}\varphi$，运算 div 作用到一个矢量场 $\boldsymbol{R}$ 产生标量场 $\operatorname{div}\boldsymbol{R}$，运算 rot 作用到一个矢量场 $\boldsymbol{R}$ 产生新的矢量场 $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}$，这三种运算的混合运算公式如下：

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{R}=0$

$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0$

$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi$

$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{R}=\nabla(\nabla\boldsymbol{R})$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{R}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{R})$

$\operatorname{div}\operatorname{gard}(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi+\mu\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi$ （λ,μ 为常数）

$\operatorname{div}\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi+2\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi$

$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{R}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{R}=\Delta\boldsymbol{R}$

式中 ∇ 为哈密顿算子，$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$ 为拉普拉斯算子.

[势量场(守恒场)] 若矢量场 $\boldsymbol{R}(x,y,z)$ 是某一标函数 $\varphi(x,y,z)$ 的梯度，即

$$\boldsymbol{R}=\operatorname{grad}\varphi \text{ 或 } X=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

则 $\boldsymbol{R}$ 称为势量场，标函数 φ 称为 $\boldsymbol{R}$ 的势函数.

矢量场 $\boldsymbol{R}$ 为势量场的充分必要条件是：$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}=0$，或

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},\quad \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y},\quad \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}$$

势函数计算公式

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(x_0,y_0,z_0)+\int_{x_0}^{x}X(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Y(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}Z(x,y,z)dz$$

[无散场(管形场)] 若矢量场 $\boldsymbol{R}$ 的散度为零，即 $\operatorname{div}\boldsymbol{R}=0$，则 $\boldsymbol{R}$ 称为无散场. 这时必存在一个无散场 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{R}=\operatorname{rot}\boldsymbol{T}$，对任意点 M 有

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{R}}{r}dV$$

式中 r 为 dV 到 M 的距离，积分是对整个空间进行的.

[无旋场] 若矢量场 $\boldsymbol{R}$ 的旋度为零，即 $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}=0$，则 $\boldsymbol{R}$ 称为无旋场. 势量场总是一个无旋场，这时必存在一个标函数 φ，使 $\boldsymbol{R}=\operatorname{grad}\varphi$，而对任意点 M 有

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\operatorname{div}\boldsymbol{R}}{r}dV$$

式中 r 为 dV 到 M 的距离，积分是对整个空间进行的.

二、梯度、散度、旋度在不同坐标系中的表达式

1. 单位矢量的变换

［一般公式］　假定 $x=f(\xi,\eta,\zeta)$，$y=g(\xi,\eta,\zeta)$，$z=h(\xi,\eta,\zeta)$ 把 (ξ,η,ζ) 空间的一个区域 $\mathscr{D}$ 一对一地连续映射为 (x,y,z) 空间的一个区域 D，并假定 f，g，h 都有连续偏导数．因为对应是一对一的，所以有

$$\xi=\varphi(x,y,z),\ \eta=\psi(x,y,z),\ \zeta=\chi(x,y,z)$$

再假定 φ,ψ,χ 也有连续偏导数，则有

$$\begin{cases} dx=\dfrac{\partial x}{\partial\xi}d\xi+\dfrac{\partial x}{\partial\eta}d\eta+\dfrac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta \\ dy=\dfrac{\partial y}{\partial\xi}d\xi+\dfrac{\partial y}{\partial\eta}d\eta+\dfrac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta \\ dz=\dfrac{\partial z}{\partial\xi}d\xi+\dfrac{\partial z}{\partial\eta}d\eta+\dfrac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta \end{cases}$$

或逆变换

$$\begin{cases} d\xi=\dfrac{\partial\xi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\xi}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}dz \\ d\eta=\dfrac{\partial\eta}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\eta}{\partial z}dz \\ d\zeta=\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}dz \end{cases}$$

沿 dx,dy,dz 方向的单位矢量记作 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，沿 $d\xi$，$d\eta$，$d\zeta$ 方向的单位矢量记作 $\boldsymbol{e}_\xi,\boldsymbol{e}_\eta,\boldsymbol{e}_\zeta$，则有

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\xi=\dfrac{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\boldsymbol{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}} \\ \boldsymbol{e}_\eta=\dfrac{\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\boldsymbol{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}} \\ \boldsymbol{e}_\zeta=\dfrac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\boldsymbol{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}} \end{cases}$$

［圆柱面坐标系的单位矢量］　对于圆柱面坐标系（图 8.11）

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \quad (0\leqslant\rho<\infty, 0\leqslant\varphi<2\pi, -\infty<z<\infty) \\ z=z \end{cases}$$

单位矢量为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho=\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{k} \end{cases}$$

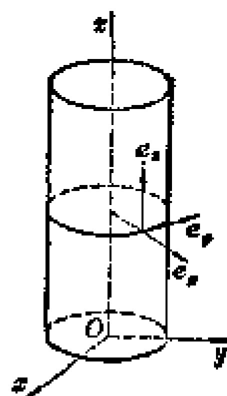


图　8.11

它们的偏导数为

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}=\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\boldsymbol{e}_\rho,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial\rho}=\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\rho}=\frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial\rho}=0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial z}=\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial z}=\frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial z}=0$$

［球面坐标系的单位矢量］　对于球面坐标系（图 8.12）

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \ (0\leqslant r<\infty, 0\leqslant\varphi<2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi) \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

单位矢量为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r=\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j}+\cos\theta\,\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j}-\sin\theta\,\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j} \end{cases}$$

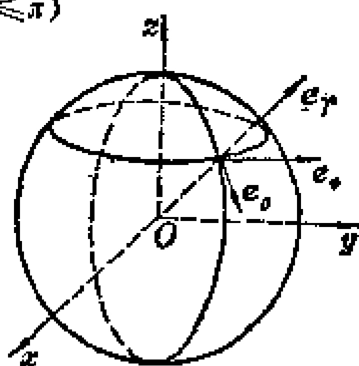


图　8.12

它们的偏导数为

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r}=\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r}=\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta}=\boldsymbol{e}_\theta,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}=-\boldsymbol{e}_r,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi}=\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial\varphi}=\cos\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_r-\cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta$$

2. 矢量的坐标变换

［一般公式］　一个由(x,y,z)坐标系所表达的矢量可以用(ξ,η,ζ)坐标系来表达：

$$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=v_\xi\boldsymbol{e}_\xi+v_\eta\boldsymbol{e}_\eta+v_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta$$

式中

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}v_\xi}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}}+\dfrac{\dfrac{\partial\eta}{\partial x}v_\eta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}} \\ \qquad\qquad+\dfrac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}v_\zeta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}} \\ v_y=\dfrac{\dfrac{\partial\xi}{\partial y}v_\xi}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}}+\dfrac{\dfrac{\partial\eta}{\partial y}v_\eta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}} \\ \qquad\qquad+\dfrac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}v_\zeta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}} \\ v_z=\dfrac{\dfrac{\partial\xi}{\partial z}v_\xi}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}}+\dfrac{\dfrac{\partial\eta}{\partial z}v_\eta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}} \\ \qquad\qquad+\dfrac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}v_\zeta}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}} \end{cases}$$

[圆柱面坐标系与直角坐标系的互换]　由圆柱面坐标系到直角坐标系的变换公式

$$\begin{cases} v_x=v_\rho\cos\varphi-v_\varphi\sin\varphi \\ v_y=v_\rho\sin\varphi+v_\varphi\cos\varphi \\ v_z=v_z \end{cases}$$

由直角坐标系到圆柱面坐标系的变换公式

$$\begin{cases} v_\rho=v_x\cos\varphi+v_y\sin\varphi \\ v_\varphi=-v_x\sin\varphi+v_y\cos\varphi \\ v_z=v_z \end{cases}$$

[球面坐标系与直角坐标系的互换]　由球面坐标系到直角坐标系的变换公式

$$\begin{cases} v_x=v_r\sin\theta\cos\varphi+v_\theta\cos\theta\cos\varphi-v_\varphi\sin\varphi \\ v_y=v_r\sin\theta\sin\varphi+v_\theta\cos\theta\sin\varphi+v_\varphi\cos\varphi \\ v_z=v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta \end{cases}$$

由直角坐标系到球面坐标系的变换公式

$$\begin{cases} v_r = v_x \sin\theta\cos\varphi + v_y \sin\theta\sin\varphi + v_z\cos\theta \\ v_\theta = v_x\cos\theta\cos\varphi + v_y\cos\theta\sin\varphi - v_z\sin\theta \\ v_\varphi = -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi \end{cases}$$

3. 各种算子在不同坐标系中的表达式

设 $U=U(x,y,z)$是一个标函数，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(x,y,z)$是一个矢函数。

[在圆柱面坐标系中各种算子的表达式]

哈密顿算子 $\tilde{\nabla} = \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$

梯　　度 $\operatorname{grad} U = \tilde{\nabla}U = \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial U}{\partial z}$

散　　度 $\operatorname{div}\boldsymbol{V} = \tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

旋　　度 $\operatorname{rot}\boldsymbol{V} = \tilde{\nabla}\times\boldsymbol{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$

$$+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z$$

拉普拉斯算子 $\Delta U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

[在球面坐标系中各种算子的表达式]

哈密顿算子 $\tilde{\tilde{\nabla}} = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$

梯　　度 $\operatorname{grad} U = \tilde{\tilde{\nabla}}U = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial U}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}$

散　　度 $\operatorname{div}\boldsymbol{V} = \tilde{\tilde{\nabla}}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r)\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta)\right]$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

旋　　度 $\operatorname{rot}\boldsymbol{V} = \tilde{\tilde{\nabla}}\times\boldsymbol{V} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\right]\boldsymbol{e}_r$

$$+\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta$$

$$+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi$$

拉普拉斯算子　$\Delta U=\operatorname{div}\operatorname{grad}U$

$$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}$$

三、曲线积分、曲面积分与体积导数

[矢量的曲线积分及其计算公式]　矢量场$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$沿曲线$\Gamma$的曲线积分定义为

$$\int_\Gamma \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\lim_{\substack{\Delta r\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_{i-1}$$

式中$\Delta\boldsymbol{r}_{i-1}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}$，右边极限与$\bar{\boldsymbol{r}}_i$的选择无关，曲线$\Gamma$由$A$到$B$(图8.13)。

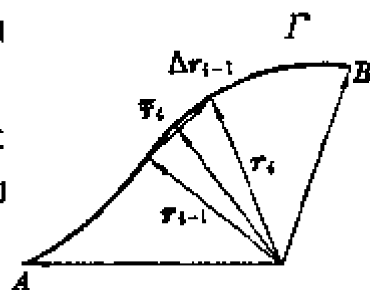


图　8.13

若矢函数$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$是连续的（就是它的三个分量是连续函数），曲线$\Gamma$也是连续的，且有连续转动的切线，则曲线积分

$$\int_\Gamma \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

存在。

若$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$为一力场，则$P=\int_\Gamma \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$就等于把一质点沿着$\Gamma$移动时力$\boldsymbol{R}$所作的功。

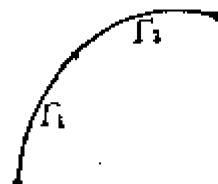


图　8.14

矢量曲线积分的计算公式如下：

$$\int_\Gamma \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_\Gamma (Xdx+Ydy+Zdz)$$

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\ (\text{图 }8.14)$$

$$\int_\Gamma \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{-\Gamma}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\int_\Gamma [\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})]\cdot d\boldsymbol{r}=\int_\Gamma \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}+\int_\Gamma \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\int_\Gamma k\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=k\int_\Gamma \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\quad (k\text{ 为常数})$$

[矢量的环流]　如果Γ为一闭曲线，则沿曲线Γ的曲线积分

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\oint_\Gamma (Xdx+Ydy+Zdz)$$

称为矢量场$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$沿闭曲线$\Gamma$的环流。

势量场沿任何闭曲线的环流都等于零．如果 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$ 为一势量场，且它的势函数为 φ 时，则曲线积分

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{A}^{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\varphi(B)-\varphi(A)$$

图　8.15

与连接 A,B 两点的路径无关，只依赖于 A,B 两点的位置(图 8.15)．

[矢量的曲面积分]　设 S 为一曲面，令 $\boldsymbol{N}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 表示在曲面 S 上一点的法线单位矢量，* 而 $d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{N}dS$ 表示面积矢量元素．又设 $\varphi(\boldsymbol{r})=\varphi(x,y,z)$ 是定义在曲面 S 上的连续标函数，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})=(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))$ 是定义在曲面 S 上的连续矢函数，则曲面积分有如下的三种形式：

1°　标量场的通量(或流量)

$$\iint_S \varphi d\boldsymbol{S}=\iint_{S_{yz}}\varphi dydz\boldsymbol{i}+\iint_{S_{zx}}\varphi dzdx\boldsymbol{j}+\iint_{S_{xy}}\varphi dxdy\boldsymbol{k}$$

式中 S_{yz}, S_{zx}, S_{xy} 分别表示曲面 S 在 Oyz 平面，Ozx 平面，Oxy 平面上的投影．S_{xy} 的正负号规定如下：当从 z 轴正方向看去时，看到的是曲面 S 的正面，认为 S_{xy} 为正，如果看到的是曲面的反面，则认为 S_{xy} 为负(图 8.16)．

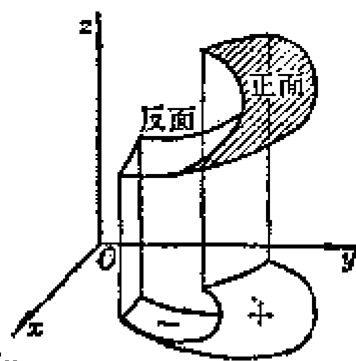


图　8.16

2°　矢量场的标通量

$$\iint_S \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{S_{yz}}X\,dy\,dz+\iint_{S_{zx}}Y\,dz dx+\iint_{S_{xy}}Z\,dx\,dy$$

式中 S_{yz} 等的意义同 1°．

3°　矢量场的矢通量

$$\iint_S \boldsymbol{R}\times d\boldsymbol{S}=\iint_{S_{yz}}(Z\boldsymbol{j}-Y\boldsymbol{k})dydz$$
$$+\iint_{S_{zx}}(X\boldsymbol{k}-Z\boldsymbol{i})dzdx+\iint_{S_{xy}}(Y\boldsymbol{i}-X\boldsymbol{j})dxdy$$

式中 S_{yz} 等的意义同 1°．

[矢量的体积导数]　如果 S 是包围体积 V 的闭曲面，并包含点 $\boldsymbol{r}$，则沿闭曲面 S 的曲面积分 $\left(\oint_S \varphi d\boldsymbol{S},\ \oint_S \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{S},\ \oint_S \boldsymbol{R}\times d\boldsymbol{S}\right)$ 与体积 V 之比，当 V 趋于零时(即

* 这里规定法线单位矢量与曲面分布在切面的两侧．

它的直径→0)的极限称为标量场φ(或矢量场$\boldsymbol{R}$)在点r处的体积导数(或空间导数)。

1° 标量场φ的体积导数就是它的梯度:

$$\operatorname{grad}\varphi=\lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \varphi d\boldsymbol{S}}{V}$$

2° 矢量场$\boldsymbol{R}$的体积导数之一是它的散度:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{R}=\lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{S}}{V}$$

3° 矢量场$\boldsymbol{R}$的另一个体积导数是它的旋度:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}=-\lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{R}\times d\boldsymbol{S}}{V}$$

四、矢量的积分定理

[高斯公式]

$$\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{R}dV=\iint_S \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_S \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}dS$$

即

$$\iiint_V\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_S(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)dS$$

式中S为空间区域V的边界曲面,$\boldsymbol{N}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为在$S$上一点的法线单位矢量。$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})=(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))$在$V+S$上有连续偏导数。

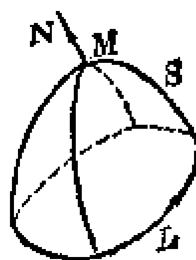


图 8.17

[斯托克斯公式]

$$\iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}dS=\oint_L \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}$$

即

$$\iint_S\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$$

$$=\oint_L Xdx+Ydy+Zdz$$

式中 S 为一定曲面的一侧，L 为曲面 S 的闭边界曲线（L 的正向与 N 构成右手系）．S 的每点有切面，其方向连续地依赖于曲面上的点，而边界曲线 L 上的每点都有切线(图 8.17)．$R(r)=(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))$ 在曲面的所有点单值，并在与 S 足够靠近的点处有连续偏导数．

［格林公式］

$$\iint_S \varphi \operatorname{grad} \psi \cdot dS = \iiint_V (\varphi\Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi)dV$$

$$\iint_S (\varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad}\varphi) \cdot dS = \iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV$$

式中 S 为空间区域 V 的边界曲面，φ,ψ 为两个标函数，在 S 上具有连续偏导数，且在 V 上具有二阶连续偏导数，Δ 为拉普拉斯算子，特别

$$\iint_S \operatorname{grad}\varphi \cdot dS = \iiint_V \Delta\varphi dV$$

即

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial x}dy\,dz + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dz\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)dV$$

§ 3　仿射坐标系

一、仿射坐标系与度量系数

［仿射坐标］　在三维欧氏空间*中，若取一个直角坐标系，其坐标单位矢量为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 时，则空间中的矢量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

一般地，在空间中给定了三个不共面的矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，则空间中任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可按这三个矢量分解，令其系数为 a^1,a^2,a^3(这里 1, 2, 3 不是指数，而是上标)则 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

$$\boldsymbol{a}=a^1\boldsymbol{e}_1+a^2\boldsymbol{e}_2+a^3\boldsymbol{e}_3$$

或简记作**

$$\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{e}_i$$

---

* 欧几里得空间简称欧氏空间，它的定义见第二十一章，§ 4.

** 这种缩写是张量算法中的写法．如果每个指标在乘积中出现一次，就表示它取一切可能的值；如果每个指标在乘积中出现两次，就表示取一切可能的值，而后再把各项相加，求其总和．这种规定称为爱因斯坦约定．

$$\boldsymbol{a}=\{a^1,a^2,a^3\}=\{a^i\}^*$$

这种坐标系$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$称为仿射坐标系，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$称为坐标矢量，$a^1,a^2,a^3$称为矢量$\boldsymbol{a}$的仿射坐标.

[欧氏空间中度量系数] 当矢量$\boldsymbol{a}$写成上面的形式时，则它的长度a由

$$(a)^2=(a^i\boldsymbol{e}_i)(a^j\boldsymbol{e}_j)=(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)a^ia^j$$

给出. 令

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=g_{ij}(=g_{ji})\quad(i,j=1,2,3)$$

则称g_{ij}为仿射坐标系的度量系数.

1° 矢量$\boldsymbol{a}$的长度由

$$(a)^2=g_{ij}a^ia^j$$

计算.

2° 两个矢量

$$\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{b}=b^j\boldsymbol{e}_j$$

的夹角θ由

$$\cos\theta=\frac{g_{ij}a^ib^j}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}\cdot\sqrt{g_{ij}b^ib^j}}$$

计算.

3° 因为$g_{ij}a^ia^j$是正定二次型，所以由g_{ij}所作的行列式

$$g=\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{vmatrix}>0$$

混合积

$$(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)^2=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1)&(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)&(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)\\(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)&(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2)&(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)\\(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1)&(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2)&(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)\end{vmatrix}=g$$

$$(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)=\sqrt{g}$$

[克罗内克尔符号] 对称矩阵

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{bmatrix}$$

的逆矩阵用

---

* 这是张量写法.

$$(g^{ij})=\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix}$$

来表示．由逆矩阵的性质，有 $g^{ij}=g^{ji}$ 和

$$g^{ik}g_{kj}=\delta^i_j$$

式中

$$\delta^i_j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

称为克罗内克尔符号．

［互易矢量］　利用这个 g^{ij} 规定

$$e^i=g^{ij}e_j$$

因而有

$$e_j=g_{ij}e^i$$

$$e^ie_k=(g^{ij}e_j)e_k=g^{ij}(e_je_k)=g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$$

$$e^ie^j=(g^{il}e_l)(g^{jm}e_m)=g^{il}\,g^{jm}(e_le_m)=g^{il}\,g^{jm}\,g_{lm}=g^{il}\delta^j_l=g^{ij}$$

对 e^1, e^2, e^3，可以得到

$$e^1=\frac{1}{\sqrt{g}}(e_2\times e_3)$$

$$e^2=\frac{1}{\sqrt{g}}(e_3\times e_1),\qquad e^3=\frac{1}{\sqrt{g}}(e_1\times e_2)$$

e^1, e^2, e^3 称为关于坐标矢量 e_1, e_2, e_3 的互易矢量．g^{ij} 称为互易矢量的仿射坐标系中的度量系数．

二、逆变矢量与协变矢量

［逆变矢量与协变矢量］　如果矢量 a 在坐标系 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 中的仿射坐标 a^1, a^2, a^3 是由公式

$$a=a^1e_1+a^2e_2+a^3e_3=a^ie_i$$

给出，则 a^1, a^2, a^3 称为矢量 a 的逆变坐标（或称为抗变坐标），而矢量 $\{a^i\}$ 称为逆变矢量（或称为抗变矢量）．

如果关于坐标矢量 e_1, e_2, e_3 的互易矢量为 e^1, e^2, e^3，矢量 a 在坐标系 $\{e^1, e^2, e^3\}$ 中的仿射坐标 a_1, a_2, a_3 是由公式

$$a=a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3=a_je^j$$

给出，则 a_1, a_2, a_3 称为矢量 a 的协变坐标，而矢量 $\{a_j\}$ 称为协变矢量．

在直角坐标系中，矢量的协变坐标与逆变坐标是一致的．一般地，在仿射坐标系中协变坐标与逆变坐标有关系

$$a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=(a^j\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}_i=a^j(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i)=a^j g_{ji}$$

【逆变矢量与协变矢量的标量积】

如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为两个矢量，a^1, a^2, a^3；b^1, b^2, b^3 分别为它们的逆变坐标，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=g_{ij}a^ib^j$$

如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为两个矢量，a_1, a_2, a_3；b_1, b_2, b_3 分别为它们的协变坐标，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=g^{ij}a_ib_j$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 的逆变坐标为 a^1, a^2, a^3，$\boldsymbol{b}$ 的协变坐标为 b_1, b_2, b_3，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^ib_i$$

三、n 维空间

［n 维空间的定义］　如果空间中的点与 n 个独立实变数 $x^1, \cdots, x^n$ 的有序组的值建立一对一且双方连续的对应，那末，以这样的点作为元素的集合称为 n 维实数空间*(简称 n 维空间)，记作 R^n．所以空间中一点 M 对应于一组有序数 $x^1, \cdots, x^n$；反之，一组有序数 $x^1, \cdots, x^n$ 对应于一点 M．这样的一组有序数 $(x^1, \cdots, x^n)$ 称为 n 维空间 R^n 中一点 M 的坐标．

［n 维空间中的矢量］　在 n 维空间 R^n 中取一定点 O，坐标为 $(0, 0, \cdots, 0)$，另外一点 $M(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，$\boldsymbol{r}$ 为对应于两点 O 和 M 的矢量，称为点 M 的矢径．

假定在 R^n 中可以引进仿射坐标系，使得矢径 $\boldsymbol{r}$ 与点 $M(x^i)$ 的坐标的关系是

$$\boldsymbol{r}=x^1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n=x^i\boldsymbol{e}_i$$

式中 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是 R^n 中 n 个线性无关的矢量，这种坐标系 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 称为 R^n 中的仿射坐标系，$x^1, \cdots, x^n$ 称为 R^n 中矢量 $\boldsymbol{r}$ 的仿射坐标．

在三维空间中所讨论的许多结果，在 n 维空间中都成立，只要把公式中所出现的指标认为从 1 到 n 就行了．

［逆变矢量与协变矢量］　在 n 维空间 R^n 中考虑一个任意坐标变换

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1, \cdots, x^n)^{**}\quad (i'=1', 2', \cdots, n') \tag{1}$$

其中函数 $x^{i'}$ 关于 x^i 有连续的各阶导数(讨论中所需要的阶数)，变换的雅可比

---

*　n 维实数空间另一定义见第二十一章，§3.

**　这里用 $x^{i'}$ 表示同一点 $M(x^i)$ 在另一个坐标系中的坐标，就是说 $\{x^i\}$ 和 $\{x^{i'}\}$ 表示同一点．用同一个核文字(如 x)表示同一个对象，用指标上加一撇表示不同的坐标系(如 $x^i, x^{i'}$ 等)，这种记法叫核标法．

式不等于零：

$$\frac{\partial(x^{1'},x^{2'},\cdots,x^{n'})}{\partial(x^1,x^2,\cdots,x^n)}\neq 0$$

因而(1)有逆变换

$$x^i=x^i(x^{1'},x^{2'},\cdots,x^{n'})$$

设 $a^1,\cdots,a^n$ 为 x^i 的函数，如果在坐标变换下，它们都按坐标微分一样地变换，即

$$a^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}a^i$$

则称 a^i 为坐标系(x^i)中一个矢量的逆变坐标，$a^{i'}$ 为坐标系$(x^{i'})$中同一矢量的逆变坐标．称矢量$\{a^i\}$为逆变矢量．

如果 a_i 按

$$a_{i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}a_i$$

的形式变换，则称 a_i 为坐标系 (x^i) 中一个矢量的协变坐标，称 $a_{i'}$ 为坐标系$(x^{i'})$中同一个矢量的协变坐标，称矢量$\{a_i\}$为协变矢量．

逆变矢量和协变矢量的变换系数是不同的，但是它们之间有关系式

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}=\delta^i_j$$

式中 δ^i_j 为克罗内克尔符号．

例　标量场的梯度是一个协变矢量．

设 n 维空间的标量场为 $\varphi(x^1,x^2,\cdots,x^n)$，它沿一无限小位移 dx^i 上的变更

$$d\varphi=\varphi_{,i}\,dx^i$$

是一个在坐标变换下的不变量，式中 $\varphi_{,i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$是 φ 的梯度的分量．因此在坐标变换下，

$$\varphi_{,i'}\,dx^{i'}=\varphi_{,i}\,dx^i=\varphi_{,i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}dx^{i'}$$

则

$$\varphi_{,i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\varphi_{,i}$$

所以 $\varphi_{,i}$ 是一个协变矢量．

§4　张量算法

一、张量概念

［张量的一般定义］　若一个量有 n^N 个分量，而每个分量在 n 维空间 R^n 中的坐标变换

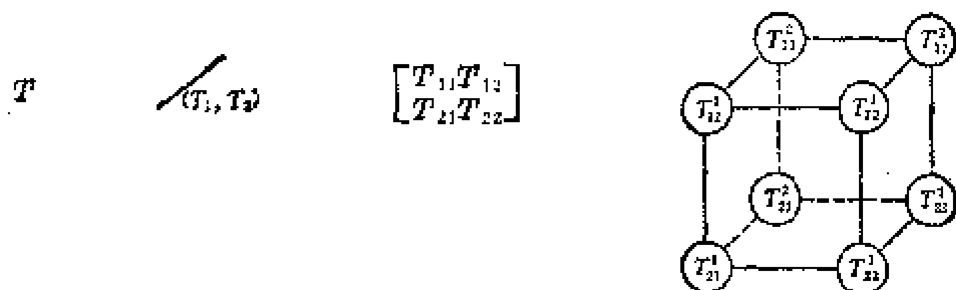
$$x^i = x^i(x^{1'}, \cdots, x^{n'})\quad (i=1,\cdots,n)$$

之下，按下面的规律变化：

$$T^{j_1'\cdots j_l'}_{i_1'\cdots i_m'} = \frac{\partial x^{j_1'}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_l'}}{\partial x^{j_l}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_m}}{\partial x^{i_m'}}T^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_m}$$

式中 $T^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_m}$ 是 x^i 的函数，$T^{j_1'\cdots j_l'}_{i_1'\cdots i_m'}$ 是 $x^{i'}$ 的函数，则量 $T^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_m}$（共有 n^N 个分量）称为 l 阶逆变（或抗变）m 阶协变的 N（$=l+m$）阶混合张量（或称为（$l+m$）型混合张量）。

张量概念是矢量和矩阵概念的推广，标量是零阶张量，矢量是一阶张量，矩阵（方阵）是二阶张量，而三阶张量（例如 T^i_{jk}）好比"立体矩阵"（图 8.18 右）。更高阶的张量不能用图形表达。下面列出 $n=2$ 时的张量示意图：



标量($N=0$)　矢量($N=1$)　矩阵($N=2$)　张量　($N=3$)

图　8.18

［张量举例］

1°　可乘张量　设由逆变分量和协变分量所给定的两个矢量 a, b 是已知的，则由等式

$$T^{ik}=a^i b^k,\quad T_{ik}=a_i b_k,\quad T^{\cdot i}_{k}=a^i b_k,\quad T^{\cdot i}_{k}=a_k b^i$$

确定的都是二阶张量，称为可乘张量。

2°　克罗内克尔符号　克罗内克尔符号 δ^i_j 是一阶逆变一阶协变的二阶混合张量，这是因为从

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}=\delta^i_j$$

可得

$$\delta^{i'}_{j'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\delta^i_j$$

[二阶对称张量与反对称张量] 若张量满足等式

$$T_{ik}=T_{ki},\quad T^{ik}=T^{ki},\quad T^i_k=T^k_i$$

则分别称为二阶对称协变张量、二阶对称逆变张量和二阶对称混合张量. 若张量满足等式

$$T_{ik}=-T_{ki},\quad T^{ik}=-T^{ki},\quad T^i_k=-T^k_i$$

则分别称为二阶反对称协变张量、二阶反对称逆变张量和二阶反对称混合张量.

张量的逆变(协变)指标的对称性质在坐标变换下是不变的.

在三维空间中,二阶反对称张量与矢量等价.

二、张量代数

[指标的置换] 指标置换是张量代数的最简单运算, 利用它可作出新的张量. 例如,通过指标置换,可由张量 T^{ki} 得到新的张量 T^{ik}, 它的矩阵是张量 T^{ki} 的矩阵的转置矩阵.

[加(减)法] 同类型的若干个张量的对应分量相加(或相减)就得到一个新的同类型张量的分量,这种运算称为张量的加法(或减法).

任何二阶张量可分解为对称张量与反对称张量两部分. 例如

$$T_{ik}=\frac{1}{2}(T_{ik}+T_{ki})+\frac{1}{2}(T_{ik}-T_{ki})$$

[张量的乘法] 把两个张量的分量按各种可能情形相乘起来, 就会得到一个新张量的分量. 这个张量的逆变与协变的阶数分别等于原来两个张量的逆变与协变的阶数之和. 这种运算称为张量的乘法. 例如

$$T^{r_1\cdots r_l s_1\cdots s_k}_{p_1\cdots p_m t_1\cdots t_h}=T^{r_1\cdots r_l}_{p_1\cdots p_m}\cdot T^{s_1\cdots s_k}_{t_1\cdots t_h}$$

这是一个 $l+k$ 阶逆变 $m+h$ 阶协变的混合张量,它的阶数为 $l+m+k+h$.

注意,张量乘法的次序是不可交换的.

[张量的缩并] 对一个给定的混合张量, 把它的一个逆变指标与一个协变指标相等的相加起来,得出阶数较低(逆变和协变各低一阶)的张量,这种运算称

为张量的缩并．例如

$$T^{s_2\cdots s_l}_{q_2\cdots q_m}=T^{s_1s_2\cdots s_l}_{s_1q_2\cdots q_m}$$

是一个 $l-1$ 阶逆变 $m-1$ 阶协变的混合张量．

［指标的升降］　在应用中经常用二阶逆变张量 $a^{ij}(\det(a^{ij})\neq 0)$ 的相乘与缩并来"升高"张量的协变指标，用二阶协变张量 $a_{ij}(\det(a_{ij})\neq 0)$ 相乘与缩并来"降低"张量的逆变指标．这种运算称为指标的升降．例如 T_{ijk} 就可由 a^{ij} 和 a_{ij} 升降：

$$a^{il}T_{ijk}=T^l_{jk},\qquad a^{jl}T_{ijk}=T^l_{ik},\qquad a^{kl}T_{ijk}=T^l_{ij}$$

$$a^{il}a^{jm}T_{ijk}=T^{lm}_k,\qquad a^{il}a^{km}T_{ijk}=T^{lm}_j,\qquad a^{il}a^{jm}a^{kp}T_{ijk}=T^{lmp}$$

$$T^{jk}_l=a_{il}T^{ijk},\qquad T^k_{lm}=a_{il}a_{jm}T^{ijk};\qquad T_{lmp}=a_{il}a_{jm}a_{kp}T^{ijk}$$

［张量的商律］　设　$T^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}$ 和 $T^{i'_1\cdots i'_l}_{j'_1\cdots j'_m}$ 各为一组 x^i 和 $x^{i'}$ 的函数，如果对任意逆变矢量 λ^i 与 $\lambda^{i'}$ 及任一指标 j_k, j'_k 使

$$T^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_k\cdots j_m}\lambda^{j_k}\text{ 与 }T^{i'_1\cdots i'_l}_{j'_1\cdots j'_k\cdots j'_m}\lambda^{j'_k}$$

成为张量，则 $T^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}$ 必为张量．这种判别张量的法则称为张量的商律．

例如　T^{ij}_{klm} 与 $T^{i'j'}_{k'l'm'}$ 各为 $x^i, x^{i'}$ 的函数，而且

$$T^{i'j'}_{k'l'm'}\lambda^{l'}=T^{ij}_{klm}\lambda^l\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}$$

则

$$T^{i'j'}_{k'l'm'}\lambda^{l'}=T^{ij}_{klm}\lambda^{l'}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}$$

即

$$\left(T^{i'j'}_{k'l'm'}-T^{ij}_{klm}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\right)\lambda^{l'}=0$$

对所有的 $\lambda^{l'}$ 都成立，所以上式括号中的表达式等于零，因此 T^{ij}_{klm} 是张量．

以任意协变矢量代替逆变矢量可得相仿的结果．

［张量密度］　　按下面规律变化的量

$$T^{i'\cdots}_{\cdots k'\cdots}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\cdots\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\cdots\left|\frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}\right|^w T^{i\cdots}_{\cdots k\cdots}$$

称为张量密度，式中 w 为一常数，称为张量密度的权．张量就是权为零的张量密度．根据张量的阶数，还可以定义标量密度和矢量密度．

两个指标的数目相同，且权相同的张量密度之和是一个同类型的张量密度．

两个张量相乘时，权相加.

三、张量分析

上述张量都假定它的分量是空间 R^n 中点 $M(x^i)$ 的函数:

$$T^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}=T^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}(x^i)$$

当点 $M(x^i)$ 在空间 R^n 中某一区域 D 中变动时，则称 $T^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}$ 是区域 D 中的一个张量场. 上面所建立的张量代数的各种运算，都可以应用到张量场上来.

对于张量场还有一个不变的运算——绝对微分（也称为协变微分），这就是张量分析要讨论的内容.

一个标量场的普通导数是一个协变矢量场（梯度场）的分量. 但是，一般说来，一个张量场的普通导数并不构成新的张量场.

［仿射联络空间］　若对空间 R^n 中的每一坐标系 (x^i)，在一已知点 M 给定了一组（n^3 个）数 Γ^k_{ij}，并在坐标变换

$$x^{i'}=x^{i'}(x^i)$$

下，它们按下列规律变化

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}\tag{1}$$

则称在点 M 给定了一个联络对象（或联络系数），其中偏导数是在点 M 取值的.

假定在空间 R^n 中给定了联络对象场

$$\Gamma^k_{ij}(M)=\Gamma^k_{ij}(x^1,\cdots,x^n)$$

而且这些函数是连续可微的，则称 R^n 为仿射联络空间，记作 L^n. 一般说来，

$$\Gamma^k_{ij}\neq\Gamma^k_{ji}$$

［挠率张量］　(1) 式中 Γ^k_{ij} 的变换规律包括两项: 第一项不依赖于旧坐标系中的 Γ^k_{ij}; 第二项依赖于 Γ^k_{ij}，并和张量的变换规律的形式完全相同. 由于第一项对两个下标 i',j' 是对称的，它一般不等于零，所以 Γ^k_{ij} 不是一个张量. 但是

$$T^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}$$

构成一个张量，称为仿射联络空间 L^n 的挠率张量. 如果挠率张量 T^k_{ij} 等于零，即

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$$

则称所给定的空间是无挠率的仿射联络空间，记作 L^n_0.

［矢量的绝对微分与平行移动］　若在空间 L^n 中给定一个逆变矢量 $\{a^i\}$，则在坐标变换下有

$$a^{i'}=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right)_{M}a^{i} \tag{2}$$

这构成矢量 $\{a^i\}$ 在点M的变换规律．如果从点$M(x^i)$移到点$N(x^i+dx^i)$，则有

$$a^{i'}+da^{i'}=\left[\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right)_{M}+\left(\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\right)_{M}dx^{j}\right](a^{i}+da^{i})$$

式中 da^i 表示矢量 $\{a^i\}$ 从M移到N时的改变量的分量．

在上式中只取一次项就得到

$$da^{i'}=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right)_{M}da^{i}+\left(\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}\right)_{M}a^{i}dx^{j} \tag{3}$$

若变换的二阶偏导数在M不等于零，则一个矢量的改变量决不是一个矢量的分量．

如果 R^n 为仿射联络空间，可由(1)，(2)，(3)式得到

$$da^{i'}+\Gamma^{i'}_{j'k'}a^{j'}dx^{k'}=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right)_{M}(da^{i}+\Gamma^{i}_{jk}a^{j}dx^{k})$$

这表明

$$Da^{i}=da^{i}+\Gamma^{i}_{jk}a^{j}dx^{k}$$

是一个逆变无穷小矢量．称 Da^i 为矢量 $\{a^i\}$ 在点M处关于分量为 dx^i 的位移 MN 的绝对微分．如果联络对象$(\Gamma^{i}_{jk})_M=0$，则绝对微分与普通微分一致．

若矢量 $\{Da^i\}$ 等于零，即

$$Da^{i}=da^{i}+\Gamma^{i}_{jk}a^{j}dx^{k}=0$$

就称矢量 $\{a^i\}$ 关于联络 Γ^{i}_{jk} 从点M平行地移动到点N．当$(\Gamma^{i}_{jk})_M=0$，分量 a^i 保持不变($da^i=0$)时，矢量从点M平行移动到点N，就相当于欧氏空间中的平行移动．

如果给定一条曲线C

$$x^{i}=x^{i}(t)$$

和一个逆变矢量 $\{a^i\}$，沿这条曲线C可以作伴随于 $\{a^i\}$ 的矢量

$$\frac{Da^{i}}{dt}=\frac{da^{i}}{dt}+\Gamma^{i}_{jk}a^{j}\frac{dx^{k}}{dt}$$

称它为沿曲线C的导矢量．如果 $\{a^i\}$ 的导矢量为零，即

$$\frac{da^{i}}{dt}+\Gamma^{i}_{jk}a^{j}\frac{dx^{k}}{dt}=0 \tag{4}$$

则矢量 a^i 自身沿曲线C平行地移动，(4)式与坐标系的选择无关，就是说，矢量沿曲线的平行移动在坐标变换下是不变的．

同样地可以考虑协变矢量 $\{a_i\}$ 的绝对微分与平行移动．称

$$Da_j=da_j-\Gamma^i_{jk}a_i dx^k$$

为协变矢量 $\{a_i\}$ 关于位移 dx^i 的绝对微分．平行移动的条件为

$$da_j-\Gamma^i_{jk}a_i dx^k=0$$

或沿曲线 C 平行移动的条件为

$$\frac{da_j}{dt}-\Gamma^i_{jk}a_i\frac{dx^k}{dt}=0$$

[协变导数]　从逆变矢量与协变矢量的绝对微分的定义公式可以得到量

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}a^j \quad 和 \quad \frac{\partial a_j}{\partial x^k}-\Gamma^i_{jk}a_i$$

它们是关于指标 k 协变的二阶张量，分别称为矢量 $\{a^i\}$ 和 $\{a_j\}$ 的协变导数，分别记作 $a^i{}_{;k}$ 和 $a_{j;k}$ 或 $\nabla_k a^i$ 和 $\nabla_k a_j$．

[张量的绝对微分与平行移动及其协变微分法]

由乘积的微分公式和张量的定义可以推出张量的平行移动规律．

例如，三阶张量的平行移动规律为

$$dT^i_{jk}=(\Gamma^r_{js}T^i_{rk}+\Gamma^r_{ks}T^i_{jr}-\Gamma^i_{rs}T^r_{jk})dx^s$$

四阶张量的平行移动规律为

$$dT^{ik}_{ij}=(\Gamma^r_{is}T^{ik}_{rj}+\Gamma^r_{js}T^{ik}_{ir}-\Gamma^i_{rs}T^{rk}_{ij}-\Gamma^k_{rs}T^{ir}_{ij})dx^s$$

可以看出，张量平行移动规律中所包含的项数与张量的阶数是相同的，对于张量的逆变指标，类似于逆变矢量平行移动的规律；对于张量的协变指标，类似于协变矢量平行移动的规律．记

$$DT^{ik}_{ij}=dT^{ik}_{ij}-(\Gamma^r_{is}T^{ik}_{rj}+\Gamma^r_{js}T^{ik}_{ir}-\Gamma^i_{rs}T^{rk}_{ij}-\Gamma^k_{rs}T^{ir}_{ij})dx^s$$

则称 DT^{ik}_{ij} 为张量 T^{ik}_{ij} 的绝对微分．

[张量的协变导数及其运算法则]

$$T^{ik}_{ij;s}\equiv\nabla_s T^{ik}_{ij}=\frac{\partial T^{ik}_{ij}}{\partial x^s}-\Gamma^r_{is}T^{ik}_{rj}-\Gamma^r_{js}T^{ik}_{ir}+\Gamma^i_{rs}T^{rk}_{ij}+\Gamma^k_{rs}T^{ir}_{ij}$$

称为张量 T^{ik}_{ij} 的协变导数，它是一个五阶张量的分量．

在普通导数中，对于已微分的张量的每个指标再加上一项就可以构成任意张量的协变导数，对于逆变指标，这项的形式是

$$T^{i\cdots}{}_{\cdots;s}=\cdots+\Gamma^i_{rs}T^{r\cdots}_{\cdots}+\cdots$$

对于协变指标是

$$T_{\cdots k\cdots;s}=\cdots-\Gamma^r_{ks}T_{\cdots r\cdots}+\cdots$$

协变导数的运算法则如下：

1° 若干个同样结构的张量之和的协变导数等于各个张量的协变导数之和，即

$$\nabla_s(T^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}+U^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m})=\nabla_s T^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}+\nabla_s U^{i_1\cdots i_l}_{j_1\cdots j_m}$$

2° 满足积的微分法则，即

$$\nabla_s(ABC)=(\nabla_s A)BC+A(\nabla_s B)C+AB(\nabla_s C)$$

［自平行曲线］ 在仿射联络空间中，如果切于曲线上一点 M_0 的每个矢量 $\{a_0^i\}$ 沿这曲线平行移动时是切于这曲线的，则称这曲线为自平行曲线．

设曲线的方程为 $x^i=x^i(t)$，它的切矢量为$\frac{dx^i}{dt}$，它沿曲线平行移动的条件为

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0$$

这就是联络 Γ^i_{jk} 的自平行曲线的微分方程．设

$$S^i_{jk}=\frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{kj})$$

上面的微分方程可写成

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=-S^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}$$

系数 S^i_{jk} 显然关于 j 和 k 是对称的，并构成一个仿射联络．称 S^i_{jk} 构成伴随于 Γ^i_{jk} 的对称仿射联络，如果 Γ^i_{jk} 关于 j，k 也是对称的，则 S^i_{jk} 与 Γ^i_{jk} 一致．

§5　黎曼几何初步

一、黎曼空间

［黎曼空间及其度量张量］ 若 n 维空间 R^n 中有一组函数 $g_{ij}(x^i)=g_{ji}(x^i)$，使得两邻点 x^i，x^i+dx^i 之间的距离 ds 由一个正定二次型

$$ds^2=g_{ij}(x)dx^idx^j$$

决定，则称空间 R^n 为黎曼空间，记作 V^n．称黎曼空间 V^n 中的几何学为黎曼几何．二次型 ds^2 称为 V^n 的线素．定义曲线弧长的微分为

$$ds=\sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j}$$

而任一曲线 $x^i=x^i(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 的弧长为积分

$$s=\int_a^b\sqrt{g_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt$$

因为在坐标变换

$$x^i = x^i(x^{i'})$$

下，ds^2为一个不变量，所以

$$g_{i'j'} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$$

这表明$g_{ij}(x)$为一个二阶协变张量的分量，它称为黎曼空间V^n的度量张量或基本张量。

[矢量的长度·两矢量的标量积和夹角·伴随张量] 在黎曼空间中关于标量（场）、矢量（场）、张量（场）等的定义类似前面各节，它们的运算法则也相仿。

设$\{a^i\}$是一个逆变矢量，则其长度的平方为

$$g_{ij}a^ia^j$$

设$\{a^i\}$与$\{b^i\}$是两个逆变矢量，则其标量积为

$$g_{ij}a^ib^j$$

这两矢量夹角的余弦为

$$\frac{g_{ij}a^ib^j}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}\sqrt{g_{ij}b^ib^j}}$$

设

$$g_{ij}a^i = a_j, \qquad g_{ij}b^i = b_j$$

则$\{a_j\}$与$\{b_j\}$都是协变矢量，它们的长度与标量积分别为

$$g_{ij}a^ia^j = a_ja^j, \quad g_{ij}a^ib^j = a_jb^j$$

张量$T_i{}^{\cdot}{}_j^k$的伴随张量为

$$T_{ijk} = g_{lk}T_i{}^{\cdot}{}_j^l, \quad T_i{}^{\cdot jk} = g^{lj}T_i{}^{\cdot}{}_l^k$$

式中g^{ij}满足等式

$$g_{il}g^{lj} = \delta_i^j$$

式中δ_i^j为克罗内克尔符号。

[黎曼联络与克里斯托弗尔符号] 在黎曼空间中总可以用唯一的方式确定联络Γ_{ij}^k，满足条件：

(i) 仿射联络是无挠率的，即$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

(ii) 仿射联络所产生的平行移动保持矢量的长度不变。

这种Γ_{ij}^k称为黎曼联络或勒维-奇维塔联络。

根据上述两个条件可以得出

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

如果记

$$\Gamma_{ij,l}=g_{lk}\Gamma^k_{ij}$$

则有

$$\Gamma_{ij,l}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right]$$

有时用下面的记号：

$$[ij,l]=\Gamma_{ij,l}\text{ 和 }\left\{{k \atop ij}\right\}=\Gamma^k_{ij}$$

它们分别称为第一类和第二类克里斯托弗尔三指标符号。

此外，还有等式

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{jl}\Gamma^l_{ki}-g_{il}\Gamma^l_{kj}=0$$

或

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\Gamma_{ki,j}+\Gamma_{kj,i}$$

还要指出，§4中关于协变微分法的一切结果，对黎曼联络 Γ^k_{ij} 都成立。

二、勒维-奇维塔的平行性

仿射联络空间中的平行移动，是由仿射联络 Γ^i_{jk} 决定的。在具有度量张量 g_{ij} 的黎曼空间 V^n 中，利用黎曼联络 Γ^i_{jk} 来定义相应的平行移动称为 V^n 的勒维-奇维塔平行移动。

设沿 V^n 中某一曲线 $x^i=x^i(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 给定了矢量场 $a^i=a^i(t)$，如果沿这条曲线作一无穷小位移时，矢量 $a^i(t)$ 按规律

$$\frac{Da^k}{dt}=\frac{da^k}{dt}+\Gamma^k_{ij}a^i\frac{dx^j}{dt}=0$$

变化，则称矢量 $a^i(t)$ 沿曲线作勒维-奇维塔平行移动。

勒维-奇维塔平行移动具有性质：

1° 度量张量 g_{ij} 的协变导数等于零，即

$$\nabla_k g_{ij}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{jl}\Gamma^l_{ki}-g_{il}\Gamma^l_{kj}=0$$

还有
$$\nabla_k\delta^i_j=0,\qquad \nabla_k g^{ij}=0$$

2° 若两族矢量 $a^i(t)$ 和 $b^i(t)$ 都沿曲线平行移动，则

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}a^ib^j)=0$$

所以两矢量的标量积与夹角在平行移动下保持不变。

3° 黎曼空间 V^n 中的自平行曲线（也称为测地线）和仿射联络空间中自平

行曲线的情况完全一样，都由微分方程

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

所确定．不过这里的Γ^k_{ij}是黎曼联络．所以一曲线为测地线的充分必要条件是它的单位切矢量$\frac{dx^i}{ds}$互相平行．

三、黎曼空间中的曲率

[曲率张量与李奇公式]　张量的协变导数与普通导数的明显区别是：求高阶导数时，张量导数的结果一般与求导的次序有关．例如，运算$\nabla_k\nabla_j-\nabla_j\nabla_k$作用于矢量$\{a^i\}$时，则有

$$\nabla_k\nabla_j a^i-\nabla_j\nabla_k a^i=\left(\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^j}+\Gamma^i_{kr}\Gamma^r_{jl}-\Gamma^i_{jr}\Gamma^r_{kl}\right)a^l \qquad (1)$$

记

$$R_{kjl}{}^i=\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^j}+\Gamma^i_{kr}\Gamma^r_{jl}-\Gamma^i_{jr}\Gamma^r_{kl}$$

它是一个三阶协变一阶逆变的四阶混合张量，称为空间V^n的曲率张量或黎曼-克里斯托弗尔张量．由(1)式得

$$\nabla_k\nabla_j a^i-\nabla_j\nabla_k a^i=R_{kjl}{}^i a^l$$

左边称为逆变矢量$\{a^i\}$的交错二阶协变导数；对协变矢量$\{b_i\}$的交错二阶协变导数是

$$\nabla_j\nabla_k b_i-\nabla_k\nabla_j b_i=-R_{jki}{}^r b_r$$

张量的交错二阶协变导数是

$$\begin{aligned}&\nabla_j\nabla_k T^{r_1r_2\cdots r_l}_{s_1s_2\cdots s_m}-\nabla_k\nabla_j T^{r_1r_2\cdots r_l}_{s_1s_2\cdots s_m}\\&=\sum_{p=1}^{l}R_{jkir_p}T^{r_1r_2\cdots r_{p-1}ir_{p+1}\cdots r_l}_{s_1s_2\cdots s_m}\\&-\sum_{q=1}^{m}R_{jks_q}{}^{i}T^{r_1r_2\cdots r_l}_{s_1s_2\cdots s_{q-1}is_{q+1}\cdots s_m}\end{aligned}$$

这称为李奇公式．

[黎曼符号·李奇张量·曲率标量·爱因斯坦空间]

曲率张量的协变分量

$$R_{jklr}=g_{ri}R_{jkl}{}^i$$

称为第一类黎曼符号，而 $R_{jkl}{}^{i}$ 称为第二类黎曼符号。

曲率张量缩并得

$$R_{kl}=R_{jkl}{}^{j}=g^{rj}R_{jklr}$$

称为李奇张量．李奇张量再缩并得

$$R=g^{kl}R_{kl}$$

称为曲率标量．

若李奇张量满足

$$R_{ij}=\frac{1}{n}Rg_{ij}$$

则称此空间为爱因斯坦空间．

［曲率张量的性质］

1° 曲率张量前两个指标 j 和 k 是反对称的，即

$$R_{kjl}{}^{i}=-R_{jkl}{}^{i}$$

特别

$$R_{jjl}{}^{i}=0$$

2° 曲率张量对三个协变指标作循环置换后相加，便得

$$R_{jkl}{}^{i}+R_{klj}{}^{i}+R_{ljk}{}^{i}=0$$

这称为李奇恒等式．

3° 第一类黎曼符号 R_{kjlr} 可按下式计算：

$$R_{jklr}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial x^k\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k\partial x^r}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^j\partial x^r}-\frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial x^j\partial x^l}\right\}$$
$$+g^{pq}(\Gamma_{kl,p}\Gamma_{jr,q}-\Gamma_{kr,p}\Gamma_{jl,q})$$

因此 R_{jklr} 关于指标 j,k 与 l,r 是反对称的；关于前一对指标与后一对指标是对称的；对前面三个指标作循环置换后相加等于零，即

$$R_{jklr}=-R_{kjlr}$$
$$R_{jklr}=-R_{jkrl}$$
$$R_{jklr}=R_{lrjk}$$
$$R_{jklr}+R_{kljr}+R_{ljkr}=0$$

4° 李奇张量是对称的，即 $R_{kl}=R_{lk}$．

5° 空间 V^n 中任一点下式成立：

$$\nabla_i R_{jkl}{}^{r}+\nabla_j R_{kil}{}^{r}+\nabla_k R_{ijl}{}^{r}=0$$

这称为皮安奇恒等式．它表明，按协变导数的指标（i）及曲率张量前两个指标（j,k）作循环置换所得到的和等于零．

[黎曼曲率(截面曲率)与常曲率空间] 对黎曼空间 V^n 内一点 M 的两个线性无关矢量 $\{p^i\}$ 和 $\{q^i\}$ 作

$$K=\frac{R_{rijk}p^rq^ip^jq^k}{(g_{rk}g_{ij}-g_{rj}g_{ik})p^rq^ip^jq^k}$$

这称为 p^i, q^i 所确定的平面的黎曼曲率，又称为截面曲率。

如果对空间 V^n $(n>2)$ 中所有点都有

$$R_{rijk}=K(g_{rk}g_{ij}-g_{rj}g_{ik})$$

则黎曼曲率 K 为常数，这就是舒尔(Schur)定理。

黎曼曲率为常数的空间 V^n 称为常曲率空间，这种空间的线素可化为形式

$$ds^2=\frac{(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2}{\left\{1+\frac{K}{4}[(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2]\right\}^2}$$

这称为黎曼形式的常曲率空间的度量。

常曲率空间是爱因斯坦空间。

第九章　抽象代数·线性空间·泛函分析

本章内容包括抽象代数、线性空间与泛函分析三个部分，重点介绍线性空间．为了介绍线性空间的需要，这里简略地介绍了抽象代数的初步知识，即群、环、域等基本概念及其简单的性质．泛函分析是作为线性空间的理论在分析上应用的一个范例来介绍的，因而也不作系统的叙述．在这里除了叙述勒贝格积分的基本概念与重要性质外，还扼要地介绍了赋范线性空间、希尔伯特空间、巴拿赫空间和它们的一些简单的性质．

在线性空间部分介绍了线性空间、线性变换、酉空间、二次型和埃尔米特型、方阵的若当标准型等的定义、性质以及一些算法．

§1　抽象代数

一、基本代数系统

［代数运算］　假定对于集（见第二十一章，§1，一）A中任意元素a与集B中任意元素b，按某一法则可以与某一集C中唯一确定的元素c对应，则称这个对应为A, B的一个（二元）代数运算．集A, B也可以是同一个集，就是对A中任两个元素a, b，可以唯一确定元素c，使$c=a*b$，c可属于A或不属于A，若属于A，则称A在运算"*"下是封闭的．

在二元运算"*"下，若对A的任意两个元素a和b成立$a*b=b*a$，则称A是可交换的．若对A的任意三个元素a, b, c在"*"下，成立$a*(b*c)=(a*b)*c$，则称A是可结合的．若运算"*"是通常的加法或乘法，就分别记作$a+b$或ab．整数集中的加法和乘法都是可交换的与可结合的，因此整数集是可交换和可结合的．

［代数系统］　如果一个集A具有满足某些法则的代数运算，就称集A为代数系统．群、环、域就是三个基本的代数系统．

二、群

［群的定义与例子］　设G不是空集（见第二十一章，§1，一），对G给定一个代数运算"*"，若在"*"之下，满足下列四个条件，则称G为一个群：

(i)　G在"$*$"之下是封闭的．即对每一对元素$a,b\in G$，则有唯一确定的元素$c=a*b$，且$c\in G$．

(ii)　G在"$*$"之下是可结合的．即对任意$a,b\in G$，有

$$a*(b*c)=(a*b)*c$$

(iii)　在G中有一元素e，对任一$a\in G$，满足

$$a*e=e*a=a$$

(iv)　对任一$a\in G$，都有一个$a^{-1}\in G$，满足

$$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$$

条件(iii)中的e称为单位元或恒等元；条件(iv)中的a^{-1}称为a的逆元．

注意，定义中条件(iii)可改为：有一个左单位元e（或右单位元e'），使$ea=a$（或$ae'=a$），对任意$a\in G$成立．因为由此推出$e=ee'=e'$．因此，群中单位元是唯一的．定义中条件(iv)可改为：每个元a有左（或右）逆元a^{-1}，使$a^{-1}a=e$（或$aa^{-1}=e$）成立．因为由此推出$(a^{-1})^{-1}=(a^{-1})^{-1}a^{-1}a=ea=a$，从而$aa^{-1}=(a^{-1})^{-1}a^{-1}=e$也成立．因此，群中每个元的逆元是唯一的．

若一个群G的乘法"$*$"可交换，则称G为交换群或阿贝耳群．特别在加法之下，交换群称为加法群．在加法群时，"$*$"改为"$+$"，逆元a^{-1}改为负元$-a$，单位元称为零元，记作0．

例1　整数集N组成一个加法群；有理数集、实数集、复数集各组成一个加法群．

例2　非零的实数集R^*对于乘法组成一个群．正的实数集$R^{(+)}$对于乘法也组成一个群．

例3　一切元在数域F中的n阶可逆矩阵对于矩阵的乘法组成一个群，记作$GL_n(F)$．

例4　设Ω是一个平面图形，G_Ω是平面上一切使Ω不动的正交变换所组成的集，则G_Ω组成一个群．G_Ω通称为图形Ω的对称群．

例5　一切n次置换的集合组成一个群，称为置换群，记作S_n．

事实上，若任取两个n次置换：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$$

σ_2可改写为：

$$\sigma_2=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$$

对置换σ_1和σ_2，规定置换

$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$$

和它们对应，即 σ_3 为 σ_1 和 σ_2 的乘积，记作

$$\sigma_3=\sigma_1\sigma_2$$

在这个乘法之下，不难推出 S_n 满足群中规定的条件，因而 S_n 组成一个群。

例 6　非空集 S 到自身的一切可逆变换（见第二十一章，§1，二）对于变换的乘法组成一个群，称为集 S 的全变换群，记作 G_S. G_s 的子群称为 S 上的变换群.

[群的基本性质]

1° 在群中，对任意元 a, b，方程

$$ax=b, \quad ya=b$$

各有解．即　$x=a^{-1}b$, $y=ba^{-1}$.

2° 消去律成立．即若 $ca=da$，则 $c=d$.

3° 群中一般结合律成立．即

$$\prod_{i=1}^{n}a_i\prod_{j=1}^{m}a_{n+j}=\prod_{i=1}^{n+m}a_i$$

4° 交换群中一般交换律成立．即

$$a_1a_2\cdots a_n=a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$$

式中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列.

[子群]　设群 G 的非空子集 H 对于 G 的运算也组成一个群，则称 H 为 G 的一个子群.

群 G 的非空子集 H 是子群的充分必要条件是：若 $a, b\in H$，则 $ab^{-1}\in H$.

任意个子群的交集（见第二十一章，§1，三）是一个子群.

[循环群]　一个元 a 的一切乘幂 $a^0=e$, a, a^2, …的全体组成一个群，称为循环群．循环群是交换群.

若序列 $e, a, a^2, \cdots$ 中没有两个元素相等的，则称 G 为无限循环群．若有相等的元素，即

$$a^i=a^j, \quad i\neq j$$

可推出 G 为 n 个元 $e, a, \cdots, a^{n-1}$ 的集，即

$$G=\{e, a, \cdots, a^{n-1}\}$$

这时称 G 为有限循环群，n 称为 G 的阶，即 n 为使 $a^n=e$ 的最小正整数.

循环群的子群还是循环群.

[不变子群·陪集·商群]　设 H 为群 G 的一个子群，若对每个元 $g\in G$，有

$$gH=Hg$$

(这里 gH 表示 g 与 H 中一切元素的乘积,例如 gh, $h\in H$),即 $gHg^{-1}=H$,则称 H 为 G 的一个不变子群(或正规子群)。gH 和 Hg 分别称为 G 对 H 含元素 g 的左陪集和右陪集. 因此含同一元素的不变子群的左陪集和右陪集是重合的.

把陪集看作元素时,一切陪集构成一个群,称为 G 对 H 的商群,记作 G/H.

拉格朗日定理 有限群 G 的子群的阶是群 G 的阶的一个因数.

G 的不变子群 H 的商群 G/H 的阶为 G 的阶被 H 的阶除所得的商.

交换群的一切子群都是不变子群.

若群 G 除自身外,无任何其他不变子群,则称 G 为单群.

[同构与自同构] 设两个群 G_1, G_2, 若使 G_1 中任意两元 a,b 的乘积与 G_2 中相应元的乘积对应,而且只与这个乘积对应,即

$$(ab)'\rightarrow a'b'$$

具有这个性质的 G_1 到 G_2 上的一对一的对应,称为一个同构,又称 G_1 与 G_2 是同构的,记作 $G_1\cong G_2$. 群 G 到自身的同构称为自同构.

同构有以下性质:

1° 在同构之下,一个群的单位元、逆元、子群分别对应到另一个群的单位元、逆元、子群.

2° 同构是一个等价关系. 即

(i) 反身性 $G_1\cong G_1$;

(ii) 对称性 若 $G_1\cong G_2$, 则 $G_2\cong G_1$;

(iii) 传递性 若 $G_1\cong G_2$, $G_2\cong G_3$, 则 $G_1\cong G_3$.

3° 凯莱定理 任一群 G 都同构于它的元素集的某一变换群.

[同态与自同态] 有两个群 G, G', 与一个映射 f: $G\rightarrow G'$. 设 $x\in G, x'\in G'$, 若满足

$$(x_1x_2)'=x_1'x_2'$$

则称 f 为一个同态, G' 为 G 的一个同态象,记作 $G\sim G'$. 群 G 到自身的同态称为自同态.

同态有以下性质:

1° 一对一的同态就是同构.

2° 在同态之下,单位元映到单位元,逆元映到逆元.

3° 假定 f 是群 G 到 G' 的一个同态. 则 G 中对应于 G' 的单位元 e' 的一切元素所成的集 N 是 G 的一个不变子群. N 称为同态 f 的核,记作 $f^{-1}(e')$.

4° 假定群 G, G' 同态，则 G 中对应于 G' 的任一固定元素的一切元素所成的集是 G 对同态核 N 的一个陪集.

5° 同态基本定理　假定 G, G' 同态，群 G 对 N 的陪集与 G' 的元素之间的一一对应是 G' 与商群 G/N 之间的一个同构. 它表明 G 的同态象 G' 与对应的商群 G/N 同构.

三、环

[环的定义与例子]　一个非空集 R 有加法和乘法两个二元运算，若满足下列三个条件，就称 R 为一个环：

(i)　R 是一个加法群；

(ii)　对乘法满足结合律，即对任何 $a, b, c \in R$，有

$$a(bc)=(ab)c$$

(iii)　对加法和乘法满足左、右分配律，即对任何 $a, b, c \in R$，有

$$a(b+c)=ab+ac,\quad (b+c)a=ba+ca$$

一个环若满足乘法的交换律 $ab=ba$，则称 R 为交换环.

例 1　一切整数全体是一个环，称为整数环.

例 2　设 F 是一个数域，则域 F 上的多项式的全体是一个环，记作 $F[x]$.

例 3　如果数集 R 中任意两个数的和、差、积仍属于 R，则 R 也是一个环，称为数环. 单个数零也是一个数环，称为零环. 显然，数环总是交换环.

例 4　若 R 是一个环，一切用 R 的元所成的 n 阶方阵在矩阵的加法与乘法之下，构成一个环，称为 R 上的 n 阶全方阵环，记作 R_n. 当 $n>1$ 时，R_n 为非交换环.

[环的基本性质]　因为环是一个加法群，所以它具有加法群的一切性质. 因此只介绍由乘法所表示的各种性质.

1°　$0\cdot a=a\cdot 0=0$

2°　$(-a)b=a(-b)=-ab,\quad (-a)(-b)=ab$

3°　对减法分配律成立. 即

$$a(b-c)=ab-ac,\quad (b-c)a=ba-ca$$

4°　一般结合律成立. 即

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{m} a_{n+j}=\prod_{i=1}^{n+m} a_i$$

5°　一般分配律成立. 即

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{m}b_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_j$$

6° 对任意整数 m，有

$$(ma)b=a(mb)=m(ab)$$

7° 对正整数的指数定律成立．即

$$a^ma^n=a^{m+n},\quad (a^n)^m=a^{mn}$$

对交换环还有

$$a^nb^n=(ab)^n$$

[零因子与单位元] 在环 R 中，若 $a\in R$，$b(\neq 0)\in R$，使 $ab=0(ba=0)$，则称 a 为 R 的左(右)零因子，记作 $a_L(a_R)$．又称 a 为 b 的左(右)零化元．一个元同时是左、右零因子，就称它为零因子．若环中无零因子，就称它为无零因子环．n 阶全方阵环就是无零因子环．

若环 R 中有元素 $e_L(e_R)$，对任一 $a\in R$，有 $e_La=a$ $(ae_R=a)$，则称 $e_L(e_R)$ 为 R 的左(右)单位元．若 $e\in R$ 同时是左、右单位元，即 $ae=ea=a$，则称 e 为 R 的单位元．这时称 R 为有单位元环．例如整数环是单位元环，1 就是它的单位元；n 阶全方阵环 R_n 有单位元，就是单位矩阵 I．

若 R 有单位元，则单位元是唯一的；若 R 有单位元 e，并对 $a\in R$ 有逆元 a^{-1}，则 a^{-1} 是唯一的．

有单位元而无零因子的交换环称为整环．例如整数环、数域都是整环．

[子环与扩张环] 设 S 是环 R 的一个子集，若 S 对 R 的两个运算组成一个环，则称 S 为 R 的一个子环，称 R 为 S 的扩张环．

环本身可以看作是它的子环，零环也是它的子环．异于本身与零环的子环称为真子环．

环 R 的子集 S 成为 R 的子环的充分必要条件是：

(i) S 为非空集；

(ii) 若 $a,b\in S$，则 $a-b\in S$；

(iii) 若 $a,b\in S$，则 $ab\in S$．

[理想与主理想] 设 R 是一个环，I 是 R 的一个子集，若 I 中任意两个元素之差以及 I 中任意元素 a 与 R 中任意元素 r 的乘积 ra 与 ar 都属于 I，则称 I 为 R 的一个理想．例如偶数全体是整数环的一个理想．每一个理想是已知环的子环，其逆不真．

一个环的任意多个理想的交集仍是这个环的理想．特别，环中含有某一固

定元素 r 的一切理想的交集仍是这个环的理想，即它是由一个元素 r 生成的理想，称为主理想，记作 (r).

四、域

［域的定义与例子］　一个具有单位元的交换环 R，若至少含有一个非零元，并且每个非零元 a 恒有逆 a^{-1}，则称 R 为一个域.

例 1　数域 F（有理数域 $\mathbf{Q}$、实数域 $\mathbf{R}$、复数域 $\mathbf{C}$ 等）都是域.

例 2　数域 F 上的一切有理分式 $f(x)/g(x)$ $(f(x), g(x)\in F[x]$，且 $g(x)\neq 0)$ 在有理分式的加法和乘法之下组成一个域，称为数域 F 上的有理分式域.

［域的基本性质］

1°　域没有零因子.

2°　若集 F 在两个二元运算（加法和乘法）下满足下列条件，则 F 为一个域：

(i)　F 是以零为单位元的加法群；

(ii)　由除零外的 F 的一切元组成的集在乘法下是一个交换群；

(iii)　乘法对加法是可分配的，即 $a(b+c)=ab+ac$.

3°　在域 F 中，方程 $ax=b$ $(a, b\in F$，且 $a\neq 0)$ 有唯一的解，并可记作 $x=b/a$.

4°　在域 F 中，成立指数定律：

$$a^m a^n = a^{m+n},\quad (a^m)^n = a^{mn},\quad a^n b^n = (ab)^n$$

式中 m, n 为任意整数，a, b 为 F 中任意两个元素，只对非零元素才能有负整数的幂.

5°　若把域 F 的单位元 e 的 n 倍 ne 简记作 n，则 F 中任一元 a 的 n 倍 na 就是 n 与 a 的积 $n\,a$.

§2　线性空间与线性子空间

一、线性空间

［线性运算］　设 F 是一个域，其元素 $a, b, c, \cdots$ 作为数量；V 是任一种类对象的集，其元素用希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 表示．确定两个运算法则：

1°　V 中元素的加法．对 V 中任二元素 α, β，总有唯一确定的元素 γ 与它们对应，称为 α 与 β 之和，记作 $\gamma=\alpha+\beta$.

2°　F 中的数量与 V 中元素的乘法．对 F 中任一数 a 与 V 中任一元 α，总有唯一确定的元素 δ 与它们对应，称为 a 与 α 的数乘，记作 $\delta=a\alpha$.

这两个运算法则称为线性运算.

[线性空间及其性质] 设F是一个域,V是任一种类对象的集,若对线性运算满足以下条件,则称V为域F上的线性空间:

(i) V 是一个加法群;

(ii) 对任意元 $a\in F$ 与 $\alpha\in V$, 对应着唯一确定的一个元 $\beta=a\alpha\in V$;

(iii) 满足分配律和结合律,即对 $a,b\in F$, $\alpha,\beta\in V$, 有

$$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta,\quad (a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$$

$$(ab)\alpha=a(b\alpha)$$

域F的元素称为线性空间的数量,V的元素称为它的矢量,因而线性空间又称矢量空间. 加法群的单位元称为零矢量,记作$\mathbf{0}$,$(-1)\alpha$是$\alpha\in V$的逆元,称为负矢量.

实数域上的线性空间称为实线性空间; 复数域上的线性空间称为复线性空间.

例 1 三维空间中的矢量全体组成一个实线性空间.

例 2 数域F上的多项式环$F[x]$, 按照通常的多项式加法与多项式乘法, 组成数域F上的线性空间.

例 3 元素属于数域F的$m\times n$矩阵,按照矩阵的加法和矩阵与数的乘法, 组成域F上的线性空间.

例 4 按照通常的加法和乘法, 实数全体是实数域$\mathbf{R}$上的线性空间. 复数全体是复数域$\mathbf{C}$上的线性空间. 任一域是用自己当作数量域的线性空间.

例 5 把在一个实区间(a,b)中定义的每个连续实函数当作一个元素,任意两个元素f与g的和记作$f+g$, $f+g$是在(a,b)中定义的一个连续实函数, 它在每一点x的值规定为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

又把一个元素f乘实数c所得到的元素cf规定为

$$(cf)(x)=cf(x),\quad a<x<b$$

则这些元素全体组成一个实线性空间.

线性空间有以下性质:

1° 零矢量是唯一的.

2° 负矢量是唯一的.

3° $0\alpha=\mathbf{0}$, $\alpha\in V$; $c\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $c\in F$.

4° 若 $c\in F$, $\alpha\in V$, $c\alpha=\mathbf{0}$, 则 $c=0$ 或 $\alpha=\mathbf{0}$.

[线性相关与线性无关] 域F上的线性空间V中一组有限个矢量$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$，如果对$c_1, c_2, \cdots, c_n \in F$，仅当$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$时等式

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = 0$$

才成立，则称矢量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$为线性无关。否则称为线性相关。若矢量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$线性相关，则其中至少有一个矢量$\alpha_i$是其余矢量$\alpha_k (k \neq i)$的一个线性组合：

$$\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_n\alpha_n$$

含零矢量0的任一组矢量是线性相关的。

假定域F上的线性空间V上又定义了收敛性(第二十一章，§3，四)，V中一组无限多个矢量$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$，如果对$F$中的$c_1, c_2, \cdots$仅当$c_1 = c_2 = \cdots = 0$时等式

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots = 0$$

才成立，则称矢量$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$为线性无关，否则称为线性相关。

[基底与坐标] 域F上的线性空间V中一组矢量$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$如果满足

(i) $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是线性无关的；

(ii) V中任一矢量都是矢量α_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$的一个有限线性组合；

则称$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$为$V$的一个有限基底，也称$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$生成(或张成)这个空间，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$为空间的一组生成元。

设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$为$V$的一组基底，则$V$中任一矢量$\alpha$一定可以用$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的线性组合来表示：

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$

式中复数$a_1, a_2, \cdots, a_n$是唯一确定的，它称为矢量α关于基底$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$的坐标。

如果V有一个有限基底，就称V是一个有限维线性空间，否则，称为无限维空间。有限维线性空间V的基底的矢量个数称为V的维数，记作$\dim V$。

[第一维数定理] 域F上有限维线性空间V的任意两个基底有相同个数的元素。

推论 设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$为一个$n$维线性空间$V$中一组线性无关的矢量，显然$k \leqslant n$，则在$V$中存在一个基底使得$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$是它的一部分。

二、线性子空间

[线性子空间] 设S是域F上线性空间V的一个非空子集，若S对于V的

线性运算也构成线性空间，则称S为V的一个线性子空间，简称为子空间．

设S是域F上线性空间V的一个子集，若关于线性运算是封闭的，即

（i）若$\alpha, \beta \in S$，则$\alpha+\beta \in S$；

（ii）若$\alpha \in S$，$a \in F$，则$a\alpha \in S$；

则S是V的子空间．

例如，在线性空间V中的单个零矢量所组成的子集是V的一个子空间，称为零子空间．V本身也是V的一个子空间．这两个子空间称为V的平凡子空间．

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$为域$F$上线性空间$V$中的一组矢量，这组矢量的一切线性组合

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_r\alpha_r, \quad c_i \in F \ (i=1,2,\cdots,r)$$

构成V的一个子空间，称为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$生成（或张成）的子空间．这是$V$的非平凡子空间．

［子空间的交与和］　设S，T是域F上线性空间V的子空间，属于S又属于T的V中一切矢量所构成的子集称为S与T的交（通集），记作$S\cap T$．由能表示为$\alpha+\beta(\alpha\in S; \beta\in T)$的一切矢量构成的子集称为$S$与$T$的和（和集），记作$S+T$（或$S\cup T$）．

设S与T是F上线性空间V的两个子空间，则S与T的交$S\cap T$以及和$S+T$都是V的子空间．

［第三维数定理］　设S与T是线性空间V的两个子空间，则

$$\dim S+\dim T=\dim(S+T)+\dim(S\cap T)$$

（这里$\dim V$表示线性空间V的维数）．

推论　若n维线性空间V中两个子空间S与T的维数之和大于n，则S，T必含有公共非零矢量．

例如，三维空间中两个不同平面（二维子空间）交于一条直线，由于$\dim S+\dim T=2+2=4$，但$\dim(S+T)=3$，所以$\dim(S\cap T)=1$．

［子空间的直和］　设$S_1, S_2, \cdots, S_k$是线性空间V的子空间，若和$S_1+S_2+\cdots+S_k$中每个矢量α的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k, \quad \alpha_i\in S_i \ (i=1,2,\cdots,k)$$

是唯一的．这个和就称为直和，记作

$$S_1\oplus S_2\oplus\cdots\oplus S_k$$

子空间的直和具有以下性质：

1°　和$S_1+S_2+\cdots+S_k$是直和的充分必要条件是：

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=0,\qquad \alpha_i\in S_i\ (i=1,2,\cdots,k)$$

仅当 α_i 全为零矢量时才成立.

2° 和 $S_1+S_2+\cdots+S_k$ 是直和的充分必要条件是:

$$S_i\cap\sum_{j\neq i}S_j=\varnothing\text{(空集)}\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

3° 设 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 是线性空间 V 的子空间, 若

$$W=S_1\oplus S_2\oplus\cdots\oplus S_k$$

则
$$\dim W=\dim S_1+\dim S_2+\cdots+\dim S_k$$

其逆也真.

这表明对于子空间的直和, 维数是可加的. 由此可见, 若

$$W=S_1\oplus S_2\oplus\cdots\oplus S_k$$

把子空间 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的基

$$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in_i}\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

合并起来就得到子空间 W 的一组基.

[商空间] 设 S 是 V 的一个子空间, 并设两个矢量 $\alpha,\alpha'\in V$, 若 $\alpha'-\alpha\in S$, 则说 α 和 α' 是等价的, 记作 $\alpha\sim\alpha'$. 实际上, 这个关系具有等价关系的三个性质:

(i) 反身性　对每个 $\alpha\in S$, 有 $\alpha\sim\alpha$;

(ii) 对称性　若 $\alpha\sim\alpha'$, 则 $\alpha'\sim\alpha$;

(iii) 传递性　若 $\alpha\sim\alpha'$, $\alpha'\sim\alpha''$, 则 $\alpha\sim\alpha''$.

和集合的情形一样, 称两个等价的矢量 α 和 α' 是属于同一类. 每个矢量 $\alpha\in V$ 恰好包含在一个类中, 这一类记作 $\bar{\alpha}$. V 中的零矢量 $\mathbf{0}$ 包含在与子空间 S 重合的 $\bar{\mathbf{0}}$ 类中.

若把每个类作为一个元素, 则这一切元素组成的集是一个线性空间, 称为 V 关于 S 的商空间, 记作 V/S. 商空间的零矢量是 $\bar{\mathbf{0}}$, 且有

$$\dim V/S=\dim V-\dim S$$

由此可见, 若 $S=V$, 则商空间的维数是零; 又若 S 是零空间, 则商空间的维数与 V 的维数相同.

§3 线性变换

一、基本概念

[线性变换] 设 V 和 V' 是同一域 F 上的两个线性空间, 映射 $\boldsymbol{L}$: $V\to V'$ 若满足下面两个条件:

(i) $L(\alpha_1+\alpha_2)=L(\alpha_1)+L(\alpha_2)$, 对任意 $\alpha_1,\alpha_2\in V$;

(ii) $L(a\alpha_1)=aL(\alpha_1)$, 对任意 $a\in F,\alpha_1\in V$;

则称 L 为线性映射或线性变换，又称同态．若 V 与 V' 是同一线性空间，则称 L 为空间 V 到自身的线性变换，或称为自同态．

例 1　在一个线性空间 V 上的一个线性函数(见本节三)φ: $V\to F$ 是 V 到域 F(考虑为一维线性空间)的一个线性变换．

例 2　设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$ 是线性空间 V 上的线性函数，则由

$$\alpha\to\{\varphi_1(\alpha),\ \varphi_2(\alpha),\ \cdots,\ \varphi_m(\alpha)\},\ \alpha\in V$$

所确定的映射是 V 到 m 维空间 F^m 的一个线性变换．

例 3　设 V 是区间 $[a,b]$ 上所有连续函数组成的实线性空间．若令

$$L(f(x))=\int_a^x f(t)\,dt=F(x)$$

则 L 就是 V 的一个线性变换．事实上，因为对任意实数 b,c，有

$$L(bf(x)+cg(x))=\int_a^x[b\,f(t)+c\,g(t)]\,dt$$

$$=b\int_a^x f(t)dt+c\int_a^x g(t)\,dt=b\,L(f(x))+c\,L(g(x))$$

例 4　设 V 为一切实系数多项式 $f(x)$ 组成的线性空间．若令

$$L(f(x))=f'(x)\quad (f'(x)\text{为 }f(x)\text{的导数})$$

则 L 是 V 的一个线性变换．

[线性变换的性质]

1° 线性变换定义中的条件(i),(ii)等价于：对任意 $a,b\in F$, $\alpha_1,\alpha_2\in V$

$$L(a\alpha_1+b\alpha_2)=aL(\alpha_1)+bL(\alpha_2)$$

重复应用这公式，导出

$$L(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n)=a_1L(\alpha_1)+a_2L(\alpha_2)+\cdots+a_nL(\alpha_n)$$

2° 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$ 是线性无关的，L: $V\to V'$ 是一个线性变换，则

$$L(\alpha_1),L(\alpha_2),\cdots,L(\alpha_r)$$

也是线性无关的．

3° 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成 V 的一个基底，又设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\in V'$，则唯一地存在一个线性变换 L，使 $L(\alpha_i)=\beta_i\ (i=1,2,\cdots,m)$．

[零变换・恒等变换・逆变换]　将线性空间 V 的任一矢量 α 都变为线性空间 V' 的零矢量的变换，称为零变换记作 O．即对任一 $\alpha\in V$，有

$$O(\alpha)=0'\quad (0'\text{为 }V'\text{的零矢量})$$

将线性空间 V 中任一矢量 α 都变为自己的变换，称为恒等变换，记作 I。即对任一 $\alpha\in V$，有

$$I(\alpha)=\alpha$$

零变换和恒等变换都是线性变换。

对 $V\to V'$ 的线性变换 L，若存在 $V'\to V$ 上的线性变换 M，使 $LM=I$，则称 M 为 L 的逆变换，记作 L^{-1}。

[线性变换的矩阵]　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间 V 的一组基底，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是 V' 的基底，$L:V\to V'$ 是线性变换，那末 $\beta_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 可表为

$$\begin{cases}\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n\\ \beta_2=a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2n}\alpha_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_m=a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_n\end{cases}$$

由系数所组成的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

称为线性变换 L 关于基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$ 的矩阵。

特别，当 V 与 V' 的维数相同，或 L 是 V 自身的线性变换，则 A 为方阵。

在基底确定之后，线性变换和它的矩阵建立了一对一的对应关系。零变换的矩阵是零矩阵，恒等变换的矩阵是单位矩阵。

[线性变换的特征值与特征矢量]　如果存在 $\lambda\in F$，$\alpha\in V$，使得自同态 L：$V\to V$ 满足

$$L(\alpha)=\lambda\alpha$$

那末称 λ 为线性变换 L 的特征值(特征根)，称 α 为对应于 λ 的特征矢量。

一个线性变换的特征值与特征矢量分别等于该变换的矩阵的特征值与特征矢量。

[象·象源·核·线性变换的秩]　若 $L:V\to V'$ 是一个线性变换，则称 LV 为 V 的象，称 V 为象源，称 $L^{-1}(0')$ 为核。LV 的维数称为 L 的秩，$L^{-1}(0')$ 的维数称为退化次数。

一个线性变换 $L:V\to V'$ 的核 $L^{-1}(0')$ 与象 LV 分别为 V 和 V' 的线性子空间，核的维数与象的维数之和等于象源的维数。即

$$\dim L^{-1}(0')+\dim LV=\dim V$$

一个线性变换的秩等于该变换的矩阵的秩.

二、线性变换的运算

[线性变换的和与数乘] 从空间 V 到空间 V' 的线性变换的集,记作

$$\mathrm{Hom}(V,V')$$

设 $L,M\in\mathrm{Hom}(V,V'),a\in F,\alpha\in V$, 按照下列公式定义 $L+M,aL$:

$$(L+M)(\alpha)=L(\alpha)+M(\alpha),\quad (aL)(\alpha)=aL(\alpha)$$

这两个新的变换都是线性的,并且

$$L+M=M+L$$

$L+M,aL$ 分别称为线性变换的和与数乘.

按上面定义的线性变换的和与数乘,集 $\mathrm{Hom}(V,V')$ 组成 F 上的线性空间. 它的维数等于 V 和 V' 的维数 n 和 m 的积 mn.

[线性变换的乘积] 设 V,V',V'' 为三个线性空间,若 $L\in\mathrm{Hom}(V,V')$, $M\in\mathrm{Hom}(V',V'')$, 则定义

$$LM(\alpha)=M(L(\alpha))\quad (\alpha\in V)$$

显然 LM 是从 $V\to V''$ 的线性变换,称 LM 为线性变换的乘积.

线性变换的乘积满足:

1° 分配律 若 $L_1,L_2\in\mathrm{Hom}(V,V')$, $M\in\mathrm{Hom}(V',V'')$, 则

$$(L_1+L_2)M=L_1M+L_2M$$

2° 结合律 若 $L\in\mathrm{Hom}(V,V')$, $M\in\mathrm{Hom}(V',V'')$, $N\in\mathrm{Hom}(V'',V''')$, 则

$$L(MN)=(LM)N$$

[幂等变换] 如果 L 是线性空间 V 到自身的线性变换,满足等式

$$L^2=LL=L$$

那末称 L 为幂等变换.

[同构与自同构] 若线性变换 L: $V\to V'$ 是一对一的,则称 L 是同构,或称 L 是正则的. V 到自身的一个同构称为自同构. 若 V 到自身的线性变换不是自同构,则称它为奇异线性变换,否则就称为非奇异线性变换(或正则自同态).

同构有以下性质:

1° $L:V\to V'$ 是一个同构的充分必要条件是:

$$L^{-1}(0')=0$$

2° 若 L 和 M 是同构, L: $V\to V'$, M: $V'\to V''$, 则

$$(LM)^{-1}=M^{-1}L^{-1}$$

特别，对自同构 $V=V'=V''$，上式也成立.

3° 域 F 上线性空间 V 的一切自同构所成的集 G 在乘法之下构成一个群. 称 G 为 V 的线性变换群，记作 $Gl(n,F)$，其中 n 为 V 的维数.

4° 域 F 上线性空间 V 的一切线性变换（自同态）所成的集 R 在加法和乘法之下构成一个环. 称 R 为 A 的线性变换环.

三、对偶空间与对偶映射

[数量积与对偶空间]　设 V 和 V^* 是两个实(复)线性空间. 若对任意一对矢量 $\alpha,\alpha^*(\alpha\in V,\alpha^*\in V^*)$ 确定了一个数量 (α,α^*)，并满足下列条件：

(i) $(\alpha, a\alpha^*+b\beta^*)=a(\alpha,\alpha^*)+b(\alpha,\beta^*)$

$(a\alpha+b\beta,\ \alpha^*)=a(\alpha,\alpha^*)+b(\beta,\alpha^*)$

(ii) 对一个固定的 $\alpha\in V$ 和一切 $\alpha^*\in V^*$，若 $(\alpha,\alpha^*)=0$，则 $\alpha=0$；反之，对一个固定的 $\alpha^*\in V^*$ 和一切 $\alpha\in V$，若 $(\alpha,\alpha^*)=0$，则 $\alpha^*=0^*$.

则称函数 (α,α^*) 为数量积.

若 $(\alpha,\alpha^*)=0$，则称 α,α^* 是正交的. (ii)表明，一个空间中一个矢量与另一个空间中一切矢量正交，只当它是零矢量时才成立.

定义了数量积的两个线性空间称为对偶空间.

对偶空间的维数相等.

[对偶基底]　若 V 和 V^* 的两个基底 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 和 $\{\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*\}$ 满足关系式：

$$(\alpha_i,\alpha_j^*)=\delta_{ij},\qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

则称它们为对偶基底.

V 和 V^* 是对偶空间，则对于 V 的一个已知基底 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，$V^*$ 恰有一个对偶基底 $\{\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*\}$.

[正交补空间]　设 V_1 是 V 的一个子空间，则空间 V 中与 V_1 的一切矢量都正交的矢量 α^* 组成的集合 V_1^* 是 V 的一个子空间，称 V_1^* 为 V_1 的正交补空间，记作 $V_1^\perp$.

正交补空间有以下性质：

1° 空间 V_1 和 $V_1^\perp$ 的维数之和等于空间 V 的维数，即

$$\dim V_1+\dim V_1^\perp=\dim V$$

2° $(V_1^\perp)^\perp=V_1$

3° 若 $V=V_1\oplus V_2$，则 $V^*=V_1^\perp\oplus V_2^\perp$；而且 V_1 和 $V_2^\perp$ 是一对对偶空间，V_2 和 $V_1^\perp$ 也是一对对偶空间．

[共轭空间]　设 V 是域 F 上的线性空间，若对 $\alpha\in V$，在 F 上有唯一的一个数 $\varphi(\alpha)$ 与 α 对应，则称这个对应关系 φ 为定义在 V 上的一个函数．

函数

$$\varphi:\ V\to F$$

若对任二矢量 $\alpha,\beta\in V$ 与任意 $a,b\in F$，都有

$$\varphi(a\alpha+b\beta)=a\varphi(\alpha)+b\varphi(\beta)$$

则称 φ 为线性函数，又称为线性泛函．令 $a=b=0$，则有 $\varphi(0)=0$，因此又称线性函数为线性齐次函数或线性型．

V 中线性函数的集 $L(V)$ 的两个函数 φ，ψ 的和与数乘按通常的方式定义如下：

$$(\varphi+\psi)(\alpha)=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),\quad (a\varphi)(\alpha)=a\varphi(\alpha),\quad \alpha\in V$$

则 $L(V)$ 构成一个线性空间，称 $L(V)$ 为 V 的共轭空间．$L(V)$ 的零矢量是一个恒等于零的函数．

可以证明 $L(V)$ 和 V 是一对对偶空间．若 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的一组基底，则由下列方程定义的函数 $\alpha^1,\alpha^2,\cdots,\alpha^n$ 为 $L(V)$ 的一个基底：

$$\alpha^i(\alpha_j)=\delta_{ij}$$

因而 $\{\alpha^1,\alpha^2,\cdots,\alpha^n\}$ 又是 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 的共轭基底．

[对偶映射]　设 V,V^* 与 W,W^* 是两对对偶空间；若两个线性映射：

$$L:\ V\to W\quad 与\quad L^*:\ W^*\to V^*$$

对于一切 $\alpha\in V$ 与一切 $\beta^*\in W^*$，都有

$$(L^*(\beta^*),\alpha)=(\beta^*,L(\alpha))$$

则称 L,L^* 为对偶映射．

对偶映射有以下性质：

1° 对一个已知的线性映射 $L:V\to W$，恰有一个对偶映射 L^*．

2° 对偶映射 L 和 L^* 的秩相等．

3° 一个矢量 $\beta\in W$ 包含在象空间 LV 中的充分必要条件是：β 与核 $L^{*-1}(0)$ 中的一切矢量正交．

§4 酉空间

一、酉空间的定义与性质

[酉空间与欧氏空间]　设 V 为一个复数域 F 上的线性空间，若在 V 中定义了两个矢量 α,β 的内积(数量积)，记作 (α,β)，且满足：

(i) $(\alpha,\beta)=(\overline{\beta,\alpha})$，其中 $(\overline{\beta,\alpha})$ 是 (β,α) 的共轭复数；

(ii) $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$，等号当且仅当 $\alpha=\mathbf{0}$ 时成立；

(iii) $(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2,\beta)=a_1(\alpha_1,\beta)+a_2(\alpha_2,\beta)$，对任意 $\alpha_1,\alpha_2,\beta\in V$，$a_1,a_2\in F$ 成立；

则称 V 为一酉(U)空间，又称为内积空间.

若 F 是实数域，这时内积是可交换的．有限维实酉空间称为欧氏空间.

例　n 维线性空间 V_n 中，若规定

$$(\alpha,\beta)=(a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2+\cdots+a_n\bar{b}_n)$$

式中

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},\qquad \beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

则 V_n 是一个酉空间.

酉空间 V 中的内积具有性质：

1° $(a\alpha,b\beta)=a\bar{b}(\alpha,\beta)$

2° $(\gamma,\alpha+\beta)=(\gamma,\alpha)+(\gamma,\beta)$

3° 一般，$a_i,b_i\in F$，$\alpha_i,\beta_i\in V$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\ \sum_{i=1}^{n}b_i\beta_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i(\alpha_i,\beta_i)$$

4° $(\mathbf{0},\alpha)=(\alpha,\mathbf{0})=0$

[模(范数)]　由于 $(\alpha,\alpha)=(\overline{\alpha,\alpha})$，所以 (α,α) 是实的．令

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$$

称它为酉空间中矢量 α 的模或范数．模为 1 的矢量称为单位矢量或标准矢量.

设 α,β 为酉空间 V 的矢量，c 为一复数，则

1° $\|c\alpha\|=|c|\|\alpha\|$

2° $\|(\alpha,\beta)\|\leqslant\|\alpha\|\|\beta\|$　　(柯西-施瓦兹不等式)

等号当且仅当 α 和 β 线性相关时成立.

3° $\|\alpha+\beta\| \leqslant \|\alpha\|+\|\beta\|$

这些性质与空间的维数无关.

[正交与标准正交基]　酉空间 V 中,若 $(\alpha,\beta)=0$,则称矢量 α 正交于 β. 显然,若 α 正交于 β,则 β 也正交于 α.

酉空间中,任意一组两两正交非零矢量是线性无关的.

如果一组单位矢量两两正交,则称它为一个标准正交组.若这矢量组又生成整个空间 V,则称它为 V 的标准正交基.

设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 为酉空间 V 的一组标准正交矢量,$\alpha\in V$,则

1° $\|(\alpha,\alpha_1)\|^2+\|(\alpha,\alpha_2)\|^2+\cdots+\|(\alpha,\alpha_n)\|^2\leqslant\|\alpha\|^2$　　(贝塞耳不等式)

2° $\beta=\alpha-[(\alpha,\alpha_1)\alpha_1+(\alpha,\alpha_2)\alpha_2+\cdots+(\alpha,\alpha_n)\alpha_n]$ 正交于 α_i $(i=1,2,\cdots,n)$

3° 当 V 是有限维空间时,$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 成为 V 的基底的充分必要条件是:任一个矢量 $\alpha\in V$ 可表为

$$\alpha=(\alpha,\alpha_1)\alpha_1+(\alpha,\alpha_2)\alpha_2+\cdots+(\alpha,\alpha_n)\alpha_n$$

且

$$\|\alpha\|^2=\|(\alpha,\alpha_1)\|^2+\|(\alpha,\alpha_2)\|^2+\cdots+\|(\alpha,\alpha_n)\|^2$$

[子空间的正交补空间]　设 V 为复数域上的酉空间,S 为 V 的一个子空间,若

(i) $S\oplus T=V$

(ii) 对 $\alpha\in S$ 和 $\beta\in T$,有 $(\alpha,\beta)=0$

则称 T 为 S 的正交补空间.

由(i)立刻可知 $S\cap T=\varnothing$ (空集).

若 S 是一个有限维酉空间 V_n 的一个子空间,则 V_n 中有一个子空间 T 为 S 的正交补空间.

二、酉空间上的特殊线性变换

[共轭变换]　对域 F 上酉空间 V 上的一个线性变换 L,由关系式

$$(L(\alpha),\beta)=(\alpha,L^*(\beta)),\quad \alpha,\beta\in V$$

所定义的变换 L^* 是线性变换,L^* 称为 L 的共轭变换.若 $LL^*=L^*L$,则称 L 为正规变换.

共轭变换有以下性质:

1° $(L^*)^*=L$

2° $(aL)^*=\bar{a}L^*$, $a\in F$

3° $(L+M)^*=L^*+M^*$

4° $(LM)^*=M^*L^*$

5° 若 L 是非奇异线性变换，则 L^* 也是非奇异线性变换，并且

$$(L^*)^{-1}=(L^{-1})^*$$

6° 若在某一标准正交基下 L 的矩阵为 A，则共轭变换 L^* 关于这同一基底的矩阵为 A 的共轭转置矩阵 $\overline{A^{\mathrm{T}}}$.

[自共轭变换(埃尔米特变换)] 若 $L=L^*$，则称 L 为自共轭变换或埃尔米特变换.

自共轭变换有以下性质:

1° 若 L,M 为自共轭变换，$a\in F$，则 $L+M,aL$ 也是自共轭变换. 当 L,M 可交换时，LM 也是自共轭变换.

2° 在标准正交基下，自共轭变换的矩阵是埃尔米特矩阵. 反之，线性变换关于一标准正交基的矩阵是埃尔米特矩阵，则必为自共轭变换.

3° 自共轭变换的特征值是实的.

4° 有适当的标准正交基使自共轭变换 L 对应于一个实对角线矩阵，其主对角线上的元素是 L 的全部特征值.

[酉变换] 若对酉空间 V 中的任意 α,β，有线性变换 L，使

$$(L(\alpha),L(\beta))=(\alpha,\beta)$$

则称 L 为酉变换.

酉变换有以下性质:

1° 恒等变换为酉变换.

2° 若 L,M 为酉变换，则 LM 也为酉变换.

3° 若 L 为酉变换，则 L^{-1} 也为酉变换.

4° L 为酉变换的充分必要条件是:

$$LL^*=I \quad 或 \quad L^*=L^{-1}$$

5° 在标准正交基下，酉变换 L 的矩阵是酉矩阵. 反之，线性变换关于一标准正交基的矩阵是酉矩阵，则必为酉变换.

6° 酉变换的特征值的绝对值都是 1.

三、射影

[射影及其性质] 对线性空间 V 上的一个线性变换 P，若有 V 的两个互补

子空间 S 和 T 使得若 $\gamma\in V,\gamma=\alpha+\beta,\alpha\in S,\beta\in T$,则

$$\boldsymbol{P}(\gamma)=\alpha$$

这种变换 $\boldsymbol{P}$ 称为V沿T在S上的射影.

射影有以下性质:

1° 若$\boldsymbol{P}$是一个射影,则

$$\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$$

因此射影是一个幂等变换;反之,幂等变换必为射影.

2° 若$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$是线性空间$V$分别沿$T_1$在$S_1$上和沿$T_2$在$S_2$上的射影,则

(i) $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$是一个射影,当且仅当若$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{O}$时,则$S_1\cap S_2=\varnothing$,并且$\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$是沿$T=T_1\cap T_2$在$S=S_1+S_2$上的射影.

(ii) 若$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}$,则$\boldsymbol{P}$是沿$T=T_1+T_2$在$S=S_1\cap S_2$上的射影.

3° 设T,S为有限维线性空间V_n的两个互补子空间,$\boldsymbol{P}$为沿子空间T在子空间S上的射影,则$\boldsymbol{P}$的矩阵可化为如下形式:

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

式中A是k阶方阵.

[正射影] 设S,T为复数域上一酉空间V的互补子空间,则V沿T在S上的射影称为V在S上的正射影.

[自共轭变换的分解] 设$\boldsymbol{L}$是有限维酉空间V上一个自共轭变换.令$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$为$\boldsymbol{L}$的不同特征值,令$S_i$为使$\boldsymbol{L}(\alpha)=\lambda_i\alpha$ $(i=1,2,\cdots,k)$的矢量α的集合,则S_i是V的子空间.显然对$i\neq j$,S_i和S_j是V的正交补空间.若$\{\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{in_i}\}$是$S_i$的一个标准正交基,其中$n_i$是$S_i$的维数,则由一切这些$\alpha_{ij}$所组成的集$\{\alpha_{ij}\}$是$V$的一个标准正交基.最后使$\boldsymbol{P}_i$为$V$在$S_i$上的射影,则关于上面的基底,$\boldsymbol{L}$的矩阵有如下的形式:

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_k & \\ 0 & & & & & & & & \lambda_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & & & 0\\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k I_{n_k}\end{bmatrix}$$

式中I_{n_i}表示n_i阶单位矩阵.另一方面,关于这个基底射影$\boldsymbol{P}_i$的矩阵为

$$\begin{bmatrix} O_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & I_{n_j} & \vdots \\ 0 & \cdots & O_{n_k} \end{bmatrix}$$

式中 O_{n_j} 表示 n_j 阶的零矩阵.

因此自共轭变换可以写成射影的一个线性组合.

$$L=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\cdots+\lambda_k P_k$$

四、酉空间中的度量

在本节第一段中,已经引入酉空间中每个矢量 α 的模(范数). 酉空间中两"点"(即矢量)α,β 的距离 $d(\alpha,\beta)$ 与任二矢量 α,β 之间的角度 φ 的定义如下:

$$d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|=\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)}$$

$$\cos\varphi=\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$$

由上述方程所定义的函数满足尺度空间(见第二十一章, §4, 一)中的一切条件.

若 V 是一个实酉空间,则对一切 $\alpha,\beta\in V$, 角度 φ 必须是实的.

§5 二次型与埃尔米特型

一、二次型

[双线性型] 若 $2n$ 个实(或复)变数 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的一个二次齐次多项式

$$x^{\tau}Ay\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\zeta_i\eta_k \tag{1}$$

称为双线性型,式中

$$x=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)^{\tau},\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\tau}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

[二次型] 关于 n 个实(或复)变数 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ 的一个二次齐次多项式

$$x^{\tau}Ax\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\zeta_i\zeta_k\equiv x^{\tau}A_1x \tag{2}$$

称为二次型，式中 $x=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)^{\tau}$，$A_1=\frac{1}{2}(A+A^{\tau})$是矩阵 A 的对称部分，即 A_1 的元素是 $\frac{1}{2}(a_{ik}+a_{ki})$.

表达式(2)恒等于零的充分必要条件是：A是反对称的($a_{ik}=-a_{ki}$).

当矩阵A是对称的，则称二次型是对称的．当矩阵A是实的(a_{ik}是实数)，则称二次型是实的．由(2)可知，每个二次型都可化为对称的．

一个实对称二次型当对每组不全为零的实数 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$，使得 $x^{\tau}Ax>0$，$x^{\tau}Ax<0$，$x^{\tau}Ax\geqslant 0$ 或 $x^{\tau}Ax\leqslant 0$，则分别称二次型是正定的，负定的，半正定的或半负定的．其他一切实对称二次型称为不定的(即 $x^{\tau}Ax$ 的符号与 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$有关)或恒等于零．

[化二次型为标准型]

1° 一个线性变换

$$\zeta_i=\sum_{k=1}^{n}t_{ik}\zeta'_k \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

或

$$x=Tx'$$

$$(\det T=\det(t_{ik})\neq 0)$$

把每个二次型(2)变为关于新变数 $\zeta'_1,\zeta'_2,\cdots,\zeta'_n$ 的一个二次型

$$x^{\tau}Ax\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a'_{ik}\zeta'_i\zeta'_k\equiv x'^{\tau}A'x' \tag{4}$$

其中

$$a'_{ik}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}a_{jh}t_{ji}t_{hk} \quad (i,k=1,2,\cdots,n)$$

或

$$A'=T^{\tau}AT$$

若A是对称的，则A'也是对称的；若A和T都是实的，则A'也是实的．

2° 对每个实对称二次型，存在具实系数 t_{ik} 的线性变换(3)，使得在(4)中的矩阵A'是对角线矩阵，所以

$$x^{\tau}Ax\equiv x'^{\tau}A'x'\equiv\sum_{i=1}^{n}a'_{ii}\zeta'^2_i \tag{5}$$

在(5)式中系数 a'_{ii} 不等于零的个数 r 与所采用的对角化的变换无关，并且等于已知矩阵A的秩，r 称为二次型的秩．(5)式中系数 a'_{ii} 的正数与负数个数之差也与所采用的对角线化的变换无关(即雅可比-西尔维斯特惯性定律)，

它称为二次型的符号差.

3° 特别,对每个实对称二次型,存在一个对应于实正交矩阵T的线性变换,可把二次型化为标准型,即

$$x^{\tau}Ax \equiv x'^{\tau}A'x' \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2 \tag{6}$$

式中实数λ_i是已知矩阵A的特征值.

4° 再施行变换$\xi_i' = \xi_i''/\sqrt{|\lambda_i|}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,表达式(6)化为

$$x^{\tau}Ax \equiv \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \xi_i''^2$$

式中ε_i等于1,−1或0,分别对应于特征值λ_i是正的,负的或零.

[两个二次型的联立简化]　给定两个实对称二次型$x^{\tau}Ax$, $x^{\tau}Bx$, 其中$x^{\tau}Bx$是正定的,我们能求出一个实变换(3),它可以把$x^{\tau}Ax$, $x^{\tau}Bx$同时化为标准型. 特别是存在一个实变换(3),使

$$x^{\tau}Ax \equiv x'^{\tau}A'x' \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu_i \xi_i'^2$$

$$x^{\tau}Bx \equiv x'^{\tau}B'x' \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i'^2$$

实数$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$是矩阵$B^{-1}A$的特征值,它们是$n$次代数方程

$$\det(A-\mu B) \equiv \det(a_{ik}-\mu b_{ik}) = 0$$

的根.

[正定等的判别法]

1° 一个实对称二次型是正定,负定,半正定,半负定,不定或恒等于零的充分必要条件是:矩阵$A=(a_{ik})$的特征值(一定是实的)分别都是正的,都是负的,都是非负的,都是非正的,符号不同或都等于零.

2° 一个实对称二次型是正定或半正定的充分必要条件是: $\det(a_{ik})$的每个主子式

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \cdots,\quad \det(a_{ik})$$

都是正的或非负的.

3° 一个实对称二次型为负定或半负定的充分必要条件是: $-A$分别是正定

或半正定.

4° 一个实矩阵A是一个半正定矩阵的充分必要条件是: $A=B^{\tau}B$. 若B是非奇异的,则A是正定的.

5° 若A与B都是正定的或负定的,则AB也都是正定的或负定的. 每个正定矩阵A有唯一的决定于$Q^2=A$ (Q是正定的)的一对平方根Q, $-Q$.

二、埃尔米特(H)型

[H型] 关于n个实(或复)变数$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$的一个二次型

$$\bar{x}^{\tau}Ax\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{\zeta}_i\zeta_k$$

称为一个埃尔米特型(H型),式中A为一个n阶埃尔米特矩阵(第四章, §2, 四),即$A=\overline{A^{\tau}}(a_{ik}=\bar{a}_{ki})$.

如果一个H型对任一组不全为零的复数$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$,使得$\bar{x}^{\tau}Ax>0$, $\bar{x}^{\tau}Ax<0$, $\bar{x}^{\tau}Ax\geqslant 0$或$\bar{x}^{\tau}Ax\leqslant 0$,则分别称$H$型为正定的,负定的,半正定的或半负定的. 其他一切H型称为不定的(即$\bar{x}^{\tau}Ax$的符号与$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$有关)或恒等于零.

[化H型为标准型]

1° 一个线性变换(3)把每个H型变为关于新变数$\zeta_1',\zeta_2',\cdots,\zeta_n'$的一个新的$H$型

$$\bar{x}^{\tau}Ax\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}'\bar{\zeta}_i'\zeta_k'\equiv\bar{x}'^{\tau}A'x'$$

式中
$$a_{ik}'=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}a_{jh}\bar{t}_{ji}t_{hk}\qquad(i,k=1,2,\cdots,n)$$

或
$$A'=\bar{T}^{\tau}AT$$

2° 对每个H型,存在线性变换(3),使得

$$\bar{x}^{\tau}Ax\equiv\bar{x}'^{\tau}A'x'\equiv\sum_{i=1}^{n}a_{ii}'|\zeta_i'|^2\tag{7}$$

在(7)式中系数a_{ii}'不等于零的个数r与所采用的对角化的变换无关,并且等于已知矩阵A的秩, r称为H型的秩.

3° 特别,对每个H型存在一个对应于对角线酉矩阵T的线性变换,可把H型化为标准型

$$\bar{x}^{\mathrm{T}}Ax\equiv\bar{x}'^{\mathrm{T}}A'x'\equiv\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|\xi_i'|^2 \tag{8}$$

式中实数组 λ_i 是已知矩阵 A 的特征值.

4° 再施行变换 $\xi_i'=\xi_i''/\sqrt{|\lambda_i|}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，表达式(8)化为

$$\bar{x}^{\mathrm{T}}Ax\equiv\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i|\xi_i''|^2$$

式中 ε_i 等于1，−1 或 0，分别对应于特征值 λ_i 是正的，负的或零.

[两个 H 型的联立简化]　给定两个 H 型 $\bar{x}^{\mathrm{T}}Ax$ 与 $\bar{x}^{\mathrm{T}}Bx$，其中 $\bar{x}^{\mathrm{T}}Bx$ 是正定的，存在一个变换(3)，使得

$$\bar{x}^{\mathrm{T}}Ax\equiv\bar{x}'^{\mathrm{T}}A'x'\equiv\sum_{i=1}^{n}\mu_i|\xi_i'|^2$$

$$\bar{x}^{\mathrm{T}}Bx\equiv\bar{x}'^{\mathrm{T}}B'x'\equiv\sum_{i=1}^{n}|\xi_i'|^2$$

实数 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是矩阵 $B^{-1}A$ 的特征值，它们是 n 次代数方程

$$\det(A-\mu B)\equiv\det(a_{ik}-\mu b_{ik})=0$$

的根.

[正定等的判别法]

1° 一个 H 型是正定，负定，半正定，半负定，不定或恒等于零的充分必要条件是：矩阵 A 的特征值（一定是实的）分别都是正的，都是负的，都是非负的，都是非正的，符号不同或都等于零.

2° 一个埃尔米特矩阵 A（和相应的 H 型）是正定或半正定的充分必要条件是：$\det(a_{ik})$ 的每个主子式都是正的或非负的.

3° 一个埃尔米特矩阵 A（和相应的 H 型）是负定或半负定的充分必要条件是：$-A$ 分别是正定或半正定.

4° 一个矩阵 A 是一个半正定的埃尔米特矩阵的充分必要条件是：

$$A=B^{\mathrm{T}}B$$

§6　方阵的若当标准形

一、不变子空间

设 L 为一个实（或复）线性空间 V 的一个线性变换. S 为 V 的一个子空间，若

$LS\subset S$，则称 S 为关于 L 的一个不变子空间.

设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换 L 的不变子空间，V 可以用它们的直和：

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$

来表示的充分必要条件是：在某基底下线性变换 L 对应的矩阵 A 可化为分块对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & & & 0\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s\end{bmatrix}$$

式中 A_i 的阶数分别等于 V_i 的维数 $(i=1,2,\cdots,s)$.

二、方阵的标准化

[若当块与若当标准方阵]　形为

$$J_{m_i,\lambda_i}=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i\end{bmatrix}$$

的 m 阶方阵称为若当块，式中 λ_i 是一特征值.

一个方阵的分块矩阵在主对角线上的子阵都是若当块，而其余的子阵都是零矩阵，即

$$J=\begin{bmatrix}J_{m_1,\lambda_1} & & & O\\ & J_{m_2,\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J_{m_s,\lambda_s}\end{bmatrix}\qquad(1)$$

则称其为若当标准方阵或若当标准形. 注意，不同块里的这些 λ_i 未必两两不同.

[方阵的标准化]

1° 特征值都不同的情形　若一个方阵 A 的特征值都不相等，则 A 可以化为对角矩阵，它的主对角线上的元素就是这些特征值：

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

2° 特征值有相等的情形　任意方阵 A 都可以化为与它相似的若当标准形(1)，其中 λ_i 是它的特征值，m_i 是特征值 λ_i 的重数. 如不计若当块 J_{m_i,λ_i} 的

次序，则A的标准形是唯一的。

当且仅当一切若当块的阶m_i都等于1时，可化为对角矩阵。这就是1°的情形。

以上说明，假定A是一个方阵，那末总可找到一个非奇异的方阵T，使得方阵$T^{-1}AT$与A相似。

$$J=T^{-1}AT$$

三、方阵标准化的方法与步骤

［λ矩阵］　假定一个n阶方阵A的元素都是变数λ的复系数多项式

$$A=A(\lambda)$$

则$A(\lambda)$称为λ矩阵。一个λ矩阵$A(\lambda)$的不恒等于零的子式的最高阶数r称为$A(\lambda)$的秩。

［不变因子与初等因子］　设r为$A(\lambda)$的秩，k是正整数$1\leqslant k\leqslant r$，$D_k(\lambda)$为$A(\lambda)$的一切k阶子式的最高公因式，则$D_k(\lambda)$是一个λ的多项式，规定$D_k(\lambda)$的λ最高次项系数是1；此外规定

$$D_0(\lambda)=1,\quad D_k(\lambda)=0\qquad (r<k\leqslant n)$$

称

$$d_k(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} & (1\leqslant k\leqslant r)\\ 0 & (r<k\leqslant n)\end{cases}$$

为$A(\lambda)$的不变因子。

把每个$d_k(\lambda)$分解为一次因子，得到

$$d_k(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{t_{1k}}(\lambda-\lambda_2)^{t_{2k}}\cdots(\lambda-\lambda_l)^{t_{lk}}\qquad (k=1,2,\cdots,r)$$

式中指数t_{ik}有的可能是零，当$t_{ik}\neq 0$时，$(\lambda-\lambda_i)^{t_{ik}}$称为$A(\lambda)$的一个初等因子。

［初等变换·矩阵的等价］　对λ矩阵$A(\lambda)$的下列三种变换的有限次组合称为$A(\lambda)$的初等变换。

(i)　任何两行(列)互换；

(ii)　把任何一行(列)的各元素乘上同一个λ的多项式后加到另一行(列)的相应的元素上；

(iii)　把任何一行(列)的元素乘上同一个不等于零的复数。

应当指出，适当地施行(ii)，(iii)两种变换可以得到(i)。

若$B(\lambda)$可由$A(\lambda)$经过有限次初等变换得到，则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价，记

作 $A(\lambda)\cong B(\lambda)$.

λ 矩阵经过初等变换后,其不变因子和初等因子都不变.

[λ 矩阵的标准形] 设 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 r,不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$,则

$$A(\lambda)\cong\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & 0 \\ & d_2(\lambda) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

称右边的方阵为 $A(\lambda)$ 的标准形.它是由 $A(\lambda)$ 唯一确定的.

等价的 λ 矩阵具有相同的标准形.

[特征矩阵] 方阵 A 的特征矩阵 $(A-\lambda I)$ 是一个特殊的 λ 矩阵. 所以

1° 若 $(A-\lambda I)$ 的初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{m_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

其中各 λ_i 未必两两不同,则

$$m_1+m_2+\cdots+m_s=n$$

且有

$$(A-\lambda I)\cong\begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & (\lambda-\lambda_1)^{m_1} & & & \\ & & & & (\lambda-\lambda_2)^{m_2} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & (\lambda-\lambda_s)^{m_s} \end{bmatrix}$$

2° 如果 n 阶 λ 矩阵

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & (\lambda-\lambda_1)^{m_1} & & & \\ & & & & (\lambda-\lambda_2)^{m_2} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & (\lambda-\lambda_s)^{m_s} \end{bmatrix}$$

其中 $m_1+m_2+\cdots+m_s=n$,则

$$B(\lambda)\cong(J-\lambda I)$$

式中 J 为 A 的若当标准形.

3° 若 A 的特征矩阵的初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{m_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

则
$$A \sim J$$
J为A的若当标准形.

[方阵标准化的步骤]　把方阵A化为A的若当标准形的步骤如下:

(1) 利用初等变换把$(A-\lambda I)$化为对角矩阵，分解对角线上的多项式，就得到$A-\lambda I$的全部初等因子.

(2) 相应于每个初等因子$(\lambda-\lambda_0)^m$，作出一个m阶的若当块
$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

(3) 把全部若当块合并起来就得到A的若当标准形.

例 1　求方阵
$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$
的若当标准形.

解
$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ -7 & -2-\lambda & 9 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$
容易求出它的不变因子为 1, 1, $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, 所以初等因子是$(\lambda-1)$, $(\lambda-2)^2$.因此得到A的若当标准形
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例 2　求方阵
$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
的若当标准形.

解
$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ -14 & -5 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

经过初等变换可以把它化为如下形式的对角线矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以初等因子为$(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, 相应的若当块为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以A的若当标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

§7 泛函分析初步

一、勒贝格积分

1. 测度与可测函数

［测度与可测集］ 设S为某一区间(a,b)内的任一有界点集,则把覆盖S的一组区间的长度之和的下确界称为S的外测度，记作$m_e[S]$. 包含S的任一有界区间(a,b)的长度$b-a$与S关于(a,b)的余集(即(a,b)内不属于S的点的全体)的外测度之差称为S的内测度．记作$m_i[S]$. $m_e[S]=m_i[S]$的集S称为可测集,其测度记作$m[S]$.

设S为直线上的一个无界点集，若对一切大于零的x, $(-x,x)\cap S$是可测的,则称这个无界点集S是可测的．在这种情形下,定义无界点集S的测度为

$$m[S]=\lim_{x\to\infty} m[(-x,x)\cap S]$$

这里$m[S]$可以有限或无限.

每个有界开集都是可测的.

可测集的概念可以推广到n维空间的点集上去.

［几乎处处］ 若一个性质对区间上除了一个测度为零的集合之外，在其他点都成立,则称这个性质在已知区间上几乎处处成立.

［可测函数］ 设函数$f(x)$在可测集S上定义,而c是任意实数．若在S上

使 $f(x)\leqslant c$ 的一切点 x 所构成的集是可测的，则称函数 $f(x)$ 为在 S 上的一个可测函数。

在这个定义中，条件 $f(x)\leqslant c$ 可用 $f(x)<c, f(x)\geqslant c, f(x)>c$ 中任一条件来代替。

在 (a,b) 内任一连续函数是 (a,b) 内的可测函数。

若 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 都是 (a,b) 内的可测函数，则 $f_1(x)+f_2(x), af(x)$（a 为常数），$f_1(x)f_2(x)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$（极限存在）也都是 (a,b) 内的可测函数。

2. 勒贝格积分

［有界函数的勒贝格积分］　在有界区间 (a,b) 内给定一个有界可测的实函数 $f(x)$，在 $f(x)(x\in(a,b))$ 的变化范围内插入分点：

$$f(a)=y_0<\eta_1<y_1<\eta_2<\cdots<\eta_n<y_n=f(b) \tag{1}$$

并用 S_i 表示使 $y_{i-1}<f(x)<y_i$ 在 (a,b) 内的点 x 所构成的集，对每个分法(1)的序列 $\{y_i\}$，当 $\max\limits_i\{y_i-y_{i-1}\}\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i m[S_i]$ 趋于唯一的有限极限 I，记作

$$I=\lim_{\max\limits_i\{y_i-y_{i-1}\}\to 0}\sum_{i=1}^{n}\eta_i m[S_i]=\int_a^b f(x)\,dx$$

这个量称为 $f(x)$ 在 (a,b) 内按勒贝格意义的定积分，又称为勒贝格积分，称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是可积（在勒贝格意义下，下同）的。

［无界函数的勒贝格积分］　若 $f(x)$ 在有界区间 (a,b) 内是无界可测函数，则勒贝格积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 定义如下：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\int_a^b f_A(x)\,dx+\lim_{B\to-\infty}\int_a^b f_B(x)\,dx$$

式中

$$f_A(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\leqslant 0)\\ f(x) & (0<f(x)\leqslant A)\\ A & (f(x)>A)\end{cases}\qquad f_B(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\geqslant 0)\\ f(x) & (0>f(x)\geqslant B)\\ B & (f(x)<B)\end{cases}$$

［在无界区间上的勒贝格积分］　若 $\int_a^X f(x)\,dx$ 对一切 $X>a$ 存在，则定义勒贝格积分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 如下：

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{X_1\to\infty}\int_a^{X_1} f_1(x)\,dx+\lim_{X_2\to\infty}\int_a^{X_2} f_2(x)\,dx$$

式中　$f_1(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\leqslant 0)\\ f(x) & (f(x)>0)\end{cases}$　$f_2(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\geqslant 0)\\ f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$

同样可以定义$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$和$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

[在一个点集上的勒贝格积分]　上述有界和无界函数的勒贝格积分的定义可推广到任一个可测集S上的勒贝格积分$\int_S f(x)\,dx$. 还可推广到n维空间的区域或可测集上的多重勒贝格积分.

[勒贝格积分的存在性与性质]

1° 每个有界可测函数在任一有界可测集上是可积的，在一可测集S上的可积函数在S的每个子集上都是可积的.

2° 勒贝格积分$\int_S f(x)\,dx$存在的充分必要条件是：勒贝格积分$\int_S |f(x)|\,dx$存在.

3° 在一个测度等于零的集上的勒贝格积分等于零.

4° 设$S_1, S_2, \cdots$为一组可数的互不相交(即$S_i \cap S_j=\varnothing$，$i\neq j$)的可测集，假定$f(x)$在S_i $(i=1,2,\cdots)$和$\bigcup_i S_i$上的勒贝格积分都存在，则

$$\int_{\bigcup_i S_i} f(x)\,dx=\int_{S_1} f(x)\,dx+\int_{S_2} f(x)\,dx+\cdots$$

5° 连续性定理　设$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots$和一个正的函数$A(x)$在一个可测集$S$上都是可测的，并且对一切$n$与$S$中一切$x$，不等式

$$|f_n(x)|\leqslant A(x)$$

几乎处处成立；又设对S中几乎一切x，使$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=F(x)$成立，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_S f_n(x)\,dx$$

存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_S f_n(x)\,dx=\int_S F(x)\,dx$$

6° 勒贝格基本定理　设S是一个可测集，$m[S]<\infty$，$f(x)$不一定有界. 若

(i) $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$都是$S$上非负的可测函数；

(ii) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

则
$$\int_S f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_S f_n(x)\,dx$$

3. 平方可积函数

[L_2空间]　若S是有界可测集，$f(x)$为S上的可测函数，$f^2(x)$可积，并且
$$\int_S f^2(x)\,dx<\infty$$
则称$f(x)$为属于空间$L_2(S)$的函数，记作$f\in L_2(S)$，或简写为$f\in L_2$. 在本段中，假定S就是区间(a,b).

若$f\in L_2$，$g\in L_2$，则fg，$f\pm g$都是可积的；并有
$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]$$
$$\left[\int_a^b (f+g)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

[模与距离]　设$f(x)\in L_2$，则称
$$\|f\|=\left[\int_a^b f^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$$
为f的模(范数).

设$f,g\in L_2$，则称
$$\rho(f,g)=\|f-g\|$$
为f与g的距离.

设$f,g,h\in L_2$，则

(i) $\rho(f,g)\geqslant 0$，只当$f=g$几乎处处成立时，$\rho(f,g)=0$

(ii) $\rho(f,g)=\rho(g,f)$

(iii) $\rho(f,g)\leqslant\rho(f,h)+\rho(h,g)$

[平均收敛]　若$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots\in L_2$，$f(x)\in L_2$，并且
$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$$
则称函数序列$\{f_n(x)\}$在L_2内收敛或平均收敛，且其极限为$f(x)$，记作
$$\lim_{n\to\infty}f_n=f^{*}$$

平均收敛有以下性质：

1° 若$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=g$，则

---

*　这里$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$不同于$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

$$f(x)=g(x)$$

在(a,b)上几乎处处成立。

2° 若$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，$\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

3° 若$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，$g\in L_2$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)f_n(x)\,dx=\int_a^b g(x)f(x)\,dx$$

4° $L_2(a,b)$中点列$\{f_n\}$平均收敛的充分必要条件是它为基本序列。

基本序列的定义如下：设$f_n\in L_2$ $(n=1,2,\cdots)$，若对任意$\varepsilon>0$，总有正整数N，对一切$n\geqslant N, m\geqslant N$，使得

$$\|f_n-f_m\|<\varepsilon$$

则称$\{f_n\}$为L_2中的基本序列。

由此可见L_2是完备空间(见第二十一章，§4，一)。

[L_2空间的可分性]

1° 设$f(x)\in L_2(a,b)$，则对任意$\eta>0$，总有连续函数$\varphi(x)$，使

$$|f(x)-\varphi(x)|<\eta$$

2° 设$f(x)\in L_2(a,b)$，则对任意$\varepsilon>0$，总有系数为有理数的多项式$p(x)$，使

$$\|f-p\|<\varepsilon$$

因为所有系数为有理数的多项式组成一个可数集合，并在L_2中处处稠密，所以2°表明L_2为可分空间(见二十一章，§3，三)。

二、希尔伯特空间

[希尔伯特(H)空间]　若无限维酉空间V中每个基本序列收敛于V中一个元素，则称V为完备的。一个完备的无限维酉空间称为希尔伯特空间，或简称H空间。

在n维空间中的矢量定义为n个数$f_1,f_2,\cdots,f_n$的全体。类似地，无限维空间中的矢量定义为t从a变到b的函数$f(t)$。

矢量的加法与数乘定义为函数的加法与函数和数的乘法。

在H空间中两矢量的内积(数量积)公式为

$$(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)\,dt \tag{1}$$

[H空间的度量]　设$f(t)\in H$，则

$$\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}$$

为矢量 $f(t)$ 的长度. 设 $f(t), g(t) \in H$, 则矢量 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之间的距离等于

$$\sqrt{\int_a^b [f(t)-g(t)]^2 dt}$$

这个表达式称为函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的均方差. 就是以均方差作为希尔伯特空间 H 中两元素间距离的度量.

在 H 空间中两矢量 $f(t), g(t)$ 间的角度 φ 定义为

$$\cos\varphi = \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}} \tag{2}$$

因为对任意两个函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 都有不等式

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}$$

所以等式(2)的右端可以看作某角度 φ 的余弦.

［正交函数与正交函数系］　若非零矢量 f 与 g 的内积 $(f,g)=0$, 则由(1)与(2)可知 $\cos\varphi=0$, 即 $\varphi=90°$. 因此称矢量 f 和 g 是正交的. 这时

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$$

设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 表示两两正交的函数, 而

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$$

为它们的和, 则 $f(x)$ 的长度平方等于 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 的长度平方和.

因为 H 空间中矢量的长度是用积分给出的, 所以这时类似于商高定理由下面的公式给出:

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=\int_a^b f_1^2(x)\,dx+\int_a^b f_2^2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b f_n^2(x)\,dx$$

以上所述的积分, 例如 $\int_a^b f^2(x)\,dx$, 是指勒贝格积分有意义而言的.

若 H 空间中函数系

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$$

中的任意两函数相互正交, 即

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=0 \quad (i\neq j)$$

则称这个函数系为正交函数系. 若还满足

$$\int_a^b \varphi_k^2(x)dx = 1 \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

则称此函数系为标准正交系.

[依标准正交函数系的分解] 若在H空间中给定一个完备的标准正交函数系 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, …（即不可能再加一个不恒为零的函数与系中的一切函数正交），则一切函数 $f(x)$ 都可依这个系中函数展开成级数(平均收敛)：

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) + \cdots$$

式中函数 a_n 等于矢量 $f(x)$在标准正交系中的矢量上的投影：

$$a_n = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

可以证明：

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

它的几何意义是，H空间中矢量的长度平方等于该矢量在完备的标准正交系中的矢量上的投影平方和.

三、巴拿赫空间

[赋范线性空间] 设V为一个线性空间，对于V中每个元素 α，有一个实数$\|\alpha\|$与之对应，且具有下列性质：

(i) $\|\alpha\| \geqslant 0$，当且仅当 $\alpha = 0$ 时*，$\|\alpha\| = 0$；

(ii) $\|a\alpha\| = |a|\cdot\|\alpha\|$，特别$\|-\alpha\| = \|\alpha\|$；

(iii) $\|\alpha+\beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|$；

则称V为赋范线性空间. $\|\alpha\|$称为α的范数或模.

对于赋范线性空间 V，

$$\rho(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| \tag{1}$$

则V成为一个尺度空间. 以后讲到赋范线性空间，总认为它是一个尺度空间，并且用(1)式表示它的距离.

[巴拿赫空间的定义与例子] 完备的赋范线性空间称为巴拿赫空间.

例 1 $L_2(a, b)$是巴拿赫空间.

例 2 设在(a, b) 内所定义的一切连续函数的全体记为 C，令 $f_1 = f_1(x)$，

---

* 这里0是线性空间中的零元素.

$f_2=f_2(x)$属于 C, c是任一实数，定义

$$f_1+f_2=f_1(x)+f_2(x),\quad cf=cf(x)$$

易知C是一个线性空间，对于C中的 $f=f(x)$，定义

$$\|f\|=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$$

则C为一赋范线性空间，这种空间称为空间 $C(a,b)$.

设 $f_n=f_n(x)\in C$ $(n=1,2,\cdots)$，则由 $f_n\to f(f=f(x)\in C)$ 可得函数序列 $\{f_n(x)\}$一致收敛于 $f(x)$.

可以证明，空间 $C(a,b)$是完备的，所以是巴拿赫空间.

例 **3**　设有界实数列

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$$

的全体记为 M. 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$与 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$是两个有界数列，$a$是任一实数. 定义和、数乘与范数如下：

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n,\cdots)$$

$$ax=(ax_1,ax_2,\cdots,ax_n,\cdots)$$

$$\|x\|=\sup_i\{|x_i|\}$$

那末M成为一个赋范线性空间，称为收敛序列空间，简称为空间M. 并可证明空间M是完备的，所以是巴拿赫空间.

[紧致性]　设A为尺度空间 E 中一个非空集，或者 A 的任一无限子集 A_0 至少有一极限点，则称 A 是一个紧致集.

任一紧致集必为有界.

设 $A=\{f(x)\}$是定义在区间$[a,b]$上的一个函数族. 若对任一 $\varepsilon>0$，恒有 $\delta>0$，当 $x'\in[a,b]$，$x''\in[a,b]$，且$|x''-x'|<\delta$时，不等式

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$$

对A中任意函数 $f(x)$成立，则称函数族 A 在$[a,b]$上等度连续.

阿尔采拉-阿斯可里定理　设 $A=\{f(x)\}$是定义在$[a,b]$上的连续函数族，若

(i) 存在一个常数 M，使此族中的函数都满足$|f(x)|\leqslant M$;

(ii) A在$[a,b]$上等度连续;

则A中存在着在$[a,b]$上一致收敛的函数序列.

设 A 是空间 C 中的一个元素，则 A 为紧致的充分必要条件是：A中一切函数为有界且为等度连续.

[线性泛函及其性质] 考虑巴拿赫空间V上的泛函数v，对于V中任一点x，有一实函数$v(x)$与它对应，若

(i) v是可加的，齐次的，即对V中任两点x和y与任两实数a,b，恒有

$$v(ax+by)=av(x)+bv(y)$$

(ii) v是连续的，即当$\|x_n-x\|\to 0$时，$v(x_n)\to v(x)$，则称$v(x)$为V上的线性泛函。

线性泛函有以下性质：

1° 可加齐次泛函$v(x)$连续的充分必要条件是：有常数$M\geqslant 0$，使

$$|v(x)|\leqslant M\|x\|,\quad x\in V \tag{2}$$

2° 设$v(x)$是线性泛函，则由满足(2)的一切M构成数集的下确界称为$v(x)$的模或范数，记作$\|v\|$，且有

$$\|v\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|v(x)|$$

3° 若对巴拿赫空间V上一个线性泛函序列$\{v_n(x)\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}v_n(x)$在$V$上处处存在，则有常数$M_0$，使得

$$\|v_n(x)\|\leqslant M_0\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

这称为一致有界原理或共鸣定理。

第十章 复变函数

本章研究的对象是定义在复数域上的复值函数(简称复变函数)．重点研究一类比较特殊的复变函数——解析函数．主要内容包括解析函数的分析属性(微积分理论及级数表示)、几何性质(保角映射)等．

§1 解析函数

一、复变函数基本概念与复变函数的导数

［单值函数与多值函数］ 设Σ是扩充复平面(即包含无穷远点∞的平面)z上的一个区域(第二十一章§5，二)，对于Σ内的每个复数z，按照一定的规律，有一个或多个复数w和它对应，就称在Σ上定义了一个复变函数，记作

$$w=f(z)$$

区域Σ称为函数$w=f(z)$的定义域．

如果每一个复数z都只有一个复数w和它对应(允许不同的复数z对应于同一个复数w)，就称函数是单值的；如果有的复数z有多个w值和它对应，就称函数是多值的．下面如果不加说明，一律都指单值函数．

［映射·象·原象］ 如果复数z用复平面z(简称z平面)上的点表示，复数w用复平面w(简称w平面)上的点表示，那末复变函数$w=f(z)$就是z平面上区域Σ的点和w平面上的某个点集(第二十一章§3，一)F的点之间的对应关系．这样一来，复变函数$w=f(z)$可以看成几何上的"映射"(变换)(第二十一章§1，二)，点w($w=f(z)$)称为点z的象(象点)，点z称为点w的原象(象源)．一般地，当点z在复平面z上画出一个图形A(或点集)时，相应地，它的象点w在复平面w上就画出一个图形(或点集)B．称B为A的象，A为B的原象．称函数$w=f(z)$把A映上B．

［单叶函数与多叶函数·反函数］ 如果函数$w=f(z)$在点集A上是单值的，并且对于点集A上的任意两个不同的点z_1和z_2，它们的象$w_1=f(z_1)$和$w_2=f(z_2)$也不同，那末称函数$w=f(z)$在点集A上是单叶的，如果点集A上至少有两个不同的点z_1和z_2使$w_0=f(z_1)=f(z_2)$，那末称函数$w=f(z)$在点集A上是多叶的．

如果单值函数 $w=f(z)$ 又是单叶的，它就表示 A 和 B 的点之间的一对一对应关系，并且对于 B 上的每一点 w，A 上有一个且只有一个点 z 和它对应. 记作

$$z=\varphi(w)$$

它称为函数 $w=f(z)$ 的反函数(单值的).

如果函数 $w=f(z)$ 在点集 A 上不是单叶的，那末它的反函数就是多值的了.

[双方单值连续的映射定理] 设 $w=f(z)$ 是 z 平面区域 Σ 内的单值连续函数，如果它又是单叶的，那末 Σ 的象 Δ 仍是一个区域，而且反函数 $z=\varphi(w)$ 在 Δ 内连续. 这种双方单值连续的映射称为拓扑映射或同胚映射.

[复变函数的极限] 设 z_0 是函数 $f(z)$ 的定义域内的一点，如果对任意小的正数 ε，都存在一个正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对于任意满足条件 $|z-z_0|<\delta$ 的复数 z (复数 z_0 本身可能除外)，都有

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

那末复数 A (有限或无限)称为函数 $w=f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记作

$$A=\lim_{z\to z_0}f(z)$$

[复变函数的连续性与一致连续性] 设 z_0 是函数 $f(z)$ 的定义域内的一点，如果函数 $w=f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时极限存在有限，而且同时满足

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$$

那末称函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 是连续的，如果函数 $w=f(z)$ 在区域 Σ 上每一点都连续，称函数 $w=f(z)$ 在区域 Σ 上是连续的.

如果对于任意小的正数 ε，都存在一个正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得区域 Σ 内满足条件 $|z_1-z_2|<\delta$ 的任意两点 z_1 和 z_2，都有

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$$

那末称函数 $f(z)$ 在 Σ 上一致连续.

函数在区域 Σ 上一致连续，一定在 Σ 上连续，反过来，函数在区域 Σ 上连续，不一定保证函数在 Σ 上一致连续. 但是，如果 Σ 是有界闭区域(记作 $\overline{\Sigma}$)，那末 $\overline{\Sigma}$ 上的连续性和一致连续性就等价了. 同时，有界闭区域 $\overline{\Sigma}$ 上连续函数 $w=f(z)$ 还有类似于微分学中闭区间上连续函数的另外两个性质:

1° 如果函数 $w=f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{\Sigma}$ 上连续，那末存在一个正数 M，使得对于 $\overline{\Sigma}$ 上所有的 z，都有

$$|f(z)|\leqslant M$$

2° 如果函数 $w=f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{\Sigma}$ 上连续，那末函数 $f(z)$ 的模 $|f(z)|$

在 $\bar{\Sigma}$ 上可以达到最大值和最小值，也就是说，在 $\bar{\Sigma}$ 上有两点 z_1 和 z_2，使得对于 $\bar{\Sigma}$ 上所有的 z，都有

$$|f(z)|\leqslant|f(z_1)|,\quad |f(z)|\geqslant|f(z_2)|$$

［复变函数的导数］　设函数 $w=f(z)$ 定义在区域 Σ 上，z_0 是 Σ 内的一点，如果极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在，而且有限，那末这个极限值就称为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的导数，记作

$$w'\Big|_{z=z_0}=f'(z_0)=\frac{dw}{dz}\Big|_{z=z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

并且称函数 $f(z)$ 在点 z_0 可微（单演、全纯）.

复变函数可微的定义与实变函数可微的定义在形式上是一样的，因此复变函数的求导数的一些法则、公式与实变函数的求导数的一些法则、公式在形式上也是一样的. 但是另一方面，由于在复变函数的可微性定义中，动点 z 趋于 z_0 点是在平面上，方式是任意的，它可沿任一曲线趋于 z_0，这表明复变函数可微的条件比实变函数可微的条件要求高. 从而带来复变函数论不少独特的性质和应用.

［复变函数的导数的几何意义（伸缩系数与旋转角）］　设 z 平面上通过 z_0 的曲线 C，经过映射 $w=f(z)$（可微）的象是 w 平面上通过 $w_0=f(z_0)$ 的曲线 Γ，如果 $f'(z_0)\neq 0$，那末

1°　$|f'(z_0)|$ 称为映射 $w=f(z)$ 在 z_0 的伸缩系数，它等于曲线 Γ 上通过 w_0 的无穷小弦长与曲线 C 上通过 z_0 的无穷小弦长之比的极限，它与曲线 C 和曲线 Γ 的选择无关；

2°　$\arg f'(z_0)$ 称为映射 $w=f(z)$ 在 z_0 的旋转角，如果把 z 平面与 w 平面迭放在一起，使点 z_0 与点 w_0 重合，x 轴与 u 轴平行且正方向相同，那末 $\arg f'(z_0)$ 就等于曲线 C 在 z_0 的切线到曲线 Γ 在对应点 w_0 的切线所转过的角度，它与曲线 C 和曲线 Γ 的选择无关.

二、解析函数

一般地，复变函数 $w=f(z)$ 可以写成

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

这样，对于一般的复变函数的讨论就等价于对两个双变量的实变函数的讨论. 但是，在生产实践和科学实验中，常常遇到的是一类比较特殊的复变函数——解析

函数. 对于这一类函数, 去研究复变函数 $f(z)$ 本身比拆开来研究两个实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 更方便, 得到的结论更简洁完整, 便于应用.

1. 解析函数的定义与柯西-黎曼方程

[解析函数与柯西-黎曼方程]　如果复变函数 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 的一个充分小邻域* 内点点可微, 就称这个函数在点 z_0 是解析的; 如果函数 $f(z)$ 在一个区域 Σ 内点点可微就称它在区域 Σ 内是解析的(正则, 全纯).

如果定义在区域 Σ 内的函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

在 Σ 内解析, 那末 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 Σ 内满足下面的柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

反过来, 如果 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 Σ 内满足上面条件, 并且可微, 那末 $f(z)$ 在 Σ 内解析. 这时, 解析函数 $f(z)$ 的导数可以表示成下面四种形式之一:

$$f'(z)=\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

[调和函数]　在区域 Σ 内存在二阶连续偏导数的实变函数 $u(x,y)$, 如果在 Σ 内满足拉普拉斯方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

那末称函数 $u=u(x,y)$ 是 Σ 内的调和函数;

区域 Σ 内的解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

[形式导数]　将

$$z=x+iy,\qquad \bar{z}=x-iy$$

或

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

看作变量替换而引进形式导数

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

---

* 这里 z_0 的邻域定义为以 z_0 为中心, 以 ρ $(\rho>0)$ 为半径的圆 $|z-z_0|<\rho$ 的内部.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

如果 $f(x,y)$ 是实变数 x, y 的有连续偏导数的函数，那末

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

这样一来，柯西-黎曼方程可写成

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$$

拉普拉斯方程可写成

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar{z}}=0$$

极坐标 (r,φ) 中的柯西-黎曼方程可写成

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-r\frac{\partial v}{\partial r},\quad r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

2. 解析开拓

［直接解析开拓］　如果 D_1, D_2 是两个有公共边界 Γ 的单连通区域*，$f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 分别在 D_1 和 D_2 内单值解析，在 $D_1+\Gamma$ 和 $D_2+\Gamma$ 上连续，并且在 Γ 上 $f_1(z)=f_2(z)$，那末称 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 经过 Γ 向 D_2 内的直接解析开拓(或延拓)(图 10.1)。

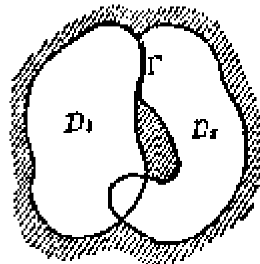


图　10.1

［解析开拓与完全解析函数］　设 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 为单连通区域，D_k 与 D_{k+1} 有公共边界 Γ_k，$1\leqslant k\leqslant n-1$，对于任何 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，$f_k(z)$ 在 D_k 内单值解析，$f_k(z)$ 与 $f_{k+1}(z)$ 分别在 $D_k+\Gamma_k$ 与 $D_{k+1}+\Gamma_k$ 上连续 $(1\leqslant k\leqslant n-1)$，并且在 Γ_k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 上 $f_k(z)=f_{k+1}(z)$，那末称 $f_n(z)$ 是 $f_1(z)$ 经过一串区域向 D_n 内的解析开拓。

考虑 $f_1(z)$ 经过所有可能的区域串的各种解析开拓，把所有这些解析开拓的值当作一个函数 $F(z)$ 的值来看，这时称 $F(z)$ 为完全解析函数，而组成它的那些单值解析函数，即 $f_1(z)$ 的各种解析开拓，称为 $F(z)$ 的分支。

3. 初等解析函数

［有理函数］

---

*　单连通(或单联)区域就是区域中的任意简单闭曲线(见§3，二的脚注)可以在区域里连续地收缩成一点，或者直观地看成没有洞的区域。有多个洞的区域称为多连通区域。

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n} \qquad (a_m\neq 0,\ b_n\neq 0)$$

式中 $P(z)$和$Q(z)$没有公因式，$R(z)$在$Q(z)$的零点上取值∞，那末$R(z)$在扩充平面上连续.

当$n>m$，$R(z)$在∞处有一个$n-m$阶零点；当$n<m$，∞是$R(z)$的$m-n$阶极点(§ 4, 一, 3)；当$m=n$, 有

$$R(\infty)=\frac{a_n}{b_n}\neq 0 \text{ 或 } \neq\infty$$

在扩充平面上，有理函数的零点的个数(包括∞是零点在内)等于极点的个数，它等于m与n中较大的一数，有理函数的阶数就用它来定义. 因此，一个k阶的有理函数$R(z)$有k个零点和k个极点，同时每个方程$R(z)=a$(a是任一常数)有k个根(几重根就算几个根).

$m=n=1$时的有理函数就是常用的分式线性函数(§2, 二与三).

[幂函数及其反函数]

1° 幂函数$w=z^n$ ($n>1$, 整数)在全平面上单值解析，它把扩充z平面映射到扩充w平面，而且$z=0$, ∞分别映射到$w=0$, ∞. 这个函数在全平面上是多叶函数.

设

$$z=\rho e^{i\varphi}, \qquad w=re^{i\theta}$$

则

$$r=\rho^n, \qquad \theta=n\varphi$$

函数$w=z^n$把从原点出发的半直线映射成从原点出发的半直线，把以原点为圆心的圆周映射成以原点为圆心的圆周，把z平面上的角状区域

$$\alpha=\frac{2k\pi}{n}<\varphi<\alpha+\frac{2(k+1)\pi}{n}$$

$$(k=0,1,\cdots,n-1,\ 0<\alpha\leqslant 2\pi)$$

映射成w平面上除去半直线$\theta=n\alpha$的裂缝区域. 在上面的角状区域内，函数$w=z^n$是单叶解析的，这样的区域称为函数$w=z^n$的单叶性区域，z平面只能分成n个单叶性区域.

2° 函数$z=\sqrt[n]{w}$ ($n>1$, 整数)在全平面(w平面)上是多值函数，因为

$$z=\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}w}{n}+i\sin\frac{\operatorname{Arg}w}{n}\right)$$

所以每个不等于0和∞的w，在z平面上有n个点z和它对应，并且这n个点分布在圆$|z|=\sqrt[n]{|w|}$的一个内接正n边形的顶点上.

函数$\sqrt[n]{w}$有n个分支

$$z_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad(k=0,1,\cdots,n-1)\qquad(|w|=r,\arg w=\theta)$$

或者说$\sqrt[n]{w}$是n值函数.

［指数函数与对数函数］

1° 指数函数

$$w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

是全平面上的单值解析函数.在全平面上没有零点,是周期函数,周期是$2\pi i$,即$e^z=e^{z+2k\pi i}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 当z沿实轴趋于$+\infty$时,$e^z\to\infty$,当z沿实轴趋于$-\infty$时,$e^z\to0$。所以,当$z\to\infty$,e^z没有极限,e^z不能定义于扩充平面.

设 $|w|=r$, $\arg w=\theta$,则

$$r=e^x,\quad\theta=y$$

函数$w=e^z$把直线$y=y_0$映射成射线$\theta=y_0$;把线段$x=x_0$, $0\leqslant y<2\pi$映射成圆周$r=e^{x_0}$;把带状区域$0<y<2\pi$映射成w平面上除去正实轴的裂缝区域;把带状区域$0<y<\pi$映射成上半平面;把一切带状区域

$$2k\pi<y<2(k+1)\pi\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

映射成w平面上除去正实轴的裂缝区域. 所以,指数函数在全平面上是多叶函数.

2° 对数函数

$$z=\mathrm{Ln}\,w$$

的表达式是

$$\mathrm{Ln}\,w=\mathrm{Ln}|w|+i\mathrm{Arg}\,w$$

由于$\mathrm{Arg}\,w$是无限多值的,所以对数函数是无限多值函数,并且对应同一w值的任意两个函数值z相差$2\pi i$的整数倍. 设对数函数的主值是

$$\ln w=\ln|w|+i\arg w$$

那末

$$\mathrm{Ln}\,w=\ln w+i2\pi k\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

带状区域

$$2k\pi<y<2(k+1)\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

和

$$(2k-1)\pi<y<(2k+1)\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

都是函数$w=e^z$的单叶性区域,它们有无穷多个,所以函数$\mathrm{Ln}\,w$有无穷多个分支,或者说$\mathrm{Ln}\,w$是无穷多值函数.

[三角函数与反三角函数]

1° 正弦函数和余弦函数分别由下式定义：

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$\sin z$ 和 $\cos z$ 是全平面上的单值解析函数，并且有周期 2π，所以是多叶函数。

2° 正切函数和余切函数分别由下式定义：

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$$

$$\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}$$

$\operatorname{tg} z$ 在全平面上除去 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的点外是解析的；$\operatorname{ctg} z$ 在全平面上除去 $z=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的点外是解析的。它们都是以 π 为周期的周期函数。

平面三角学的一切三角公式对于复的三角函数都适用。必须注意，在复平面上：$|\sin z|\leqslant1$ 与 $|\cos z|\leqslant1$ 不再成立，例如，$\cos i=\frac{e^{-1}+e}{2}>\frac{e}{2}>1$。

3° 反余弦函数通过解方程

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=w$$

得到

$$z=\operatorname{Arc}\cos w=-i\operatorname{Ln}(w+\sqrt{w^2-1})$$

类似地，有

$$z=\operatorname{Arc}\sin w=-i\operatorname{Ln}(iw+\sqrt{1-w^2})$$

$$z=\operatorname{Arc}\operatorname{tg} w=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iw}{1-iw}$$

$$z=\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} w=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1-iw}{1+iw}$$

反三角函数是无穷多值函数。它们的主值只要在各式右端把 Ln 换成 ln（对数的主值）即可。

[双曲函数与反双曲函数]

1° 双曲函数的定义是：

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}},\quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}$$

2° 双曲函数与三角函数的关系:

$$\operatorname{sh} z=-i\sin iz,\qquad \operatorname{ch} z=\cos iz$$
$$\operatorname{th} z=-i\operatorname{tg} iz,\qquad \operatorname{cth} z=i\operatorname{ctg} iz$$

3° 反双曲函数的定义是:

$$z=\operatorname{Ar}\operatorname{sh} w=\operatorname{Ln}(w+\sqrt{w^2+1})$$
$$z=\operatorname{Ar}\operatorname{ch} w=\operatorname{Ln}(w+\sqrt{w^2-1})$$
$$z=\operatorname{Ar}\operatorname{th} w=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+w}{1-w}$$
$$z=\operatorname{Ar}\operatorname{cth} w=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{w+1}{w-1}$$

反双曲函数是无穷多值函数,它们的主值只要在上面各式中将 Ln 换成 ln 即可。

4. 黎曼面·支点与支线

[n 值函数 $w=\sqrt[n]{z}$ $(n>1)$的黎曼面] $w=\sqrt[n]{z}$ 有 n 个分支:

$$w_k=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$
$$(k=0,1,\cdots,n-1,\ \theta=\arg z)$$

$\sqrt[n]{z}$ 的各个分支把除去正实轴的 z 平面相应地单值映射到下面各个扇形区域:

$$\frac{2k\pi}{n}<\arg w<\frac{2(k+1)\pi}{n}\qquad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

所以,除去正实轴的 z 平面上的任一点在 w 平面上的象点都有 n 个,这时,假设原来 z 平面上同一位置的 z 点,可以区别成 n 个不同的点,它们分别落在 n 叶沿正实轴剪开的 z 平面上:

$$T_0:\qquad 0<\theta<2\pi$$
$$T_1:\qquad 2\pi<\theta<4\pi$$
$$\vdots\qquad\qquad \vdots$$
$$T_{n-1}:\qquad 2(n-1)\pi<\theta<2n\pi$$

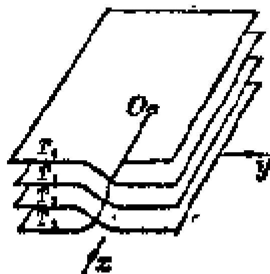


图 10.2 $\sqrt[4]{z}$ 的黎曼面

至于正实轴上的点,只要把 T_0 的下岸($\theta=2\pi$)与 T_1 的上岸相粘接,再把 T_1 的下岸与 T_2 的上岸相粘接,……,最后把 T_{n-1} 的下岸($\theta=2n\pi$)与 T_0 的上岸($\theta=0$)相粘接,于是正实轴上的任一点也可以区分成 n 个点了。这样相互粘接的 n 叶沿正实轴剪开的 z 平面,称它是 $w=\sqrt[n]{z}$ 的黎曼面,图 10.2 是 $n=4$ 的情况。$w=\sqrt[n]{z}$ 在它的黎曼面上是单值的了。

$z=0$ 处是特殊情况,它连接 n 叶平面,称它是 $n-1$ 阶支点,$z=\infty$ 也是 $n-1$ 阶支点。连接两个支点 $z=0$ 和 $z=\infty$ 的正实轴称为支线。

[多值函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 的黎曼面] 函数 $w=\mathrm{Ln}z$ 有无穷多分支:

$$w_k=\ln z+i2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

与 $w=\sqrt[n]{z}$ 黎曼面的想法类似，Lnz 的黎曼面是由无穷多叶沿正实轴剪开的 z 平面粘接而成，图 10.3 是它的示意图.

函数 $w=\mathrm{Ln}z$ 在它的黎曼面上是单值的了.

$z=0$ 和 $z=\infty$ 都是 Lnz 的无穷阶支点.

一般地，如果函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内不是单值的，可将区域的概念推广，使在新的区域内，函数变成单值的. 这种推广了的区域，称为函数 $w=f(z)$ 的黎曼面.

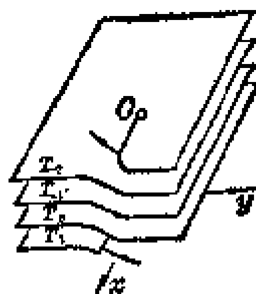


图 10.3 Lnz 的黎曼面

§2 保角映射

一、保角映射及其性质

[保角映射及其充分必要条件] 如果在区域 D 内任一点 z 的邻域里函数 $w=f(z)$ 的映射满足条件：(i) 伸缩性不变(§1,一)，(ii) 旋转角不变，并保持角的定向(§1,一)，那末称函数 $w=f(z)$ 的映射是区域 D 内的保角映射（保角变换).

$w=f(z)$ 在区域 D 内是保角映射的充分必要条件是：$f(z)$ 在 D 内解析且导数 $f'(z)$ 在 D 内处处不等于零.

[区域 D 内保角映射 $f(z)$ 的性质]

1° D 内任一无穷小圆周的象在相差一个高阶无穷小的程度内是圆周.

2° D 内两曲线的夹角映射后保持不变(保角性).

3° D 内任一区域(包括 D 自身)的象是区域.

4° 在 D 内任一点，$|f(z)|$ 不能达到极大值，也不能达到极小值.

5° D 内任一点 z，都各有一邻域，在这邻域里，$f(z)$ 是单叶的.

二、分式线性映射及其性质

分式线性函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq0)$$

所实现的映射称为分式线性映射（分式线性变换）. 它的逆映射

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a} \qquad (ad-bc\neq0)$$

也是一个分式线性映射．规定 $z=-\frac{d}{c}(c\neq 0)$ 与 $z=\infty$ 分别对应 $w=\infty$ 与 $w=\frac{a}{c}$，当 $c=0$ 时，规定 $z=\infty$ 对应 $w=\infty$，那末分式线性映射确定了一个扩充 z 平面与扩充 w 平面之间的一个一对一的对应关系．同时，除了点 $z_0=-\frac{d}{c}$ 是一阶极点外，在扩充平面上处处解析．

反过来，如果函数 $w=f(z)$ 在扩充 z 平面上单叶，并且除了一点 z_0（这一点是函数的一阶极点）外处处解析，那末 $f(z)$ 必是分式线性函数．

分式线性映射具有性质：

1° 在扩充平面上处处有保角性（通过∞处两直线的夹角定义为两直线经变换 $w=\frac{1}{z}$ 后的两曲线在 $w=0$ 处的夹角）．

2° 在分式线性变换下，圆周仍变为圆周（直线当作半径无限大的圆周）．

3° 关于圆或直线的对称点（见 § 2，三的脚注）映射后的象保持对称性．

4° 存在唯一的分式线性映射把 z 平面上的任意三点 z_1, z_2, z_3 分别映射到 w 平面上的任意三点 w_1, w_2, w_3，这样的分式线性映射是

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}:\frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}=\frac{z-z_1}{z-z_3}:\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$$

5° 扩充 z 平面上的任意一个圆，都可以找到一个分式线性映射将它映射到扩充 w 平面上的任意一个圆．

6° 在分式线性映射下，四点 z_1, z_2, z_3, z_4 的交比保持不变（z_1, z_2, z_3, z_4 的交比是 $\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}:\frac{z_3-z_2}{z_3-z_4}$）．注意，四点共圆（或共线）的充分必要条件是它们的交比为实数．

三、简单分式线性映射

图　形	说　明
[平移映射] y O x z 平面　　v $\cdot c$ O u w 平面	映射 $w=z+c$（c 是复常数）把图形平移一个复数 c

图 形	说 明
[伸缩与旋转映射] z 平面 w 平面	映射 $w=Az=\|A\|e^{i\arg A}z$ 把z以原点为中心伸缩 $\|A\|$ 倍，再绕原点 O 旋转一个角度 $\arg A$
[反演映射] z 平面 w 平面	映射 $w=\frac{1}{z}=\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ 把单位圆内(外)一点映射到圆外(内)一点(这两点同在一条过原点的射线上，而且它们的模互为倒数)而后再把这个象点映射到它关于实轴的对称点上。 点 $z=1$ 和 $z=-1$ 是不动点
[上半平面到上半平面(或下半平面)的映射] z 平面 w 平面 (a) $ad-bc>0$ z 平面 w 平面 (b) $ad-bc<0$	映射 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ (i) 当 a,b,c,d 都是实数时，z 平面的实轴 $\mathrm{Im}\,z=0$ 映射成 w 平面的实轴 $\mathrm{Im}w=0$。 (ii) 当 $ad-bc>0$ 时，把上半 z 平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 映射到上半 w 平面 $\mathrm{Im}\,w>0$ (图(a))。 (iii) 当 $ad-bc<0$ 时，把上半 z 平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 映射到下半 w 平面 $\mathrm{Im}\,w<0$(图(b))

图　形	说　明
[上半平面到单位圆内的映射] ($z=a$ 映射到 $w=0$) z 平面　　w 平面	映射　$w=e^{i\alpha}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$ (α 是实数，$\mathrm{Im}(a)>0$) 把给定的上半平面的一点 a 映射到单位圆的圆心，点 $\bar{a}$ 映射到∞。 与单位圆 $\|w\|<1$ 内的半径束相对应的是通过点 a 和 $\bar{a}$ 的那族圆周的弧(落在上半平面的)；与以 $w=0$ 为圆心的那族同心圆周相对应的是使 a 和 $\bar{a}$ 成一对对称点*的一族圆周
[单位圆内到单位圆内的映射] (圆 $\|z\|<1$ 内一点 a 映射到 $w=0$) $a^*=\frac{1}{\bar{a}}$ z 平面　　w 平面	映射　$w=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$　(α是实数，$\|a\|<1$) 把已知圆 $\|z\|<1$ 内一点 a 映射到圆 $\|w\|<1$的圆心 $w=0$，把 a 点关于单位圆周的对称点 $a^*=\frac{1}{\bar{a}}$ 映射到 $w=0$ 关于单位圆的对称点 $w=\infty$，互相对应的曲线标在图中

四、对称原理与多边形映射

[对称原理]　设D和 D' 是 z 平面上关于它们公共边界 C(一段圆弧) 对称的两个区域，而G和 G'是 w 平面上关于它们公共边界 Γ(一段圆弧)对称的两个区域.

如果函数 $w=f(z)$满足下列条件：(i) $w=f(z)$将D保角映射到 G；(ii) $w=f(z)$在 $D+C$ 上连续，将C单叶映射到 Γ. 那末存在一个函数 $w=F(z)$ 具有性质：

1° $w=F(z)$把区域 $D+C+D'$ 保角映射到区域 $G+\Gamma+G'$.

---

* 点 z 和 z^* 关于圆周 C: $|z-z_0|=R$ 对称，是指这两点都在同一条过点 z_0的射线上，并且满足等式

$$|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|=R^2$$

2° 在D内，$F(z)=f(z)$。

3° 将区域$D+C+D'$内关于C对称的两点映射到区域$G+\Gamma+G'$内关于Γ对称的两点。

[多边形映射] 多边形映射是把半平面映射到一个多边形的映射。

设z平面实轴上有n个点$a_k(-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<+\infty)$，$w$平面上一$n$边形，顶点是$A_1,A_2,\cdots,A_n$，在点$A_k$处的顶角是$\alpha_k\pi(0<\alpha_k\leqslant 2,\ k=1,2,\cdots,n)$，那末施瓦兹-克里斯托弗尔积分

$$w=f(z)=C\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k-1}dz+C_1$$

(z_0,C,C_1是三个常数）把z平面的上半平面映射到已给n边形内部，z平面实轴上的n个点a_k ($k=1,2,\cdots,n$) 分别映射到w平面的n边形的n个顶点A_k ($k=1,2,\cdots,n$)（图10.4）。

如果z平面的无穷远点（设$a_n=\infty$）与n边形一个顶点（设A_n）对应，那末映射简化成

$$w=f(z)=C\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n-1}(z-a_k)^{\alpha_k-1}dz+C_1$$

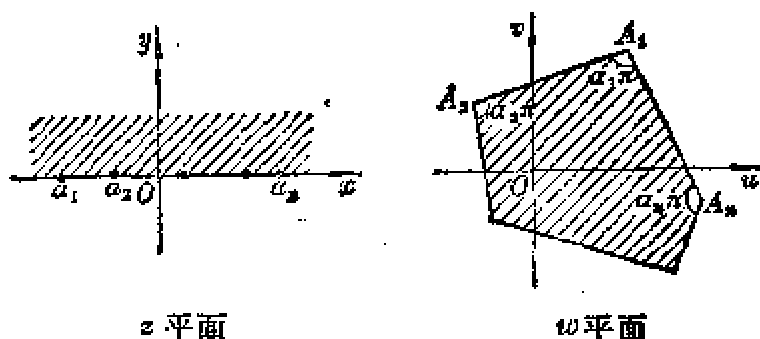


图 10.4

例 求矩形映射把z平面的上半平面$\operatorname{Im}z>0$映射到w平面上的一个矩形$A_1A_2A_3A_4$的内部（图10.5）。

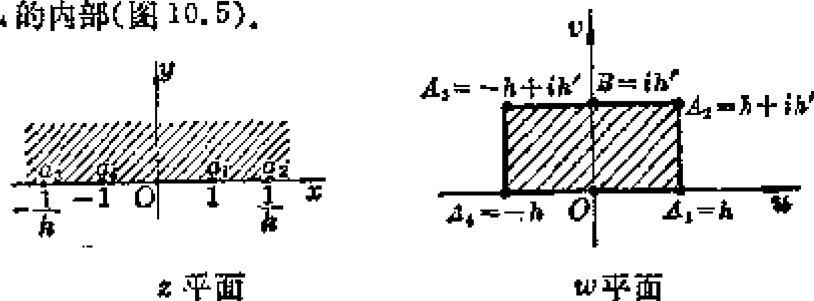


图 10.5

解　首先考虑 z 平面的第一象限映射到矩形内部的右半部分 OA_1A_2B. 同时让 $O\leftrightarrow O$, $1\leftrightarrow A_1$, $\infty\leftrightarrow B$, A_2 的原象记为$\frac{1}{k}$, $(0<k<1)$. 把这个映射关于 y 轴的正半轴应用对称原理，就有 $-\frac{1}{k}\leftrightarrow A_3$, $-1\leftrightarrow A_4$. 同时根据施瓦兹-克里斯托弗尔积分，所求的映射就是

$$w=C'\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)\left(z^2-\frac{1}{k^2}\right)}}+C_1=C\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}+C_1$$

由于 $0\leftrightarrow 0$, 所以 $C_1=0$. 又由于 $1\leftrightarrow A_1$, $\frac{1}{k}\leftrightarrow A_2$, 所以

$$h=C\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\tag{1}$$

$$h+ih'=C\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=h+iC\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

即

$$h'=C\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}\tag{2}$$

设　常数 $k(0<k<1)$已知，适当选择矩形的长和宽(即 h 和 h')，使(1)、(2)式中的常数 $c=1$.

$$w=C\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

这是第一类椭圆积分（第十二章 §1，十）.

五、保角映射的存在唯一性定理(黎曼定理)

除去两个例外(扩充平面或扩充平面除去一点)，对单连通区域有下面的保角映射的存在唯一性定理:

设 z 平面上单连通区域 D (不包含∞) 的边界点不止一个，那末在 D 上存在唯一的单叶解析函数 $w=f(z)$ 把 D 单叶保角映射到单位圆内部 $|w|<1$, 同时满足

(i)　　$f(z_0)=0$,　$z_0\in D$;

(ii)　　$\arg f'(z_0)=\varphi_0$,　$0\leqslant\varphi_0<2\pi$ (φ_0 是一常数).

§3 复变函数的积分

一、复变函数的积分的定义与公式

设C是复平面上的已定向的曲线

$$z=z(t)=x(t)+iy(t)\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

C的正方向是沿着参数t增加的方向，方向相反的曲线记作C^-. 对于任意的

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$$

就有对应的

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n\quad(z_k=z(t_k),\ k=0,1,2,\cdots,n)$$

它们把曲线C分成n段弧. 设$f(z)$在曲线C上单值连续，那末当

$$\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}(t_{k+1}-t_k)\to 0$$

和式

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)(z_{k+1}-z_k)$$

的极限存在时，就把这个极限称为函数$f(z)$沿曲线C的积分，记作

$$\int_C f(z)dz$$

如果C是一条逐段光滑曲线*，$f(z)$是C上的一个逐段连续而且有界的函数，那末函数$f(z)$沿曲线C一定可积.

复变函数沿曲线C的积分实际上可以化作两个双变量实变函数的曲线积分，所以它们的积分公式有不少相似之处（下面公式中，被积函数都假设在逐段光滑曲线C上单值连续）：

$$\int_C af(z)dz=a\int_C f(z)dz\qquad(a\text{ 是复常数})$$

$$\int_C[f(z)\pm g(z)]dz=\int_C f(z)dz\pm\int_C g(z)dz$$

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz$$

（C是由曲线C_1和C_2连接而成）

---

* 连续函数 $z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$表示的曲线（或弧），当$z'(t)$连续而且不等于零，同时当$t_1\neq t_2$时，$z(t_1)\neq z(t_2)$，这曲线称为光滑曲线. 由有限条光滑曲线所组成的曲线称为逐段光滑曲线.

$$\int_C f(z)dz+\int_{C^-} f(z)dz=0$$

设在曲线C上$|f(z)|\leqslant M$，曲线C的长度是L，则

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqslant ML$$

二、解析函数的积分的性质

[柯西积分定理]　柯西积分定理有下面几种叙述形式：

1° 如果函数$f(z)$在一个单连通区域D内解析，那末$f(z)$沿D内任一条简单闭曲线*C的积分(图10.6(a))都等于零，即

$$\int_C f(z)dz=0$$

2° 如果函数$f(z)$在一个多连通区域D内解析，C_1，C_2是D内任意两条围绕同一洞的闭曲线(图10.6(b))，那末

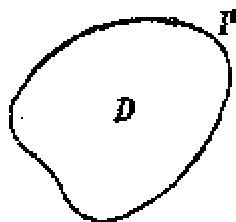
$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz$$

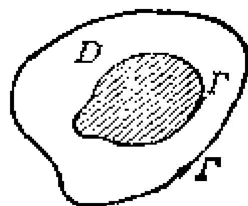
(a)　　(b)

图 10.6

3° 如果函数在一个单连通区域D内解析，在D的包**$\bar{D}$上连续，那末$f(z)$沿区域边界Γ的积分等于零(图10.7(a))，即

$$\int_\Gamma f(z)dz=0$$





(a)　　(b)

图 10.7

* 一连续曲线C：$z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$的两端点重合，即$z(a)=z(b)$，同时对于$a<t_1\neq t_2<b$有$z(t_1)\neq z(t_2)$，称$C$为简单闭曲线，规定曲线$C$的正方向为反时针方向，曲线$C$将平面分成两个区域，一个有界部分称为$C$的内部，无界部分称为$C$的外部。

** 包的定义见第二十一章§3，二。

4°　如果函数 $f(z)$ 在多连通区域 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续，那末 $f(z)$ 沿区域边界 Γ 的积分(图 10.7(b))等于零，即

$$\int_\Gamma f(z)dz=0$$

〔不定积分〕　导数等于 $f(z)$ 的函数都称为 $f(z)$ 的不定积分(原函数).

根据柯西定理，单连通区域 D 内的解析函数 $f(z)$ 沿区域内的任意一条逐段光滑曲线 C 的积分只和曲线的两个端点 z_0 与 z 有关，与积分的路线无关(图 10.8)，所以可以记作

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)dz$$

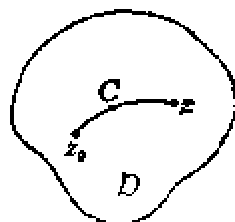


图　10.8

设　$\Phi(z)$ 是 $f(z)$ 的任意一个不定积分，那末

$$\int_{z_0}^{z}f(z)dz=\Phi(z)-\Phi(z_0)$$

〔柯西积分公式〕　如果函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 Γ 所围成的区域 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续，那末对于 D 内的任一点 z，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)}{w-z}dw\quad(\Gamma\text{ 取正方向})$$

这个公式说明了解析函数在区域内任一点的数值可用边界上的数值来确定，也说明了解析函数在区域内部的值和边界值之间有着密切的关系，这在应用上有着重要的意义(图 10.9(a))。

柯西积分公式对于有限条简单闭曲线所围成的多连通区域也成立(图 10.9(b)).

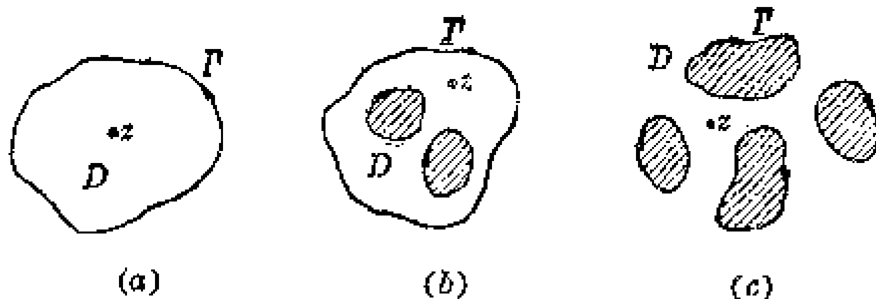


图　10.9

柯西积分公式对于无界区域也成立(图 10.9(c))：如果无界区域 D (包含 ∞ 在内)，D 的边界是有限条简单闭曲线 Γ，函数 $f(z)$ 在 D 内除了点 ∞ 外是解析的，而在 $\bar{D}$ 上除了点 ∞ 外连续，同时 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=f(\infty)$ 存在，则对 D 内任一点 z 有

$$f(z)=f(\infty)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

（Γ 的方向是使 D 在它的左边）

［柯西型积分］　设 Γ 是一条闭或非闭的逐段光滑曲线，$\varphi(z)$ 是 Γ 上的连续函数，那末对于不在 Γ 上的任一点 z，积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(w)}{w-z}dw$$

是 z 的单值函数，称为关于 $\varphi(z)$ 的柯西型积分，记作 $F(z)$。

柯西型积分在任一不包含曲线 Γ 的点的单连通区域 D 内解析，并且它的高阶导数为

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

［平均值定理］　如果函数 $f(z)$ 在一个以 z_0 为圆心，R 为半径的圆 $|z-z_0|<R$ 内解析，在圆 $|z-z_0|\leqslant R$ 上连续，那末函数 $f(z)$ 在圆心处的数值等于在圆周上的数值的算术平均值，即

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\varphi})d\varphi$$

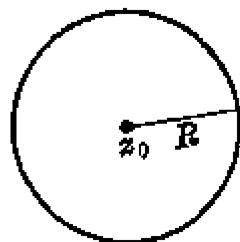


图　10.10

［最大模定理］　如果函数 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续，并设 $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上的最大值是 M，那末在 D 的边界 Γ 上存在一点 z_0，使 $|f(z_0)|=M$，而对于 D 内所有的 z

$$|f(z)|<M$$

［高阶导数定理］　如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续，那末它在 D 内的每点 z 处存在各阶导数，且有

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw\quad（\Gamma 是 D 的边界）$$

这个定理说明了，只要 $f'(z)$ 存在，那末高阶导数也存在，这是实变函数一般不具有的性质。

［柯西不等式］　如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $\bar{D}$ 上连续，并设 $\max\limits_{z\in\bar{D}}f(z)=M$，点 z 到 D 的边界 Γ 的最短距离为 R，Γ 的长度为 L，那末

$$\left|f^{(n)}(z)\right|=\frac{n!}{2\pi}\left|\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw\right|\leqslant\frac{n!ML}{2\pi R^{n+1}}$$

特别，当 D 是圆 $|w-z|<R$ 时，有不等式

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{n!M}{R^n}$$

[刘维尔定理] 如果函数 $f(z)$ 在全平面解析而且有界，那末它一定等于常数.

[莫累拉定理] 如果函数 $f(z)$ 在一单连通区域 D 内连续，并且沿着 D 内任一条简单闭曲线 C 的积分 $\int_C f(z)dz$ 都等于零，那末 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

[调和函数的泊松公式] 设 $u(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内调和，在闭圆 $|z|\leqslant R$ 上连续，z_0 是圆内任一点，那末

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{R^2-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}u(z)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\operatorname{Re}\frac{z+z_0}{z-z_0}u(z)d\theta$$

在极坐标系中，有形式:

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}u(Re^{i\theta})d\theta$$

$$(z_0=re^{i\varphi},\ r<R)$$

§4 泰勒级数·罗朗级数·留数定理

一、泰勒级数与罗朗级数

1. 泰勒级数

[泰勒级数展开定理] 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z-a|<R$ $(R>0)$ 内解析，那末 $f(z)$ 在圆内可以展成泰勒级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

式中

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

其中 C 是以 a 为圆心，以 ρ $(\rho<R)$ 为半径的圆周. 这个展开式是唯一的.

复变函数的泰勒级数展开式表与实变函数的幂级数展开式表（第五章§3，九）相类似，只要把实变量 x 换成复变量 z 就可以了.

[复平面内的幂级数的收敛性] 如果幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

在圆 $|z-a|<R$ 内绝对收敛，而在圆外发散，那末称 $|z-a|<R$ 为级数的收敛圆，R 为收敛半径，并且

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$$

或者

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

[阿贝耳定理]　对于每个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

存在一个收敛半径 R $(0\leqslant R\leqslant\infty)$，具有下列性质：

1°　对于 $|z-a|<R$ 内每点 z，级数绝对收敛，在每一闭圆 $|z-a|\leqslant r$ $(r<R)$ 上，级数一致收敛。

2°　$|z-a|>R$，级数发散。

3°　在 $|z-a|<R$ 内，级数的和是一解析函数。

由性质 3° 和泰勒级数展开定理可知，复变函数在一点 a 解析和在点 a 的邻域内可以展开为幂级数是等价的。

[运算规则]　在公共的收敛圆 $|z-a|<R$ 内，有下列运算规则：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-a)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

$$(c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)$$

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n\right\}'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-a)^n$$

$$\int\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n\right\}dz=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

（C 是任意复数）

2. 罗朗级数展开定理

如果函数 $f(z)$在环形区域 $r<|z-a|<R$ $(r\geqslant 0,\ R\leqslant\infty)$内解析，那末$f(z)$在环形区域内可展开为罗朗级级

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

式中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw,\qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

C是任一圆周 $|z-a|=\rho\ (r<\rho<R)$，函数的罗朗级数在环形区域 $r<|z-a|<R$内的任意一个闭区域上一致收敛。

级数 $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 称为罗朗展开的正则部分，

级数 $f_2(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 称为罗朗展开的主要部分。

如果级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在环形区域 $r<|z-a|<R$ 内收敛，那末级数的和 $f(z)$在这个区域内解析，并且这个级数就是$f(z)$的罗朗级数。因此圆环上解析函数的罗朗展开式是唯一的。

3. 解析函数的局部性质

［解析函数的零点］ 设 $f(z)$在 z_0解析，并且 $f(z_0)=0$，则称 z_0为 $f(z)$的零点。若 $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$，而 $f^{(m)}(z_0)\neq 0$，则称 z_0为 $f(z)$的m阶零点。

解析函数 $f(z)$的零点是孤立的，也就是说，如果 z_0 是 $f(z)$的零点，并且$f(z)\not\equiv 0$，那末一定有一正数 $\rho>0$，使得 $f(z)$在圆$|z-z_0|<\rho$ 内除 z_0外无其他零点。

［解析函数的唯一性定理］ 设函数 $f(z)$和 $g(z)$在区域 D内解析。D的内点列$\{z_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$有一极限点 z_0属于 D，如果

$$f(z_n)=g(z_n),\qquad n=1,2,\cdots$$

那末在区域D内

$$f(z)\equiv g(z)$$

这个性质表明区域D内的解析函数由D内任一收敛于D的内点的点列上的数值完全决定。

［孤立奇点(可去奇点·极点·本性奇点)］ 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻

域 $|z-z_0|<\rho$ 内除 z_0 外解析，称 z_0 是函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点．孤立奇点分三类：

1° 当 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$（$A$ 为有限数），z_0 称为 $f(z)$ 的可去奇点．z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点的充分必要条件是：$f(z)$ 在 z_0 的邻域里* 的罗朗级数不含主要部分，或者是 $f(z)$ 在 z_0 的邻域里有界．

2° 当 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$，$z_0$ 称为 $f(z)$ 的极点．z_0 是 $f(z)$ 的极点的充分必要条件是：$f(z)$ 在 z_0 的邻域里的罗朗级数的主要部分只含有限多项，即

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

如果主要部分中 $(z-z_0)$ 的负次幂最高的是 m，那末称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点．

3° 当 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在，z_0 称为 $f(z)$ 的本性奇点．z_0 是函数 $f(z)$ 的本性奇点的充分必要条件是：$f(z)$ 在 z_0 的邻域里的罗朗级数中主要部分有无限多项．

如果 z_0 是函数 $f(z)$ 的本性奇点，那末对任意复数 A，都存在一点列 $\{z_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$，$z_n\to z_0$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=A$$

［泰勒定理］　如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，那末对于 D 内一点 a，有

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+R_n$$

其中余项的形式是

$$R_n=\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)dw}{(w-a)^{n+1}(w-z)}$$

C 是以 a 为圆心的圆周（C 的内部在 D 内）．

泰勒定理是讲解析函数的有限展开式，而泰勒级数展开定理（§4，一，1）是无穷级数形式．对于研究解析函数的局部性质来说，有用的还是这里的有限展

* 凡是在一点 z_0 的邻域里谈到罗朗级数，这个邻域就是指 $0<|z-z_0|<\rho$，ρ 为某个正数．

开式.

[解析函数在无穷远点的性质]

1° 无穷远点的邻域 以原点为中心，R为半径的圆的外部所有的点是无穷远点的一个邻域.

2° 无穷远点是$f(z)$的孤立奇点 设$\varphi(z')=f\left(\frac{1}{z'}\right)=f(z)$. 若$z'=0$是$\varphi(z')$的可去奇点，则称$z=\infty$为$f(z)$的可去奇点；若$z'=0$是$\varphi(z')$的$m$阶极点，则称$z=\infty$是$f(z)$的$m$阶极点；若$z'=0$是$\varphi(z')$的本性奇点，则称$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点.

3° 函数$f(z)$在无穷远点的罗朗级数 设$\varphi(z')$在$z'=0$的邻域内的罗朗级数是

$$\varphi(z')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n z'^n$$

令$z=\frac{1}{z'}$，得到$f(z)$在$z=\infty$的邻域内的罗朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n,\qquad c_n=b_{-n}\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

所以，当$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点时，$f(z)$的罗朗级数中不含z的正次幂；当$z=\infty$是$f(z)$的m阶极点时，$f(z)$的罗朗级数中，只有有限项z的正次幂，并且c_m $(m\geqslant1)$是最后一个不等于零的系数；当$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点时，$f(z)$的罗朗级数中，有无限多项z的正次幂.

4° 函数$f(z)$在无穷远点是孤立奇点的性质 当$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点时，函数的模在无穷远点的某一邻域里有界；当$z=\infty$是$f(z)$的m阶极点时，函数的模在无穷远点的任一邻域里无界；当$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点时，对任意复数A，都存在点列$\{z_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$.

5° 无穷远点是$f(z)$的零点 $f(z)$的罗朗级数中不含z的正次幂，而且$c_0=0$. 若$c_{-m}\neq0$，而$c_{-i}=0$ $(i<m)$，则称无穷远点是$f(z)$的m阶零点.

4. 单值解析函数的分类

在全平面(不包括∞)无奇点的函数称为整函数(全纯函数).

在全平面(不包括∞)除了极点外无其它奇点的函数称为分式函数(半纯函数或亚纯函数).

5. 半纯函数的部分分式表达式

$$\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2}=\frac{4z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2-z^2}$$

$$\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{\pi z}+\frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z+n}$$

$$\operatorname{th}\frac{\pi z}{2}=\frac{4z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2+z^2}$$

$$\operatorname{cth}\pi z=\frac{1}{\pi z}+\frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2+n^2}$$

$$\sec\frac{\pi z}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{(2n-1)^2-z^2}$$

$$\csc\pi z=\frac{1}{\pi z}+\frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}$$

$$\sec^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1-z)^2}+\frac{1}{(2n-1+z)^2}\right]$$

$$\csc^2(\pi z)=\frac{1}{\pi^2 z^2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2+n^2}{(z^2-n^2)^2}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

二、留数定理及其应用

[留数的定义] 设点 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，Γ 是圆周 $|z-z_0|=\rho$，称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(z)dz$$

的数值为函数 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 处的留数（残数），记作 $\operatorname{res}f(z_0)$，这里 ρ 为适当小的正数（使圆内无 $f(z)$ 的其他奇点），留数值与 ρ 的取值无关.

函数 $f(z)$ 在一个孤立奇点 z_0 处的留数等于 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内的罗朗展开式中负一次幂的系数，即

$$\operatorname{res}f(z_0)=c_{-1}$$

[孤立奇点的留数计算法则]

1° 函数在可去奇点的留数等于零。

2° 设 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\operatorname{res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

3° 设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

4° 设分式函数 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$ 和 $Q(z)$ 在点 z_0 解析，z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点，而 $P(z_0)\neq 0$，则

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}\quad (Q'(z_0)\text{为}Q(z)\text{在}z_0\text{的导数})$$

5° 设 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，Γ 表示半径足够大的圆周 $|z|=\rho$（使圆周外部无 $f(z)$ 的其他奇点），称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-}f(z)dz$$

的数值为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留数（其中 Γ^- 是取顺时针方向），记作 $\operatorname{res} f(\infty)$，所以

$$\operatorname{res} f(\infty)=-c_{-1}$$

［留数定理］ 如果函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 的内部 D 内除了有限个奇点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外解析，并且在 $\bar{D}$ 上除了 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外连续，那末

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(a_k)$$

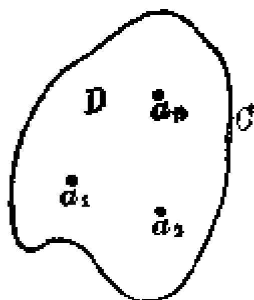


图 10.11

［辐角原理］ 如果函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 的内部 D 内除了有限个阶数分别是 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 的极点 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 外解析，在 $\bar{D}$ 上除了点 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 外连续，在 C 上没有零点与极点，而在 D 内有阶数分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_l$ 的零点 $a_1,a_2,\cdots,a_l$，那末

$$N-P=\sum_{k=1}^{l}n_k-\sum_{k=1}^{m}p_k=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)$$

其中 $\Delta_C\arg f(z)$ 表示点 z 沿曲线 C 移动一圈后 $f(z)$ 的辐角改变量．设 Γ 是曲线 C 在映射 $w=f(z)$ 下的象，则 $\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)$ 称为曲线 Γ 的回转次数．

［儒歇定理］ 如果函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 及 C 的内部 D 解析，且在 C 上

$$f(z)\neq 0,\quad |f(z)|>|g(z)|$$

那末在 C 的内部，$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 有相同的零点个数，即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

〔利用留数定理计算定积分〕

1° 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

如果 $f(z)$除在实轴的上侧有有限多个孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$外，在包括实轴在内的上半平面上处处是解析的，同时假设 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的至少二阶的零点，或者

$$|z^{\alpha}f(z)|<M \qquad (\alpha>1, M \text{ 为常数})$$

那末可按照下列步骤计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ （图 10.12）：

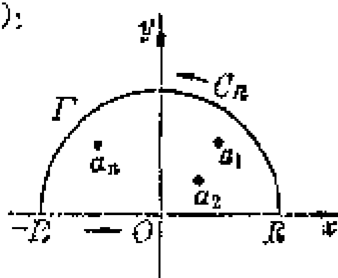


图　10.12

(1) 作辅助函数 $f(z)$，在实轴上

$$f(z)=f(x)$$

(2) 作附加积分路线 C_R，使它和[$-R, R$]合起来变成一条包含 $f(z)$ 的所有奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的闭曲线Γ，则

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_{C_R} f(z)dz+\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

(3) 求出 $f(z)$在上半平面的各奇点的留数总和，应用留数定理，有

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx+\int_{C_R} f(z)dz=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{res} f(z)$$

(4) 令 $R\to\infty$，根据假设，$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$，那末

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{res} f(z)-\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz$$

$$=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{res} f(z)$$

例 1　计算 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

解　$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

(1) 作辅助函数　$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$.

(2) 作附加积分线路 C_R：以原点为中心，半径 R 充分大的上半圆周

(图 10.13)。

(3) $f(z)$在上半平面只有一个极点 $z=i$，其留数为

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z)=\frac{1}{2i}$$

(4)
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^2}=0$$

所以

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

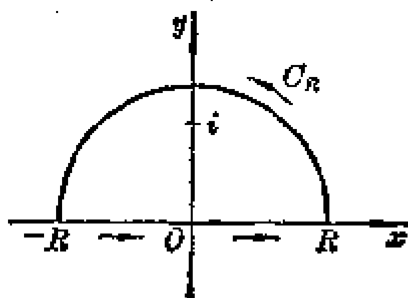


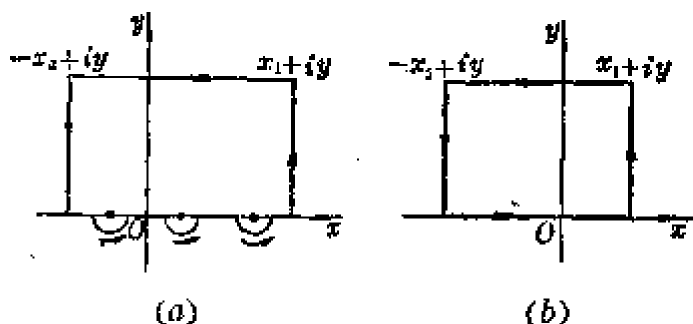
图　10.13

2° 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx \qquad (\lambda>0)$

设 $f(x)$是有理函数，并且分母的次数≥分子的次数$+\alpha$ ($\alpha>0$)。

计算的基本步骤和上面一样，它的辅助函数是 $f(z)e^{i\lambda z}$，附加积分路线和积分闭曲线Γ分下面两种情况：

(a) 如果 $f(z)$在实轴上有有限多个一阶极点，积分闭曲线Γ(在极点处，以各极点为圆心，r 为半径在下半平面作半圆，为正向)见图 10.14(a)*，那末



(a)　　(b)

图　10.14

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}z>0}\operatorname{res}[f(z)e^{i\lambda z}]+\pi i\sum_{\operatorname{Im}z=0}\operatorname{res}[f(z)e^{i\lambda z}]$$

这里的广义积分是柯西主值，其定义见第六章 § 1，五。

(b) 如果 $f(z)$在实轴上没有奇点，积分闭曲线见图 10.14(b)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}z>0}\operatorname{res}[f(z)e^{i\lambda z}]$$

---

* 实轴上的这些半径为 r 的半圆也可取在上半平面 (为负向)。这是因为，容易验证，在这里所述条件下，以负向沿半圆求积，当 $r\to 0$ 时，其积分趋于该极点的留数与 $-\pi i$ 的乘积。

例2 计算积分 p.v. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{1-x^2}dx\ (\lambda>0)$

解 作辅助函数 $\frac{e^{i\lambda z}}{1-z^2}$，它只有实轴上的两个奇点 $z=1$，$z=-1$，所以由(a)

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{1-x^2}dx=\pi i\operatorname*{res}_{z=1}\left(\frac{e^{i\lambda z}}{1-z^2}\right)+\pi i\operatorname*{res}_{z=-1}\left(\frac{e^{i\lambda z}}{1-z^2}\right)$$

$$=\pi i\left(\frac{e^{i\lambda}}{2}+\frac{e^{-i\lambda}}{2}\right)=\pi i\cos\lambda$$

例3 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

解 (1) 作辅助函数 $f(z)=\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}$.

(2) 作附加积分线路 C_R 和 C_r，与 $[r,R]$，$[-R,-r]$ 合起来变成一条包含奇点 i 的闭曲线 Γ(图 10.15)，则

$$\int_{\Gamma}f(z)dz=\int_r^R\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx+\int_{C_R}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}dz+\int_R^r\frac{(\ln x+i\pi)(-1)\,dx}{(1+x^2)^2}$$

$$+\int_{C_r}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}dz$$

$$=2\int_r^R\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx+i\pi\int_r^R\frac{1}{(1+x^2)^2}dx+\int_{C_R}+\int_{C_r}$$

(3) 在 Γ 曲线内函数 $f(z)$ 只有一个二阶极点 $z=i$，根据孤立奇点的留数计算法则 3°，得到 $z=i$ 处 $f(z)$ 的留数，则

$$2\pi i\operatorname{res}f(i)=2\pi i\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\right]\Bigg|_{z=i}=-\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi^2}{4}$$

(4) 可以证明当 $r\to0$，$R\to\infty$ 时，积分 $\int_{C_R}\to0$，$\int_{C_r}\to0$，于是得

$$2\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx+i\frac{\pi^2}{4}=-\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi^2}{4}$$

上式两边实部相等，所以

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{\pi}{4}$$

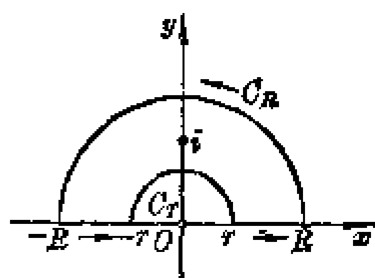


图 10.15

第十一章　傅立叶级数与积分变换

在理论和应用上，常常要考察一个函数与一正交函数系之间的关系．傅立叶级数理论就是研究在有限区间上的这个关系，对于区间是无限的情况，傅立叶变换理论（包括傅立叶变换，拉普拉斯变换等积分变换），就是这一理论的推广．本章重点介绍在有限区间上函数用傅立叶三角级数表示，在无限区间上函数用某种特殊的积分形式表示，如傅立叶变换，拉普拉斯变换，梅林变换，汉克尔变换等，这些都是傅立叶分析的重要内容．

傅立叶分析在研究振动和波动现象及解数学物理方程时是个重要的工具。它在物理上还说明：任意波形总能进行谱分解，即表为不同频率、不同振幅的简谐波的线性叠加．在六十年代发展了快速傅立叶变换，为傅立叶分析在实际中的广泛应用创造了条件，本章收集了关于这方面的部分内容．

§1　傅立叶级数

一、三角级数与傅立叶级数

［正交函数系］　一个函数系

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots \tag{1}$$

其中每个函数都是定义在区间$[a,b]$上的实函数或实变量的复值函数，如果满足

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi_m(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx=0 \qquad (m\neq n)$$

就称函数系(1)为区间$[a,b]$上的正交函数系，式中$\overline{\varphi_n(x)}$是$\varphi_n(x)$的共轭函数．如果再满足

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi_m(x)\,\overline{\varphi_m(x)}\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b |\varphi_m(x)|^2\,dx=1$$

就称函数系(1)为$[a,b]$上的标准(规范)正交函数系．例如

$$1,\ \cos\omega x,\ \cos 2\omega x,\cdots,\cos n\omega x,\cdots,$$
$$\sin\omega x,\ \sin 2\omega x,\cdots,\sin n\omega x,\cdots$$

是区间$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$上的正交函数系，式中$\omega=\frac{2\pi}{T}$．函数系

$$e^{in\omega x} \qquad \left(\omega=\frac{2\pi}{T},\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

是区间$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$上的标准正交函数系.

设给定函数系

$$\varphi_{M_0}(x),\ \varphi_{M_0+1}(x),\cdots,\varphi_{M_0+N}(x) \tag{2}$$

其中自变量x取有限个离散值

$$N_0h,\qquad (N_0+1)h,\qquad \cdots,\qquad (N_0+N)h$$

满足

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=N_0}^{N_0+N}\varphi_m(kh)\overline{\varphi_n(kh)}=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ 1 & (m=n)\end{cases}$$

就称函数系(2)为标准正交函数系,式中

$$h>0,\quad M_0\leqslant m\leqslant M_0+N,N_0\leqslant n\leqslant N_0+N$$

例如取 $M_0=N_0=0$

$$\varphi_m(x)=e^{idmx}\left(dh=\frac{2\pi}{N+1},\ m=0,1,\cdots,N\right)$$

就是一个标准正交函数系.

[三角级数的几种类型]

类　型	表　达　式
实数型	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 式中 a_0, a_n, b_n是实常数
余弦级数	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$
正弦级数	$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$
复数型	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ 式中 $c_0=\frac{a_0}{2}$, $c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$, $c_{-n}=\bar{c}_n=\frac{a_n+ib_n}{2}$, $i=\sqrt{-1}$

[傅立叶级数] 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上绝对可积，且令

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx & (n=0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx & (n=1, 2, \cdots) \end{cases}$$

以 a_n, b_n 为系数作三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

它称为 $f(x)$ 的傅立叶级数，a_n，b_n 称为 $f(x)$ 的傅立叶系数．不管级数(1)是否收敛，或者收敛而不管它是否等于 $f(x)$，都记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

如果 $f(x)$ 的傅立叶级数点点收敛，而且它的和等于 $f(x)$（除去有限个点外），那末级数(1)称为 $f(x)$ 的傅立叶展开，记作

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

注意：1° 如果 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上绝对可积，那末一定有它的傅立叶级数，但是，不一定有它的傅立叶展开（可以展开的条件参看本节，四）．

2° 如果在区间 $[0, 2\pi]$ 上有一个三角级数一致收敛（或囿收敛，即部分和点点收敛且一致有界）于函数 $f(x)$，那末这个级数就是函数 $f(x)$ 的傅立叶展开．

3° 区间 $[0, 2\pi]$ 上两个绝对可积函数 $f(x)$，$g(x)$，如果除去有限个点外处处相等（可以推广到几乎处处相等*），那末 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的所有对应的傅立叶系数都一致．

4° 定义 $f(x+2\pi)=f(x)$，那末函数 $f(x)$ 的定义域可推广到整个数轴，求傅立叶系数的积分区间可以换成长度为 2π 的任意区间，例如 $[-\pi, \pi]$ 等．

二、$f(x)$ 在其他区间上的傅立叶级数

[在 $[-\pi, \pi]$ 区间上]

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$$

---

* 如果除掉一个测度等于零的点集外 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都相等，那末称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 几乎处处相等．关于测度的定义，见第九章§7，一．

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-int}\,dt\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

或者

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos n(x-t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{in(x-t)}dt$$

特别,若$f(x)$是偶函数,则$b_n=0$,得到$f(x)$的傅立叶余弦级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)dt+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\int_0^{\pi}f(t)\cos nt\,dt$$

若$f(x)$是奇函数,则$a_n=0$,得到$f(x)$的傅立叶正弦级数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\int_0^{\pi}f(t)\sin nt\,dt$$

[在$[-l,l]$区间上]

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp\frac{in\pi x}{l}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\exp\frac{-in\pi t}{l}dt\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

或者

$$f(x)\sim\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi(x-t)}{l}dt$$

$$=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\exp\frac{in\pi(x-t)}{l}dt$$

当 $f(x)$是偶函数或奇函数时，同区间$[-\pi,\pi]$上的情形一样，分别有余弦级数或正弦级数。

［在$[\alpha,\beta]$区间上］

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi(2x-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}+b_n\sin\frac{n\pi(2x-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp\frac{in\pi(2x-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}$$

$$a_n=\frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\cos\frac{n\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}dt \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\sin\frac{n\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}dt \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$c_n=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\exp\frac{-in\pi(2t-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}dt \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

或者

$$f(x)\sim\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt+\frac{2}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\cos\frac{2n\pi(x-t)}{\beta-\alpha}dt$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\exp\frac{i2n\pi(x-t)}{\beta-\alpha}dt$$

二、傅立叶系数的性质

1° 绝对可积函数 $f(x)$的傅立叶系数收敛于零，即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\ dt=0$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\ dt=0$$

特别，如果 $f(x)$在区间$[0,2\pi]$上有有界变差*，或者单调上升有界，或在$[0,2\pi]$上分段单调，那末都有

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

* 有界变差定义见第五章 § 1.

如果 $f(x)$ 及它们一直到 k 阶的导数在区间 $[0,2\pi]$ 上都是有界变差函数，或者都单调上升有界，或在 $[0,2\pi]$ 上分段单调，那末

$$a_n=O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),\quad b_n=O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$$

2° 如果函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上平方可积*，那末

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2dx$$

这个公式称为帕塞法耳等式或封闭性方程.

3° 如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上平方可积，它们的傅立叶级数是

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$g(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)$$

那末有下面的广义封闭性方程

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\,dx=\frac{a_0a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_na_n'+b_nb_n')$$

4° 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上绝对可积，b_n 是它的傅立叶级数的正弦项系数，那末级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

收敛.

四、傅立叶级数的收敛性及在第一类间断点的性质

[傅立叶级数收敛性的判别]

1° 假设 $f(x)$ 的傅立叶级数的部分和为

$$s_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

如果当 $m\to\infty$，$s_m(x)$ 趋于（在某一点 x 趋于，或在某一区间内一致地趋于）函数 $f(x)$，那末函数 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛于函数 $f(x)$.

---

* 平方可积函数的定义见第九章 §7，一.

2° 如果函数 $f(x)$ 在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内分段单调，并在该区间内有有限个第一类间断点，那末 (i) $s_m(x)$ 在连续点 x 收敛于 $f(x)$；(ii) 在第一类间断点 x_0 收敛于 $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$；(iii) 在区间的端点，即 $x=-\pi$ 与 $x=\pi$ 上，等于 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$。（狄利克莱定理）

3° 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微，在连续点上有导数，在第一类间断点 x_0 处极限

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \text{ 和 } \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}$$

存在，那末 $s_m(x)$ 在连续点 x 上收敛于 $f(x)$，在间断点 x_0 上收敛于

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

［吉布斯现象］ 以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 具有第一类间断点 ξ，令 $f(\xi)=\frac{f(\xi+0)+f(\xi-0)}{2}$，在 ξ 点函数的跳跃为 $D=f(\xi+0)-f(\xi-0)$，假定函数 $f(x)$ 在 ξ 点的某邻域 $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ 内没有其他间断点，且有有界变差。令函数 $f(x)$ 的傅立叶级数部分和为 $s_m(x)$。那末函数 $f(x)$ 的傅立叶级数在点 ξ 处是收敛的，但在该邻域内不一致收敛。这时有一种奇怪的现象（称为吉布斯现象）出现：

存在点列 $\{\xi_m\}\to\xi+0$，和 $\{\bar{\xi}_m\}\to\xi-0$，使得

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\xi_m)=f(\xi+0)+\mu D$$

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\bar{\xi}_m)=f(\xi-0)-\mu D$$

$$\mu=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt-\frac{1}{2}=0.08948987\cdots$$

因此，$s_m(x)$ 在间断点 ξ 的邻域内的振幅的极限为

$$\lim_{m\to\infty}[s_m(\xi_m)-s_m(\bar{\xi}_m)]=D+2\mu D$$

它比函数 $f(x)$ 在点 ξ 的跳跃量 $|D|$ 大 $2\mu|D|$（约 18%），或者是 $|D|$ 的 $1+2\mu\approx1.17897975$ 倍（图 11.1）。

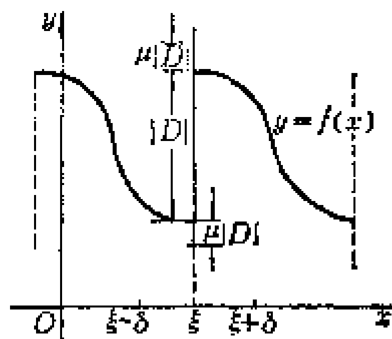


图　11.1

例　函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0,\pm\pi\\ -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi<x<0\end{cases}$$

的傅立叶级数为

$$f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，其跳跃 $D=\pi$

$$s_m(x)=2\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

$y=s_m(x)$ $(m=1,2,3,4,5,6)$ 的曲线如图 11.2.

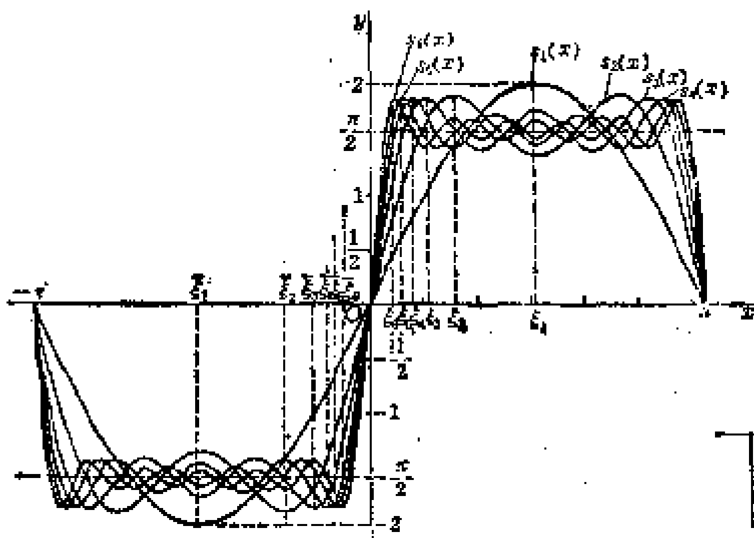


图　11.2

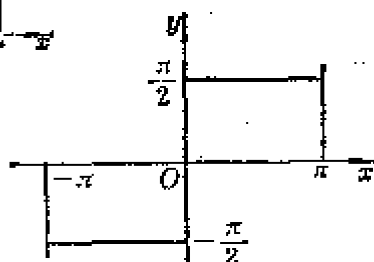


图　11.3

存在点列　$\xi_m=\dfrac{\pi}{2m}\to+0$，$\bar{\xi}_m=-\dfrac{\pi}{2m}\to-0$，使得

$$\lim_{m\to\infty}s_m(\xi_m)=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=1.85193706\cdots$$

$$\lim_{m\to\infty}s_m(\bar{\xi}_m)=-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=-1.85193706\cdots$$

当 $m\to\infty$ 时，$s_m(x)$ 的极限图形如图 11.3(注意在点 $x=0$ 的形状)。

五、傅立叶级数的逐项积分与微分

[逐项积分]　假定在区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积函数 $f(x)$ 的傅立叶级数是

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

那末不管它是否收敛于 $f(x)$，都可逐项积分. 即对任意区间 $[a,b]$（其中 $-\pi\leqslant a<b\leqslant\pi$），下列关系成立：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx$$

$$=\frac{a_0}{2}(b-a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[a_n(\sin nb-\sin na)-b_n(\cos nb-\cos na)]$$

［逐项微分］ 假定函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，$f(-\pi)=f(\pi)$，并有绝对可积的导数 $f'(x)$（可能有有限个点没有导数），那末函数 $f'(x)$ 的傅立叶级数可由逐项微分 $f(x)$ 的傅立叶级数得到，即

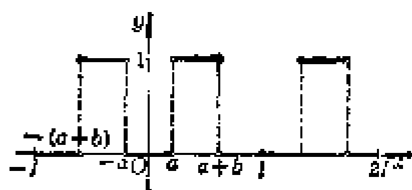
$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)'=\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos nx-a_n\sin nx)$$

这里没有指出右边级数是否收敛于 $f'(x)$，对具体问题还应作具体判断.

六、函数的傅立叶级数展开式表

1°

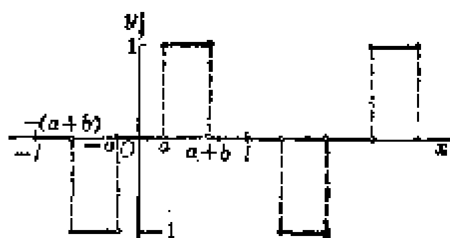
$$y=\begin{cases}0, & -l<x<-(a+b)\\ 1, & -(a+b)<x<-a\\ 0, & -a<x<a\\ 1, & a<x<a+b\\ 0, & a+b<x<l\end{cases}$$



$$y=\frac{b}{l}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi b}{2l}\cos\frac{n\pi(2a+b)}{2l}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

2°

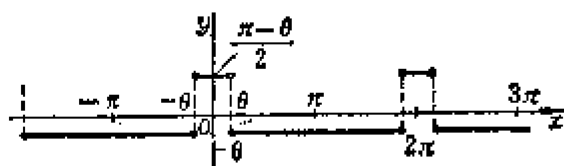
$$y=\begin{cases}0, & -l<x<-(a+b)\\ -1, & -(a+b)<x<-a\\ 0, & -a<x<a\\ 1, & a<x<a+b\\ 0, & a+b<x<l\end{cases}$$



$$y=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi b}{2l}\sin\frac{n\pi(2a+b)}{2l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

3°

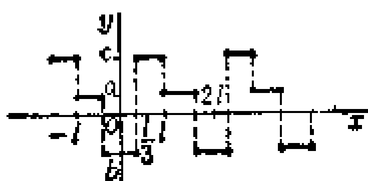
$$y=\begin{cases}-\dfrac{\theta}{2}, & -\pi<x<-\theta\\ \dfrac{\pi-\theta}{2}, & -\theta<x<\theta\\ -\dfrac{\theta}{2}, & \theta<x<\pi\end{cases}$$



$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}\cos nx$$

4°

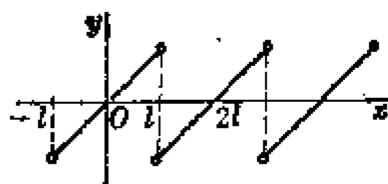
$$y=\begin{cases}a, & -l<x<-\dfrac{l}{3}\\ b, & -\dfrac{l}{3}<x<\dfrac{l}{3}\\ c, & \dfrac{l}{3}<x<l\end{cases}$$



$$y=\frac{a+b+c}{3}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\Big[(2b-a-c)\cos\frac{n\pi x}{l}+2(c-a)\sin\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big]$$

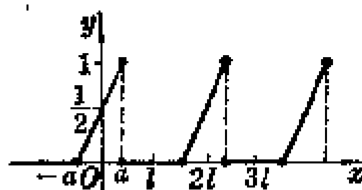
5° $y=x,\ -l<x<l$

$$y=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$$



6°

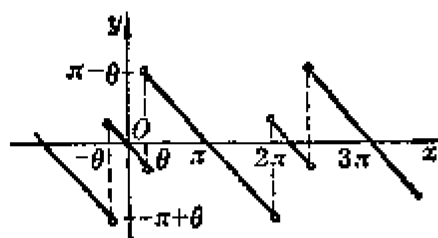
$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{x}{a}\right), & -a<x<a\\ 0, & a<x<2l-a\end{cases}$$



$$y=\frac{a}{2l}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}-\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi a}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

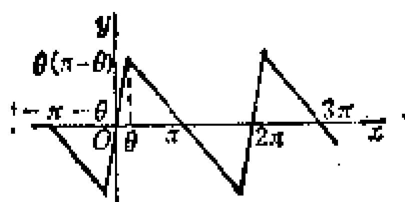
7°
$$y=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x<\theta\\ \pi-x, & \theta<x<2\pi-\theta\\ 2\pi-x, & 2\pi-\theta<x\leqslant 2\pi\end{cases}$$

$$y=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}\sin nx$$



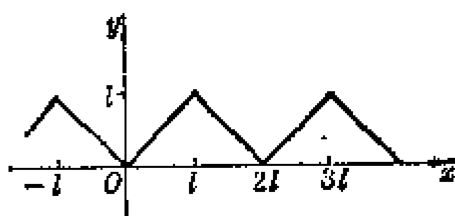
8°
$$y=\begin{cases}(\pi-\theta)x, & -\theta\leqslant x\leqslant\theta\\ \theta(\pi-x), & \theta\leqslant x\leqslant 2\pi-\theta\end{cases}$$

$$y=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2}\sin nx$$

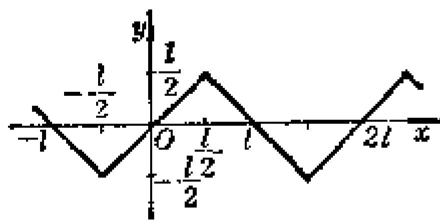


9° $y=|x|,\ -l\leqslant x\leqslant l$

$$y=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}$$



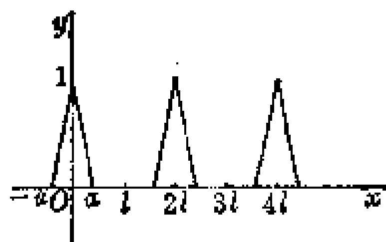
10°
$$y=\begin{cases}-l-x, & -l\leqslant x\leqslant-\frac{l}{2}\\ x, & -\frac{l}{2}\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ l-x, & \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$



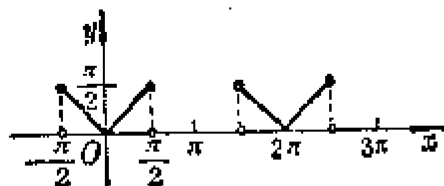
$$y=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}$$

11°
$$y=\begin{cases}1-\frac{|x|}{a}, & -a\leqslant x\leqslant a,\ a>0\\ 0, & a\leqslant x\leqslant 2l-a\end{cases}$$

$$y=\frac{a}{2l}+\frac{2l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\cos\frac{n\pi a}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}$$



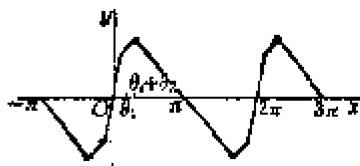
12°
$$y=\begin{cases}|x|, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}<|x|\leqslant\pi\end{cases}$$



$$y=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n^2}\right)\cos nx$$

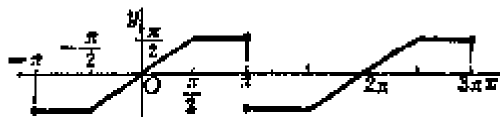
13°
$$y=\begin{cases}(\pi-\theta_1)x, & 0\leqslant x\leqslant\theta_1-\theta_2\\ \frac{\pi}{2}(x+\theta_1-\theta_2)-\theta_1 x, & \theta_1-\theta_2\leqslant x\leqslant\theta_1+\theta_2\\ \theta_1(\pi-x), & \theta_1+\theta_2\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

$$\left(0<\theta_2<\theta_1<\frac{\pi}{2}\right)$$



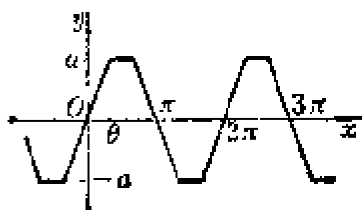
$$y=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta_1\sin n\theta_2}{n^2}\sin nx$$

14°
$$y=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & -\pi<x\leqslant-\frac{\pi}{2}\\ x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi\end{cases}$$



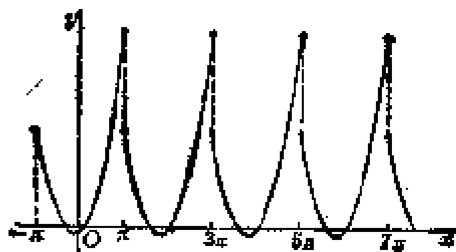
$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$$

15°
$$y=\begin{cases}\frac{a}{\theta}x, & 0\leqslant x\leqslant\theta\\ a, & \theta\leqslant x\leqslant\pi-\theta\\ \frac{a(\pi-x)}{\theta}, & \pi-\theta\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$



$$y=\frac{4a}{\pi\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$$

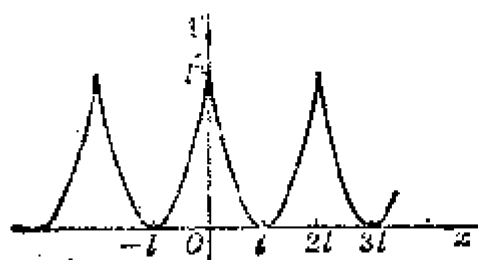
16°　$y=x^2+x,\quad -\pi<x<\pi$



$$y=\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\sin nx}{n}-\frac{2\cos nx}{n^2}\right)$$

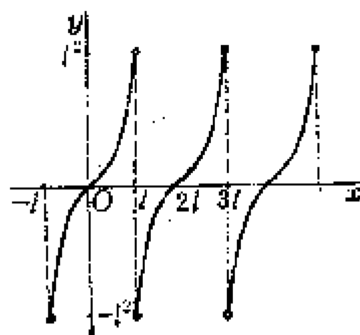
17° $y=x^2,\quad -l\leqslant x\leqslant l$

$$y=\frac{l^2}{3}+\frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l}$$



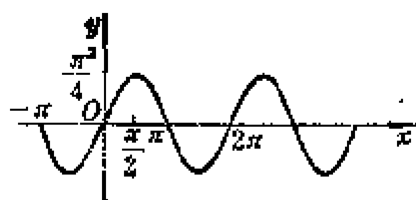
18° $y=\begin{cases}-x^2, & -l<x\leqslant 0\\ x^2, & 0\leqslant x<l\end{cases}$

$$y=\frac{2l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\pi^2}{2n-1}-\frac{4}{(2n-1)^3}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}-\frac{\pi^2}{2n}\sin\frac{2n\pi x}{l}\right]$$



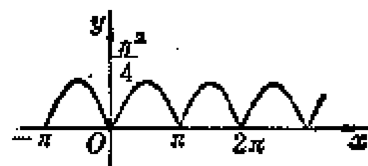
19° $y=\begin{cases}x(\pi+x), & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ x(\pi-x), & 0\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$

$$y=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$$



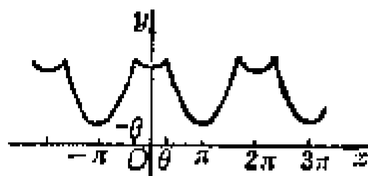
20° $y=\begin{cases}-x(\pi+x), & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ x(\pi-x), & 0\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$

$$y=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx$$



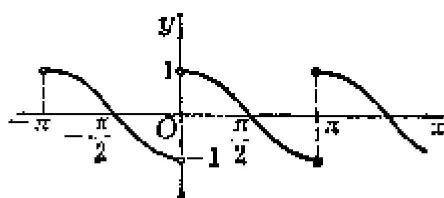
21° $y=\begin{cases}x^2+(\theta-\pi)^2, & 0\leqslant x\leqslant \theta\\ \theta^2+(x-\pi)^2, & \theta\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$

$$y=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}\cos nx$$



22° $y=\begin{cases}-\cos x, & -\pi<x<0\\ \cos x, & 0<x<\pi\end{cases}$

$$y=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}\sin 2nx$$



23° $y=|\sin x|$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$

$$y=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos 2nx$$

24° $y=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$

$$y=\frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos 2nx$$

25° $y=x^3$, $-\pi<x<\pi$

$$y=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n^2\pi^2-6)}{n^3}\sin nx$$

26° $y=\begin{cases}-x^3, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ x^3, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$

$$y=\frac{\pi^3}{4}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\pi^2}{(2n-1)^2}-\frac{4}{(2n-1)^4}\right]\cos(2n-1)x-\frac{\pi^2}{4n^2}\cos 2nx\right\}$$

27° $y=x(\pi^2-x^2)$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$

$$y=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\sin nx$$

28° $y=x(x-\pi)(x-2\pi)$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$

$$y=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin nx$$

29° $y=x^2(3\pi-2|x|)$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$

$$y=\frac{\pi^3}{2}-\frac{48}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\cos(2n-1)x$$

30° $y=x^2(x-2\pi)^2$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$

$$y=\frac{8\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cos nx$$

31° $y=x^2(2\pi^2-x^2)$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$

$$y=\frac{7\pi^4}{15}+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos nx$$

32° $y=\sin ax,\quad -\pi<x<\pi$

（a不是整数，下同）

$$y=\frac{2}{\pi}\sin a\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{a^2-n^2}\sin nx$$

33° $y=\cos ax,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$

$$y=\frac{2}{\pi}\sin a\pi\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a}{a^2-n^2}\cos nx\right]$$

34° $y=\begin{cases}-\sin ax, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \sin ax, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$

$$y=\frac{1-\cos a\pi}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos a\pi}{a^2-n^2}\cos nx$$

35° $y=\begin{cases}-\cos ax, & -\pi<x<0\\ \cos ax, & 0<x<\pi\end{cases}$

$$y=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n\cos a\pi-1]n}{a^2-n^2}\sin nx$$

36° $y=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{2}\\ \sin x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 1, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$

$$y=\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}-\frac{4n\sin 4nx}{(4n-1)(4n+1)}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{2(2n-1)}{4(2n-1)^2-1}-\frac{1}{2n-1}\right]\sin 2(2n-1)x\right\}$$

37° $y=\begin{cases}\sin a\left(\frac{\pi}{2}+x\right), & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \sin a\left(\frac{\pi}{2}-x\right), & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$

$$y=\frac{4a}{\pi}\cos\frac{a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2-a^2}\cos(2n-1)x$$

38°
$$y=\begin{cases}\cos a\left(\frac{\pi}{2}+x\right), & -\pi<x<0\\ -\cos a\left(\frac{\pi}{2}-x\right), & 0<x<\pi\end{cases}$$

$$y=\frac{4}{\pi}\cos\frac{a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{a^2-(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$$

39°
$$y=\begin{cases}\cos 2kx, & -\pi<x<0\\ -\cos 2kx, & 0<x<\pi\end{cases}$$

（k 为正整数，下同）

$$y=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{4k^2-(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$$

40°
$$y=\begin{cases}\cos(2k+1)x, & -\pi<x<0\\ -\cos(2k+1)x, & 0<x<\pi\end{cases}$$

$$y=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2k+1)^2-4n^2}\sin 2nx$$

41° $y=x\sin x,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi$

$$y=1-\frac{\cos x}{2}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx$$

42° $y=x\cos x,\ -\pi<x<\pi$

$$y=-\frac{\sin x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx$$

43°
$$y=\begin{cases}-(\pi+x)\sin x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ (\pi-x)\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

$$y=1+\frac{\cos x}{2}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\cos nx$$

44°
$$y=\begin{cases}-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x, & -\pi<x<0\\ \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x, & 0<x<\pi\end{cases}$$

$$y=\frac{\sin x}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{n(n-1)}\sin(2n-1)x$$

45° $y=(\pi-|x|)\sin x,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$

$$y=\pi\sin x+\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$$

46° $y=e^{ax},\quad -\pi<x<\pi$

$$y=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right]$$

47° $y=\begin{cases}-e^{-ax}, & -\pi<x<0\\ e^{ax}, & 0<x<\pi\end{cases}$

$$y=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n e^{a\pi}]n}{a^2+n^2}\sin nx$$

48° $y=e^{a|x|},\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$

$$y=\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n e^{a\pi}]a}{a^2+n^2}\cos nx$$

49° $y=\begin{cases}-e^{-x}, & -l<x<0\\ e^{x}, & 0<x<l\end{cases}$

$$y=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n e^{l}]n}{l^2+n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

50° $y=e^{|x|},\quad -l\leqslant x\leqslant l$

$$y=\frac{\pi(e^l-1)}{l^2}-2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^l}{l^2+n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

51° $y=\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right),\quad 0<x<2\pi$

$$y=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx$$

52° $y=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right),\quad -\pi<x<\pi$

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos nx$$

53° $y=\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{|x|}{2}\right),\quad -\pi<x<\pi,\ x\neq 0$

$$y=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x$$

54° $y=\sin x\ \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right),\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$

$$y=\frac{\sin x}{4}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\sin nx$$

55° $y=\ln\left(\operatorname{ctg}\left|\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right|\right),\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$

$$y=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sin(2n-1)x$$

56° $y=\operatorname{sh}ax,\quad -\pi<x<\pi$

$$y=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{a^2+n^2}\sin nx$$

57° $y=\operatorname{ch}ax,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$

$$y=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a}{a^2+n^2}\cos nx\right]$$

58° $y=\operatorname{sh}a|x|,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$

$$y=\frac{\operatorname{ch}a\pi-1}{a\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n\operatorname{ch}a\pi]a}{a^2+n^2}\cos nx$$

59° $y=\begin{cases}-\operatorname{ch}ax, & -\pi<x<0\\ \operatorname{ch}ax, & 0<x<\pi\end{cases}$

$$y=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n\operatorname{ch}a\pi]n}{a^2+n^2}\sin nx$$

60° $y=\operatorname{sh}a(\pi-x),\quad 0<x<2\pi$

$$y=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx$$

61° $y=\operatorname{ch}a(\pi-x),\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$

$$y=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a^2+n^2}\cos nx\right]$$

62°

$$y=\begin{cases}\operatorname{sh} a\left(\frac{\pi}{2}+x\right), & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \operatorname{sh} a\left(\frac{\pi}{2}-x\right), & 0\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$$

$$y=\frac{4a}{\pi}\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

63°

$$y=\begin{cases}-\operatorname{ch} a\left(\frac{\pi}{2}+x\right), & -\pi<x<0\\ \operatorname{ch} a\left(\frac{\pi}{2}-x\right), & 0<x<\pi\end{cases}$$

$$y=\frac{4}{\pi}\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{a^2+(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$$

七、二重傅立叶级数

假定双变量函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R(-l\leqslant x\leqslant l,\ -h\leqslant y\leqslant h)$ 上绝对可积，那末它的二重傅立叶级数有两种形式。

[实数形式]

$$f(x,y)\sim\sum_{m,n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}\left[a_{m,n}\cos\frac{\pi mx}{l}\cos\frac{\pi ny}{h}+b_{m,n}\sin\frac{\pi mx}{l}\cos\frac{\pi ny}{h}\right.$$
$$\left.+c_{m,n}\cos\frac{\pi mx}{l}\sin\frac{\pi ny}{h}+d_{m,n}\sin\frac{\pi mx}{l}\sin\frac{\pi ny}{h}\right]$$

式中

$$\lambda_{m,n}=\begin{cases}\frac{1}{4} & (m=n=0)\\ \frac{1}{2} & (m>0,n=0\text{或}m=0,n>0)\\ 1 & (m>0,n>0)\end{cases}$$

$$a_{m,n}=\frac{1}{lh}\iint_R f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{h}dxdy$$

$$b_{m,n}=\frac{1}{lh}\iint_R f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{h}dxdy$$

$$c_{m,n}=\frac{1}{lh}\iint_R f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}dxdy$$

$$d_{m,n}=\frac{1}{lh}\iint_R f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}dxdy$$

$(m,n=0,1,2,\cdots)$

[复数形式]

$$f(x,y)\sim\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}c'_{m,n}\exp\left[i\pi\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)\right]$$

式中

$$c'_{m,n}=\frac{1}{4lh}\iint_R f(x,y)\exp\left[-i\pi\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)\right]dxdy$$

$$(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

[展开条件]　如果函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 R 内满足条件：

(i)在 R 上偏导数 f'_x 和 f'_y 处处存在并且有界；

(ii)在 R 的每个内点 (x_0,y_0) 的某个邻域内，二阶偏导数 f''_{xy}(或 f''_{yx})存在且连续.

那末 $f(x,y)$ 可展开为傅立叶级数.

§2　广义傅立叶级数与傅立叶-贝塞耳级数

一、广义傅立叶级数

如果连续函数系

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots \tag{1}$$

在某区间 $[a,b]$ 上正交，又如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对可积，那末以

$$a_n=\frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b|\varphi_n(x)|^2dx}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

为系数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$$

称为函数 $f(x)$ 关于正交函数系(1)的广义傅立叶级数，记作

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$$

$a_n(n=1,2,\cdots)$ 称为 $f(x)$ 关于正交函数系(1)的傅立叶系数.

不妨设(1)是标准正交函数系，即满足

$$\int_a^b|\varphi_n(x)|^2dx=1$$

那末

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$

这时，关于 a_n，有贝塞耳不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad (f(x)\text{是平方可积函数})$$

如果对于任意的平方可积函数，封闭性方程

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

成立，就称这时的正交函数系$\{\varphi_n(x)\}$是封闭的。

二、傅立叶-贝塞耳级数

[傅立叶-贝塞耳级数]

1° 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$是贝塞耳函数 $J_p(x)$ $(p>-1)$（见第十二章）的正根，那末函数系

$$J_p(\lambda_1 x),\ J_p(\lambda_2 x), \cdots, J_p(\lambda_n x), \cdots$$

在$[0,1]$上按权 x 正交，即

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{1}{2} J_{p+1}^2(\lambda) & (\lambda_m = \lambda_n = \lambda) \end{cases}$$

2° 对于一切在$[0,1]$上绝对可积的函数 $f(x)$，可作它的傅立叶-贝塞耳级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(\lambda_n x)$$

式中

$$c_n = \frac{\int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x)\,dx}{\int_0^1 x J_p^2(\lambda_n x)\,dx} = \frac{2}{J_{p+1}^2(\lambda_n)} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x)\,dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$

c_n $(n=1,2,\cdots)$称为函数 $f(x)$的傅立叶-贝塞耳系数。

3° 如果$f(x)$在$[0,1]$上除有有限个第一类间断点外处处连续并且逐段可微，那末当 $0<x<1$，$p \geqslant -\dfrac{1}{2}$时，它的傅立叶-贝塞耳级数收敛，在连续点处，级数和等于 $f(x)$，在间断点处，级数和等于 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$，

如果$f(x)$在$[0,1]$上绝对可积，在区间$[a,b]$ $(0\leqslant a<b\leqslant 1)$上连续并且有绝对可积的导数，那末它的傅立叶-贝塞耳级数$\left(p\geqslant -\frac{1}{2}\right)$在每一区间$[a+\delta,\ b-\delta]$ $(\delta>0)$上一致收敛；

如果$f(x)$在$[0,1]$上绝对可积，在区间$[a,1]$ $(0\leqslant a<1)$上连续并且有绝对可积的导数，同时$f(1)=0$，那末它的傅立叶-贝塞耳级数$\left(p\geqslant -\frac{1}{2}\right)$在每一区间$[a+\delta,1]$ $(\delta>0)$上一致收敛.

[第二类傅立叶-贝塞耳级数]

1° 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n,\cdots$是

$$xJ'_p(x)-HJ_p(x)=0 \qquad (H\text{是常数})$$

的正根，那末，当$p>-1$时，函数系

$$J_p(\lambda_1x),\ J_p(\lambda_2x),\cdots,J_p(\lambda_nx),\cdots$$

在$[0,1]$上按权x正交.

如果$f(x)$在$[0,1]$上绝对可积，那末它关于上面正交系的广义傅立叶级数称为$f(x)$的第二类傅立叶-贝塞耳级数，即

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_p(\lambda_nx)$$

式中
$$c_n=\frac{\int_0^1 xf(x)J_p(\lambda_nx)\,dx}{\int_0^1 xJ_p^2(\lambda_nx)\,dx}$$

$$=\frac{2\lambda_n^2}{\lambda_n^2[J'_p(\lambda_n)]^2+(\lambda_n^2-p^2)J_p^2(\lambda_n)}\int_0^1 xf(x)J_p(\lambda_nx)\,dx$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

2° 如果函数$f(x)$在$[0,1]$上逐段可微（至多有有限个第一类间断点），那末它的第二类傅立叶-贝塞耳级数$\left(p\geqslant -\frac{1}{2},\ p>H\right)$在$0<x<1$上收敛，并在连续点处等于$f(x)$，在间断点处等于$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$；

如果函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，两次可微（除有限个点外），且$f(0)=f'(0)=0$，$f'(1)=Hf(1)=0$，$f''(x)$有界，那末它的第二类傅立叶-贝塞耳级数当$p>-1$时，在每个区间$[\delta,1]$ $(0<\delta<1)$上绝对且一致收敛；又当$p\geqslant 0$时，在整个区间$[0,1]$上绝对且一致收敛.

[区间$[0,l]$上的傅立叶-贝塞耳级数]

设$f(x)$在$[0,l]$上绝对可积，那末它的傅立叶-贝塞耳级数是

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n J_p\left(\frac{\lambda_n}{l}x\right)$$

式中

$$c_n=\frac{2}{l^2 J_{p+1}^2(\lambda_n)}\int_0^l xf(x)\,J_p\left(\frac{\lambda_n}{l}x\right)dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$

对于第二类傅立叶-贝塞耳级数，

$$c_n=\frac{2\lambda_n^2}{l^2\{\lambda_n^2[J_p'(\lambda_n)]^2+(\lambda_n^2-p^2)J_p^2(\lambda_n)\}}\int_0^l xf(x)\,J_p\left(\frac{\lambda_n}{l}x\right)dx$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

关于级数的收敛性，可通过作变换$x=lt$，$\varphi(t)=f(lt)$，只讨论$\varphi(t)$在$[0,1]$上相应的傅立叶-贝塞耳级数的收敛性就可以了.

§3 拉普拉斯变换

[拉普拉斯变换及其反演公式] $f(t)$的拉普拉斯变换

$$L(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$(s\text{是复数},s=\sigma+i\omega)$$

拉普拉斯变换的反演公式

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[L(s)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}L(s)e^{st}ds \qquad (t\geqslant 0,\sigma\geqslant 0)$$

积分沿着任一直线$\operatorname{Re}s=\sigma>a$来取，$a$是$f(t)$的增长指数，同时，积分理解为在主值意义下的.

[拉普拉斯变换的存在条件] 如果$f(t)$满足下面三个条件，那末它的拉普拉斯变换存在.

(i)实变量的复值函数$f(t)$和$f'(t)$在$t\geqslant 0$上除掉有第一类间断点（在任一有限区间上至多有有限多个）外连续；

(ii)当$t<0$时，$f(t)=0$；

(iii)$f(t)$是有限阶的，也就是说可以找到常数$a\geqslant 0$和$A>0$，使得

$$|f(t)|\leqslant Ae^{at} \qquad (t\geqslant 0)$$

这里数a称为$f(t)$的增长指数，$f(t)$是有界函数时，可取$a=0$.

如果满足上面三个条件，那末$L(s)$是半平面$\operatorname{Re}s>a$上的解析函数，而反

演公式在 $f(t)$ 的连续点处成立.

[拉普拉斯变换的性质]

$\mathscr{L}[af(t)]=a\mathscr{L}[f(t)]$　　（a 是常数）

$\mathscr{L}[af(t)+bg(t)]=a\mathscr{L}[f(t)]+b\mathscr{L}[g(t)]$　　（a,b 是常数）

$\mathscr{L}[f(t)*g(t)]=\mathscr{L}[f(t)]\cdot\mathscr{L}[g(t)]$

式中

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du=\int_0^t f(t-u)g(u)du$$

称为函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的褶积(或卷积).

[拉普拉斯变换的主要公式表]

原　来　函　数	拉普拉斯变换后的函数
$f(at)$　　$(a>0)$	$\frac{1}{a}L\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n L(s)}{ds^n}$　　（n 阶导数）
$\frac{f(t)}{t^n}$	$\underbrace{\int_s^\infty\cdots\int_s^\infty}_{n} L(s)(ds)^n$　　（n 重积分）
$e^{at}f(t)$	$L(s-a)$
$f'(t)$	$sL(s)-f(0)$
$f^{(n)}(t)$　　$(n=1,2,\cdots)$	$s^nL(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{(r)}(0)$
$\left(t\frac{d}{dt}\right)^n f(t)$	$\left(-\frac{d}{ds}s\right)^n L(s)$
$\left(\frac{d}{dt}t\right)^n f(t)$	$\left(-s\frac{d}{ds}\right)^n L(s)$
$t^m f^{(n)}(t)$　　$(m\geqslant n)$	$\left(-\frac{d}{ds}\right)^m[s^nL(s)]$
$\frac{d^n}{dt^n}[t^m f(t)]$　　$(m\geqslant n)$	$(-1)^m s^n L^{(m)}(s)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{L(s)}{s}$
$\underbrace{\int_0^t\cdots\int_0^t}_{n} f(u)(du)^n$　（n 重积分）	$\frac{L(s)}{s^n}$

原　来　函　数	拉普拉斯变换后的函数
$\int_t^{\infty}\frac{f(u)}{u}du$	$\frac{1}{s}\int_0^s L(v)dv$
$\begin{cases} f(t-a), & t\geqslant a \\ 0, & 0\leqslant t<a \end{cases}$	$e^{-as}L(s)$
$f(t^2)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{v^2}e^{-\frac{s^2v^2}{4}}L\left(\frac{1}{v^2}\right)dv$
$t^{\nu-1}f(t)$　　$(\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$s^{\frac{\nu}{2}}\int_0^{\infty}v^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{sv})\,L(v)dv$
$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{u^2}{4t}}f(u)du$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}L(\sqrt{s})$
$\int_0^{\infty}\frac{t^{u-1}f(u)}{\Gamma(u)}du$	$L(\ln s)$
$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{4t}}}{t^{\frac{n+1}{2}}}H_n\left(\frac{u}{\sqrt{2t}}\right)f(u)du$　$(n=0,1,2,\cdots)$	$2^{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi}s^{\frac{n-1}{2}}L(\sqrt{s})$
$\int_0^t J_0[2\sqrt{au(t-u)}]f(u)du$	$\frac{1}{s}L\left(s+\frac{a}{s}\right)$
$f(t)-\int_0^t f(\sqrt{t^2-u^2})J_1(u)du$	$L(\sqrt{s^2+1})$
$t^{\frac{\nu}{2}}\int_0^{\infty}s^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{tu})f(u)du$　$\left(\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{s^{\nu+1}}L\left(\frac{1}{s}\right)$

［拉普拉斯变换表］

$$L(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt \qquad (\mathrm{Re}\,s=\sigma\geqslant 0)$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[L(s)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}L(s)e^{st}ds \qquad (t\geqslant 0,\sigma\geqslant 0)$$

拉普拉斯变换表 I

（已知函数查其拉普拉斯变换用此表方便）

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$	1
$\delta(t-c)$　　$(c>0)$	e^{-cs}
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n　　$(n=0,1,2,\cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$t^{n-\frac{1}{2}}$　　$(n=1,2,\cdots)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n}\cdot\dfrac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}}$
t^ν　　$(\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}$
$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\dfrac{1}{s^{3/2}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
$\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & 0<t<a\end{cases}$　　$(a>0)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
$\begin{cases}0, & 0<t<a\\ 1, & a<t<b\\ 0, & b<t<\infty\end{cases}$　　$(0\leqslant a<b)$	$\dfrac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}$　　$(\sigma>-\infty)$
$\begin{cases}t-a, & t>a\\ 0, & 0<t<a\end{cases}$	$\dfrac{e^{-as}}{s^2}$
$\begin{cases}(t-a)^\nu, & t>a\ (\mathrm{Re}\,\nu>-1)\\ 0, & 0<t<a\end{cases}$	$\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}e^{-as}$
$\left[\dfrac{t}{a}\right]$　　$(a>0)$	$\dfrac{1}{s(e^{as}-1)}$
$2\left[\dfrac{t}{a}\right]+1$　　$(a>0)$	$\dfrac{1}{s}\mathrm{cth}\dfrac{as}{2}$
$\left[\dfrac{t}{a}+\dfrac{1}{2}\right]$　　$(a>0)$	$\dfrac{1}{2s}\mathrm{csch}\dfrac{as}{2}$

$f(t)$	$L(s)$
$\frac{t}{a}-\left[\frac{t}{a}\right]$　$(a>0)$	$\frac{1}{as^2}-\frac{1}{s(e^{as}-1)}$
$\begin{cases}\frac{t}{a}-\left[\frac{t}{a}\right], & \left[\frac{t}{a}\right] 为偶数\\ \left[\frac{t}{a}\right]-\frac{t}{a}+1, & \left[\frac{t}{a}\right] 为奇数\end{cases}$　$(a>0)$	$\frac{1}{as^2}\operatorname{th}\frac{as}{2}$
$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{t}}, & t>a\\ 0, & 0<t<a\end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}\operatorname{erfc}(\sqrt{as})$
$(2at+t^2)^\nu$　$(a>0, \operatorname{Re}\nu>-1)$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2a}{s}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}e^{as}K_{\nu+\frac{1}{2}}(as)$
$\begin{cases}(t^2-a^2)^\nu, & t>a\ (\operatorname{Re}\nu>-1)\\ 0, & 0<t<a\end{cases}$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2a}{s}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}K_{\nu+\frac{1}{2}}(as)$
$\begin{cases}(2at-t^2)^\nu, & 0<t<2a\\ 0, & t>2a\end{cases}$　$(\operatorname{Re}\nu>-1)$	$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{e^{as}}\left(\frac{2a}{s}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}I_{\nu+\frac{1}{2}}(as)$　$(\sigma>-\infty)$
$\begin{cases}\frac{a-t}{\sqrt{2at-t^2}}, & 0<t<2a\\ 0, & t>2a\end{cases}$	$\pi a e^{-as}I_1(as)$
$\frac{1}{1+at}$　$(a>0)$	$-\frac{e^{\frac{s}{a}}}{a}\operatorname{Ei}\left(-\frac{s}{a}\right)$
$\frac{1}{(1+at)^2}$　$(a>0)$	$\frac{1}{a}+\frac{s}{a^2}e^{\frac{s}{a}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{s}{a}\right)$
$\frac{1}{1-at}$　$(a>0)$	$\frac{1}{a}e^{-\frac{s}{a}}\overline{\operatorname{Ei}}\left(\frac{s}{a}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{1+at}}$　$(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{as}}e^{\frac{s}{a}}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{t}(1+at)}$　$(a>0)$	$\frac{\pi}{a}e^{\frac{s}{a}}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\right)$
$\frac{1}{1-a^2t^2}$　$(a>0)$	$\frac{1}{2a}\left[e^{-\frac{s}{a}}\overline{\operatorname{Ei}}\left(\frac{s}{a}\right)-e^{\frac{s}{a}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{s}{a}\right)\right]$
$\frac{t}{1-a^2t^2}$　$(a>0)$	$\frac{1}{2a^2}\left[e^{-\frac{s}{a}}\overline{\operatorname{Ei}}\left(\frac{s}{a}\right)+e^{\frac{s}{a}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{s}{a}\right)\right]$

$f(t)$		$L(s)$	
$\dfrac{1}{1+a^2t^2}$	$(a>0)$	$\dfrac{1}{a}\left[\sin\dfrac{s}{a}\mathrm{Ci}\left(\dfrac{s}{a}\right)-\cos\dfrac{s}{a}\mathrm{si}\left(\dfrac{s}{a}\right)\right]$	
$\dfrac{t}{1+a^2t^2}$	$(a>0)$	$-\dfrac{1}{a^2}\left[\cos\dfrac{s}{a}\mathrm{Ci}\left(\dfrac{s}{a}\right)+\sin\dfrac{s}{a}\mathrm{si}\left(\dfrac{s}{a}\right)\right]$	
$e^{\alpha t}$		$\dfrac{1}{s-\alpha}$	$(\sigma\geqslant\mathrm{Re}\,\alpha)$
$te^{\alpha t}$		$\dfrac{1}{(s-\alpha)^2}$ $(\sigma\geqslant\mathrm{Re}\,\alpha)$	
$t^n e^{\alpha t}$	$(n=0,1,2,\cdots)$	$\dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ $(\sigma\geqslant\mathrm{Re}\,\alpha)$	
$t^\nu e^{\alpha t}$	$(\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{(s-\alpha)^{\nu+1}}$ $(\sigma\geqslant\mathrm{Re}\,\alpha)$	
$\dfrac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}}$		$\sqrt{\dfrac{\pi}{s-\alpha}}$ $(\sigma\geqslant\mathrm{Re}\,\alpha)$	
$\dfrac{1-e^{-at}}{t}$	$(a>0)$	$\ln\left(1+\dfrac{a}{s}\right)$	
$e^{-\frac{t^2}{4a}}$	$(a>0)$	$\sqrt{\pi a}\,e^{as^2}\mathrm{erfc}(\sqrt{a}\,s)$	$(\sigma>-\infty)$
$te^{-\frac{t^2}{4a}}$	$(a>0)$	$2a[1-\sqrt{\pi a}\,se^{as^2}\mathrm{erfc}(\sqrt{a}\,s)]$	$(\sigma>-\infty)$
$\dfrac{e^{-2a\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$	$(a>0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}e^{\frac{a^2}{s}}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{a}{\sqrt{s}}\right)$	
$\dfrac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{t}}$	$(a\geqslant0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}e^{-a\sqrt{s}}$	
$\dfrac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{t^{3/2}}$	$(a>0)$	$\dfrac{2\sqrt{\pi}}{a}e^{-a\sqrt{s}}$	
$\dfrac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{t^{\nu+1}}$	$(a>0)$	$\dfrac{2^{\nu+1}s^{\frac{\nu}{2}}}{a^\nu}K_\nu(a\sqrt{s})$	
$\sin at$		$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$(\sigma\geqslant\lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$
$\cos at$		$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$(\sigma\geqslant\lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$
$\begin{cases}\sin t, & (2n-2)\pi<t<(2n-1)\pi\\ 0, & (2n-1)\pi<t<2n\pi\end{cases}$		$\dfrac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$	
$\lvert\sin at\rvert$	$(a>0)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\mathrm{cth}\dfrac{\pi s}{2a}$	

$f(t)$	$L(s)$
$\lvert\cos at\rvert \quad (a>0)$	$\frac{1}{s^2+a^2}\left(s+a\operatorname{csch}\frac{\pi s}{2a}\right)$
$t^n\sin at$	$n!\frac{s^{n+1}}{(s^2+a^2)^{n+1}}\sum_{0\leqslant 2m\leqslant n}(-1)^m C_{n+1}^{2m+1}\left(\frac{a}{s}\right)^{2m+1}$ $(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$t^n\cos at \quad (n=0,1,2,\cdots)$	$n!\frac{s^{n+1}}{(s^2+a^2)^{n+1}}\sum_{0\leqslant 2m\leqslant n+1}(-1)^m C_{n+1}^{2m}\left(\frac{a}{s}\right)^{2m}$ $(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$t^{\nu-1}\sin at \quad (\operatorname{Re}\nu>-1)$	$\frac{i\Gamma(\nu)}{2}\left[\frac{1}{(s+ia)^\nu}-\frac{1}{(s-ia)^\nu}\right]$ $=\frac{\Gamma(\nu)}{(s^2+a^2)^{\nu/2}}\sin\left(\nu\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{s}\right)$ $(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$t^{\nu-1}\cos at \quad (\operatorname{Re}\nu>-1)$	$\frac{\Gamma(\nu)}{2}\left[\frac{1}{(s+ia)^\nu}+\frac{1}{(s-ia)^\nu}\right]$ $=\frac{\Gamma(\nu)}{(s^2+a^2)^{\nu/2}}\cos\left(\nu\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{s}\right)$ $(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$\frac{\sin at}{t}$	$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{s}$ $(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$\frac{1-\cos at}{t}$	$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)$ $(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$\frac{\sin at}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+a^2}-s}{s^2+a^2}}$ $(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$\frac{\cos at}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+a^2}+s}{s^2+a^2}}$ $(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$e^{\beta t}\cos(at+\theta)$	$\frac{(s-\beta)\cos\theta-a\sin\theta}{(s-\beta)^2+a^2}$ $(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert+\operatorname{Re}\beta)$
$e^{\beta t}\sin(at+\theta)$	$\frac{(s-\beta)\sin\theta+a\cos\theta}{(s-\beta)^2+a^2}$ $(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert+\operatorname{Re}\beta)$
$\frac{\cos at-\cos\beta t}{t^2}$	$\frac{s}{2}\ln\frac{s^2+a^2}{s^2+\beta^2}+\beta\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{s}-a\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{s}$ $(\sigma\geqslant\max\{\lvert\operatorname{Im}a\rvert,\ \lvert\operatorname{Im}\beta\rvert\})$
$\frac{\sin^2 at}{t}$	$\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{4a^2}{s^2}\right)$ $(\sigma\geqslant 2\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$\sin a\sqrt{t}$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}e^{-\frac{a^2}{4s}}$

$f(t)$	$L(s)$
$\sqrt{t}\cos a\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{2s}\right)\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}e^{-\frac{a^2}{4s}}$
$\frac{\sin a\sqrt{t}}{t}$	$\pi\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{s}}\right)$
$\frac{\cos a\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\frac{a^2}{4s}}$
$\frac{\sin\frac{a}{t}}{\sqrt{t}}$　$(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\sqrt{2as}}\sin\sqrt{2as}$
$\frac{\cos\frac{a}{t}}{\sqrt{t}}$　$(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\sqrt{2as}}\cos\sqrt{2as}$
$\frac{\sin t^2}{t}$	$\frac{\pi}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}}\right)\right]^2+\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}}\right)\right]^2\right\}$
$\sin at^2$　$(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\sin\frac{s^2}{4a}\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]+\cos\frac{s^2}{4a}\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]\right\}$
$\cos at^2$　$(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\frac{s^2}{4a}\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]-\sin\frac{s^2}{4a}\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]\right\}$
$\operatorname{sh}at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$　$(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Re}a\rvert)$
$\operatorname{ch}at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$　$(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Re}a\rvert)$
$\operatorname{sh}^2 at$	$\frac{2a^2}{s(s^2-4a^2)}$　$(\sigma\geqslant2\lvert\operatorname{Re}a\rvert)$
$\operatorname{ch}^2 at$	$\frac{s^2-2a^2}{s(s^2-4a^2)}$　$(\sigma\geqslant2\lvert\operatorname{Re}a\rvert)$
$t^{\nu-1}\operatorname{sh}at$ $(\operatorname{Re}\nu>-1,\ \nu\neq0)$	$\frac{\Gamma(\nu)}{2}\left[\frac{1}{(s-a)^\nu}-\frac{1}{(s+a)^\nu}\right]$　$(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Re}a\rvert)$
$t^{\nu-1}\operatorname{ch}at$　$(\operatorname{Re}\nu>0)$	$\frac{\Gamma(\nu)}{2}\left[\frac{1}{(s-a)^\nu}+\frac{1}{(s+a)^\nu}\right]$　$(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Re}a\rvert)$

$f(t)$		$L(s)$	
$\frac{\operatorname{sh} at}{t}$		$\frac{1}{2}\ln\frac{s+a}{s-a}$	$(\sigma>\|\operatorname{Re} a\|)$
$\frac{\operatorname{sh}^2 at}{t}$		$-\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{4a^2}{s^2}\right)$	$(\sigma>2\|\operatorname{Re} a\|)$
$e^{\beta t}\operatorname{sh} at$		$\frac{a}{(s-\beta)^2-a^2}$	$(\sigma>\|\operatorname{Re} a\|+\operatorname{Re}\beta)$
$e^{\beta t}\operatorname{ch} at$		$\frac{s-\beta}{(s-\beta)^2-a^2}$	$(\sigma>\|\operatorname{Re} a\|+\operatorname{Re}\beta)$
$\operatorname{sh} a\sqrt{t}$		$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}e^{\frac{a^2}{4s}}$	
$\operatorname{ch} a\sqrt{t}$		$\frac{1}{s}+\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}e^{\frac{a^2}{4s}}\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{s}}\right)$	
$\frac{\operatorname{sh} a\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$		$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{\frac{a^2}{4s}}\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{s}}\right)$	
$\frac{\operatorname{ch} a\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$		$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{\frac{a^2}{4s}}$	
$\ln t$		$-\frac{1}{s}(\ln s+\gamma)$	(γ为欧拉常数)
$t^{\nu-1}\ln t$	$(\operatorname{Re}\nu>0)$	$\frac{\Gamma(\nu)}{s^\nu}\left[\frac{\Gamma'(\nu)}{\Gamma(\nu)}-\ln s\right]$	
$\ln(t^2+1)$		$\frac{2}{s}[\operatorname{Ci}(s)\cos s-\operatorname{si}(s)\sin s]$	
$\ln t\sin at$		$\frac{1}{s^2+a^2}\left[s\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{s}-\frac{a}{2}\ln(s^2+a^2)-a\gamma\right]$	$(\sigma>\|\operatorname{Im} a\|)$
$\ln t\cos at$		$-\frac{1}{s^2+a^2}\left[a\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{s}+\frac{s}{2}\ln(s^2+a^2)+s\gamma\right]$	$(\sigma>\|\operatorname{Im} a\|)$
$\frac{\ln t\sin at}{t}$		$-\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{s}\left[\frac{1}{2}\ln(s^2+a^2)+\gamma\right]$	$(\sigma>\|\operatorname{Im} a\|)$
$\operatorname{erf}(at)$	$(a>0)$	$\frac{1}{s}e^{\frac{s^2}{4a^2}}\operatorname{erfc}\left(\frac{s}{2a}\right)$	
$\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$	$(a>0)$	$\frac{a}{s\sqrt{a^2+s}}$	

$f(t)$	$L(s)$
$\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$　　$(a>0)$	$\dfrac{\sqrt{a^2+s}-a}{s\sqrt{a^2+s}}$
$\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{\sqrt{t}}\right)$　　$(a>0)$	$\dfrac{1}{s}(1-e^{-2a\sqrt{s}})$
$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{\sqrt{t}}\right)$　　$(a>0)$	$\dfrac{1}{s}e^{-2a\sqrt{s}}$
$J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$J_\nu(at)$　　$(\operatorname{Re}\nu>-1)$	$\dfrac{a^\nu}{\sqrt{s^2+a^2}(s+\sqrt{s^2+a^2})^\nu}$　　$(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$\dfrac{J_\nu(at)}{t}$　　$(\operatorname{Re}\nu>0)$	$\dfrac{a^\nu}{\nu(s+\sqrt{s^2+a^2})^\nu}$　　$(\sigma\geqslant\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$
$J_\nu(a\sqrt{t})$　$(\operatorname{Re}\nu>-2)$	$\dfrac{a\sqrt{\pi}}{4\sqrt{s^3}}e^{-\frac{a^2}{8s}}\left[I_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a^2}{8s}\right)-I_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a^2}{8s}\right)\right]$
$t^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(a\sqrt{t})$　$(\operatorname{Re}\nu>-1)$	$\left(\dfrac{a}{2}\right)^\nu\dfrac{1}{s^{\nu+1}}e^{-\frac{a^2}{4s}}$
$I_\nu(at)$　　$(\operatorname{Re}\nu>-1)$	$\dfrac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^\nu}{a^\nu\sqrt{s^2-a^2}}$　　$(\sigma>\lvert\operatorname{Re}a\rvert)$
$e^{-at}I_\nu(at)$　$(\operatorname{Re}\nu>-1)$	$\dfrac{(2a)^\nu(\sqrt{s+2a}+\sqrt{s})^{-2\nu}}{\sqrt{s}\ \sqrt{s+2a}}$
$\dfrac{e^{-at}}{t}I_1(at)$	$\dfrac{\sqrt{s+2a}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+2a}+\sqrt{s}}$
$\operatorname{Si}(at)$	$\dfrac{1}{s}\operatorname{arcctg}\dfrac{s}{a}$
$\operatorname{Ci}(at)$	$-\dfrac{1}{2s}\ln\left(1+\dfrac{s^2}{a^2}\right)$
$\operatorname{Ei}(-at)$　　$(a>0)$	$-\dfrac{1}{s}\ln\left(1+\dfrac{s}{a}\right)$

拉普拉斯变换表 Ⅱ

（已知函数的拉普拉斯变换查其原来函数用此表方便）

$L(s)$	$f(t)$
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}\quad(a\neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}\quad(a\neq b)$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ （a,b,c不等）	$-\dfrac{(b-c)e^{at}+(c-a)e^{bt}+(a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
$\dfrac{1}{s^n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
$\dfrac{1}{(s+a)^n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$
$\dfrac{\lambda s^3+\mu s^2+\nu s+\rho}{(s^2+a^2)^2}$	$\lambda\cos at+\dfrac{\rho+a^2\mu}{2a^3}\sin at+\dfrac{\nu-a^2\lambda}{2a}t\sin at-\dfrac{\rho-a^2\mu}{2a^2}t\cos at$
$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\quad(a^2\neq b^2)$	$\dfrac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}$
$\dfrac{3a^2}{s^3+a^3}$	$e^{-at}-e^{\frac{at}{2}}\left(\cos\dfrac{at\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{at\sqrt{3}}{2}\right)$
$\dfrac{1}{s^4+a^4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}a^3}\left(\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}\mathrm{ch}\dfrac{at}{\sqrt{2}}-\cos\dfrac{at}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}\dfrac{at}{\sqrt{2}}\right)$
$\dfrac{s}{s^4+a^4}$	$\dfrac{1}{a^2}\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}\dfrac{at}{\sqrt{2}}$
$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\mathrm{sh}\,at-\sin at)$
$\dfrac{s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\mathrm{ch}\,at-\cos at)$
$\dfrac{8a^3s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$(1+a^2t^2)\sin at-at\cos at$
$\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^n\quad(n=0,1,2,\cdots)$	$\dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t})$
$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{at}(1+2at)$

$L(s)$		$f(t)$
$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$		$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
$\frac{1}{\sqrt{s}+a}$		$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-ae^{a^2t}\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$
$\frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}}$	$(n=0,1,2,\cdots)$	$\frac{2^{2n}n!}{\sqrt{\pi}(2n)!}t^{n-\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{(s+a)^{n+\frac{1}{2}}}$	$(n=0,1,2,\cdots)$	$\frac{2^{2n}n!}{\sqrt{\pi}(2n)!}t^{n-\frac{1}{2}}e^{-at}$
$\frac{1}{\sqrt{s^3}}e^{-k\sqrt{s}}$	$(k>0)$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{k^2}{4t}}-k\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
$\frac{ae^{-k\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})}$	$(k>0)$	$-e^{ak}e^{a^2t}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)+\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
$\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(a+\sqrt{s})}$	$(k>0)$	$e^{ak}e^{a^2t}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)\qquad(0<t<k)$
$\frac{b^2-a^2}{(s-a^2)(b+\sqrt{s})}$		$e^{a^2t}[b-a\operatorname{erf}(a\sqrt{t})]-be^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$
$\frac{1}{(s+a)\sqrt{s+b}}$		$\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{-at}\operatorname{erf}(\sqrt{b-a}\sqrt{t})$
$\frac{\sqrt{s}}{(s-a^2)(\sqrt{s}+b)}$		$\frac{1}{b^2-a^2}[b^2e^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$ $+abe^{a^2t}\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})-a^2e^{a^2t}]$
$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a^2)(\sqrt{s}+b)}$		$\frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{b}{a}e^{a^2t}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})\right.$ $\left.-e^{a^2t}+e^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})\right]$
$\frac{1}{(s^2+a^2)^{\nu}}$	$(\mathrm{Re}\,\nu>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}J_{\nu-\frac{1}{2}}(at)$
$\frac{1}{(s^2-a^2)^{\nu}}$	$(\mathrm{Re}\,\nu>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}I_{\nu-\frac{1}{2}}(at)$
$\frac{1}{s^{\nu}}e^{\frac{k}{s}}$	$(\mathrm{Re}\,\nu>0)$	$\left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}(2\sqrt{kt})$
$\frac{1}{s^{\nu}}\ln s$	$(\mathrm{Re}\,\nu>0)$	$t^{\nu-1}\left\{\frac{\Gamma'(\nu)}{[\Gamma(\nu)]^2}-\frac{\ln t}{\Gamma(\nu)}\right\}$

$L(s)$		$f(t)$
$\frac{\ln s}{s-a}$	$(a>0)$	$e^{at}[\ln a-\mathrm{Ei}(-at)]$
$\frac{\ln s}{s^2+a^2}$	$(a>0)$	$\frac{1}{a}\cos at\mathrm{Si}(at)+\frac{1}{a}\sin at[\ln a-\mathrm{Ci}(at)]$
$\frac{s\ln s}{s^2+1}$		$-\sin t\,\mathrm{Si}(t)-\cos t\,\mathrm{Ci}(t)$
$\ln\frac{s-a}{s-b}$		$\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$
$\frac{1}{s}\ln(s^2+a^2)$	$(a>0)$	$2\ln a-2\mathrm{Ci}(at)$
$\frac{1}{s^2}\ln(s^2+a^2)$	$(a>0)$	$\frac{2}{a}[at\ln a+\sin at-at\mathrm{Ci}(at)]$
$\ln\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}$		$\frac{2}{t}(\cos bt-\cos at)$
$\ln\frac{s^2-a^2}{s^2-b^2}$		$\frac{2}{t}(\mathrm{ch}bt-\mathrm{ch}at)$
$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a}{s}}K_0\left(\frac{b}{s}\right)$	$(a\geqslant b)$	$I_0(A\sqrt{t})K_0(B\sqrt{t})+I_0(B\sqrt{t})K_0(A\sqrt{t})$ $(A=\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b},$ $B=\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$
$K_\nu(s)$		$\begin{cases}\frac{(t+\sqrt{t^2-1})^\nu+(t-\sqrt{t^2-1})^\nu}{2\sqrt{t^2-1}}, & t>1\\ 0, & t<1\end{cases}$
$\frac{K_\nu(s)}{s}$		$\begin{cases}\frac{(t+\sqrt{t^2-1})^\nu-(t-\sqrt{t^2-1})^\nu}{2\nu}, & t>1\\ 0, & t<1\end{cases}$

[二重拉普拉斯变换及其反演公式]

函数 $f(x,y)$的二重拉普拉斯变换为

$$L(s,q)=\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)e^{-sx-qy}dxdy$$

二重拉普拉斯变换的反演公式为

$$f(x,y)=\frac{-1}{4\pi^2}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty}L(s,q)e^{sx+qy}dqds$$

其中 $\sigma=\mathrm{Re}\,s,\sigma'=\mathrm{Re}\,q$；$-\pi<\arg s<\pi$，$-\pi<\arg q<\pi$。

§4　傅立叶变换

一、傅立叶积分

［傅立叶积分］　在任一有限区间$[-l,l]$上绝对可积的函数，可以求出它的傅立叶级数（本章§1，二）

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}dt \tag{1}$$

设函数$f(x)$在无穷区间$(-\infty,\infty)$上绝对可积．在(1)式中，令$l\to\infty$，得出$f(x)$的傅立叶积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos z(t-x)dt\right]dz$$

［傅立叶积分的几种形式］

设$f(x)$的傅立叶积分满足收敛的条件，那末

1° $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos z(t-x)dt\right]dz$

2° $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iz(t-x)}dt\right]dz$

（外层积分理解为主值意义下的积分）

3° $f(x)$是偶函数：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos zx\left[\int_{0}^{\infty}f(t)\cos zt\,dt\right]dz$$

4° $f(x)$是奇函数：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin zx\left[\int_{0}^{\infty}f(t)\sin zt\,dt\right]dz$$

［傅立叶积分的收敛判别法］　设函数$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上绝对可积，记积分(1)的假想值为S_0．假设$f(x)$在点x_0连续，或者x_0是它的第一类间断点，并且在连续点x_0处$S_0=f(x_0)$，而在第一类间断点x_0处，

$$S_0=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

1° 狄尼判别法　令$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0$，如果对于某一$h>0$，积分

$$\int_{0}^{h}\frac{|\varphi(t)|}{t}dt$$

收敛，那末 $f(x)$ 的傅立叶积分在点 x_0 处收敛，并且等于 S_0。

2° 狄利克莱-若当判别法　如果 $f(x)$ 在以 x_0 为中点的某一区间 $[x_0-h, x_0+h]$ 上有有界变差，那末它的傅立叶积分在点 x_0 处收敛，并且等于 S_0。

3° 如果函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上有有界变差，同时

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

那末 $f(x)$ 的傅立叶积分在任一点 x_0 处收敛，并且等于 S_0。

二、傅立叶变换

［傅立叶变换及其反演公式］ $f(x)$ 的傅立叶变换为

$$F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx$$

傅立叶变换的反演公式为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-i\xi x}d\xi$$

［傅立叶变换的存在条件］ $f(x)$ 的傅立叶变换及反演公式在满足下面两个条件下有意义（只是在 $f(x)$ 的间断点 x_0 处，反演公式的左端应等于 $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$）：

1° $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ 存在；

2° $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上满足狄利克莱条件：$f(x)$ 只有有限个极值点，只有有限个第一类间断点。

［傅立叶变换的性质］ 设 $f(x)$，$g(x)$ 的傅立叶变换分别是 $F(\xi)$，$G(\xi)$，那末

1° 线性　　$af(x)+bg(x)$ 的傅立叶变换是

$aF(\xi)+bG(\xi)$　（a, b 是常数）

2° 褶积（或卷积）　$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$ 的傅立叶变换是

$F(\xi)\cdot G(\xi)$

3° 帕塞法耳等式　$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\xi)|^2d\xi$

4° 翻转　　$f(-x)$ 的傅立叶变换是 $F(-\xi)$。

5° 共轭　　$\overline{f(x)}$ 的傅立叶变换是 $\overline{F(-\xi)}$。

6° 时移(延迟)　　$f(x-x_0)$的傅立叶变换是 $e^{ix_0\xi}F(\xi)$.

7° 频移(调频)　　$F(\xi-\xi_0)$是 $f(x)e^{-i\xi_0 x}$ 的傅立叶变换 (ξ_0是常数).

[傅立叶变换表]

$$F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\xi x}dx,\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{-i\xi x}d\xi$$

$f(x)$	$F(\xi)$
$\lvert x\rvert^{\nu}$ $(\nu\neq0,2,4,\cdots,-1,-3,\cdots)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{\nu\pi}{2}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\lvert\xi\rvert^{\nu+1}}$
$\frac{1}{\lvert x\rvert}$　$(x\neq0)$	$\frac{1}{\lvert\xi\rvert}$　$(\xi\neq0)$
$\frac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$　$(x\neq0)$	$\frac{1}{\sqrt{\lvert\xi\rvert}}$　$(\xi\neq0)$
$\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$\frac{i\operatorname{sgn}\xi}{\sqrt{\lvert\xi\rvert}}$
$\frac{1}{\lvert x\rvert^{\nu}}$　$(0<\operatorname{Re}\nu<1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{\nu\pi}{2}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\lvert\xi\rvert^{1-\nu}}$　$(\xi\neq0)$
$\frac{\operatorname{sgn}x}{\lvert x\rvert^{\nu}}$　$(0<\operatorname{Re}\nu<2,\nu\neq1)$	$i\operatorname{sgn}\xi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{\nu\pi}{2}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\lvert\xi\rvert^{1-\nu}}$　$(\xi\neq0)$
$\frac{1}{x^2+a^2}$　$(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\lvert\xi\rvert}}{a}$
$\frac{\operatorname{sgn}x}{x^2+a^2}$　$(a>0)$	$\frac{i\operatorname{sgn}\xi}{\sqrt{2\pi}a}[e^{-a\lvert\xi\rvert}\overline{\operatorname{Ei}}(a\lvert\xi\rvert)-e^{a\lvert\xi\rvert}\operatorname{Ei}(-a\lvert\xi\rvert)]$
$\frac{\lvert x\rvert}{x^2+a^2}$　$(a>0)$	$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[e^{-a\lvert\xi\rvert}\overline{\operatorname{Ei}}(a\lvert\xi\rvert)+e^{a\lvert\xi\rvert}\operatorname{Ei}(-a\lvert\xi\rvert)]$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_0(a\lvert\xi\rvert)$
$\frac{1}{(x^2+a^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$　$\left(\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left\lvert\frac{\xi}{2a}\right\rvert^{\nu}K_\nu(a\lvert\xi\rvert)$
$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, & \lvert x\rvert<a\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}J_0(a\lvert\xi\rvert)$

$f(x)$		$F(\xi)$
$\begin{cases}\dfrac{1}{(a^2-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}, & \lvert x\rvert<a\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$	$\left(\mathrm{Re}\,\nu<\dfrac{1}{2}\right)$	$\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\sqrt{2}}\left\lvert\dfrac{\xi}{2a}\right\rvert^{\nu}J_{-\nu}(a\lvert\xi\rvert)$
$\begin{cases}e^{i\omega x}, & \alpha<x<\beta\\ 0, & x<\alpha,\ x>\beta\end{cases}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{e^{i\alpha(\xi+\omega)}-e^{i\beta(\xi+\omega)}}{\xi+\omega}$
$\begin{cases}e^{-ax+i\omega x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$(a>0)$	$\dfrac{i}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\xi+\omega+ia}$
e^{-ax^2}	$(a>0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$
$\dfrac{e^{-a\lvert x\rvert}}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$(a>0)$	$\dfrac{\sqrt{\sqrt{\xi^2+a^2}+a}}{\sqrt{\xi^2+a^2}}$
$\dfrac{\mathrm{sgn}\,x e^{-a\lvert x\rvert}}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$(a>0)$	$\dfrac{i\,\mathrm{sgn}\,\xi\sqrt{\sqrt{\xi^2+a^2}-a}}{\sqrt{\xi^2+a^2}}$
$\dfrac{e^{-\frac{a}{\lvert x\rvert}}}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$(a>0)$	$\dfrac{e^{-\sqrt{2a\lvert\xi\rvert}}}{\lvert\xi\rvert}\left(\cos\sqrt{2a\lvert\xi\rvert}-\sin\sqrt{2a\lvert\xi\rvert}\right)$
$\dfrac{\mathrm{sgn}\,x e^{-\frac{a}{\lvert x\rvert}}}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$(a>0)$	$\dfrac{i\,\mathrm{sgn}\,\xi e^{-\sqrt{2a\lvert\xi\rvert}}}{\sqrt{\lvert\xi\rvert}}\left(\cos\sqrt{2a\lvert\xi\rvert}+\sin\sqrt{2a\lvert\xi\rvert}\right)$
$e^{-b\sqrt{x^2+a^2}}$	$(a,b>0)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{ab}{\sqrt{\xi^2+b^2}}K_1\left(a\sqrt{\xi^2+b^2}\right)$
$\dfrac{e^{-b\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$(a,b>0)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}K_0\left(a\sqrt{\xi^2+b^2}\right)$
$\dfrac{\sin ax}{x}$	$(a>0)$	$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \lvert\xi\rvert<a\\ 0, & \lvert\xi\rvert>a\end{cases}$
$\dfrac{\sin^2 ax}{x}$	$(a>0)$	$\begin{cases}\dfrac{i\,\mathrm{sgn}\,\xi}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \lvert\xi\rvert<2a\\ 0, & \lvert\xi\rvert>2a\end{cases}$
$\dfrac{\sin^2 ax}{x^2}$	$(a>0)$	$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(a-\dfrac{\lvert\xi\rvert}{2}\right), & \lvert\xi\rvert<2a\\ 0, & \lvert\xi\rvert>2a\end{cases}$

$f(x)$	$F(\xi)$
$\dfrac{\sin ax}{\lvert x\rvert^{1-\nu}}\quad\begin{pmatrix}-1<\operatorname{Re}\nu<1\\ \nu\neq 0,\ a>0\end{pmatrix}$	$\dfrac{i\operatorname{sgn}\xi}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\nu)\cos\dfrac{\nu\pi}{2}\left(\dfrac{1}{\lvert\xi-a\rvert^{\nu}}-\dfrac{1}{\lvert\xi+a\rvert^{\nu}}\right)$
$\sin ax^2\quad(a>0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\dfrac{\xi^2}{4a}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
$\cos ax^2\quad(a>0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\dfrac{\xi^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$
$\dfrac{\sin ax^2}{x}\quad(a>0)$	$-i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left[S\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}\right)-C\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]$
$\dfrac{\sin ax^2}{x^2}\quad(a>0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\xi\left[S\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}\right)-C\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]+\sqrt{2a}\sin\left(\dfrac{\xi^2}{4a}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
$\dfrac{\sin(b\sqrt{x^2+a^2})}{\sqrt{x^2+a^2}}\quad(a,b>0)$	$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}J_0(a\sqrt{b^2-\xi^2}), & \lvert\xi\rvert<b\\ 0, & \lvert\xi\rvert>b\end{cases}$
$\dfrac{\cos(b\sqrt{x^2+a^2})}{\sqrt{x^2+a^2}}\quad(a,b>0)$	$\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}N_0(a\sqrt{b^2-\xi^2}), & \lvert\xi\rvert<b\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}K_0(a\sqrt{\xi^2-b^2}), & \lvert\xi\rvert>b\end{cases}$
$\begin{cases}\dfrac{\cos(b\sqrt{a^2-x^2})}{\sqrt{a^2-x^2}}, & \lvert x\rvert<a\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}J_0(a\sqrt{\xi^2+b^2})$
$\begin{cases}0, & \lvert x\rvert<a\\ \dfrac{\cos(b\sqrt{x^2-a^2})}{\sqrt{x^2-a^2}}, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$	$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}K_0(a\sqrt{b^2-\xi^2}), & \lvert\xi\rvert<b\\ -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}N_0(a\sqrt{\xi^2-b^2}), & \lvert\xi\rvert>b\end{cases}$
$\begin{cases}\dfrac{e^{-b\sqrt{a^2-x^2}}}{\sqrt{a^2-x^2}}, & \lvert x\rvert<a\\ -\dfrac{\sin(b\sqrt{x^2-a^2})}{\sqrt{x^2-a^2}}, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$	$\begin{cases}0, & \lvert\xi\rvert<b\\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}J_0(a\sqrt{\xi^2-b^2}), & \lvert\xi\rvert>b\end{cases}$
$\begin{cases}\dfrac{\sin(b\sqrt{a^2-x^2})}{\sqrt{a^2-x^2}}, & \lvert x\rvert<a\\ -\dfrac{e^{-b\sqrt{x^2-a^2}}}{\sqrt{x^2-a^2}}, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}N_0(a\sqrt{\xi^2+b^2})$

$f(x)$		$F(\xi)$
$\begin{cases}\dfrac{\operatorname{ch}(b\sqrt{a^2-x^2})}{\sqrt{a^2-x^2}}, & \lvert x\rvert<a\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$		$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}J_0(a\sqrt{\xi^2-b^2})$
$\operatorname{sech} ax$	$(a>0)$	$\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\operatorname{sech}\dfrac{\pi\xi}{2a}$
$\operatorname{csch} ax$	$(a>0)$	$\dfrac{i}{a}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\operatorname{th}\dfrac{\pi\xi}{2a}$
$\dfrac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh}\pi x}$	$(-\pi<a<\pi)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{\sin a}{\operatorname{ch}\xi+\cos a}$
$\dfrac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch}\pi x}$	$(-\pi<a<\pi)$	$i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin\dfrac{a}{2}\operatorname{sh}\dfrac{\xi}{2}}{\operatorname{ch}\xi+\cos a}$
$\dfrac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh}\pi x}$	$(-\pi<a<\pi)$	$\dfrac{i}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi+\cos a}$
$\dfrac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch}\pi x}$	$(-\pi<a<\pi)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\cos\dfrac{a}{2}\operatorname{ch}\dfrac{\xi}{2}}{\operatorname{ch}\xi+\cos a}$
$\dfrac{\ln\lvert x\rvert}{x}$		$-i\operatorname{sgn}\xi\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(\ln\lvert\xi\rvert+\gamma)$ （γ 为欧拉常数）
$\dfrac{\ln\lvert x\rvert}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$		$-\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\xi\rvert}}\left(\ln\lvert 4\xi\rvert+\gamma+\dfrac{\pi}{2}\right)$
$\ln\dfrac{x^2+a^2}{x^2+b^2}$	$(a,b\geqslant 0)$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\lvert\xi\rvert}(e^{-b\lvert\xi\rvert}-e^{-a\lvert\xi\rvert})$
$\dfrac{\operatorname{Ar\,sh}\dfrac{x}{a}}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$(a>0)$	$i\operatorname{sgn}\xi\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}K_0(a\lvert\xi\rvert)$
$\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a}$	$(a>0)$	$i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-a\lvert\xi\rvert}}{\xi}$

三、傅立叶余弦变换

［傅立叶余弦变换及其反演公式］ $f(x)$的傅立叶余弦变换为

$$F_c(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos\xi x\,dx$$

傅立叶余弦变换的反演公式为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\xi)\cos\xi x d\xi$$

[傅立叶余弦变换的存在条件] 与傅立叶积分收敛条件相同.

[傅立叶余弦变换的性质]

1° 如果 $F_c(\xi)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶余弦变换，那末 $f(\xi)$ 是 $F_c(x)$ 的傅立叶余弦变换.

2° 如果 $f(x)$ 是偶函数，那末 $F_c(\xi)=F(\xi)$.

3° $f\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a>0)$ 的傅立叶余弦变换是 $aF_c(a\xi)$.

[傅立叶余弦变换表]

$$F_c(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\xi x dx,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\xi)\cos\xi x d\xi$$

$f(x)$	$F_c(\xi)$
$\begin{cases}1, & 0<x<a\\ 0, & x>a\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\xi}{\xi}$
$\begin{cases}x^{\nu-1}, & 0<x<a\ (\mathrm{Re}\,\nu>0)\\ 0, & x>a\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a^\nu}{\nu}[{}_1F_1(\nu;\nu+1;ia\xi)+{}_1F_1(\nu;\nu+1;-ia\xi)]$
$\begin{cases}\cos x, & 0<x<a\\ 0, & x>a\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{\sin[a(1-\xi)]}{1-\xi}+\frac{\sin[a(1+\xi)]}{1+\xi}\right\}$
$\mathrm{sech}\,ax$ $(a>0)$	$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sech}\frac{\pi\xi}{2a}$
e^{-ax} $(a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\xi^2}$
e^{-ax^2} $(a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$
$\cos ax^2$ $(a>0)$	$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\cos\frac{\xi^2}{4a}+\sin\frac{\xi^2}{4a}\right)$
$\sin ax^2$ $(a>0)$	$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\cos\frac{\xi^2}{4a}-\sin\frac{\xi^2}{4a}\right)$
$\begin{cases}(1-x^2)^\nu, & 0<x<1\\ 0, & x>1\ (\mathrm{Re}\,\nu>-1)\end{cases}$	$2^\nu\Gamma(\nu+1)\xi^{-\nu-\frac{1}{2}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(\xi)$
$\begin{cases}\ln x, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{Si}(\xi)}{\xi}$

四、傅立叶正弦变换

［傅立叶正弦变换及其反演公式］　$f(x)$的傅立叶正弦变换为

$$F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\xi x\,dx$$

傅立叶正弦变换的反演公式为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\xi)\sin\xi x\,d\xi$$

［傅立叶正弦变换的存在条件］　与傅立叶积分收敛条件相同.

［傅立叶正弦变换的性质］

1° 如果$F_s(\xi)$是$f(x)$的傅立叶正弦变换，那末 $f(\xi)$是$F_s(x)$的傅立叶正弦变换.

2° 如果 $f(x)$是奇函数，那末$F_s(\xi)=-iF(\xi)$.

3° $f\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a>0)$的傅立叶正弦变换是 $aF_s(a\xi)$.

［傅立叶正弦变换表］

$$F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\xi x\,dx,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\xi)\sin\xi x\,d\xi$$

$f(x)$	$F_s(\xi)$
e^{-ax} $(a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{a^2+\xi^2}$
$xe^{-\frac{x^2}{2}}$	$\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
$\frac{\sin ax}{x}$ $(a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left\|\frac{a+\xi}{a-\xi}\right\|$
$\begin{cases}x(1-x^2)^\nu, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$ $(\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$2^\nu\Gamma(\nu+1)\xi^{-\nu-\frac{1}{2}}J_{\nu+\frac{3}{2}}(\xi)$
$\begin{cases}x^{\nu-1}, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$ $(\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}\,\nu}[{}_1F_1(\nu;\nu+1;-i\xi)-{}_1F_1(\nu;\nu+1;i\xi)]$
x^ne^{-ax} $(a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}n!\left(\frac{a}{a^2+\xi^2}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^mC_{n+1}^{2m+1}\left(\frac{\xi}{a}\right)^{2m+1}$

$f(x)$	$F_s(\xi)$
$\cos ax^2 \quad (a>0)$	$\frac{-1}{\sqrt{a}}\left[\cos\frac{\xi^2}{4a}S\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}\right)-\sin\frac{\xi^2}{4a}C\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]$
$\sin ax^2 \quad (a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\cos\frac{\xi^2}{4a}C\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}\right)+\sin\frac{\xi^2}{4a}S\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]$
$\begin{cases}0, & 0<x<a\\ \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, & x>a\end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}J_0(a\xi)$
$\frac{e^{-a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad (a>0)$	$\frac{2}{\sqrt{\xi}}\left\{\cos\frac{a^2}{4\xi}\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{a^2}{4\xi}\right)\right]+\sin\frac{a^2}{4\xi}\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{a^2}{4\xi}\right)\right]\right\}$
$\begin{cases}\ln x, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi}[\mathrm{Ci}(\xi)-\gamma-\ln\xi]$ （γ为欧拉常数）
$\ln\left(\frac{a^2+x^2+x}{a^2+x^2-x}\right)$	$2\sqrt{2\pi}\frac{1}{\xi}e^{-\xi\left(a^2-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\sin\frac{\xi}{2}$
$\frac{1}{x}\sin\frac{a^2}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}N_0(2a\sqrt{\xi})+K_0(2a\sqrt{\xi})$
$\frac{1}{x}\cos\frac{a^2}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}J_0(2a\sqrt{\xi})$

五、有限傅立叶余弦变换

[有限傅立叶余弦变换及其反演公式] 设 $f(x)$在区间$(0,a)$内满足狄利克莱条件(见本节，二)，那末$f(x)$的有限傅立叶余弦变换为

$$\overline{F}_c(n)=\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$$

有限傅立叶余弦变换的反演公式为：

在区间$(0,a)$内 $f(x)$ 的每一连续点处

$$f(x)=\frac{1}{a}\overline{F}_c(0)+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{F}_c(n)\cos\frac{n\pi x}{a}$$

在间断点，等式左端改为$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

[有限傅立叶余弦变换表]

$$\overline{F}_c(n)=\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx,\qquad f(x)=\frac{1}{a}\overline{F}_c(0)+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{F}_c(n)\cos\frac{n\pi x}{a}$$

$f(x)$	$\overline{F}_c(n)$
1	$\begin{cases}a, & n=0\\ 0, & n=1,2,\cdots\end{cases}$
$\begin{cases}0, & 0<x<\frac{a}{2}\\ -1, & \frac{a}{2}<x<a\end{cases}$	$\begin{cases}0, & n=0\\ \frac{2a}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, & n=1,2,\cdots\end{cases}$
x	$\begin{cases}\frac{1}{2}a^2, & n=0\\ \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2[(-1)^n-1], & n=1,2,\cdots\end{cases}$
x^2	$\begin{cases}\frac{1}{3}a^3, & n=0\\ \frac{2a^3}{(n\pi)^2}(-1)^n, & n=1,2,\cdots\end{cases}$
$\left(1-\frac{x}{a}\right)^2$	$\begin{cases}\frac{1}{3}a, & n=0\\ \frac{2a}{(n\pi)^2}, & n=1,2,\cdots\end{cases}$
x^3	$\begin{cases}\frac{a^4}{4}, & n=0\\ \frac{3a^4(-1)^n}{(n\pi)^2}+\frac{6a^4}{(n\pi)^4}[(-1)^n-1], & n=1,2,\cdots\end{cases}$
e^{kx}	$\frac{a^2k}{k^2a^2+n^2\pi^2}[(-1)^ne^{ka}-1]$
$\frac{\mathrm{ch}[c(a-x)]}{\mathrm{sh}ca}$	$\frac{a^2c}{a^2c^2+n^2\pi^2}$
$\sin kx$	$\frac{a^2k}{n^2\pi^2-a^2k^2}[(-1)^n\cos ka-1],\quad n\neq\frac{ka}{\pi}$
$\sin\frac{m\pi x}{a}$ (m是整数)	$\begin{cases}0, & n=m\\ \frac{ma}{\pi(n^2-m^2)}[(-1)^{n+m}-1], & n\neq m\end{cases}$

六、有限傅立叶正弦变换

[有限傅立叶正弦变换及其反演公式]

设 $f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 内满足狄利克莱条件(见本节，二)，那末 $f(x)$ 的有限傅立叶正弦变换为

$$\overline{F}_s(n)=\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

有限傅立叶正弦变换的反演公式为:

在区间 $[0,a]$ 上 $f(x)$ 的每一连续点处

$$f(x)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{F}_s(n)\sin\frac{n\pi x}{a}$$

在间断点，等号左端改为 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$。

[有限傅立叶正弦变换表]

$$\overline{F}_s(n)=\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx,\qquad f(x)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{F}_s(n)\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$f(x)$	$\overline{F}_s(n)$
1	$\frac{a}{n\pi}[1+(-1)^{n+1}]$
x	$(-1)^{n+1}\frac{a^2}{n\pi}$
$1-\frac{x}{a}$	$\frac{a}{n\pi}$
$\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\\ a-x, & \frac{a}{2}\leqslant x\leqslant a\end{cases}$	$\frac{2a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$
x^2	$\frac{a^3(-1)^{n-1}}{n\pi}-\frac{2a^3[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3}$
x^3	$(-1)^n\frac{a^4}{\pi^3}\left(\frac{6}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)$
$x(a^2-x^2)$	$(-1)^{n+1}\frac{6a^4}{n^3\pi^3}$
$x(a-x)$	$\frac{2a^3}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]$
e^{kx}	$\frac{n\pi a}{n^2\pi^2+k^2a^2}[1-(-1)^n e^{ka}]$
$\cos kx$	$\frac{n\pi a}{n^2\pi^2-k^2a^2}[1-(-1)^n\cos ka]$，$n\neq\frac{ka}{\pi}$

$f(x)$	$\overline{F}_s(n)$
$\cos\frac{m\pi x}{a}$　（m是整数）	$\begin{cases}\frac{na}{\pi(n^2-m^2)}[1-(-1)^{n+m}], & n\neq m\\ 0, & n=m\end{cases}$
$\sin\frac{m\pi x}{a}$　（m是整数）	$\begin{cases}0, & n\neq m\\ \frac{a}{2}, & n=m\end{cases}$

七、二重傅立叶变换及其反演公式

$f(x,y)$的二重傅立叶变换为

$$F(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{i(\xi x+\eta y)}dxdy$$

二重傅立叶变换的反演公式为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta)e^{-i(\xi x+\eta y)}d\xi d\eta$$

§5　快速傅立叶变换

一、有限离散傅立叶变换

［有限离散傅立叶变换的不同形式］

实(或复)序列 $f(kh)$	有限离散傅立叶变换及其反演公式 ($i=\sqrt{-1}$)	hd
$k=0,\pm1,\cdots,\pm N$ （N为正整数）	$\begin{cases}F(jd)=h\sum\limits_{k=-N}^{N}f(kh)e^{\frac{2\pi ijk}{2N+1}}\\ f(kh)=d\sum\limits_{j=-N}^{N}F(jd)e^{-\frac{2\pi ijk}{2N+1}}\end{cases}$	$\frac{1}{2N+1}$
$k=0,1,2,\cdots,N-1$ （N为正整数）	$\begin{cases}F(jd)=h\sum\limits_{k=0}^{N-1}f(kh)e^{\frac{2\pi ijk}{N}}\\ f(kh)=d\sum\limits_{j=0}^{N-1}F(jd)e^{-\frac{2\pi ijk}{N}}\end{cases}$	$\frac{1}{N}$

实(或复)序列 $f(kh)$	有限离散傅立叶变换及其反演公式 $(i=\sqrt{-1})$	hd
$m<k\leqslant m+N$ (k, N为整数)	$\begin{cases} F(jd)=h\sum\limits_{m<k\leqslant m+N} f(kh)e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \\ f(kh)=d\sum\limits_{m<j\leqslant m+N} F(jd)e^{-\frac{2\pi ijk}{N}} \end{cases}$	$\frac{1}{N}$

[褶积及其性质] 设 $f(kh)$ $(k=0,1,2,\cdots,N-1)$ 为实(或复)序列, $g(kh)$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 为具有周期 Nh 的序列, 称

$$f(nh)*g(nh)=h\sum_{k=0}^{N-1}f(kh)\,g[(n-k)h]$$

为序列 f 和 g 的褶积. 设

$$F(jd)=h\sum_{k=0}^{N-1}f(kh)\,e^{\frac{2\pi ijk}{N}}$$

$$G(jd)=h\sum_{k=0}^{N-1}g(kh)\,e^{\frac{2\pi ijk}{N}}\qquad\left(hd=\frac{1}{N}\right)$$

那末

$$F(jd)G(jd)=h\sum_{k=0}^{N-1}[f(kh)*g(kh)]\,e^{\frac{2\pi ijk}{N}}$$

$$f(kh)*g(kh)=d\sum_{j=0}^{N-1}F(jd)G(jd)e^{-\frac{2\pi ijk}{N}}$$

二、快速傅立叶变换算法

快速傅立叶变换算法 (简称 FFT 算法) 是计算有限离散傅立叶变换的快速方法.

[复序列的 FFT 算法] 计算复序列 $\{z_k\}$ $(k=0,1,\cdots N-1)$ 的有限离散傅立叶变换 $\left(hd=\frac{1}{N}\right)$, 就是计算形如

$$w_j=\sum_{k=0}^{N-1}z_k e^{\frac{2\pi ijk}{N}},\quad i=\sqrt{-1},\quad 0\leqslant j\leqslant N-1$$

的有限项和. 对于反演公式, 计算的方法类似.

设 $N=2^m$, $E_N=e^{\frac{2\pi i}{N}}$, 那末

$$E_N^k = E_N^l,\quad k \equiv l \pmod{N},\quad E_N^N = 1$$

又设
$$k = (k_{m-1}\cdots k_1k_0) = k_{m-1}2^{m-1} + \cdots + k_1 2 + k_0$$
$$j = (j_{m-1}\cdots j_1j_0) = j_{m-1}2^{m-1} + \cdots + j_1 2 + j_0$$

分别是 k 和 j 的二进制表示，k_ν，j_ν 取值为 0 或 1，$\nu = 0, 1, \cdots, m-1$，那末

$$w_{(j_{m-1}\cdots j_1j_0)} = \sum_{k_0}\sum_{k_1}\cdots\sum_{k_{m-1}} z_{(k_{m-1}\cdots k_1k_0)} E_N^{(k_{m-1}\cdots k_1k_0)(j_{m-1}\cdots j_1j_0)}$$

因为
$$E_N^{(k_{m-1}\cdots k_1k_0)(j_{m-1}\cdots j_1j_0)}$$
$$= E_N^{(k_{m-1}2^{m-1}+\cdots+k_12+k_0)(j_{m-1}2^{m-1}+\cdots+j_12+j_0)}$$
$$= E_N^{k_{m-1}j_02^{m-1}} \cdot E_N^{k_{m-2}(j_12+j_0)2^{m-2}} \cdot \cdots$$
$$\cdot E_N^{k_0(j_{m-1}2^{m-1}+\cdots+j_12+j_0)}$$
$$= E_N^{k_{m-1}(j_00\cdots0)} \cdot E_N^{k_{m-2}(j_1j_00\cdots0)} \cdot\cdots\cdots E_N^{k_0(j_{m-1}\cdots j_1j_0)}$$

所以
$$w_{(j_{m-1}\cdots j_1j_0)}$$
$$= \sum_{k_0}\left\{\sum_{k_1}\cdots\sum_{k_{m-2}}\left[\sum_{k_{m-1}} z_{(k_{m-1}\cdots k_1k_0)} E_N^{k_{m-1}(j_00\cdots0)}\right]\right.$$
$$\left. E_N^{k_{m-2}(j_1j_00\cdots0)}\cdots E_N^{k_1(j_{m-2}\cdots j_1j_00)}\right\} E_N^{k_0(j_{m-1}\cdots j_1j_0)}$$

从而得出递推公式：
$$z^{(0)}_{(k_{m-1}\cdots k_1k_0)} = z_{(k_{m-1}\cdots k_1k_0)}$$
$$z^{(1)}_{(j_0k_{m-2}\cdots k_1k_0)} = \sum_{k_{m-1}} z^{(0)}_{(k_{m-1}\cdots k_1k_0)} E_N^{k_{m-1}(j_00\cdots0)}$$
$$z^{(2)}_{(j_0j_1k_{m-3}\cdots k_1k_0)} = \sum_{k_{m-2}} z^{(1)}_{(j_0k_{m-2}\cdots k_1k_0)} E_N^{k_{m-2}(j_1j_00\cdots0)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z^{(l)}_{(j_0j_1\cdots j_{l-1}k_{m-l-1}\cdots k_1k_0)}$$
$$= \sum_{k_{m-l}} z^{(l-1)}_{(j_0j_1\cdots j_{l-2}k_{m-l}\cdots k_1k_0)} E_N^{k_{m-l}(j_{l-1}\cdots j_00\cdots0)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z^{(m)}_{(j_0j_1\cdots j_{m-1})} = \sum_{k_0} z^{(m-1)}_{(j_0j_1\cdots j_{m-2}k_0)} E_N^{k_0(j_{m-1}\cdots j_1j_0)}$$

最后有
$$w_{(j_{m-1}\cdots j_1j_0)} = z^{(m)}_{(j_0j_1\cdots j_{m-1})}$$

［实序列的 FFT 算法］ 设有 $2N$ ($N = 2^m$) 个元素构成的实序列 $\{\eta_k\}$

$(k=0,1,2,\cdots,2N-1)$要计算$\{\eta_k\}$的有限离散傅立叶余弦变换和正弦变换

$$c_j=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1}\eta_k\cos\frac{\pi jk}{N}\qquad(j=0,1,\cdots,2N-1)$$

$$s_j=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1}\eta_k\sin\frac{\pi jk}{N}\qquad(j=0,1,\cdots,2N-1)$$

可先用 FFT 算法关于复序列

$$z_k=x_k+iy_k\qquad(x_k=\eta_{2k},\quad y_k=\eta_{2k+1})$$

计算

$$w_j=u_j+iv_j=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}z_k e^{-\frac{2\pi ijk}{N}}$$

而c_j,s_j用下列公式去求

$$\begin{cases}c_0=u_0+v_0\\ c_j=\dfrac{1}{2}\left[(u_j+u_{N-j})-(u_j-u_{N-j})\sin\dfrac{\pi j}{N}+(v_j+v_{N-j})\cos\dfrac{\pi j}{N}\right]\\ c_{N-j}=\dfrac{1}{2}\left[(u_j+u_{N-j})+(u_j-u_{N-j})\sin\dfrac{\pi j}{N}-(v_j+v_{N-j})\cos\dfrac{\pi j}{N}\right]\\ s_j=\dfrac{1}{2}\left[-(v_j-v_{N-j})+(u_j-u_{N-j})\cos\dfrac{\pi j}{N}+(v_j+v_{N-j})\sin\dfrac{\pi j}{N}\right]\\ s_{N-j}=\dfrac{1}{2}\left[(v_j-v_{N-j})+(u_j-u_{N-j})\cos\dfrac{\pi j}{N}+(v_j+v_{N-j})\sin\dfrac{\pi j}{N}\right]\end{cases}$$

$$\left(j=1,2,\cdots,\frac{N}{2}\right)$$

至于c_j,s_j当$j=N,N+1,\cdots,2N-1$的数值是

$$\begin{cases}c_N=u_N-v_N\\ s_N=0\\ c_{2N-j}=c_j & (j=1,2,\cdots,N-1)\\ s_{2N-j}=-s_j & (j=1,2,\cdots,N-1)\end{cases}$$

§6 梅林变换

[梅林变换及其反演公式] $f(x)$的梅林变换为

$$M(z)=\int_0^\infty f(x)x^{z-1}dx$$

梅林变换的反演公式为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}M(z)x^{-z}dz$$

[梅林变换的重要公式表]

原来函数		梅林变换后的函数
$f(ax)$	$(a>0)$	$a^{-z}M(z)$
$x^{a}f(x)$		$M(z+a)$
$f(x^{p})$	$(p>0)$	$p^{-1}M\left(\frac{z}{p}\right)$
$f(x^{-p})$	$(p>0)$	$p^{-1}M\left(-\frac{z}{p}\right)$
$x^{\nu}f(ax^{p})$	$(a,p>0)$	$p^{-1}a^{-\frac{(z+\nu)}{p}}M\left(\frac{z+\nu}{p}\right)$
$x^{\nu}f(ax^{-p})$	$(a,p>0)$	$p^{-1}a^{\frac{z+\nu}{p}}M\left(-\frac{z+\nu}{p}\right)$
$f(x)\ln^{n}x$		$M^{(n)}(z)$
$f^{(n)}(x)$		$(-1)^{n}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)}M(z-n)$
$f^{(n)}(x)$，当$\lim_{x\to 0}x^{z-k-1}f^{(k)}(x)=0$	$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$	$\frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(1-z)}M(z-n)$
$\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n}f(x)$		$(-z)^{n}M(z)$
$\left(\frac{d}{dx}x\right)^{n}f(x)$		$(1-z)^{n}M(z)$
$\left(x^{1-a}\frac{d}{dx}\right)^{n}f(x)$	$(a\neq 0)$	$\frac{(-a)^{n}\Gamma\left(\frac{z}{a}\right)}{\Gamma\left(-n+\frac{z}{a}\right)}M(z-na)$
$f_1(x)f_2(x)$		$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}M_1(s)M_2(z-s)\,ds$
$\int_0^x f(t)\,dt$		$-z^{-1}M(z+1)$
$\int_x^{\infty}f(t)\,dt$		$z^{-1}M(z+1)$

［梅 林 变 换 表］

$$M(z)=\int_0^\infty f(x)x^{z-1}dx,\quad f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}M(z)x^{-z}dz$$

$f(x)$	$M(z)$
$\begin{cases}1, & x<a\\ 0, & x>a\end{cases}$	$\dfrac{a^z}{z}$ $\quad(\mathrm{Re}\,z>0)$
$\begin{cases}0, & x<a\\ -1, & x>a\end{cases}$	$\dfrac{a^z}{z}$ $\quad(\mathrm{Re}\,z<0)$
$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{a}\right)^\nu, & x<a\\ 0, & x>a\end{cases}$	$\dfrac{a^z}{\nu+z}$ $\quad(\mathrm{Re}\,z>-\mathrm{Re}\,\nu)$
$\begin{cases}0, & x<a\\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^\nu, & x>a\end{cases}$	$-\dfrac{a^z}{\nu+z}$ $\quad(\mathrm{Re}\,z<-\mathrm{Re}\,\nu)$
$\begin{cases}x, & x<a\\ b-x, & a<x<b\\ 0, & x>b\end{cases}$	$\begin{cases}\dfrac{2a^{z+1}-b^{z+1}}{z+1}+\dfrac{b}{z}(b^z-a^z) & (z\neq0,\ \mathrm{Re}z>-1)\\ 2a-b+b\ln\dfrac{b}{a} & (z=0)\end{cases}$
$\dfrac{1}{a+x}$ $\quad(a>0)$	$\pi a^{z-1}\csc\pi z$ $\quad(0<\mathrm{Re}\,z<1)$
$\dfrac{1}{(a+x)^n}$ $\quad(n=2,3,4,\cdots)$	$\dfrac{(-1)^{n+1}\pi(z-1)(z-2)\cdots(z-n+1)}{(n-1)!}a^{z-n}\csc\pi z$ $\quad(0<\mathrm{Re}\,z<n)$
$\dfrac{1}{a-x}$ $\quad(a>0)$	$\pi a^{z-1}\mathrm{ctg}\,\pi z$ $\quad(0<\mathrm{Re}\,z<1)$ （积分在主值意义下）
$\dfrac{1}{(a+x)(b-x)}$ $\quad(\lvert\arg a\rvert<\pi,\ b>0)$	$\dfrac{\pi}{a+b}(a^{z-1}\csc\pi z+b^{z-1}\mathrm{ctg}\,\pi z)$ $\quad(0<\mathrm{Re}\,z<2)$ （积分在主值意义下）
$\dfrac{1}{(a-x)(b-x)}$ $\quad(a>b>0)$	$\dfrac{\pi}{b-a}(a^{z-1}-b^{z-1})\,\mathrm{ctg}\,\pi z$ $\quad(0<\mathrm{Re}\,z<2)$ （积分在主值意义下）
$\dfrac{1}{(b+ax)^\nu}$ $\quad(\mathrm{Re}\,\nu>0)$	$\left(\dfrac{b}{a}\right)^z\dfrac{\mathrm{B}(z,\nu-z)}{b^\nu}$ $\quad(0<\mathrm{Re}\,z<\mathrm{Re}\,\nu)$
$\begin{cases}(a-x)^\nu, & x<a\\ 0, & x>a\end{cases}$ $\quad(\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$a^{\nu+z}\mathrm{B}(\nu+1,z)$ $\quad(\mathrm{Re}\,z>0)$

$f(x)$	$M(z)$
$\begin{cases} 0, & x<a \\ (x-a)^{\nu}, & x>a \end{cases}$ $(\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$a^{\nu+z}\mathrm{B}(-\nu-z,\nu+1)$ $(\mathrm{Re}\,z<-\mathrm{Re}\,\nu)$
e^{-ax} $(a>0)$	$\dfrac{\Gamma(z)}{a^z}$ $(\mathrm{Re}\,z>0)$
$\begin{cases} \ln x, & x<a \\ 0, & x>a \end{cases}$	$\dfrac{a^z}{z}\left(\ln a-\dfrac{1}{z}\right)$ $(\mathrm{Re}\,z>0)$
$\begin{cases} 0, & x<a \\ \ln\dfrac{x}{a}, & x>a \end{cases}$	$\dfrac{a^z}{z^2}$ $(\mathrm{Re}\,z<0)$
$\dfrac{\ln x}{x+a}$ $(a>0)$	$\pi a^{z-1}\csc\pi z\,(\ln a-\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi z)$ $(0<\mathrm{Re}\,z<1)$
$\dfrac{\ln(1+x)}{x}$	$\dfrac{\pi\csc\pi z}{1-z}$ $(0<\mathrm{Re}\,z<1)$
$\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$	$\dfrac{\pi}{z}a^z\csc\pi z$ $(0<\mathrm{Re}\,z<1)$
$\ln(1+ax)$	$\dfrac{\pi}{za^z}\csc\pi z$ $(-1<\mathrm{Re}\,z<0)$
$\ln\lvert 1-ax\rvert$	$\dfrac{\pi}{za^z}\mathrm{ctg}\,\pi z$ $(-1<\mathrm{Re}\,z<0)$
$\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\dfrac{\pi}{z}\mathrm{tg}\dfrac{\pi z}{2}$ $(-1<\mathrm{Re}\,z<1)$
$\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{b-x}\right\rvert$	$\dfrac{\pi}{z}\csc\pi z(a^z-b^z\cos\pi z)$ $(0<\mathrm{Re}\,z<1)$
$\sin ax$ $(a>0)$	$\dfrac{\Gamma(z)}{a^z}\sin\dfrac{\pi z}{2}$ $(-1<\mathrm{Re}\,z<1)$
$\cos ax$ $(a>0)$	$\dfrac{\Gamma(z)}{a^z}\cos\dfrac{\pi z}{2}$ $(0<\mathrm{Re}\,z<1)$
$\dfrac{\sin ax}{e^{bx}}$ $(\mathrm{Re}\,b>\lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$	$\dfrac{\Gamma(z)}{(a^2+b^2)^{\frac{z}{2}}}\sin\left(z\,\mathrm{arc\,tg}\dfrac{a}{b}\right)$ $(\mathrm{Re}\,z>-1)$
$\dfrac{\cos ax}{e^{bx}}$ $(\mathrm{Re}\,b>\lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$	$\dfrac{\Gamma(z)}{(a^2+b^2)^{\frac{z}{2}}}\cos\left(z\,\mathrm{arc\,tg}\dfrac{a}{b}\right)$
$\begin{cases} \sin(a\ln x), & x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$	$-\dfrac{a}{a^2+z^2}$ $(\mathrm{Re}\,z>\lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$
$\dfrac{\sin(a\ln x)}{e^x}$	$\lvert\Gamma(z+ia)\rvert\sin[\arg\Gamma(z+ia)]$ $(\mathrm{Re}\,z>\lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$

$f(x)$	$M(z)$
$\begin{cases}\cos(\alpha\ln x), & x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$	$\dfrac{z}{\alpha^2+z^2}$　　(Re $z>\lvert\mathrm{Im}\,\alpha\rvert$)
$\dfrac{\cos(\alpha\ln x)}{e^x}$	$\lvert\Gamma(z+i\alpha)\rvert\cos[\arg\Gamma(z+i\alpha)]$　　(Re $z>\lvert\mathrm{Im}\,\alpha\rvert$)
$\begin{cases}\arcsin\dfrac{x}{a}, & x<a\\ 0, & x>a\end{cases}$	$\dfrac{\pi a^z}{2z}\left[1-\dfrac{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)}\right]$　　(Re $z>-1$)
$\begin{cases}\arccos\dfrac{x}{a}, & x<a\\ 0, & x>a\end{cases}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}\,a^z}{2z}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)}$　　(Re $z>-1$)
$\mathrm{arc\,tg}\,ax$	$-\dfrac{\pi}{2za^z}\sec\dfrac{\pi z}{2}$　　($-1<$ Re $z<0$)
$\mathrm{arc\,ctg}\,ax$	$\dfrac{\pi}{2za^z}\sec\dfrac{\pi z}{2}$　　($0<$ Re $z<1$)

§7　汉克尔变换

[汉克尔变换及其反演公式]

$f(x)$的 ν 阶汉克尔变换为

$$H(\xi)=\int_0^\infty xf(x)J_\nu(\xi x)\,dx$$

ν 阶汉克尔变换的反演公式为

$$f(x)=\int_0^\infty \xi H(\xi)J_\nu(\xi x)\,d\xi$$

式中 $J_\nu(x)$是贝塞耳函数.

[汉克尔变换表]

$f(x)$	ν	$H(\xi)$
$\begin{cases}x^\nu, & 0<x<a\\ 0, & x>a\end{cases}$	>-1	$\dfrac{a^{\nu+1}}{\xi}J_{\nu+1}(\xi a)$
$\begin{cases}1, & 0<x<a\\ 0, & x>a\end{cases}$	0	$\dfrac{a}{\xi}J_1(a\xi)$

$f(x)$	ν	$H(\xi)$
$\begin{cases} a^2-x^2, & 0<x<a \\ 0, & x>a \end{cases}$	0	$\frac{4a}{\xi^3}J_1(\xi a)-\frac{2a^2}{\xi^2}J_0(\xi a)$
$x^\nu e^{-px^2}$	>-1	$\frac{\xi^\nu}{(2p)^{\nu+1}}e^{-\frac{\xi^2}{4p}}$
$x^{\mu-1}$	>-1	$\frac{2^\mu\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)}{\xi^{\mu+1}\Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right)}$
$\frac{e^{-px}}{x}$	0	$\frac{1}{\sqrt{\xi^2+p^2}}$
e^{-px}	0	$\frac{p}{\sqrt{(\xi^2+p^2)^3}}$
$\frac{e^{-px}}{x^2}$	1	$\frac{\sqrt{\xi^2+p^2}-p}{\xi}$
$\frac{e^{-px}}{x}$	1	$\frac{1}{\xi}-\frac{p}{\xi\sqrt{\xi^2+p^2}}$
e^{-px}	1	$\frac{\xi}{\sqrt{(\xi^2+p^2)^3}}$
$\frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}$	0	$e^{-a\xi}$
$\frac{\sin ax}{x}$	0	$\begin{cases} 0, & \xi>a \\ \frac{1}{\sqrt{a^2-\xi^2}}, & 0<\xi<a \end{cases}$
$\frac{\sin ax}{x}$	1	$\begin{cases} \frac{a}{\xi\sqrt{\xi^2-a^2}}, & \xi>a \\ 0, & \xi<a \end{cases}$
$\frac{\sin x}{x^2}$	0	$\begin{cases} \arcsin\frac{1}{\xi}, & \xi>1 \\ \frac{\pi}{2}, & \xi<1 \end{cases}$

[有限汉克尔变换及其反演公式]

$f(x)$的有限汉克尔变换为

$$\overline{H}(p_i)=\int_0^a xf(x)J_\nu(p_ix)dx$$

式中 p_i 是方程 $J_\nu(ap_i)=0$ 的一个根.

有限汉克尔变换的反演公式为

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_i \overline{H}(p_i)\frac{J_\nu(p_i x)}{[J'_\nu(ap_i)]^2}$$

式中$\sum_i$是对方程 $J_\nu(ap_i)=0$ 的所有正根求和.

[有限汉克尔变换表]

$$\overline{H}(p_i)=\int_0^a xf(x)J_\nu(px_i)dx$$

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_i \overline{H}(p_i)\frac{J_\nu(p_i x)}{[J'_\nu(ap_i)]^2}$$

式中$\sum_i$是对方程 $J_\nu(ap_i)=0$ 的一切正根求和.

$f(x)$	ν	$\overline{H}(p_i)$
x^ν	>-1	$\frac{a^{\nu+1}}{p_i}J_{\nu+1}\quad(ap_i)$
c	0	$\frac{ac}{p_i}J_1\quad(ap_i)$
a^2-x^2	0	$\frac{4a}{p_i^3}J_1\quad(ap_i)$
$\frac{J_\nu(\beta x)}{J_\nu(\beta a)}$	>-1	$\frac{ap_i}{\beta^2-p_i^2}J'_\nu\quad(ap_i)$
$\frac{J_0(\beta x)}{J_0(\beta a)}$	0	$\frac{ap_i}{\beta^2-p_i^2}J_1\quad(ap_i)$

§8 勒让德变换及其反演公式

$f(x)$的勒让德变换为

$$G(n)=\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx\qquad(n=1,2,\cdots)$$

勒让德变换的反演公式为

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)G(n)P_n(x)$$

式中 $P_n(x)$是勒让德多项式.

第十二章　特殊函数

特殊函数一般是指某类微分方程的解又不能用初等函数的有限形式表示的函数．但是这类函数在应用中是常见的，比如勒让德函数，贝塞耳函数及许多正交多项式等；另外一些是由特定形式的积分所定义的函数，如Γ-函数，B-函数．还有从函数的周期性的角度来考虑的所谓椭圆函数，这类函数与微分方程无关．本章除了介绍这些函数的概念外，还给出关于函数的一些积分，级数和无穷乘积等表达式、渐近形式、函数之间的关系以及它们的常用性质．

本章引用如下符号

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},\quad (\alpha)_0=1$$

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{n!\,\Gamma(1+\alpha-n)}=\frac{(-1)^n\Gamma(n-\alpha)}{n!\,\Gamma(-\alpha)}$$

式中 n 为正整数，α 为任意数．

§1　由积分定义的特殊函数

一、伽马函数（Γ-函数）

［Γ-函数的定义与其他表达式］

1°　$\Gamma(z)=\int_0^\infty u^{z-1}e^{-u}du\qquad(\mathrm{Re}\,z>0)$

右边称为第二类欧拉积分．

2°　$\dfrac{1}{\Gamma(z)}=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0^+}e^t t^{-z}dt\qquad(|\arg t|<\pi)$

积分路线从负实轴上无穷远处（$t=-\infty$）出发，正向绕原点一周，再回到出发点(图 12.1)

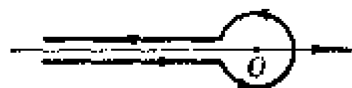


图　12.1

$\Gamma(z)$是 z 的半纯函数，在 $z=-n$（$n=0,1,2,\cdots$）具有单极点，相应的留数为$\dfrac{(-1)^n}{n!}$．

3°　$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^z}{1+\frac{z}{k}}\qquad(z\neq-n)$$

4° $\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right]$

式中 $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n\right\}=0.5772156649015328606065 1\cdots$ 称为欧拉常数.

[Γ-函数有关公式]

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\quad(\mathrm{Re}\,z>0)$$

$$\Gamma(n+1)=n!\quad(n\text{ 为正整数})$$

特别
$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\qquad(\text{余元公式})$$

特别
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=\frac{-\pi}{z\sin\pi z}$$

$$\Gamma(n+z)\Gamma(n-z)=\frac{\pi z}{\sin\pi z}\,[(n-1)!]^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\cos\pi z}\prod_{k=1}^{n}\left[1-\frac{4z^2}{(2k-1)^2}\right]\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$\Gamma(nz)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(1-n)}n^{nz-\frac{1}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

(乘法公式)

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\qquad(\text{倍元公式})$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\frac{2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^z\Gamma(n)}{\Gamma(n+z)}=1\qquad(\operatorname{Re} z>0)$$

[Γ-函数的渐近表达式]

1° 斯特林公式

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\left[1+\frac{z^{-1}}{12}+\frac{z^{-2}}{288}-\frac{139z^{-3}}{51840}-\frac{571z^{-4}}{2488320}\right.$$
$$\left.+\frac{163879z^{-5}}{209018880}+\frac{5246819z^{-6}}{75246796800}-\frac{534703531z^{-7}}{902961561600}+\cdots\right]$$
$$(|\arg z|<\pi,\ |z|\to\infty)$$

当 $z=x$ 为正实数时，

(i) $\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}[1+r(x)]$

式中 $|r(x)|\leqslant e^{\frac{1}{12x}}-1$

(ii) $n!\approx\sqrt{2\pi}\;n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\qquad(n\to\infty)$

2° $$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{2k}}{2k(2k-1)}z^{-2k+1}$$
$$(|\arg z|<\pi,\ |z|\to\infty)$$

式中 b_{2k} 为伯努利数(§7).

[可化为Γ-函数的积分]

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t}dt=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1}t^{\lambda-1}dt=\lambda^{-z}\Gamma(z)\qquad(\lambda>0)$$

$$\int_0^\infty t^{2z-1}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\Gamma(z)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\qquad(n>-1)$$

$$\int_0^\infty e^{-t}(t-z)t^{z-1}\ln t\,dt=\Gamma(z)\qquad(\operatorname{Re} z>0)$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{zt-e^t}dt=\Gamma(z)$$

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)dt=\lambda^{-z}\Gamma(z)\cos(\alpha z)$$

$$\left(\operatorname{Re} z > -1,\ \lambda > 0,\ |\alpha| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-\lambda t\cos\alpha} \sin(\lambda t \sin\alpha)dt = \lambda^{-z}\Gamma(z)\sin(\alpha z)$$

$$\left(\operatorname{Re} z > -1,\ \lambda > 0,\ |\alpha| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-at} \sin bt\, dt = \frac{\sin\left(z \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{z}{2}}}\Gamma(z)$$

$$(\operatorname{Re} z > -1,\ \operatorname{Re} a > |\operatorname{Im} b|)$$

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-at} \cos bt\, dt = \frac{\cos\left(z \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{z}{2}}}\Gamma(z)$$

$$(\operatorname{Re} z > -1,\ \operatorname{Re} a > |\operatorname{Im} b|)$$

$$\int_0^\infty t^{x-1} \cos t\, dt = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Gamma(x) \quad (x>0)$$

$$\int_0^\infty t^{x-1} \sin t\, dt = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Gamma(x) \quad (x>0)$$

二、贝塔函数 (B-函数)

[B-函数的定义与其他表达式]

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} du \quad (\operatorname{Re} p>0,\ \operatorname{Re} q>0)$$

右边称为第一类欧拉积分.

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{q(q-1)\cdots(q-k)}{k!(p+k)} \quad (q>0)$$

$$\mathrm{B}(p,q) = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{k(p+q+k)}{(p+k)(q+k)} \quad (p,q\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots)$$

[B-函数有关公式]

$$\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\mathrm{B}(p,q)\mathrm{B}(p+q,r) = \mathrm{B}(q,r)\mathrm{B}(q+r,p) = \mathrm{B}(r,p)\mathrm{B}(r+p,q)$$

$$\frac{p+q}{q}\mathrm{B}(p,\ q+1) = \frac{p+q}{p}\mathrm{B}(p+1,q) = \mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(p+1,q) + \mathrm{B}(p,q+1)$$

$$\mathrm{B}(p,\ p)=2^{1-2p}\,\mathrm{B}\left(p,\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{B}(p,\ p)\,\mathrm{B}\left(p+\frac{1}{2},\ p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{p}2^{1-4p}$$

$$\frac{1}{\mathrm{B}(n,\ m)}=m\binom{n+m-1}{n-1}=n\binom{n+m-1}{m-1}\quad (m,\ n\text{ 为正整数})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{B}(p,q+k)=\mathrm{B}(p-1,q)$$

[可化为 B-函数的积分]

$$\int_a^b (t-a)^{p-1}(b-t)^{q-1}dt=(b-a)^{p+q-1}\mathrm{B}(p,q)$$

$$(b>a,\ \mathrm{Re}\,p>0,\ \mathrm{Re}\,q>0)$$

$$\int_0^1 t^{\nu-1}(1-t^{\lambda})^{\beta-1}dt=\frac{1}{\lambda}\mathrm{B}\left(\frac{\nu}{\lambda},\ \beta\right)$$

$$(\mathrm{Re}\,\nu>0,\ \mathrm{Re}\,\beta>0,\ \lambda>0)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{m-1}}{(1+bt^a)^{m+n}}dt=a^{-1}b^{-\frac{m}{a}}\mathrm{B}\left(\frac{m}{a},\ m+n-\frac{m}{a}\right)$$

$$(a,\ b>0)$$

$$\int_0^1[(1+t)^{p-1}(1-t)^{q-1}+(1+t)^{q-1}(1-t)^{p-1}]dt=2^{p+q-1}\mathrm{B}(p,q)$$

$$(\mathrm{Re}\,p>0,\ \mathrm{Re}\,q>0)$$

$$\int_a^b\frac{(t-a)^{p-1}(b-t)^{q-1}}{(t-c)^{p+q}}dt=(b-a)^{p+q-1}(b-c)^{-p}(a-c)^{-q}\mathrm{B}(p,q)$$

$$(\mathrm{Re}\,p>0,\ \mathrm{Re}\,q>0,\ c<a<b)$$

$$\int_{-1}^1\frac{(1+t)^{2p-1}(1-t)^{2q-1}}{(1+t^2)^{p+q}}dt=2^{p+q-2}\mathrm{B}(p,q)\quad(\mathrm{Re}\,p>0,\mathrm{Re}\,q>0)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t)^{2m-1}(\cos t)^{2n-1}}{(a\cos^2 t+b\sin^2 t)^{m+n}}dt=\frac{\mathrm{B}(m,n)}{2a^n b^m}\qquad(\mathrm{Re}\,m>0,\ \mathrm{Re}\,n>0)$$

$$\int_0^1\frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\int_1^{\infty}\frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\mathrm{B}(p,q)\qquad(\mathrm{Re}\,p>0,\ \mathrm{Re}\,q>0)$$

$$\int_0^1(1-t^2)^{p-1}dt=2^{2p-2}\mathrm{B}(p,p)\qquad(\mathrm{Re}\,p>0)$$

$$\int_0^{\infty}e^{-pt}(1-e^{-zt})^{q-1}dt=\frac{1}{z}\mathrm{B}\left(\frac{p}{z},q\right)\qquad\left(\mathrm{Re}\frac{p}{z}>0,\mathrm{Re}\,z>0,\ \mathrm{Re}\,q>0\right)$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{ch}\,t(\mathrm{sh}\,t)^{2p-1}(1+b\,\mathrm{sh}^2 t)^{-p-q}dt=\frac{1}{2}b^{-p}\mathrm{B}(p,q)\,(b>0,\mathrm{Re}\,p>0,\mathrm{Re}\,q>0)$$

$$\int_0^\infty (\operatorname{sh} t)^\alpha (\operatorname{ch} t)^{-\beta} dt = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) (\mathrm{Re}\alpha > -1, \mathrm{Re}(\alpha-\beta) < 0)$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(2\alpha t)}{[\operatorname{ch}(\rho t)]^{2\beta}} dt = 4^{\beta-1} \rho^{-1} \mathrm{B}\left(\beta+\frac{\alpha}{\rho},\ \beta-\frac{\alpha}{\rho}\right) \left(\mathrm{Re}\left(\beta \pm \frac{\alpha}{\rho}\right) > 0, \rho > 0\right)$$

三、普西函数（ψ-函数）

［ψ-函数的定义与其他表述式］

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}[\ln \Gamma(z)] = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \ln n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{z+k} \right\}$$

$$\psi(z) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{te^t} - \frac{1}{(1-e^{-t})e^{tz}}\right] dt \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$

（高斯积分公式）

$$\psi(z) = \int_0^\infty [e^{-t} - (1+t)^{-z}] t^{-1} dt \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$

（狄利克莱公式）

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t} dt \\
&= -\gamma + \int_0^\infty [(1+t)^{-1} - (1+t)^{-z}] t^{-1} dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{-1}{\ln t} - \frac{t^{z-1}}{1-t}\right] dt \\
&= \ln z - \frac{1}{2z} - 2\int_0^\infty [(t^2+z^2)(e^{2\pi t}-1)]^{-1} t\, dt \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= -\gamma - \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= -\gamma - \frac{1}{z} + z\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(z+k)} \\
&= \ln z - \sum_{k=0}^\infty \left[\frac{1}{z+k} - \ln\left(1+\frac{1}{z+k}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\frac{d^n}{dz^n} \psi(z) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(z+k)^{n+1}}$$

式中 γ 为欧拉常数。

[ψ-函数有关公式]

$$\psi(z+n)=\psi(z)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$\psi(z-n)=\psi(z)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-k}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$\lim_{n\to\infty}[\psi(z+n)-\ln n]=0$$

$$\psi(nz)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi\left(z+\frac{k}{n}\right)+\ln n\qquad(n=2,3,\cdots)$$

$$\psi(z)-\psi(1-z)=-\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$$

$$\psi(z)-\psi(-z)=-\pi\operatorname{ctg}(\pi z)-\frac{1}{z}$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}+z\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-z\right)=\pi\operatorname{tg}(\pi z)$$

$$\psi\left(\frac{3}{4}-n\right)-\psi\left(\frac{1}{4}+n\right)=\pi\qquad(n=1,2,\cdots)$$

[ψ-函数的特殊值]

$\psi(1)=-\gamma$（γ 为欧拉常数）

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2$$

$$\psi(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\gamma$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\pm n\right)=-\gamma+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-2\ln 2\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)=-\gamma-\ln n-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2km\pi}{n}\ln\left(2\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\psi'(n)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2},\quad\psi'(-n)=\infty\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2},\quad\psi'\left(\frac{1}{2}\pm n\right)=\frac{\pi^2}{2}\mp4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

[ψ-函数的渐近表达式]

$$\psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{2k}z^{-2k}}{2k}+O\qquad(z^{-2n-2})$$

$$=\ln(z-1)+\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{12(z-1)^2}+\frac{1}{120(z-1)^4}-\cdots\quad(|z|\to\infty)$$

式中 b_{2k} 为伯努利数(§7).

四、菲涅耳函数

[菲涅耳函数的定义与其他表达式]

$$S(z)=\int_0^z\sin\frac{\pi t^2}{2}dt$$

$$C(z)=\int_0^z\cos\frac{\pi t^2}{2}dt$$

它们都是 z 的整函数.

$$S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}\frac{z^{4k+3}}{4k+3}\qquad(|z|<\infty)$$

$$C(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\frac{z^{4k+1}}{4k+1}\qquad(|z|<\infty)$$

$$S(z)=z\left[\alpha(z)\sin\frac{\pi z^2}{2}-\beta(z)\cos\frac{\pi z^2}{2}\right]\qquad(|z|<\infty)$$

$$C(z)=z\left[\alpha(z)\cos\frac{\pi z^2}{2}+\beta(z)\sin\frac{\pi z^2}{2}\right]\qquad(|z|<\infty)$$

式中 $\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi z^2)^{2k}}{(4k+1)!!}$

$$\beta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi z^2)^{2k+1}}{(4k+3)!!}$$

$$C(z)\pm iS(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\mp\frac{i\pi}{2}}\,z\right)}{\sqrt{\mp\frac{i\pi}{2}}}\qquad(\operatorname{erf}(z)\text{为概率积分})$$

[菲涅耳函数的渐近表达式]

$$S(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi z}\left[A(z)\cos\frac{\pi z^2}{2}+B(z)\sin\frac{\pi z^2}{2}\right]$$

$$\left(|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{4}-\delta,\ \delta>0,\ |z|\to\infty\right)$$

$$C(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi z}\left[B(z)\cos\frac{\pi z^2}{2}-A(z)\sin\frac{\pi z^2}{2}\right]$$

式中

$$A(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(4k-1)!!}{(\pi z^2)^{2k}}+O(z^{-4n-4})$$

$$B(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(4k+1)!!}{(\pi z^2)^{2k+1}}+O(z^{-4n-6})$$

特别

$$\lim_{x\to+\infty}S(x)=\lim_{x\to+\infty}C(x)=\frac{1}{2}$$

五、概率积分(误差函数)

[概率积分的定义与级数表达式]

1° 概率积分(或误差函数)

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}du$$

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}z\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -z^2\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z-\frac{z^3}{1!\cdot3}+\frac{z^5}{2!\cdot5}-\frac{z^7}{3!\cdot7}+\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k z^{2k+1}}{(2k+1)!!}\qquad(|z|<\infty)$$

2° 余概率积分(或余误差函数)

$$\operatorname{erfc}(z)=1-\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty}e^{-u^2}du$$

3° 正态概率积分

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

4° $F(z)=e^{-z^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\operatorname{erf}(zi)=e^{-z^2}\int_0^z e^{u^2}du=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^k z^{2k+1}}{(2k+1)!!}=z\,{}_1F_1\left(1;\frac{3}{2};-z^2\right)$$

(${}_1F_1(\alpha;\gamma;z)$称为库默尔函数)

[概率积分的渐近表达式]

$$\operatorname{erf}(z)=1-\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}\,z}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2z^2)^k}\right]$$

$$\left(|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta,\ \delta>0,\ |z|\to\infty\right)$$

如果把级数前n项之和作为$\operatorname{erf}(z)$的近似值,则误差

$$|r_n(z)|\leqslant\frac{(2n+1)!!}{(2|z|^2)^{n+1}}\sec\delta$$

当z为实数时,其误差不超过级数中所略去的第一项的绝对值。

当$x\to\infty$时,$\operatorname{erf}(\infty)=\Phi(\infty)=1$。

六、正弦积分与余弦积分

[正弦积分的定义与级数表达式]

$$\operatorname{Si}(z)=\int_0^z\frac{\sin u}{u}du\qquad(|z|<\infty)$$

$$\operatorname{Si}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}\qquad(|z|<\infty)$$

$$\operatorname{si}(z)=-\int_z^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\operatorname{Si}(z)-\frac{\pi}{2}\qquad(|z|<\infty)$$

它们都是z的整函数.

[余弦积分的定义与级数表达式]

$$\operatorname{Ci}(z)=\operatorname{ci}(z)=-\int_z^{\infty}\frac{\cos u}{u}du\qquad(|\arg z|<\pi)$$

$$\operatorname{Ci}(z)=\gamma+\ln z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!2k}$$

$$=\gamma+\ln z-\int_0^z\frac{1-\cos t}{t}dt\qquad(|\arg z|<\pi)$$

它在除去半轴$(-\infty,0)$的z平面内单值解析,式中γ为欧拉常数.

定义

$$S_1(z)=\int_0^z\frac{1-\cos u}{u}du=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!2k}\qquad(|z|<\infty)$$

[函数之间的关系]　当 $z=x$ 为实数时，有

$$\mathrm{Ci}(x)\pm i\,\mathrm{si}(x)=\mathrm{Ei}(\pm ix)\qquad \mathrm{Ci}(xe^{\pm\pi i})=\mathrm{Ci}(x)\pm\pi i\qquad (x>0)$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Si}(x)=\frac{\sin x}{x}\qquad \frac{d}{dx}\mathrm{Ci}(x)=\frac{\cos x}{x}$$

$$\mathrm{Si}(x)+\mathrm{Si}(-x)=0\qquad \mathrm{si}(x)+\mathrm{si}(-x)=-\pi$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{si}[2(2n+1)\pi]=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{3}{8}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{si}(nx)}{n}=\frac{1}{2}[\pi\ln\pi-x]\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{si}(nx)}{x}=\frac{1}{2}[\pi\ln 2-x]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ci}(2n\pi)=\frac{1}{2}-\gamma\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{Ci}(2n\pi)=1+\ln 2-\frac{\gamma}{2}$$

$$\mathrm{Si}(+\infty)=\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{si}(-\infty)=-\pi\qquad \mathrm{Ci}(+\infty)=0$$

[渐近表达式]

$$\mathrm{Ci}(z)=\frac{\sin z}{z}P(z)-\frac{\cos z}{z}Q(z)\qquad (|\arg z|<\pi,\ n=1,2,\cdots)$$

$$\mathrm{si}(z)=-\frac{\cos z}{z}P(z)-\frac{\sin z}{z}Q(z)\qquad (|\arg z|<\pi,\ n=1,2,\cdots)$$

式中

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k)!}{z^{2k}}+O(z^{-2n-2})$$

$$Q(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k+1)!}{z^{2k+1}}+O(z^{-2n-3})$$

特别有

$$\lim_{x\to+\infty}(x^{\rho}\mathrm{si}(x))=0\qquad \lim_{x\to+\infty}(x^{\rho}\mathrm{Ci}(x))=0\qquad (\rho<1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{si}(x)=-\pi\qquad \lim_{x\to-\infty}\mathrm{ci}(x)=\pm\pi i$$

七、指数积分

[指数积分的定义与其他表达式]

$$\mathrm{Ei}(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{e^u}{u}du$$

$$\mathrm{Ei}(z)=\gamma+\ln(-z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,k}$$

它在除去半轴(0,∞)的z平面内单值解析，式中γ为欧拉常数.

$$\mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^u}{u}du \qquad (x<0)$$

$$\mathrm{Ei}(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{e^u}{u}du=-\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du \qquad (0<x<\infty)$$

$$\mathrm{Ei}(-x)=\gamma+\ln x+\int_0^x\frac{e^{-u}-1}{u}du$$

$$=\gamma+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!\,k} \qquad (0<x<\infty)$$

$$\overline{\mathrm{Ei}}(x)=\mathrm{V.P.}\int_{-x}^{\infty}\frac{-e^{-u}}{u}du$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-x}^{-\varepsilon}\frac{e^{-u}}{u}du+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du\right] \qquad (0<x<\infty)$$

$$\overline{\mathrm{Ei}}(x)=\gamma+\ln x+\int_0^x\frac{e^u-1}{u}du$$

$$=\gamma+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!\,k} \qquad (0<x<\infty)$$

$$\mathrm{E}_n(x)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-xu}}{u^n}du \qquad (0<x<\infty)$$

$$\mathrm{E}_1(x)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-xu}}{u}du=-\mathrm{Ei}(-x) \qquad (0<x<\infty)$$

[指数积分的渐近表达式]

$$\mathrm{Ei}(z)=\frac{e^z}{z}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{z^k}+r_n(z)\right] \qquad (|z|\to\infty)$$

式中

$$|r_n(z)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{(n+1)!}{|z|^{n+1}}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant\dfrac{3\pi}{2}\\ \dfrac{(n+1)!}{|z|^{n+1}(\sin\delta)^{n+1}}, & 0<\delta<\arg z\leqslant\dfrac{\pi}{2}\text{或}\\ & \dfrac{3\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant2\pi-\delta\end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{Ei}}(x)=\frac{e^x}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{x^k} \qquad (x>0,\ x\to\infty)$$

特别

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\,\overline{\mathrm{Ei}}(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}xe^{-x}\,\overline{\mathrm{Ei}}(x)=1$$

八、对数积分

[对数积分的定义与其他表达式]

$$\mathrm{li}(z)=\int_0^z \frac{du}{\ln u}=\mathrm{Ei}(\ln z)$$

它在除去$(-\infty,0)$与$(1,\infty)$的 z 平面内单值解析.

$$\mathrm{li}(x)=\gamma+\ln[-\ln x]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^k x}{k!k}\qquad(0<x<1)$$

$$\overline{\mathrm{li}}(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{du}{\ln u}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{du}{\ln u}\right]=\overline{\mathrm{Ei}}(\ln x)\qquad(1<x<\infty)$$

$$\overline{\mathrm{li}}(x)=\gamma+\ln\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^k x}{k!k}\qquad(1<x<\infty)$$

式中 γ 为欧拉常数.

[对数积分的渐近表达式]

$$\mathrm{li}(z)=\frac{z}{\ln z}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{\ln^k z}+r_n(z)\right]\qquad(|\arg z|<\pi,\ |z|\to\infty)$$

式中

$$|r_n(z)|\leqslant\frac{(n+1)!}{|\ln z|^{n+1}}$$

九、不完全伽马函数

[不完全伽马函数的定义与其他表达式]

$$\gamma(\nu,z)=\int_0^z u^{\nu-1}e^{-u}du\qquad(|z|<\infty,\ \mathrm{Re}\,\nu>0)$$

$$\gamma(\nu,z)=\frac{z^\nu}{\nu}\,{}_1F_1(\nu;\nu+1;\ z)\qquad(|z|<\infty,\ \nu\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$\Gamma(\nu,z)=\Gamma(\nu)-\gamma(\nu,z)=\int_z^{\infty}u^{\nu-1}e^{-u}du\quad(|\arg z|<\pi)$$

$$\gamma(a,z)=e^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{a+k}}{(a)_{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{a+k}}{k!(a+k)}\qquad(a\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$\gamma(1+n,z)=n!\left[1-e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right]\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\Gamma(1+n,z)=n!e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\Gamma(1-n,z)=z^{1-n}\int_1^{\infty}e^{-zu}u^{-n}du\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\Gamma(-n,z)=\frac{(-1)^n}{n!}\left[\Gamma(0,z)-e^{-z}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}}\right]\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

[不完全伽马函数有关公式]

$$\gamma(\alpha+1,z)=\alpha\gamma(\alpha,z)-z^{\alpha}e^{-z}$$

$$\Gamma(\alpha+1,z)=\alpha\Gamma(\alpha,z)+z^{\alpha}e^{-z}$$

$$\frac{d\gamma(\alpha,z)}{dz}=-\frac{d\Gamma(\alpha,z)}{dz}=z^{\alpha-1}e^{-z}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{-\alpha}\gamma(\alpha,z)]=(-1)^n z^{-\alpha-n}\gamma(\alpha+n,z)\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^z\gamma(\alpha,z)]=(-1)^n(1-\alpha)_n e^z\gamma(\alpha-n,z)\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{-\alpha}\Gamma(\alpha,z)]=(-1)^n z^{-\alpha-n}\Gamma(\alpha+n,z)\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^z\Gamma(\alpha,z)]=(-1)^n(1-\alpha)_n e^z\Gamma(\alpha-n,z)\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\gamma(\alpha,z)=\frac{z^{\alpha}}{\sin\pi\alpha}\int_0^{\pi}e^{z\cos\varphi}\cos(\alpha\varphi+z\sin\varphi)d\varphi$$

($z\neq0$, α 不为整数，且 $\mathrm{Re}\,\alpha>0$)

$$\Gamma(\alpha,z)=\frac{e^{-z}z^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{-\alpha}}{z+t}dt$$

十、椭圆积分

[椭圆积分] 形为

$$\int R(x,y)dx$$

(R 是 x, y 的有理函数，$y^2=P(x)$ 是 x 的三次或四次多项式)的积分，称为椭圆积分，它可化为一些能用初等函数表示的积分。

[勒让德椭圆积分]

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi$$

$$\Pi(h,k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{(1+h\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

这三个积分分别称为勒让德第一类、第二类、第三类椭圆积分. 数 k 称为这些积分的模数, 数 $k'=\sqrt{1-k^2}$ 称为补模数, 数 h 称为第三类积分的参数.

[外尔斯特拉斯椭圆积分]

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

$$I_2=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

$$I_3=\int\frac{dx}{(x-c)\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

这三个积分分别称为外尔斯特拉斯第一类、第二类、第三类椭圆积分.

[完全椭圆积分]

$$K=K(k)=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\qquad(|k|<1)$$

$$E=E(k)=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi\qquad(|k|<1)$$

$$\Pi_1(h,k)=\int_0^1\frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{(1+h\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\qquad(|k|<1)$$

这三个积分分别称为第一类、第二类、第三类完全椭圆积分. 又定义

$$K'(k)=K(k')\qquad E'(k)=E(k')$$

$$K'(k')=K(k)\qquad E'(k')=E(k)$$

[椭圆积分的级数表达式]

$$F(k,\varphi)=\varphi+\frac{1}{2}k^2\int_0^{\varphi}\sin^2\psi d\psi+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\int_0^{\varphi}\sin^4\psi d\psi+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\int_0^{\varphi}\sin^6\psi d\psi+\cdots \qquad (|k|<1)$$

$$E(k,\varphi)=\varphi-\frac{1}{2}k^2\int_0^{\varphi}\sin^2\psi d\psi-\frac{1}{2\cdot4}k^4\int_0^{\varphi}\sin^4\psi d\psi-$$

$$-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}k^6\int_0^{\varphi}\sin^6\psi d\psi+\cdots \qquad (|k|<1)$$

$$K=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\cdots+\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\right]^2k^{2n}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;k^2\right)$$

$$E=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\cdots-\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}-\cdots\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right)$$

式中 $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ 为超几何级数.

[椭圆积分有关公式]

$$F(k,n\pi\pm\varphi)=2nK\pm F(k,\varphi) \qquad (n\ 为整数)$$

$$E(k,n\pi\pm\varphi)=2nE\pm E(k,\varphi) \qquad (n\ 为整数)$$

$$EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2} \qquad (勒让德关系式)$$

$$\frac{\partial F(k,\varphi)}{\partial k}=\frac{1}{k'^2}\left(\frac{E(k,\varphi)-k'^2F(k,\varphi)}{k}-\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right)$$

$$\frac{\partial E(k,\varphi)}{\partial k}=\frac{E(k,\varphi)-F(k,\varphi)}{k}$$

[椭圆积分替换公式表]

k_1	$\sin\varphi_1$	$\cos\varphi_1$	$F(k_1,\varphi_1)$	$E(k_1,\varphi_1)$
$\frac{1}{k}$	$k\sin\varphi$	$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$	$kF(k,\varphi)$	$\frac{1}{k}[E(k,\varphi)-k'^2F(k,\varphi)]$
k'	$-i\,\mathrm{tg}\,\varphi$	$\sec\varphi$	$-iF(k,\varphi)$	$i[E(k,\varphi)-F(k,\varphi)-\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}]$
$\frac{1}{k'}$	$-ik'\,\mathrm{tg}\,\varphi$	$\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}$	$-ik'F(k,\varphi)$	$\frac{i}{k'}[E(k,\varphi)-k'^2F(k,\varphi)-\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}]$
$\frac{ik}{k'}$	$\frac{k'\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	$\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	$k'F(k,\varphi)$	$\frac{1}{k'}\left[E(k,\varphi)-k^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]$
$\frac{k'}{ik}$	$-\frac{ik\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	$-ikF(k,\varphi)$	$\frac{i}{k}\left[E(k,\varphi)-F(k,\varphi)-k^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	$\frac{\cos^2\varphi-k'\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	$(1+k')F(k,\varphi)$	$\frac{2}{1+k'}[E(k,\varphi)+k'F(k,\varphi)]$ $-(1-k')\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$
$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$\frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi}$	$\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+k\sin^2\varphi}$	$(1+k)F(k,\varphi)$	$\frac{1}{1+k}[2E(k,\varphi)-k'^2F(k,\varphi)$ $+2k\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+k\sin^2\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}]$

[完全椭圆积分替换公式表]

k_1	$K(k_1)$	$K'(k_1)$	$E(k_1)$	$E'(k_1)$
$\frac{1}{k}$	$k(K+iK')$	kK'	$\frac{1}{k}(E+iE'-k'^2K-ik^2K')$	$\frac{1}{k}E'$
k'	K'	K	E'	E
$\frac{1}{k'}$	$k'(K'+iK)$	$k'K$	$\frac{1}{k'}(E'+iE-k^2K'-ik'^2K)$	$\frac{1}{k'}E$
$\frac{ik}{k'}$	$k'K$	$k'(K'-iK)$	$\frac{1}{k'}E$	$\frac{1}{k'}(E'+iE-k^2K'-ik'^2K)$
$\frac{k'}{ik}$	kK'	$k(K+iK')$	$\frac{1}{k}E'$	$\frac{1}{k}(E-iE'-k'^2K+ik^2K')$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{1+k'}{2}K$	$(1+k')K'$	$\frac{E+k'K}{1+k'}$	$\frac{2E'-k^2K'}{1+k'}$
$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$(1+k)K$	$\frac{1+k}{2}K'$	$\frac{2E-k'^2K}{1+k}$	$\frac{E'+kK'}{1+k}$

［可化为椭圆积分的积分］

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}=F(k,\ \arcsin x)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+k^2t^2}}=F(\sqrt{1-k^2},\ \mathrm{arc\,tg}\,x) \qquad \left(设\ u=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}\sqrt{b^2-t^2}}=\frac{1}{a}F\left(\frac{b}{a},\ \arcsin\frac{x}{b}\right) \qquad \left(设\ u=\frac{t}{b}\right)$$

$$\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}\sqrt{t^2-b^2}}=\frac{1}{a}F\left(\frac{b}{a},\ \arcsin\frac{a}{x}\right) \qquad \left(设\ u=\frac{a}{t}\right)$$

$$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}\sqrt{t^2-b^2}}=\frac{1}{a}F\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\ \arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-b^2}}\right)$$

$$\left(设\ u=\sqrt{\frac{a^2-t^2}{a^2-b^2}}\right)$$

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-b^2+b^2t^2}}=F(b,\ \arccos x) \qquad \left(设\ u=\sqrt{1-t^2}\right)$$

$$\int_x^b \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}\sqrt{b^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}F\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \arccos\frac{x}{b}\right)$$

$$\left(设\ u=\sqrt{1-\left(\frac{t}{b}\right)^2}\right)$$

$$\int_a^x \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}}=\frac{2}{\sqrt{a-c}}F\left(\sqrt{\frac{b-c}{a-c}},\ \arcsin\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\right)$$

$$\left(设\ u=\sqrt{\frac{t-a}{t-b}}\right)$$

$$\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}}=\frac{2}{\sqrt{a-c}}F\left(\sqrt{\frac{b-c}{a-c}},\ \arcsin\sqrt{\frac{a-c}{x-c}}\right)$$

$$\left(设\ u=\sqrt{\frac{a-c}{t-c}}\right)$$

$$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(t-b)(t-c)}}=\frac{2}{\sqrt{a-c}}F\left(\sqrt{\frac{a-b}{a-c}},\ \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}\right)$$

$$\left(设\ u=\sqrt{\frac{a-t}{a-b}}\right)$$

$$\int_0^x \frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}=\frac{1}{k^2}F(k,\ \arcsin x)-\frac{1}{k^2}E(k,\ \arcsin x)$$

$$\int_0^x \sqrt{\frac{a^2-t^2}{b^2-t^2}}\,dt=aE\left(\frac{b}{a},\ \arcsin\frac{x}{b}\right) \qquad \left(设\ u=\frac{t}{b}\right)$$

$$\int_x^a \sqrt{\frac{b^2+t^2}{a^2-t^2}}dt = \sqrt{a^2+b^2}E\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \arccos\frac{x}{a}\right)$$

$$\left(设\ u=\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right)$$

$$\int_b^x \frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{t^2+a^2}{t^2-b^2}}dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}E\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \arccos\frac{b}{x}\right)$$

$$\left(设\ u=\sqrt{1-\left(\frac{b}{t}\right)^2}\right)$$

$$\int_0^x \sqrt{\frac{a^2+t^2}{(b^2+t^2)^3}}dt = \frac{a}{b^2}E\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \operatorname{arctg}\frac{t}{b}\right) \quad \left(设\ u=\frac{t}{\sqrt{b^2+t^2}}\right)$$

$$\int_b^x \frac{dt}{t^2\sqrt{(t^2-b^2)(a^2-t^2)}} = \frac{1}{ab^2}E\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \arcsin\sqrt{\frac{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}}\right)$$

$$\left(设\ u=\frac{a}{t}\sqrt{\frac{t^2-b^2}{a^2-b^2}}\right)$$

§2　正交多项式

一、勒让德多项式

[勒让德多项式的母函数]　由函数$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$按 t^n 展开：

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (-1\leqslant x\leqslant 1, |t|<1)$$

来定义勒让德多项式序列$\{P_n(x)\}_{0\leqslant n<\infty}$.

函数$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ 称为 $P_n(x)$的生成函数或母函数.

[勒让德多项式的表达式]

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots)$$

$P_0(x)=1$	$P_0(\cos\theta)=1$
$P_1(x)=x$	$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$
$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(3\cos2\theta+1)$

$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ $\qquad P_3(\cos\theta)=\frac{1}{8}(3\cos\theta+5\cos3\theta)$

$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$ $\qquad P_4(\cos\theta)=\frac{1}{64}(9+20\cos2\theta+35\cos4\theta)$

$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$ $\qquad P_5(\cos\theta)=\frac{1}{128}(30\cos\theta+35\cos3\theta+63\cos5\theta)$

……………………………… ………………………………

$$P_n(x)=F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right)$$ （末菲表达式）

$$P_n(x)=\frac{(2n-1)!!}{n!}x^nF\left(-\frac{n}{2},\ \frac{1-n}{2};\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{x^2}\right)$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2 2^{k+1}}\left[(1-x)^k+(-1)^n(1+x)^k\right]$$

$$P_n(\cos\theta)=F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \sin^2\frac{\theta}{2}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}}{k!(n-k)!}\cos(n-2k)\theta$$

[勒让德微分方程]

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$$

[勒让德多项式的正交性]

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}$$

[不等式与特殊值]

$$|P_n(x)|\leqslant 1 \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

$$P_0(x)<P_1(x)<P_2(x)<\cdots<P_n(x)<\cdots \qquad (x>1)$$

$$P_0(x)+P_1(x)+\cdots+P_n(x)>0 \qquad (x>-1)$$

$$P_n(\pm1)=(\pm1)^n$$

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad P_{2n+1}(0)=0$$

[递推公式与导数公式]

$$P_{n+1}(x)=\frac{(2n+1)}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \qquad \text{（递推关系）}$$

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$$

$$(1-x^2)P_n'(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x)=(n+1)xP_n(x)-(n+1)P_{n+1}(x)$$

$$xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)=nP_n(x)$$

$$P_{n+1}'(x)-xP_n'(x)=(n+1)P_n(x)$$

二、第一类契贝谢夫多项式

［第一类契贝谢夫多项式的母函数］ 由母函数$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}$按t^n展开：

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n \qquad (-1<x<1,\ |t|<1)$$

来定义第一类契贝谢夫多项式序列$\{T_n(x)\}_{0\le n<\infty}$。

［第一类契贝谢夫多项式的表达式］

$$T_n(x)=(-1)^n\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

$$=\cos(n\arccos x)=F\left(n,\ -n;\ \frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right)$$

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$$

$T_0(x)=1$	$T_0(\cos\theta)=1$
$T_1(x)=x$	$T_1(\cos\theta)=\cos\theta$
$T_2(x)=2x^2-1$	$T_2(\cos\theta)=\cos 2\theta$
$T_3(x)=4x^3-3x$	$T_3(\cos\theta)=\cos 3\theta$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$	$T_4(\cos\theta)=\cos 4\theta$
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$	$T_5(\cos\theta)=\cos 5\theta$
…………………	…………………

［第一类契贝谢夫微分方程］

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$$

［第一类契贝谢夫多项式的正交性］

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{\pi}{2}, & m=n>0\\ \pi, & m=n=0\end{cases}$$

[不等式与特殊值]

$|T_n(x)|\leqslant 1$　　$(-1\leqslant x\leqslant 1)$

$T_n(\pm 1)=(\pm 1)^n,\ T_{2n}(0)=(-1)^n,\ T_{2n+1}(0)=0$

[递推公式与导数公式]

$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$　　(递推公式)

$(1-x^2)T_n'(x)=n[T_{n-1}(x)-xT_n(x)]$

$2T_m(x)T_n(x)=T_{n+m}(x)+T_{n-m}(x)$　　$(n\geqslant m)$

三、第二类契贝谢夫多项式

[第二类契贝谢夫多项式的母函数]　由母函数$(1-2xt+t^2)^{-1}$按t^n展开:

$$(1-2xt+t^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n \qquad (-1<x<1,\ |t|<1)$$

来定义第二类契贝谢夫多项式序列$\{U_n(x)\}_{0\leqslant n<\infty}$.

[第二类契贝谢夫多项式的表达式]

$$U_n(x)=\frac{(-1)^n(n+1)}{\sqrt{1-x^2}\,(2n+1)!!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

$$=(n+1)F\left(-n,n+2;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right)$$

$$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}$$

$U_0(x)=1$

$U_1(x)=2x$

$U_2(x)=4x^2-1$

$U_3(x)=8x^3-4x$

$U_4(x)=16x^4-12x^2+1$

$U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$

………………………………

[第二类契贝谢夫微分方程]

$(1-x^2)U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)U_n(x)=0$

[第二类契贝谢夫多项式的正交性]

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,U_m(x)U_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\end{cases}$$

[不等式与特殊值]

$$|U_n(x)|\leqslant n+1 \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

$$U_n(\pm 1)=(\pm 1)^n(n+1) \qquad U_{2n}(0)=(-1)^n,\quad U_{2n+1}(0)=0$$

[递推公式与有关公式]

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x) \qquad \text{(递推公式)}$$

$$(1-x^2)U_n'(x)=(n+1)U_{n-1}(x)-nxU_n(x)$$

$$T_n(x)=U_n(x)-xU_{n-1}(x)$$

$$(1-x^2)U_{n-1}(x)=xT_n(x)-T_{n+1}(x)$$

$$T_n'(x)=nU_{n-1}(x)$$

四、拉盖尔多项式

1. 一般拉盖尔多项式

[一般拉盖尔多项式的母函数] 由母函数 $[(1-t)^{\alpha+1}e^{\frac{xt}{1-t}}]^{-1}$ 按 t^n 展开：

$$(1-t)^{-\alpha-1}e^{\frac{xt}{t-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(\alpha)}(x)t^n \qquad (\alpha>-1,\ |t|<1)$$

来定义一般拉盖尔多项式序列 $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{0\leqslant n<\infty}$。

[一般拉盖尔多项式的表达式]

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{e^x}{n!\,x^\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{x^{n+\alpha}}{e^x}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{x^k}{k!}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{n!\,\Gamma(1+\alpha)}{}_1F_1(-n;\alpha+1;x)$$

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{e^x x^{-\frac{\alpha}{2}}}{n!}\int_0^{\infty}t^{n+\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{xt})e^{-t}dt \qquad \left(\begin{matrix}\alpha>-1,\\ n=0,1,2,\cdots\end{matrix}\right)$$

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{e^x}{n!\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{n-\frac{1}{2}}\cos(2\sqrt{xt})dt$$

$$L_n^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{e^x}{n!\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty}e^{-t}t^n\sin(2\sqrt{xt})dt$$

式中${}_1F_1$为库默尔函数，$J_\alpha(x)$是α阶贝塞耳函数．特别

$$L_0^{(\alpha)}(x)=1,\quad L_1^{(\alpha)}(x)=\alpha+1-x,\quad \cdots$$

[一般拉盖尔微分方程]

$$xL_n^{(\alpha)\prime\prime}(x)+(\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)\prime}(x)+nL_n^{(\alpha)}(x)=0$$

[一般拉盖尔多项式的正交性]

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{e^x} L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\ \alpha>-1\\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, & m=n,\ \alpha>-1\end{cases}$$

[不等式与特殊值]

$$|L_n^{(\alpha)}(x)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}e^{\frac{x}{2}}, & x\geqslant 0,\quad \alpha\geqslant 0\\ \left[2-\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\right]e^{\frac{x}{2}}, & x\geqslant 0,\quad -1<\alpha<0\end{cases}$$

$$L_n^{(\alpha)}(0)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$$

[递推公式与有关公式]

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)=(2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

（递推公式）

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}(k!)^{-1}(\alpha-\beta)_k L_{n-m}^{(\beta)}(x)$$

$$x\frac{d}{dx}[L_n^{(\alpha)}(x)]=nL_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

$$=(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)=-xL_{n+1}^{(\alpha+1)}(x)$$

$$\int_x^\infty e^{-t}L_n^{(\alpha)}(t)dt=e^{-x}[L_n^{(\alpha)}(x)-L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]$$

$$L_n^{(\alpha+\beta+1)}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}L_k^{(\alpha)}(x)L_{n-k}^{(\beta)}(y)$$

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}\cdot n!}H_{2n}(\sqrt{x})$$

$$L_n^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\cdot n!}\frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

式中$H_n(x)$是埃尔米特多项式．

2．拉盖尔多项式

一般拉盖尔多项式中，当$\alpha=0$时，定义

$$L_n(x)=n!L_n^{(0)}(x)$$

为拉盖尔多项式．它的相应公式为

$$(1-t)^{-1}e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_{k=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}\qquad（母函数展开）$$

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}x^k$$

$L_0(x)=1$

$L_1(x)=-x+1$

$L_2(x)=x^2-4x+2$

$L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$

$L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24$

$L_5(x)=-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120$

…………………………………………………………

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0$$

（拉盖尔微分方程）

$$\int_0^{\infty}L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\(n!)^2, & m=n\end{cases}$$

（正交性）

$$|L_n(x)|\leqslant e^{\frac{x}{2}}\qquad(x\geqslant 0)$$

$$L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-x^2L_{n-1}(x)$$

（递推公式）

五、埃尔米特多项式

[埃尔米特多项式的母函数]　由母函数 e^{2xt-t^2} 按 t^n 展开：

$$e^{2xt-t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

来定义埃尔米特多项式序列 $\{H_n(x)\}_{1\leqslant n<\infty}$.

[埃尔米特多项式的表达式]

$$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^kn!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

$H_0(x)=1$

$H_1(x)=2x$

$H_2(x)=4x^2-2$

$H_3(x)=8x^3-12x$

$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$

$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$

………………………………………

$$H_{2m}(x)=\frac{(-1)^m}{m!}(2m)!\,{}_1F_1\left(-m;\ \frac{1}{2};\ x^2\right)$$

$$H_{2m+1}(x)=\frac{(-1)^m}{m!}(2m+1)!\,2x\,{}_1F_1\left(-m;\ \frac{3}{2};\ x^2\right)$$

其中 ${}_1F_1$ 为库默尔函数.

$$H_n(x)=2^{n+1}e^{x^2}\pi^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^n\cos\left(2xt-\frac{n\pi}{2}\right)dt$$

[埃尔米特多项式的渐近表达式]

$$H_n(x)\approx 2^{\frac{n+1}{2}}n^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}+\frac{x^2}{2}}\cos\left(\sqrt{2n+1}\,x-\frac{n\pi}{2}\right)\quad\left(\begin{matrix}n\to\infty,\text{对于任}\\ \text{一有限的 }x\text{ 值}\end{matrix}\right)$$

$$H_{2m}(x)=(-1)^m2^m(2m-1)!!\,e^{\frac{x^2}{2}}\left[\cos\sqrt{4m+1}\,x+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)\right]$$

$$H_{2m+1}(x)$$

$$=(-1)^m2^{m+\frac{1}{2}}(2m-1)!!\sqrt{2m+1}\,e^{\frac{x^2}{2}}\left[\sin\sqrt{4m+3}\,x+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)\right]$$

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{(-1)^m\sqrt{m}}{2^{2m}\cdot m!}H_{2m}\left(\frac{x}{2\sqrt{m}}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$$

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\cdot m!}H_{2m+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{m}}\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x$$

[埃尔米特微分方程]

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$$

[埃尔米特多项式的正交性]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 2^nn!\sqrt{\pi}, & m=n\end{cases}$$

[不等式与特殊值]

$$|H_n(x)|<1.086435e^{\frac{x^2}{2}}2^{\frac{n}{2}}(n!)^{\frac{1}{2}}$$

$$|H_{2m}(x)|\leqslant e^{\frac{x^2}{2}}[2^{2m+1}m!-2^m(2m-1)!!]\quad (x\geqslant 0)$$

$$|H_{2m+1}(x)|\leqslant xe^{\frac{x^2}{2}}2^{2m+2}\left(\frac{1}{2}\right)_{m+1}=xe^{\frac{x^2}{2}}2^{m+1}(2m+1)!!\quad (x\geqslant 0)$$

$$H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!},\quad H_{2n+1}(0)=0$$

$$H'_{2n}(0)=0,\qquad H'_{2n+1}(0)=2(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}$$

[递推公式与有关公式]

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)\ \text{(递推公式)}$$

$$H'_n(x)=2nH_{n-1}(x)$$

$$H_n(-x)=(-1)^nH_n(x)$$

[带权的埃尔米特多项式] $H_{e_n}(x)$是以$e^{-\frac{x^2}{2}}$为权函数的埃尔米特多项式，其表达式为

$$H_{e_n}(x)=(-1)^ne^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k(2k-1)!!\binom{n}{2k}x^{n-2k}$$

$H_{e_n}(x)$与$H_n(x)$的关系为

$$H_n(x)=2^{\frac{n}{2}}H_{e_n}(\sqrt{2}x)$$

六、雅可比多项式

[雅可比多项式的母函数] 由母函数$[R(1+R-t)^{\alpha}(1+R+t)^{\beta}]^{-1}$按$t^n$展开(其中$R=\sqrt{1-2xt+t^2}$，$|t|<1$，$\alpha,\beta>-1$)：

$$[R(1+R-t)^{\alpha}(1+R+t)^{\beta}]^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\alpha-\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n$$

来定义雅可比多项式序列$\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{0\leqslant n<\infty}$。

[雅可比多项式的表达式]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]$$

$$=2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1}{2}(1-x)\right)$$

$$=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\beta+1;\frac{1}{2}(1+x)\right)$$

式中 F 为超几何函数.

[雅可比微分方程]

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{dw}{dx}+n(n+\alpha+\beta+1)w=0$$

$$(\alpha,\beta>1)$$

[雅可比多项式的正交性]

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx$$

$$=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, & m=n\end{cases}$$

[不等式与特殊值]

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|=\begin{cases}\dbinom{n+q}{n}\sim n^q,\ \alpha>-1,\ \beta>-1,q=\max(\alpha,\beta)\geqslant-\dfrac{1}{2}\\ |P_n^{(\alpha,\beta)}(x')|\sim n^{-\frac{1}{2}},\ \alpha>-1,\ \beta<-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

式中 x' 是最靠近点 $x_0=\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+1}$ 的两个极大值点之一.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}$$

[递推公式与有关公式]

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$=(2n+\alpha+\beta+1)[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x+(\alpha^2-\beta^2)]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$
$$-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

（递推公式）

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^nP_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

七、盖根堡多项式

[盖根堡多项式的母函数]　由母函数 $(1-2xt+t^2)^{-\lambda}$ 按 t^n 的展开式

$$(1-2xt+t^2)^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^\lambda(x)t^n \qquad \left(\lambda>-\frac{1}{2},\ -1<x<1,\ |t|<1\right)$$

来定义盖根堡多项式序列$\{C_n^\lambda(x)\}_{1\leqslant n<\infty}$. $C_n^\lambda(x)$又称为特种球多项式.

[盖根堡多项式的表达式]

$$C_n^\lambda(x)=\frac{(-1)^n(2\lambda)_n}{2^n\cdot n!\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\Gamma(\lambda+n-k)}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

$$=\frac{(2\lambda)_n}{n!}F\left(-n,n+2\lambda;\lambda+\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right)$$

$$C_n^\lambda(\cos\theta)=\frac{1}{[\Gamma(\lambda)]^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\lambda+n-k)\Gamma(\lambda+k)}{k!(n-k)!}\cos(n-2k)\theta$$

$$=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_k}{k!}\frac{\Gamma(n+k+2\lambda)}{\Gamma(n+k+\lambda+1)}\cos[(n+2k+2\lambda)\theta-\lambda\pi]$$

$$(0<\lambda<1,\ 0<\theta<\pi)$$

式中F为超几何函数.

$$C_0^\lambda(x)=1$$

$$C_1^\lambda(x)=2\lambda x$$

$$C_2^\lambda(x)=2\lambda(1+\lambda)x^2-\lambda$$

$$C_3^\lambda(x)=\frac{4}{3}\lambda(1+\lambda)(2+\lambda)x^3-2\lambda(1+\lambda)x$$

$$C_4^\lambda(x)=\frac{2}{3}\lambda(1+\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda)x^4-2\lambda(1+\lambda)(2+\lambda)x^2+\frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)$$

……………………………………………………

[盖根堡微分方程]

$$(1-x^2)C_n^{\lambda\prime\prime}(x)-(2\lambda+1)xC_n^{\lambda\prime}(x)+n(n+2\lambda)C_n^\lambda(x)=0$$

[盖根堡多项式的正交性]

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_n^\lambda(x)C_m^\lambda(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{\pi\Gamma(2\lambda+n)}{2^{2\lambda-1}n!(\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^2}, & m=n\end{cases}$$

[不等式与特殊值]

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|C_n^\lambda(x)|=C_n^\lambda(1)=\frac{(2\lambda)_n}{n!}\qquad(\lambda>0)$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|C_{2m}^\lambda(x)|=|C_{2m}^\lambda(0)|=\frac{(\lambda)_m}{m!}\quad(-m<\lambda<0,\text{且}\lambda\text{不为整数})$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|C_{2m+1}^\lambda(x)|<2[(2m+1)(2\lambda+2m+1)]^{-\frac{1}{2}}|(\lambda)_{m+1}|/m!$$

$$\left(\lambda\text{不为整数，且}-m-\frac{1}{2}<\lambda<0\right)$$

$$(\sin\theta)^\lambda|C_n^\lambda(\cos\theta)|<\left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda-1}[\Gamma(\lambda)]^{-1}\quad(0<\lambda<1,0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

$$C_n^\lambda(0)=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\(-1)^m\dfrac{(\lambda)_m}{m!}, & n=2m\text{为偶数}\end{cases}$$

$$C_n^\lambda(1)=\frac{(2\lambda)_n}{n!}\qquad\frac{d}{dx}C_n^\lambda(0)=\begin{cases}0, & n\text{为偶数}\\\dfrac{2(-1)^k(\lambda)_{k+1}}{k!}, & n=2k+1\text{为奇数}\end{cases}$$

[递推公式与有关公式]

$$(n+1)C_{n+1}^\lambda(x)=2(n+\lambda)xC_n^\lambda(x)-(n+2\lambda-1)C_{n-1}^\lambda(x)\qquad\text{(递推公式)}$$

$$2\lambda(1-x^2)C_{n-1}^{\lambda+1}(x)=(2\lambda+n-1)C_{n-1}^\lambda(x)-nxC_n^\lambda(x)$$

$$\frac{d^m}{dx^m}C_n^\lambda(x)=2^m(\lambda)_mC_{n-m}^{\lambda+m}(x)$$

$$\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_nC_n^\lambda(x)=(2\lambda)_nP_n^{(\alpha,\alpha)}(x)\qquad\left(\alpha=\lambda-\frac{1}{2}\right)$$

$$C_n^{\frac{1}{2}}(x)=P_n(x)$$

$$C_n^\lambda(-x)=(-1)^nC_n^\lambda(x)$$

§3 超几何函数

一、高斯超几何级数*

[高斯超几何级数及其解析开拓]

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+\gamma)}\frac{z^n}{n!}$$

$$(|z|<1,\ \gamma\neq0,-1,-2,\cdots)$$

称为高斯超几何级数，它是超几何微分方程

$$z(1-z)w''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]w'-\alpha\beta w=0$$

的解，并在$|z|<1$内单值解析。

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\,dt$$

$$(\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\beta>0,\quad |\arg(1-z)|<\pi)$$

是高斯超几何级数到除去$(1,\infty)$的z平面内的解析开拓，也称为超几何函数。

[超几何函数的积分表达式]

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(\gamma+t)}(-z)^t dt$$

$$(|\arg(-z)|<\pi,\ \alpha,\beta\neq 0,\ -1,\ -2,\cdots)$$

积分路线的选取，应使函数$\Gamma(\alpha+t)$，$\Gamma(\beta+t)$的极点在路线左边，函数$\Gamma(-t)$的极点在路线右边。

该积分式称为巴恩斯积分表示。

[递推公式与有关公式]

$$(\gamma-1)F(\alpha,\beta;\gamma-1;z)-\alpha F(\alpha+1,\beta;\gamma;z)-(\gamma-\alpha-1)F(\alpha,\beta;\gamma;z)=0$$

$$\gamma F(\alpha,\beta;\gamma;z)-\beta zF(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z)-\gamma F(\alpha-1,\beta;\gamma;z)=0$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=F(\beta,\alpha;\gamma;z)$$

$$\lim_{\gamma\to -n}\frac{F(\alpha,\beta;\gamma;z)}{\Gamma(\gamma)}=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(n+1)!}z^{n+1}F(\alpha+n+1,\beta+n+1;n+2;z)$$

$$\lim_{z\to 1}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\qquad\begin{pmatrix}\gamma\neq 0,\ -1,\ -2,\cdots,\\ \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0\end{pmatrix}$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;0)=1$$

---

* 超几何级数的一般形式是

$${}_pF_q(\alpha_1,\cdots,\alpha_p;\beta_1,\cdots,\beta_q;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_q)_n}\frac{z^n}{n!}$$

式中$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$称为分子参数，$\beta_1,\cdots,\beta_q$称为分母参数．收敛性如下：

当$p\leqslant q$时，对所有有限的z，${}_pF_q$都收敛．

当$p=q+1$时，对满足$|z|<1$的z，${}_pF_q$都收敛．

当$p>q+1$时，对所有的$z\neq 0$，${}_pF_q$都发散．

$$\frac{d^n}{dz^n}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n,\beta+n;\gamma+n;z)$$

[变换公式]

1° $$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;z)$$
$$=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right)$$
$$=(1-z)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right)$$

2° $$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha-\beta)}u_1+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}u_2$$
$$(\alpha+\beta-\gamma\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

式中 $$u_1=F(\alpha,\beta;\alpha+\beta+1-\gamma;1-z)$$
$$=z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma;\alpha+\beta+1-\gamma;1-z)$$
$$=z^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma;\alpha+\beta+1-\gamma;1-\frac{1}{z}\right)$$
$$=z^{-\beta}F\left(\beta+1-\gamma,\beta;\alpha+\beta+1-\gamma;1-\frac{1}{z}\right)$$
$$u_2=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma+1-\alpha-\beta;1-z)$$
$$=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,1-\beta;\gamma+1-\alpha-\beta;1-z)$$
$$=z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\alpha,1-\alpha;\gamma+1-\alpha-\beta;1-\frac{1}{z}\right)$$
$$=z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\beta,1-\beta;\gamma+1-\alpha-\beta;1-\frac{1}{z}\right)$$

3° $$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}u_3+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}u_4$$
$$(\alpha-\beta\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

式中 $$u_3=(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma;\alpha+1-\beta;\frac{1}{z}\right)$$
$$=(-z)^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta,\gamma-\beta;\alpha+1-\beta;\frac{1}{z}\right)$$
$$=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta;\alpha+1-\beta;\frac{1}{1-z}\right)$$
$$=(-z)^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha+1-\gamma,1-\beta;\alpha+1-\beta;\frac{1}{1-z}\right)$$
$$u_4=(-z)^{-\beta}F\left(\beta+1-\gamma,\beta;\beta+1-\alpha;\frac{1}{z}\right)$$

$$=(-z)^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\alpha,\gamma-\alpha;\beta+1-\alpha;\frac{1}{z}\right)$$

$$=(1-z)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha;\beta+1-\alpha;\frac{1}{1-z}\right)$$

$$=(-z)^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}F\left(\beta+1-\gamma,1-\alpha;\beta+1-\alpha;\frac{1}{1-z}\right)$$

4° $F\left(\alpha,\beta;2\beta;\frac{4z}{(1+z)^2}\right)=(1+z)^{2\alpha}F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2}-\beta;\beta+\frac{1}{2};z^2\right)$

5° $F(\alpha,\alpha-\gamma+1;\gamma;z)=(1+z)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2};\gamma;\frac{4z}{(1+z)^2}\right)$

6° $F(\alpha,\beta;2\beta;2z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2};\beta+\frac{1}{2};\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\right)$

7° $F\left(2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};z\right)=F\left(\alpha,\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};4z(1-z)\right)$

[渐近表达式]

1° $F(\alpha,\beta;\gamma;z)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z+\cdots+\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n+O(\gamma^{-n-1})$

$(\alpha,\beta,z$ 固定，$|z|<1,|\gamma|\to\infty,|\arg\gamma|\leqslant\pi-\varepsilon<\pi)$

2° $F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta z)^n}{n!(\gamma)_n}[1+O(\beta^{-1})]$

$\left(\alpha,\gamma,z\text{ 固定，}0<|z|<1,\ \gamma\neq0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ -\frac{3\pi}{2}<\arg\beta z<\frac{\pi}{2},\ \beta\to\infty\right)$

3° 当 $z\to\infty$ 时，变换公式 3° 为 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 的渐近表达式.

二、库默尔函数(合流超几何函数)

[库默尔函数及其积分表达式] 级数

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\gamma)}\frac{z^n}{n!}\qquad(\gamma\neq0,-1,-2,\cdots)$$

称为库默尔函数(或合流超几何函数)，它分别是变量 z 和参数 α 的整函数. 它满足库默尔微分方程

$$zw''+(\gamma-z)w'-\alpha w=0$$

它的积分表达式有

1° ${}_1F_1(\alpha;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt$

$(\mathrm{Re}\gamma > \mathrm{Re}\alpha > 0, \arg t = \arg(1-t) = 0)$

2° $${}_1F_1(\alpha;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(\gamma+t)}(-z)^t dt$$

$$\left(\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots, |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}\right)$$

积分路线的选取，应使函数 $\Gamma(\alpha+t)$ 的极点在积分路线左边，$\Gamma(-t)$的极点在积分路线右边。该式称为 ${}_1F_1$ 的巴恩斯积分表示。

[递推公式与有关公式]

$$(\gamma-1)\,{}_1F_1(\alpha;\gamma-1;z) - \alpha\,{}_1F_1(\alpha+1;\gamma;z) - (\gamma-\alpha-1)\,{}_1F_1(\alpha;\gamma;z) = 0$$

$$\gamma\,{}_1F_1(\alpha;\gamma;z) - z\,{}_1F_1(\alpha;\gamma+1;z) - \gamma\,{}_1F_1(\alpha-1;\gamma;z) = 0$$

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;z) = e^z\,{}_1F_1(\gamma-\alpha;\gamma;-z) \qquad \text{(库默尔变换)}$$

$$\lim_{\gamma\to 1-n}\frac{{}_1F_1(\alpha;\gamma;z)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{(\alpha)_n}{n!}z^n\,{}_1F_1(\alpha+n;1+n;z) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\,{}_1F_1(\alpha;\gamma;z) = \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\,{}_1F_1(\alpha+n;\gamma+n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{-z}\,{}_1F_1(\alpha;\gamma;z)] = (-1)^n\frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n}e^{-z}\,{}_1F_1(\alpha;\gamma+n;z)$$

[渐近表达式]

1° $${}_1F_1(\alpha;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+\gamma)}\frac{z^k}{k!} + O(|\gamma|^{-n-1})$$

$$(\alpha, z \text{有界}, |\gamma|\to\infty, |\arg\gamma| \leqslant \pi-\delta, \delta > 0)$$

2° ${}_1F_1(\alpha;\gamma;z)$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Gamma(\gamma-\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\alpha-k)}z^{-k} + O(z^{-n-1})\right\}$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{\pm i\pi\alpha}z^{-\alpha}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\gamma-\alpha-k)}z^{-k} + O(z^{-n-1})\right\}$$

$\left(|z|\to\infty，\text{式中“}\pm\text{”号这样选取：当} -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\text{时取正号，}\right.$

$\left.\text{当} -\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\text{时取负号}\right)$

3° ${}_1F_1(\alpha;\gamma;z)$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}e^z z^{-(\gamma-\alpha)}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Gamma(\gamma-\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\alpha-k)}z^{-k} + O(z^{-n-1})\right\}$$

$$\left(|z|\to\infty,\ |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta,\ \delta>0,\ \alpha\neq 0,-1,-2,\cdots\right)$$

§4 勒让德函数

一、勒让德函数的定义

[第一类勒让德函数]

$$P_\nu(z)=F\left(-\nu,\nu+1;1;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{(n!)^2\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n\qquad(|1-z|<2)$$

它在除去$(-\infty,-1)$的z平面内单值解析.

[第二类勒让德函数]

$$1^\circ\ Q_\nu(z)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{z^{\nu+1}}F\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}+1;\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)$$

$$(|z|>1)$$

它在除去$(-\infty,1)$的z平面内单值解析.

$$2^\circ\ Q_n(z)=\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}z^{-n-1}F\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+2}{2};n+\frac{3}{2};z^{-2}\right)$$

$$=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\ln\frac{z+1}{z-1}\right]-\frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{2}P_n(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(2n-4k-1)}{(2k+1)(n-k)}P_{n-2k-1}(z)$$

$$=\frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}P_{k-1}(z)P_{n-k}(z)$$

它在除去$(-1,1)$的z平面内单值解析.

$$3^\circ\ Q_n(x)=\frac{1}{2}[Q_n(x+i0)+Q_n(x-i0)]$$

$$=\frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\ln\frac{1+x}{1-x}\right]-\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$(-1<x<1)$$

[一般勒让德函数]

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$(|1-z|<2)$$

$$Q_\nu^\mu(z)$$

$$=\frac{e^{i\nu\mu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu+\mu)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{z^{1+\nu+\mu}}F\left(\frac{1+\nu+\mu}{2},\frac{2+\nu+\mu}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)$$

$$(|z|>1)$$

它们在除去$(-\infty,1)$的z平面内单值解析，并且是勒让德微分方程

$$(1-z^2)w''-2zw'+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]w=0$$

的两个线性无关解.

当$\mu=0$时，它们分别是第一、二类勒让德函数.

当$\mu=\pm m$（m为正整数）时有

$$P_\nu^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_\nu(z)$$

$$=\frac{1}{m!}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1+m;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

$$P_\nu^{-m}(z)=\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(z)=(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\int_1^z\cdots\int_1^z P_\nu(z)(dz)^m$$

$$Q_\nu^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}Q_\nu(z)$$

$$Q_\nu^{-m}(z)=\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}Q_\nu^m(z)=(-1)^m(z^2-1)^{-m/2}\int_z^\infty\cdots\int_z^\infty Q_\nu(z)(dz)^m$$

对于$z=x$　　$(-1<x<1)$，有

$$P_\nu^\mu(x)=e^{i\frac{1}{2}\mu\pi}P_\nu^\mu(x+i0)=e^{-i\frac{1}{2}\mu\pi}P_\nu^\mu(x-i0)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-x}{2}\right)$$

（当$\mu=0,\nu=n$时，即为勒让德多项式$P_n(x)$）

$$Q_\nu^\mu(x)=\frac{1}{2}e^{-i\mu\pi}\left[e^{-i\frac{1}{2}\mu\pi}Q_\nu^\mu(x+i0)+e^{i\frac{1}{2}\mu\pi}Q_\nu^\mu(x-i0)\right]$$

$$=\frac{\Gamma(1+\nu+\mu)\Gamma(-\mu)}{2\Gamma(1+\nu-\mu)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}\mu}F\left(-\nu,\nu+1;\mu+1;\frac{1-x}{2}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(\mu)\cos(\mu\pi)}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}\mu}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-x}{2}\right)$$

$$P_\nu^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_\nu(x)$$

$$=(-1)^m\frac{1}{m!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}\quad F\left(-\nu,\nu+1;1+m;\frac{1-x}{2}\right)$$

$$P_\nu^{-m}(x)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\cdot P_\nu^m(x)$$

$$=(-1)^m(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\int_1^x\cdots\int_1^x P_\nu(x)(dx)^m$$

$$Q_\nu^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}\ Q_\nu(x)$$

$$(\nu\neq-1,-2,\cdots)$$

$$Q_\nu^{-m}(x)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}\ Q_\nu^m(x)$$

二、勒让德函数的其他表达式

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{2^{\mu+1}\Gamma(\nu+\mu+1)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}(\sin\theta)^\mu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\mu\right)_k(1+\nu+\mu)_k}{k!\left(\nu+\frac{3}{2}\right)_k}$$

$$\cdot\sin[(2k+\nu+\mu+1)\theta]\qquad(0<\theta<\pi)$$

$$Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\pi^{\frac{1}{2}}(2\sin\theta)^\mu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\mu\right)_k(\nu+\mu+1)_k}{k!\left(\nu+\frac{3}{2}\right)_k}$$

$$\cdot\cos[(2k+\nu+\mu+1)\theta]\qquad(0<\theta<\pi)$$

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-z)^{\nu+1}}dt$$

式中 C 为 t 平面上的一条正向的简单闭曲线(图 12.2)，包围点是 z 和 1，但不包围点 -1。

图　12.2

当 $\mathrm{Re}z>0$(或当 ν 为整数)时，

$$P_\nu(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^\nu d\varphi & \text{(拉普拉斯第一积分表示)}\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{-\nu-1}d\varphi & \text{(拉普拉斯第二积分表示)}\end{cases}$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{2^{-\nu}(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty(z+\operatorname{ch}t)^{\mu-\nu-1}(\operatorname{sh}t)^{2\nu+1}dt$$

$$(\operatorname{Re}(-\mu)>\operatorname{Re}\nu>-1,\ z\notin(-1,\infty))$$

$$=\frac{2^\mu(z^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_0^\pi[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos t]^{\nu+\mu}(\sin t)^{-2\mu}dt$$

$$\left(\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right)$$

$$P_\nu^m(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\pi\Gamma(\nu+1)}\int_0^\pi[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos t]^\nu\cos(mt)dt\quad(\operatorname{Re}z>0)$$

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\sin\theta)^\mu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_0^\theta(\cos t-\cos\theta)^{-\mu-\frac{1}{2}}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$$

$$\left(\operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2},\ 0<\theta<\pi\right)$$

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{P_n(t)}{z-t}dt$$

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{4i\sin\nu\pi}\int_C\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}dt$$

图　12.3

其中积分路线C见图 12.3．当 $\operatorname{Re}\nu>-1$，$z\notin[-1,1]$时，

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2^{\nu+1}}\int_{-1}^1\frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}dt$$

$$Q_\nu(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch}\theta)^{-\nu-1}d\theta & (\operatorname{Re}\nu>-1)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^\infty(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch}\theta)^\nu d\theta & (\operatorname{Re}\nu<0)\end{cases}$$

$Q_\nu^\mu(z)$

$$=\frac{e^{i\mu\pi}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}t]^{-\nu-\mu-1}(\operatorname{sh}t)^{2\mu}dt$$

$$(|\arg(z\pm1)|<\pi,\ \operatorname{Re}(\nu\pm\mu+1)>0)$$

$Q_\nu^\mu(\cos\theta)$

$$=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\Gamma(\nu-\mu+1)}\left[e^{-\frac{1}{2}i\mu\pi}\int_0^\infty(\cos\theta+i\sin\theta\operatorname{ch}t)^{-\nu-1}\operatorname{ch}(\mu t)dt+\right.$$

$$+e^{\frac{1}{2}i\mu\pi}\int_0^{\infty}(\cos\theta-i\sin\theta\operatorname{ch}t)^{-\nu-1}\operatorname{ch}(\mu t)dt\Big]$$

$$(\operatorname{Re}(\nu\pm\mu+1)>0,\ \nu\neq-1,-2,\cdots)$$

三、勒让德函数的递推公式与有关公式

$$(2\nu+1)zP_\nu^\mu(z)-(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)-(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)=0$$

$$P_{\nu-1}^\mu(z)-P_{\nu+1}^\mu(z)+(2\nu+1)(z^2-1)^{\frac{1}{2}}P_\nu^{\mu-1}(z)=0$$

$$P_\nu^{\mu+2}(z)+2(\mu+1)z(z^2-1)^{-\frac{1}{2}}P_\nu^{\mu+1}(z)-(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)P_\nu^\mu(z)=0$$

$$P'_{\nu+1}(z)-zP'_\nu(z)=(\nu+1)P_\nu(z)$$

$$zP'_\nu(z)-P'_{\nu-1}(z)=\nu P_\nu(z)$$

$$(z^2-1)[P_\nu^\mu(z)]'=(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)-(\nu+1)zP_\nu^\mu(z)$$

$$=\nu zP_\nu^\mu(z)-(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)$$

上述公式对于 $Q_\nu^\mu(z)$ 也适用，只需把公式中的 P 换为 Q. 利用

$$P_\nu^\mu(x+i0)=e^{-\frac{1}{2}i\mu\pi}P_\nu^\mu(x)$$

可得出区间$[-1,1]$上相应的递推公式. 对于 $Q_\nu^\mu(x)$ 也有类似公式.

四、勒让德函数的正交性

这里只讨论函数 $P_l^m(x)$ (l,m 为正整数，$-1<x<1$)的正交性，公式如下

$$\int_{-1}^{1}P_l^n(x)P_k^n(x)dx=\begin{cases}0, & k\neq l\\ \dfrac{2}{2l+1}\dfrac{(l+n)!}{(l-n)!}, & k=l\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_l^n(x)\frac{dx}{1-x^2}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{1}{n}\dfrac{(l+n)!}{(l-n)!}, & m=n\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}P_l^n(x)P_k^{-n}(x)dx=\begin{cases}0, & k\neq l\\ \dfrac{2(-1)^n}{2l+1}, & k=l\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}P_l^n(x)P_l^{-m}(x)\frac{dx}{1-x^2}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{(-1)^n}{n}, & m=n\end{cases}$$

五、勒让德函数的渐近表达式与不等式

[渐近表达式]

$$P_\nu^\mu(z)=\left\{\frac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-\mu+1)}z^\nu+\frac{\Gamma\left(-\nu-\frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu-\mu)}z^{-\nu-1}\right\}\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]$$

$$(2\nu\neq\pm1,\pm3,\pm5,\cdots,|z|\to\infty,|\arg z|<\pi)$$

$$Q_\nu^\mu(z)=\sqrt{\pi}\frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}z^{-\nu-1}\left(1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$$

$$(2\nu\neq-3,-5,\cdots,|z|\to\infty,|\arg z|<\pi)$$

[不等式]

$$|P_\nu^{\pm\mu}(\cos\theta)|<\sqrt{\frac{8}{\nu\pi}}\frac{\Gamma(\nu\pm\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{(\sin\theta)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$|Q_\nu^{\pm\mu}(\cos\theta)|<\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}\frac{\Gamma(\nu\pm\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{(\sin\theta)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$|P_\nu^{\pm m}(\cos\theta)|<\frac{2}{\sqrt{\nu\pi}}\frac{\Gamma(\nu\pm m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{(\sin\theta)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$|Q_\nu^{\pm m}(\cos\theta)|<\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\frac{\Gamma(\nu\pm m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{(\sin\theta)^{m+\frac{1}{2}}}$$

不等式中 ν,μ 为实数，且 $\nu\geqslant1,\nu-\mu+1>0,\mu\geqslant0$, m 为正整数.

§ 5 贝塞耳函数

一、第一类贝塞耳函数

[第一类贝塞耳函数的定义与表达式]

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}\qquad(|\arg z|<\pi)$$

称为第一类 ν 阶贝塞耳函数，它在除去半实轴 $(-\infty,0)$ 的 z 平面内单值解析(当 ν 为整数时，$J_\nu(z)$在全平面上解析)．它满足贝塞耳微分方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0\qquad(1)$$

方程中常数 ν (实数或复数)称为方程的阶或解的阶.

当 $\nu=n$ (整数)时，$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$是 $J_n(z)$的母函数:

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n \qquad (0<|t|<\infty,\ |z|<\infty)$$

且有

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\left\{\frac{\sin z}{z}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n+2k)!}{(2k)!(n-2k)!(2z)^{2k}}\right.$$

$$\left.+\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n+2k+1)!}{(2k+1)!(n-2k-1)!(2z)^{2k+1}}\right\}$$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\left\{\frac{\cos z}{z}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z+\frac{\pi}{2}n\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n+2k)!}{(2k)!(n-2k)!(2z)^{2k}}\right.$$

$$\left.-\sin\left(z+\frac{\pi}{2}n\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n+2k+1)!}{(2k+1)!(n-2k-1)!(2k)^{2k+1}}\right\}$$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

$$J_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$$

$$J_1(z)=\frac{z}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k}k!(k+1)!}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \qquad J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

$$J_{\frac{3}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right) \qquad J_{-\frac{3}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\sin z-\frac{\cos z}{z}\right)$$

$$J_{\frac{5}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\sin z-\frac{3}{z}\cos z\right\}$$

$$J_{-\frac{5}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{3}{z}\sin z+\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\cos z\right\}$$

[积分表达式]

$$J_n(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\cos(z\cos\theta)\sin^{2n}\theta d\theta \qquad \text{(泊松积分表示)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)d\theta \qquad \text{(贝塞耳积分表示)}$$

$$J_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{izt}dt \qquad \left(\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\nu\theta-z\sin\theta)d\theta-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(z\operatorname{sh}\theta+\nu\theta)}d\theta$$

$$(\operatorname{Re}\nu>0,\operatorname{Re}z>0)$$

$$J_\nu(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int_1^{\infty}\frac{\sin xt}{(t^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}dt \qquad \left(x>0,-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\left(x\operatorname{ch}t-\frac{\nu\pi}{2}\right)\operatorname{ch}(\nu t)dt \qquad (x>0,-1<\operatorname{Re}\nu<1)$$

$$J_\nu(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{2\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_B^{(1+,-1-)}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{izt}dt$$

$$\left(\nu\neq\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots,\text{在}B\text{点},\arg(t^2-1)=0\right)$$

积分路线如图 12.4 的"8"字形，在 B 点 $\arg(t-1)=\arg(t+1)=0$.

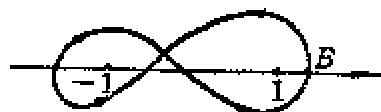


图 12.4

$$J_\nu(z)=\frac{z^\nu}{2^{\nu+1}\pi i}\int_{-\infty}^{0^+}t^{-\nu-1}e^{t-\frac{z^2}{4t}}dt \qquad (|\arg t|\leqslant\pi)$$

[有关公式]

$$\int_0^{\infty}t^{-1}J_{\nu+2n+1}(t)J_{\nu+2m+1}(t)dt=\begin{cases}0, & m\neq n\\ (4n+2\nu+2)^{-1}, & m=n,\ \nu>-1\end{cases}$$

$$\int_0^1 tJ_\nu(\alpha_m t)J_\nu(\alpha_n t)dt=\begin{cases}0, & m\neq n,\ \nu>-1\\ \frac{1}{2}[J_{\nu+1}(\alpha_m)]^2, & m=n,\ \nu>-1\end{cases}$$

其中 α_m,α_n 为函数 $J_\nu(x)$ 的两个正零点.

$$\int_0^1 tJ_\nu(\lambda_m t)J_\nu(\lambda_n t)dt$$

$$=\begin{cases}0, & m\neq n,\ \nu\geqslant-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}\lambda_m^{-2}\{\lambda_m^2[J'_\nu(\lambda_m)]^2+(\lambda_m^2-\nu^2)[J_\nu(\lambda_m)]^2\}, & m=n,\ \nu\geqslant-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

其中 λ_m,λ_n 为函数 $zJ'_\nu(z)+\alpha J_\nu(z)$ 的两个正零点，且 $\nu\geqslant\dfrac{-1}{2}$，$\alpha$ 是任意给定的常数.

$$J_n(x\pm y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{n\mp k}(y)\qquad\text{（加法公式）}$$

$$J_0(\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta})=J_0(r_1)J_0(r_2)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_m(r_1)J_m(r_2)\cos m\theta,$$

其中 r_1 和 r_2 表示原点 O 到平面上任意两点 P_1,P_2 的距离，θ 为 OP_1 和 OP_2 的交角.

［渐近表达式］

$$J_\nu(z)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Gamma\left(\nu+2k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!\Gamma\left(\nu-2k+\frac{1}{2}\right)(2z)^{2k}}+O(z^{-2n-2})\right]$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\nu+2k+\frac{3}{2}\right)}{(2k+1)!\Gamma\left(\nu-2k-\frac{1}{2}\right)(2z)^{2k+1}}+O(z^{-2n-1})\right]$$

$$(\nu\text{ 固定},|z|\to\infty,|\arg z|<\pi)$$

$$J_\nu(z)\sim e^{\nu+\nu\ln\frac{z}{2}-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\ln\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+O(\nu^{-1})\right]\qquad(z\text{ 固定},|\nu|\to\infty)$$

$$J_\nu(x)\approx\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}\qquad(x\to0)$$

$$J_\nu(x)\approx\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\qquad(x\to\infty)$$

$$J_\nu^2(x)+J_{\nu+1}^2(x)\approx\frac{2}{\pi x}\qquad(x\gg|\nu|)$$

$$|J_\nu(z)|\leqslant\left|\frac{1}{2}z\right|^\nu\frac{e^y}{\Gamma(\nu+1)}\qquad\left(\text{其中}y=\operatorname{Im}z,\ \nu>-\frac{1}{2}\right)$$

二、第二类贝塞耳函数(诺伊曼函数)

[第二类贝塞耳函数的定义与其他表达式]

$$N_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}\qquad(|z|<\infty,\ |\arg z|<\pi)$$

称为第二类贝塞耳函数(有的书中$N_\nu(z)$也记作$Y_\nu(z)$),又称为诺伊曼函数,它也是贝塞耳微分方程(1)的解,式中$J_\nu(z)$为第一类贝塞耳函数.

$$N_{-\nu}(z)=J_\nu(z)\sin\nu\pi+N_\nu(z)\cos\nu\pi$$

$N_\nu(z)$和$N_{-\nu}(z)$在除去半实轴$(-\infty,0)$的z平面内的单值解析.

$$N_\nu(z)=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left\{\cos(\nu\pi)\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k-\nu+1)}\right\}\quad(\nu\neq\text{整数})$$

$$N_n(z)=\lim_{\nu\to n}N_\nu(z)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2}+\gamma\right)J_n(z)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m}\right)$$

$$(n=0,1,2,\cdots,\ |\arg z|<\pi,\ \gamma\text{为欧拉常数})$$

$$N_{-n}(z)=(-1)^nN_n(z)$$

$$N_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n-1}J_{-n-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{\cos z}{z}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\frac{(n+2k+1)!(2z)^{-2k-1}}{(2k+1)!(n-2k-1)!}\right.$$

$$\left.-\cos\left(z-\frac{n\pi}{z}\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(n+2k)!}{(2k)!(n-2k)!}(2z)^{-2k}\right]$$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

$$N_{-n-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\left(\frac{\sin z}{z}\right)\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$N_0(z)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2}+\gamma\right)J_0(z)-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}$$

$$N_1(z)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2}+\gamma\right)J_1(z)$$

$$-\frac{2}{z\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1}}{k!(k-1)!}\left[2\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m}+\frac{1}{k}\right]$$

$$N_{\frac{1}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

$$N_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

$$N_{\frac{3}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\sin z+\frac{\cos z}{z}\right)$$

$$N_{-\frac{3}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right)$$

［积分表达式］

$$N_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi\sin(z\sin t-\nu t)dt-\int_0^\infty(e^{\nu t}+e^{-\nu t}\cos(\nu\pi))e^{-z\operatorname{sh}t}dt\right]$$
$$(\operatorname{Re} z>0)$$

$$N_\nu(x)=\frac{-2\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int_1^\infty\frac{\cos xt}{(t^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}dt\qquad\left(-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2},x>0\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos\left(x\operatorname{ch}t-\frac{\nu\pi}{2}\right)\operatorname{ch}\nu t\,dt\qquad(-1<\operatorname{Re}\nu<1,x>0)$$

$$N_0(x)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^1\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(xt)dt-\frac{4}{\pi^2}\int_1^\infty\frac{\ln(t-\sqrt{t^2-1})}{\sqrt{t^2-1}}\sin(xt)dt$$
$$(x>0)$$

［渐近表达式］

$$N_{\pm\nu}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z\mp\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2z)^{2k}}\frac{\Gamma\left(\nu+2k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!\Gamma\left(\nu-2k+\frac{1}{2}\right)}\right.\right.$$
$$\left.+O(z^{-2n-2})\right]$$

$$+\cos\left(z\mp\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2z)^{2k+1}}\frac{\Gamma\left(\nu+2k+\frac{3}{2}\right)}{(2k+1)\Gamma\left(\nu-2k-\frac{1}{2}\right)}\right.$$

$$\left.+O(z^{-2n-3})\right]\Bigg\}$$

$$(\nu\text{固定},\ |z|\to\infty,\ |\arg z|<\pi)$$

$$N_\nu(x)\approx\frac{-2^\nu\Gamma(\nu)}{\pi x^\nu}\qquad(\nu>0,\ x\to0)$$

$$N_0(x)\approx\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{x}\qquad(x\to0)$$

三、第三类贝塞耳函数(汉克尔函数)

[第三类贝塞耳函数的定义与表达式]

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iN_\nu(z)=\frac{J_{-\nu}(z)-J_\nu(z)e^{-i\pi\nu}}{i\sin(\nu\pi)}$$

$$(|z|<\infty,\ |\arg z|<\pi)$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iN_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)e^{i\nu\pi}-J_{-\nu}(z)}{i\sin(\nu\pi)}$$

称为第三类贝塞耳函数. $H_\nu^{(1)}(z)$和$H_\nu^{(2)}(z)$分别称为第一类和第二类汉克尔函数，它们在除去半实轴$(-\infty,0)$的z平面内单值解析，且满足贝塞耳微分方程(1)．

$$H_{-\nu}^{(1)}(z)=e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z)\qquad H_{-\nu}^{(2)}(z)=e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z)$$

$$\lim_{\nu\to n}H_\nu^{(1)}(z)=H_n^{(1)}(z)\qquad \lim_{\nu\to n}H_\nu^{(2)}(z)=H_n^{(2)}(z)$$

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)=J_{n+\frac{1}{2}}(z)+i(-1)^{n+1}J_{-n-\frac{1}{2}}(z)$$

$$=-i(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\left(\frac{e^{iz}}{z}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}i^{-n-1}e^{iz}\sum_{k=0}^{n}i^k\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}\frac{1}{(2z)^k}$$

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z)=J_{n+\frac{1}{2}}(z)-i(-1)^{n+1}J_{-n-\frac{1}{2}}(z)$$

$$=i(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\left(\frac{e^{-iz}}{z}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}i^{n+1}e^{-iz}\sum_{k=0}^{n}(-i)^k\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}\frac{1}{(2z)^k}$$

$$H^{(1)}_{-n-\frac{1}{2}}(z)=i(-1)^n H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

$$H^{(2)}_{-n-\frac{1}{2}}(z)=-i(-1)^n H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{iz}}{i} \qquad H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{iz}$$

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{-iz}}{-i} \qquad H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-iz}$$

[积分表达式]

$$H^{(1)}_{\nu}(z)=\frac{1}{\pi i}e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iz\operatorname{ch}t-\nu t}\,dt \qquad (0\leqslant\arg z<\pi,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1)$$

$$H^{(2)}_{\nu}(z)=\frac{-e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iz\operatorname{ch}t-\nu t}\,dt \qquad (-\pi<\arg z\leqslant 0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1)$$

$$H^{(1)}_{\nu}(z)=\frac{-2i\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int_{1}^{\infty}\frac{e^{izt}}{(t^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dt \qquad \left(\operatorname{Im}z\geqslant 0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right)$$

$$H^{(2)}_{\nu}(z)=\frac{2i\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-izt}}{(t^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dt \qquad \left(\operatorname{Im}z\leqslant 0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right)$$

$$H^{(1)}_{\nu}(z)=\sqrt{\frac{2i}{\pi z}}\,\frac{e^{i\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$\left(\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi\right)$$

$$H^{(2)}_{\nu}(z)=\sqrt{\frac{-2i}{\pi z}}\,\frac{e^{-i\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$\left(\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ -\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$H^{(1)}_{\nu}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{1+\infty i}^{(1+)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$H^{(2)}_{\nu}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1+\infty i}^{(-1-)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$\left(\mathrm{Re}\, z>0, \nu+\frac{1}{2}\neq\text{正整数}, |\arg(t^2-1)|<\pi\right)$$

积分路线如图 12.5.

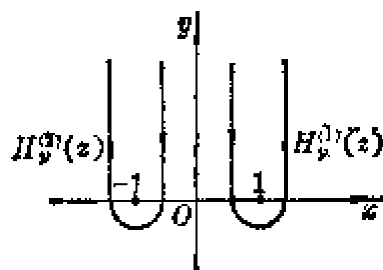


图 12.5

[渐近表达式]

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{(2iz)^k k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}+O(z^{-n-1})\right]$$

$$(\nu\text{ 固定}, |z|\to\infty, -\pi<\arg z<2\pi)$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2iz)^k}\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}+O(z^{-n-1})\right]$$

$$(\nu\text{ 固定}, |z|\to\infty, -2\pi<\arg z<\pi)$$

$$H_\nu^{(1)}(x)\approx -i\left(\frac{2}{x}\right)^\nu\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \qquad (\nu>0, x\to 0)$$

$$H_\nu^{(2)}(x)\approx i\left(\frac{2}{x}\right)^\nu\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \qquad (\nu>0, x\to 0)$$

$$H_0^{(1)}(x)\approx -i\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{x} \qquad (x\to 0)$$

$$H_0^{(2)}(x)\approx i\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{x} \qquad (x\to 0)$$

四、各类贝塞耳函数之间的关系与有关公式

[自递推关系] 下面 $Z_\nu(z)$表示贝塞耳函数 $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ 及 $H_\nu^{(2)}(z)$.

$$zZ_{\nu-1}(z)+zZ_{\nu+1}(z)=2\nu Z_\nu(z)$$

$$\frac{d}{dz}Z_\nu(z)=\frac{1}{2}[Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)]$$

$$=Z_{\nu-1}(z)-\frac{\nu}{z}Z_\nu(z)=\frac{\nu}{z}Z_\nu(z)-Z_{\nu+1}(z)$$

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m [z^\nu Z_\nu(z)] = z^{\nu-m} Z_{\nu-m}(z)$$

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m [z^{-\nu} Z_\nu(z)] = (-1)^m z^{-\nu-m} Z_{\nu+m}(z)$$

$$Z_{-n}(z) = (-1)^n Z_n(z) = Z_n(-z)$$

[各类贝塞耳函数之间的关系]

$$J_\nu(z) = \frac{N_{-\nu}(z) - N_\nu(z)\cos(\nu\pi)}{\sin(\nu\pi)} = H_\nu^{(1)}(z) - iN_\nu(z)$$

$$= H_\nu^{(2)}(z) + iN_\nu(z) = \frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z))$$

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} = iJ_\nu(z) - iH_\nu^{(1)}(z)$$

$$= iH_\nu^{(2)}(z) - iJ_\nu(z) = \frac{i}{2}[H_\nu^{(2)}(z) - H_\nu^{(1)}(z)]$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-\nu\pi i}J_\nu(z)}{i\sin(\nu\pi)} = \frac{N_{-\nu}(z) - e^{-\nu\pi i}N_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}$$

$$= J_\nu(z) + iN_\nu(z)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{e^{\nu\pi i}J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i\sin(\nu\pi)} = \frac{N_{-\nu}(z) - e^{\nu\pi i}N_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}$$

$$= J_\nu(z) - iN_\nu(z)$$

[其他有关公式]

$$J_\nu(z)J_{-\nu+1}(z) + J_{-\nu}(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z}$$

$$= J'_\nu(z)J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)J'_{-\nu}(z)$$

$$J_\nu(z)N_{\nu-1}(z) - N_\nu(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi z} = J_\nu(z)N'_\nu(z) - J'_\nu(z)N_\nu(z)$$

$$J_\nu(z)H_{\nu-1}^{(1)}(z) - J_{\nu-1}(z)H_\nu^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi z} = J_\nu(z)H_\nu^{(1)\prime}(z) - J'_\nu(z)H_\nu^{(1)}(z)$$

$$J_\nu(z)H_{\nu-1}^{(2)}(z) - J_{\nu-1}(z)H_\nu^{(2)}(z) = \frac{-2i}{\pi z} = J_\nu(z)H_\nu^{(2)\prime}(z) - J'_\nu(z)H_\nu^{(2)}(z)$$

$$H_\nu^{(1)}(z)H_{\nu-1}^{(2)}(z) - H_{\nu-1}^{(1)}(z)H_\nu^{(2)}(z) = \frac{-4i}{\pi z} = H_\nu^{(1)}(z)H_\nu^{(2)\prime}(z)$$

$$-H_\nu^{(1)\prime}(z)\ H_\nu^{(2)}(z)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-\nu^2}} > \frac{\pi}{2}[J_\nu^2(x) + N_\nu^2(x)] \geqslant \frac{1}{x} \qquad \left(x \geqslant \nu \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

五、变型贝塞耳函数

[变型贝塞耳函数的定义与表达式]

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}\qquad(|z|<\infty,\ |\arg z|<\pi)$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}i^{1+\nu}H_\nu^{(1)}(iz)=\frac{-\pi}{2}i^{1-\nu}H_\nu^{(2)}(-iz)$$

$$=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}\qquad(|\arg z|<\pi,\ \nu\neq0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

分别称为第一类和第二类变型贝塞耳函数，$K_\nu(z)$也称为白塞特(Basset)函数，它们在除去半实轴$(-\infty,0)$的z平面内单值解析

$$I_\nu(z)=e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}J_\nu(iz)\qquad\left(-\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=e^{\frac{\nu\pi i}{2}}J_\nu(-iz)\qquad\left(\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi\right)$$

$$K_{-\nu}(z)=K_\nu(z)$$

$$I_{-n}(z)=I_n(z)\qquad(n\text{ 为正整数})$$

$$K_n(z)=\lim_{\nu\to n}K_\nu(z)=(-1)^{n+1}I_n(z)\left(\ln\frac{z}{2}+\gamma\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$+\frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m}\right)$$

$$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\ \gamma\text{ 为欧拉常数})$$

$$I_{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left[e^z\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}\right.$$

$$\left.\pm(-1)^{n+1}e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}\right]$$

$$K_{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2k)^k}$$

$$=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{e^{-z}}{z}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$I_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2},\qquad I_1(z)=I_0'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$$

$$K_0(z)=-\left(\ln\frac{z}{2}+\gamma\right)I_0(z)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}$$

$$I_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{sh}z\qquad I_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{ch}z$$

$$K_{\pm\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}$$

$$I_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}e^{-z}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\nu;\ 1+2\nu;\ 2z\right)$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi e^{-z}}{2\sin\nu\pi}\left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(1-\nu)}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\nu;\ 1-2\nu;\ 2z\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(1+\nu)}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\nu;\ 1+2\nu;\ 2z\right)\right]$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}{}_1F_1\left(\alpha;\ \gamma;\ \frac{z}{\alpha}\right)=\Gamma(\gamma)z^{\frac{1-\gamma}{2}}I_{\gamma-1}(2\sqrt{z})\qquad(|\arg z|<\pi)$$

[积分表达式]

$$I_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{-zt}dt\qquad\left(\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{z\cos\theta}\cos(\nu\theta)d\theta-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-z\operatorname{ch}t-\nu t}dt$$

$$\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$K_\nu(z)=\frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_1^{\infty}e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-z\operatorname{ch}t}\operatorname{ch}(\nu t)dt\qquad\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{(2z)^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}(t^2+z^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}\cos t\,dt$$

$$\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$K_{\nu}(x)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}\int_0^{\infty}\cos(x\operatorname{sh}t)\operatorname{ch}(\nu t)dt \qquad (x>0,\ -1<\operatorname{Re}\nu<1)$$

$$K_n(z)=\frac{(2n)!}{2^n n!z^n}\int_0^{\infty}\frac{\cos(z\operatorname{sh}t)}{\operatorname{ch}^{2n}t}dt \qquad (\operatorname{Re}z>0,\ n\text{ 为整数})$$

[有关公式]

$$zI_{\nu-1}(z)-zI_{\nu+1}(z)=2\nu I_{\nu}(z) \qquad zK_{\nu-1}(z)-zK_{\nu+1}(z)=-2\nu K_{\nu}(z)$$

$$I'_{\nu}(z)=\frac{1}{2}[I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z)]$$

$$=I_{\nu-1}(z)-\frac{\nu}{z}I_{\nu}(z)=\frac{\nu}{z}I_{\nu}(z)+I_{\nu+1}(z)$$

$$K'_{\nu}(z)=-\frac{1}{2}[K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)]$$

$$=-K_{\nu-1}(z)-\frac{\nu}{z}K_{\nu}(z)=\frac{\nu}{z}K_{\nu}(z)-K_{\nu+1}(z)$$

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m[z^{\nu}I_{\nu}(z)]=z^{\nu-m}I_{\nu-m}(z)$$

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m[z^{\nu}K_{\nu}(z)]=(-1)^m z^{\nu-m}K_{\nu-m}(z)$$

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m[z^{-\nu}I_{\nu}(z)]=z^{-\nu-m}I_{\nu+m}(z)$$

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^m[z^{-\nu}K_{\nu}(z)]=(-1)^m z^{-\nu-m}K_{\nu+m}(z)$$

$$I_{\nu}(z)I_{-\nu+1}(z)-I_{-\nu}(z)I_{\nu-1}(z)=\frac{-2\sin(\nu\pi)}{\pi z}=I_{\nu}(z)I'_{-\nu}(z)-I'_{\nu}(z)I_{-\nu}(z)$$

$$I_{\nu}(z)K_{\nu+1}(z)+I_{\nu+1}(z)K_{\nu}(z)=\frac{1}{z}=I'_{\nu}(z)K_{\nu}(z)-I_{\nu}(z)K'_{\nu}(z)$$

[渐近表达式]

$$I_{\nu}(z)\approx\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\ \Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{(2z)^k k!\ \Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}+$$

$$+\frac{e^{-z\pm\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi i}}{\sqrt{2\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2z)^k}\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}\quad(\nu\text{ 固定},\ |z|\to\infty)$$

式中"±"号这样选取：当 $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$ 时，取正号，$-\frac{3}{2}\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}$ 时，取负号．

$$K_\nu(z)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2z}\right)^k\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\,\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}+O(z^{-n})\right]$$

$$\left(-\frac{3}{2}\pi<\arg z<\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$I_\nu(x)\approx\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}\qquad(\nu>0,\ x\to0)$$

$$K_\nu(x)\approx\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{x^\nu}\qquad(\nu>0,\ x\to0)$$

$$K_0(x)\approx\ln\frac{2}{x}\qquad(x\to0)$$

§6 椭圆函数

一、椭圆函数的定义与性质

双周期的半纯函数称为椭圆函数．

若 2ω 和 $2\omega'$ $\left(\operatorname{Im}\frac{\omega'}{\omega}>0\right)$ 是椭圆函数 $f(z)$ 的两个基本周期（也称原始周期），对于任意整数 m，n 有

$$f(z+2m\omega+2n\omega')\equiv f(z)$$

以

$$z,\ z+2\omega,\ z+2\omega+2\omega',\ z+2\omega'$$

为顶点（其中 z 为任一复数）的平行四边形称为周期平行四边形．整个 z 平面可组成这样的周期平行四边形网（图 12.6）．

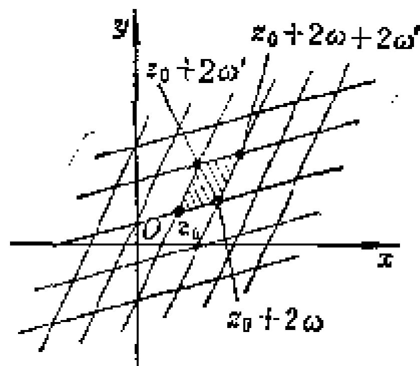


图 12.6

$f(z)$ 在一个周期平行四边形内（包括两个邻边及其交点）极点的个数（极点个数与零点个数相等，n 阶极点算作 n 个）称为椭圆函数的阶．阶为 s 的椭圆函数称为 s 阶椭圆函数．

椭圆函数具有以下性质:

1° 周期相同的椭圆函数的和、差、积、商及导数是具有同样周期的椭圆函数.

2° 不是常数的椭圆函数必有极点.

具有相同周期、零点和极点(零点和极点的阶数也相同)的椭圆函数的商是一个常数.

具有相同周期、相同的极点,且在每一极点上的主要部分也相同的椭圆函数相差一个常数.

3° 椭圆函数在它的周期平行四边形内所有极点上留数之和等于零.

4° 椭圆函数的阶数至少等于2.

5° 在周期平行四边形内,椭圆函数取每一个(有限或无限)值的次数都一样,且等于椭圆函数的阶.

6° 椭圆函数在周期平行四边形内所有零点的和与所有极点之和的差等于它的某个周期,即

$$\sum_{k=1}^{s} a_k - \sum_{k=1}^{s} b_k = 2m\omega + 2n\omega'$$

式中 a_k 为零点, b_k 为极点, m, n 为某一确定整数.

二、雅可比椭圆函数

[雅可比椭圆函数的定义与级数表达式]

第一类椭圆积分

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

的反函数是双周期的亚纯函数,记作

$$w = \operatorname{sn} z = \operatorname{sn}(z, k)$$

它具有基本周期:

$$\omega = 4K = 4F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$\omega' = 2iK' = 2iF\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = 2i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}$$

$$(k' = \sqrt{1-k^2})$$

$\operatorname{sn} z$ 称为椭圆正弦,式中 k 称为模, k' 称为补模.若

$$\sin\phi = \operatorname{sn} z$$

则称 ϕ 为 z 的振幅函数，记作 $\phi = \operatorname{am} z$．又定义

$$\operatorname{cn} z = \cos\phi = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z} \quad \text{(称为椭圆余弦)}$$

$$\operatorname{tn} z = \operatorname{tg}\phi = \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z} = \frac{\operatorname{sn} z}{\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z}} \quad \text{(称为椭圆正切)}$$

$$\operatorname{dn} z = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 z}$$

$\operatorname{sn} z$，$\operatorname{cn} z$，$\operatorname{tn} z$，$\operatorname{dn} z$ 统称为雅可比椭圆函数．它们都是二阶椭圆函数．

$$\operatorname{sn} z = z - \frac{1+k^2}{3!}z^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}z^5 - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{7!}z^7 + \frac{1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8}{9!}z^9 - \cdots \quad (|z|<|K'|)$$

$$\operatorname{cn} z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1+4k^2}{4!}z^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6!}z^6 + \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{8!}z^8 - \cdots \quad (|z|<|K'|)$$

$$\operatorname{dn} z = 1 - \frac{k^2}{2!}z^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{4!}z^4 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{6!}z^6 + \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{8!}z^8 - \cdots \quad (|z|<|K'|)$$

$$\operatorname{am} z = z - \frac{k^2}{3!}z^3 + \frac{k^2(4+k^2)}{5!}z^5 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{7!}z^7 + \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{9!}z^9 - \cdots \quad (|z|<|K'|)$$

[特殊点的值]

z	0	$K/2$	K	$iK'/2$	$K+iK'/2$	iK'	$K+iK'$
$\operatorname{sn} z$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	1	$\frac{i}{\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	∞	$\frac{1}{k}$
$\operatorname{cn} z$	1	$\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	0	$\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	$-\sqrt{\frac{k-1}{k}}$	∞	$-\frac{ik'}{k}$
$\operatorname{dn} z$	1	$\sqrt{k'}$	k'	$\sqrt{1+k}$	$\sqrt{1-k}$	∞	0

［周期・零点・极点・留数］

	基本周期	零　点	极　点	留　数
$\mathrm{sn}\, z$	$4K;\ 2iK'$	$2mK+2niK'$	$2mK+(2n+1)iK'$	$(-1)^m\dfrac{1}{k}$
$\mathrm{cn}\, z$	$4K;\ 2K+2iK'$	$(2m+1)K+2niK'$	$2mK+(2n+1)iK'$	$(-1)^{m+n}\dfrac{1}{ik}$
$\mathrm{dn}\, z$	$2K;\ 4iK'$	$(2m+1)K+(2n+1)iK'$	$2mK+(2n+1)iK'$	$(-1)^{n-1}i$

［诱导公式表］　　$\mathrm{sn}(mK+niK'\pm z)$

$n \backslash m$	-1	0	1	2	$2p$
-1	$-\dfrac{\mathrm{dn}\, z}{k\,\mathrm{cn}\, z}$	$\pm\dfrac{1}{k\,\mathrm{sn}\, z}$	$\dfrac{\mathrm{dn}\, z}{k\,\mathrm{cn}\, z}$	$\mp\dfrac{1}{k\,\mathrm{sn}\, z}$	
0	$-\dfrac{\mathrm{cn}\, z}{\mathrm{dn}\, z}$	$\pm\ \mathrm{sn}\, z$	$\dfrac{\mathrm{cn}\, z}{\mathrm{dn}\, z}$	$\mp\ \mathrm{sn}\, z$	
1	$-\dfrac{\mathrm{dn}\, z}{k\,\mathrm{cn}\, z}$	$\pm\dfrac{1}{k\,\mathrm{sn}\, z}$	$\dfrac{\mathrm{dn}\, z}{k\,\mathrm{cn}\, z}$	$\mp\dfrac{1}{k\,\mathrm{sn}\, z}$	
2	$-\dfrac{\mathrm{cn}\, z}{\mathrm{dn}\, z}$	$\pm\ \mathrm{sn}\, z$	$\dfrac{\mathrm{cn}\, z}{\mathrm{dn}\, z}$	$\mp\ \mathrm{sn}\, z$	
$2q$					$(-1)^p\mathrm{sn}\, z$

$\mathrm{cn}(mK+niK'\pm z)$

$n \backslash m$	-1	0	1	2	$2p$
-1	$-\dfrac{ik'}{k\,\mathrm{cn}\, z}$	$\pm\dfrac{i\,\mathrm{dn}\, z}{k\,\mathrm{sn}\, z}$	$\dfrac{ik'}{k\,\mathrm{cn}\, z}$	$\mp\dfrac{i\,\mathrm{dn}\, z}{k\,\mathrm{sn}\, z}$	
0	$\pm\dfrac{k'\,\mathrm{sn}\, z}{\mathrm{dn}\, z}$	$\mathrm{cn}\, z$	$\mp\dfrac{k'\,\mathrm{sn}\, z}{\mathrm{dn}\, z}$	$-\ \mathrm{cn}\, z$	
1	$\dfrac{ik'}{k\,\mathrm{cn}\, z}$	$\mp\dfrac{i\,\mathrm{dn}\, z}{k\,\mathrm{sn}\, z}$	$-\dfrac{ik'}{k\,\mathrm{cn}\, z}$	$\pm\dfrac{i\,\mathrm{dn}\, z}{k\,\mathrm{sn}\, z}$	
2	$\mp\dfrac{k'\,\mathrm{sn}\, z}{\mathrm{dn}\, z}$	$-\ \mathrm{cn}\, z$	$\pm\dfrac{k'\,\mathrm{sn}\, z}{\mathrm{dn}\, z}$	$\mathrm{cn}\, z$	
$2q$					$(-1)^{p+q}\mathrm{cn}\, z$

$\mathrm{dn}(mK+niK'+z)$

n \ m	-1	0	1	2	p
-1	$\mp\dfrac{ik'\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{cn}\,z}$	$\pm\dfrac{i\,\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}$	$\mp\dfrac{ik'\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{cn}\,z}$	$\pm\dfrac{i\,\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}$	
0	$\dfrac{k'}{\mathrm{dn}\,z}$	$\mathrm{dn}\,z$	$\dfrac{k'}{\mathrm{dn}\,z}$	$\mathrm{dn}\,z$	
1	$\pm\dfrac{ik'\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{cn}\,z}$	$\mp\dfrac{i\,\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}$	$\pm\dfrac{ik'\mathrm{sn}\,z}{\mathrm{cn}\,z}$	$\mp\dfrac{i\,\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{sn}\,z}$	
2	$-\dfrac{k'}{\mathrm{dn}\,z}$	$-\mathrm{dn}\,z$	$-\dfrac{k'}{\mathrm{dn}\,z}$	$-\mathrm{dn}\,z$	
q					$(-1)^q\,\mathrm{dn}\,z$

[变换公式]

z_1	k_1	$\mathrm{sn}(z_1,k_1)$	$\mathrm{cn}(z_1,k_1)$	$\mathrm{dn}(z_1,k_1)$
kz	$\dfrac{1}{k}$	$k\,\mathrm{sn}(z,k)$	$\mathrm{dn}(z,k)$	$\mathrm{cn}(z,k)$
iz	k'	$i\dfrac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{cn}(z,k)}$	$\dfrac{1}{\mathrm{cn}(z,k)}$	$\dfrac{\mathrm{dn}(z,k)}{\mathrm{cn}(z,k)}$
$k'z$	$i\dfrac{k}{k'}$	$k'\dfrac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}$	$\dfrac{\mathrm{cn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}$	$\dfrac{1}{\mathrm{dn}(z,k)}$
ikz	$i\dfrac{k'}{k}$	$ik\dfrac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}$	$\dfrac{1}{\mathrm{dn}(z,k)}$	$\dfrac{\mathrm{cn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}$

z_1	k_1	$\operatorname{sn}(z_1,k_1)$	$\operatorname{cn}(z_1,k_1)$	$\operatorname{dn}(z_1,k_1)$
$ik'z$	$\dfrac{1}{k'}$	$ik'\dfrac{\operatorname{sn}(z,k)}{\operatorname{cn}(z,k)}$	$\dfrac{\operatorname{dn}(z,k)}{\operatorname{cn}(z,k)}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cn}(z,k)}$
$(1+k)z$	$\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$(1+k)\dfrac{\operatorname{sn}(z,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(z,k)}$	$\dfrac{\operatorname{cn}(z,k)\operatorname{dn}(z,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(z,k)}$	$\dfrac{1-k\operatorname{sn}^2(z,k)}{1+k\operatorname{sn}^2(z,k)}$
$(1+k')z$	$\dfrac{1-k'}{1+k'}$	$(1+k')\dfrac{\operatorname{sn}(z,k)\operatorname{cn}(z,k)}{\operatorname{dn}(z,k)}$	$\dfrac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2(z,k)}{\operatorname{dn}(z,k)}$	$\dfrac{1-(1-k')\operatorname{sn}^2(z,k)}{\operatorname{dn}(z,k)}$
$\dfrac{(1+\sqrt{k'})^2}{2}z$	$\left(\dfrac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$	$\dfrac{k^2\operatorname{sn}(z,k)\operatorname{cn}(z,k)}{\sqrt{k'[1+\operatorname{dn}(z,k)][k'+\operatorname{dn}(z,k)]}}$	$\dfrac{\operatorname{dn}(z,k)-\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\cdot\sqrt{\dfrac{2(1+k')}{[1+\operatorname{dn}(z,k)][k'+\operatorname{dn}(z,k)]}}$	$\dfrac{\sqrt{1+k'}(\operatorname{dn}(z,k)+\sqrt{k'})}{\sqrt{[1+\operatorname{dn}(z,k)][k'+\operatorname{dn}(z,k)]}}$
iz	k	$i\dfrac{\operatorname{sn}(z,k')}{\operatorname{cn}(z,k')}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cn}(z,k')}$	$\dfrac{\operatorname{dn}(z,k')}{\operatorname{cn}(z,k')}$
z	ik	$\dfrac{\operatorname{sn}[z\sqrt{1+k^2},\ k(1+k^2)^{-\frac{1}{2}}]}{\sqrt{1+k^2}\operatorname{dn}[z\sqrt{1+k^2},\ k(1+k^2)^{-\frac{1}{2}}]}$	$\dfrac{\operatorname{cn}\left[z\sqrt{1+k^2},\ \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right]}{\operatorname{dn}\left[z\sqrt{1+k^2},\ \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right]}$	$\dfrac{1}{\operatorname{dn}\left[z\sqrt{1+k^2},\ \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right]}$

[基本关系]

$$\mathrm{sn}^2 z+\mathrm{cn}^2 z=1 \qquad \mathrm{dn}^2 z+k^2\mathrm{sn}^2 z=1 \qquad \mathrm{dn}^2 z-k^2\mathrm{cn}^2 z=1-k^2=k'^2$$

$$\mathrm{am}\,(-z)=-\mathrm{am}\,(z) \qquad \mathrm{sn}\,(-z)=-\mathrm{sn}\,(z) \qquad \mathrm{cn}\,(-z)=\mathrm{cn}\,(z)$$

$$\mathrm{tn}\,(-z)=-\mathrm{tn}\,(z) \qquad \mathrm{dn}\,(-z)=-\mathrm{dn}\,(z)$$

[加法公式]

$$\mathrm{sn}\,(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta\pm\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,z}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}^2 z-\mathrm{sn}^2\zeta}{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta\mp\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z}$$

$$\mathrm{cn}\,(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{cn}\,\zeta\mp\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{dn}\,\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,\zeta\mp\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,z}{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta\mp\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z}$$

$$\mathrm{dn}\,(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{dn}\,z\,\mathrm{dn}\,\zeta\mp k^2\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{cn}\,\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,z\mp\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,\zeta}{\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,\zeta\,\mathrm{dn}\,\zeta\mp\mathrm{sn}\,\zeta\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z}$$

[倍数公式]

$$\mathrm{sn}\,2z=\frac{2\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z}$$

$$\mathrm{cn}\,2z=\frac{\mathrm{cn}^2 z-\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{dn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z}=1-\frac{2\,\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{dn}^2 z}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4 z}$$

$$=\frac{2\mathrm{cn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z}-1$$

$$\mathrm{dn}\,2z=\frac{\mathrm{dn}^2 z-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{cn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z}=1-\frac{2k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{cn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z}$$

$$=\frac{2\mathrm{dn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^4 z}-1$$

[半数公式]

$$\mathrm{sn}^2\frac{z}{2}=\frac{1-\mathrm{cn}\,z}{1+\mathrm{dn}\,z}=\frac{1-\mathrm{dn}\,z}{k^2\,(1+\mathrm{cn}\,z)}=\frac{\mathrm{dn}\,z-\mathrm{cn}\,z}{k'^2+\mathrm{dn}\,z-k^2\,\mathrm{cn}\,z}$$

$$\mathrm{cn}^2\frac{z}{2}=\frac{\mathrm{cn}\,z+\mathrm{dn}\,z}{1+\mathrm{dn}\,z}=\frac{k^2\mathrm{cn}\,z-k'^2+\mathrm{dn}z}{k^2(1+\mathrm{cn}\,z)}=\frac{k'^2(1+\mathrm{cn}\,z)}{k'^2+\mathrm{dn}\,z-k^2\,\mathrm{cn}\,z}$$

$$\mathrm{dn}^2\frac{z}{2}=\frac{\mathrm{cn}\,z+\mathrm{dn}\,z}{1+\mathrm{cn}\,z}=\frac{k'^2+k^2\mathrm{cn}\,z+\mathrm{dn}\,z}{1+\mathrm{dn}\,z}=\frac{k'^2(1+\mathrm{dn}\,z)}{k'^2+\mathrm{dn}\,z-k^2\,\mathrm{cn}\,z}$$

[乘法公式]

$$\mathrm{sn}\,(z+\zeta)\,\mathrm{sn}\,(z-\zeta)=\frac{\mathrm{sn}^2 z-\mathrm{sn}^2\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2\zeta}$$

$$\mathrm{cn}\,(z+\zeta)\,\mathrm{cn}\,(z-\zeta)=\frac{\mathrm{cn}^2 z-\mathrm{sn}^2\zeta\,\mathrm{dn}^2 z}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2\zeta}$$

$$\mathrm{dn}\,(z+\zeta)\,\mathrm{dn}\,(z-\zeta)=\frac{\mathrm{dn}^2 z-k^2\,\mathrm{sn}^2\zeta\,\mathrm{cn}^2 z}{1-k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{sn}^2\zeta}$$

$$\mathrm{sn}^2 z-\mathrm{sn}^2\zeta=\mathrm{cn}^2\zeta-\mathrm{cn}^2 z$$

[导数与积分公式]

$$\frac{d}{dz}\mathrm{sn}\, z=\mathrm{cn}\, z\,\mathrm{dn}\, z\qquad \frac{d}{dz}\mathrm{cn}\, z=-\mathrm{sn}\, z\,\mathrm{dn}\, z,\qquad \frac{d}{dz}\mathrm{dn}\, z=-k^2\mathrm{sn}\, z\,\mathrm{cn}\, z$$

$$\int \mathrm{sn}\, z\, dz=\frac{1}{k}\ln(\mathrm{dn}\, z-k\,\mathrm{cn}\, z)$$

$$\int \mathrm{cn}\, z\, dz=\frac{i}{k}\ln(\mathrm{dn}\, z-ik\,\mathrm{sn}\, z)$$

$$\int \mathrm{dn}\, z\, dz=i\ln(\mathrm{cn}\, z-i\,\mathrm{sn}\, z)$$

$$\int\frac{dz}{\mathrm{sn}\, z}=\ln\frac{\mathrm{sn}\, z}{\mathrm{cn}\, z+\mathrm{dn}\, z}=\ln\frac{\mathrm{dn}\, z-\mathrm{cn}\, z}{\mathrm{sn}\, z}$$

$$\int\frac{dz}{\mathrm{cn}\, z}=\frac{1}{k'}\ln\frac{k'\,\mathrm{sn}\, z+\mathrm{dn}\, z}{\mathrm{cn}\, z}=\frac{1}{2k'}\ln\frac{\mathrm{dn}\, z+k'\,\mathrm{sn}\, z}{\mathrm{dn}\, z-k'\,\mathrm{sn}\, z}$$

$$\int\frac{dz}{\mathrm{dn}\, z}=\frac{1}{k'}\arg\mathrm{tg}\frac{k'\,\mathrm{sn}\, z-\mathrm{cn}\, z}{k'\,\mathrm{sn}\, z+\mathrm{cn}\, z}=\frac{1}{2k'}\arg\mathrm{tg}\frac{k'\,\mathrm{sn}\, z}{\mathrm{cn}\, z}$$

三、外尔斯特拉斯椭圆函数

外尔斯特拉斯第一类椭圆积分

$$z=\int_{\infty}^{w}(4t^3-g_2t-g_3)^{-\frac{1}{2}}dt$$

的反函数　$w=\wp(z)$称为外尔斯特拉斯椭圆函数，

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{m,n}{}'\left\{\frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^2}-\frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2}\right\}$$

式中 Σ' 表示对所有整数 m, n ($m=n=0$ 除外)求和，在 $z=0$ 的邻域内，有

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{g_2z^2}{2^2\cdot5}+\frac{g_3z^4}{2^2\cdot7}+\frac{g_2^2z^6}{2^4\cdot3\cdot5^2}+\frac{3g_2g_3z^8}{2^4\cdot5\cdot7\cdot11}+\cdots$$

外尔斯特拉斯椭圆函数具有以下性质：

1°　$\wp(z)$ 是二阶椭圆函数，在周期平行四边形中有一个二阶极点：$z=2m\omega+2n\omega'$.

2°　$\wp(z)$的周期是 2ω 和 $2\omega'$：$\wp(z+2m\omega+2n\omega')=\wp(z)$ (m, n 为任何整数).

3°　$\wp(z)=\wp(-z)$，$\wp'(-z)=-\wp'(z)$

§7 伯努利数与伯努利多项式

一、伯努利数

函数展开式

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{t^n}{n!}$$

中，$\frac{t^n}{n!}$的系数 b_n 称为伯努利数，有时以函数展开式

$$\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{2n}}{(2n)!}B_n$$

来定义伯努利数 B_n，B_n 与 b_n 的关系为

$$B_n=(-1)^{n-1}b_{2n}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

B_n 的数表见第五章§3，九．

$$b_{2n+1}=0\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$b_{2n}=2(-1)^{n+1}(2n)!\sum_{k=1}^{\infty}(2\pi k)^{-2n}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k=0\qquad(n=2,3,\cdots)$$

二、伯努利多项式

函数

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_kx^{n-k}\qquad(\text{式中 } b_k \text{ 为伯努利数})$$

称为伯努利多项式，它也可由母函数展开

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\frac{t^n}{n!}\qquad(|t|<2\pi)$$

来定义．

$$\varphi_0(x)=1$$

$$\varphi_1(x)=x-\frac{1}{2}$$

$$\varphi_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$$

$$\varphi_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

$$\varphi_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$$

$$\varphi_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x$$

$$\varphi_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

伯努利多项式有关公式如下:

$$\varphi_n(x+1)-\varphi_n(x)=nx^{n-1} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\varphi_k(x)=nx^{n-1} \qquad (n=2,3,\cdots)$$

$$\varphi_n(1-x)=(-1)^n\varphi_n(x)=\varphi_n(-x)$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}k^n=\frac{1}{n+1}[\varphi_{n+1}(m)-b_{n+1}]$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_n\left(x+\frac{k}{m}\right)=m^{1-n}\varphi_n(mx)$$

$$\varphi_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi_k(y)x^{n-k}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\varphi_n(x)=\frac{n!}{(n-k)!}\varphi_{n-k}(x)$$

$$\int_a^x\varphi_n(t)dt=\frac{1}{n+1}[\varphi_{n+1}(x)-\varphi_{n+1}(a)]$$

$$\varphi_n(0)=b_n=\varphi_n(1)$$

第十三章　常微分方程

在研究客观现象时，常常遇到这样一类数学问题，即其中某个变量和其他变量之间的函数依赖关系是未知的，但是这个未知的函数关系以及它的某些阶的导数(或微分)连同自变量都由一个已知的方程联系在一起．这样的方程称为微分方程．如果未知函数是一元的，那末对应的微分方程称为常微分方程；如果未知函数是多元的，那末对应的微分方程称为偏微分方程．

这一章介绍常微分方程，第十四章介绍偏微分方程．

本章主要内容是介绍几类可以用分析方法求解的方程，如某些一阶微分方程，常系数线性微分方程，某些高阶微分方程和微分方程组．对于那些不能用分析方法求解的方程，介绍研究解的某些性质的方法(稳定性理论大意)，或者用一些特殊的方法求出常微分方程的近似解(主要是数值解法)．

§1　微分方程的一般概念

微分方程是联系自变量 x，未知函数 y 和它的某些阶导数 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$，…，$\frac{d^ny}{dx^n}$ 的关系式：

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

［微分方程的阶数］ 方程中出现的最高阶导数的阶数称为这个微分方程的阶．例如：$y''+y'^2=x^4$ 是二阶常微分方程．

［微分方程的次数］ 如果能把微分方程化作对所有导数的有理整式，则其中最高阶导数的次数，称为微分方程的次数．并不是所有微分方程都有次数．例如：$y''=(1+y')^{\frac{1}{2}}$ 是一个二阶二次方程，因有理化后可得 $y''^2=1+y'$，而 $y''=(1+y)^{\frac{1}{2}}$ 是二阶一次方程，方程 $\ln y''=1+y'$ 没有次数可说．

［微分方程的解］ 使常微分方程成为恒等式的变量之间的关系式都是该常微分方程的解．如果关系式是隐式，这种解又称为积分．微分方程的解的求法也可称为微分方程的积分法．微分方程的每一个解的图形又称为微分方程的积分曲线．

［微分方程的通解］ 如果在微分方程的解式中，所含的独立的任意常数(如果一个解中的常数可取任意值，称它为任意常数)的个数等于这个微分方程的阶

数，那末这解式称为微分方程的通解。n 阶微分方程的通解表达式中含有 n 个彼此独立的任意常数.

[微分方程的特解] 相对于通解而言，微分方程的每一个解称为特解.

[初值问题] 如果在自变量的某值给出适当个数的附加条件，用来确定微分方程的特解，那末这样的问题称为初值问题.

[边值问题] 如果在自变量一个以上的值给出适当个数的附加条件，用来确定微分方程的特解，那末这样的问题称为边值问题.

§ 2 一阶微分方程

一、一阶微分方程解的存在和唯一性

一阶微分方程的一般形式是

$$F(x,\ y,\ y')=0$$

如果在所考虑的区域上 $\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$，那末根据隐函数存在定理（第五章 §3，四，2），解出 y' 得

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

或者写成对称形式

$$M(x,y)\ dx+N(x,y)\ dy=0$$

[解的存在和唯一性定理] 给定微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

及初始值 $(x_0,\ y_0)$.

设 $f(x,y)$ 在闭区域 R:

$$|x-x_0|\leqslant a,\ \ |y-y_0|\leqslant b \qquad (a>0,\ \ b>0)$$

上连续．那末方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 至少存在一个解，它在 $x=x_0$ 处取值 y_0，同时在包含 x_0 的某一区间上确定且连续（此定理称为柯西存在定理）.

如果在 R 内对变数 y 还满足李普希茨条件，即存在正数 N，使得对于 R 内的任意两值 y_1 和 y_2，下面不等式成立：

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant N|y_1-y_2|$$

那末这个解还是唯一的.

二、可积类型及其通解

（表中 c 为任意常数）

方程类型	解法要点与通解表达式
1. 变量可分离方程 $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$	分离变易，两边同除以$g_1(y)f_2(x)$，再分别积分. $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=c$
2. 齐次方程 $\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)$ 一般假设 $F\left(\frac{y}{x}\right)\neq\frac{y}{x}$，若 $F\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}$，则变量可分离，属类型 1	令$\frac{y}{x}=u$，即 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. 代入原方程，得新未知函数 u 关于自变量 x 的方程： $xdu=[F(u)-u]dx$ 再按类型 1 求解. $\ln x=\int\frac{du}{F(u)-u}+\ln c$ 或 $x=ce^{\int\frac{du}{F(u)-u}}$ $\left(u=\frac{y}{x}\right)$
3. 线性方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 当 $q(x)\equiv0$，称为齐次线性方程，当 $q(x)\not\equiv0$，称为非齐次线性方程	先求出所对应的齐次线性方程 $y'+p(x)y=0$ 的通解 $y=ce^{-\int p(x)dx}$ 再利用常数变易法(本章 § 3,二,2)，令 $y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$ 算出y'，代入原来的非齐次线性方程，可得 $c(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c$ $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\right]$

方　程　类　型	解法要点与通解表达式
4. 伯努利方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$ $(n\neq 0,1)$	利用变量替换 $z=y^{1-n}$ 化原方程为关于新未知函数 $z(x)$ 的线性方程，再按类型 3 求解． $y^{1-n}e^{(1-n)\int p(x)dx}$ $=(1-n)\int q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx+c$
5. 全(恰当)微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 式中 M,N 满足 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$	方程可写成 $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ $=dU(x,y)=0$ 式中 dU 是全(恰当)微分． $U(x,y)\equiv\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx$ $+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy=c$
6. 可将 y 解出的方程 $y=F(x,p)$ 式中 $p=\frac{dy}{dx}$	把方程两边对 x 求导数，得 $\frac{dy}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dx}$ 或 $\left(p-\frac{\partial F}{\partial x}\right)dx-\frac{\partial F}{\partial p}dp=0$ 如果能求出此方程的通解 $p=\varphi(x,c)$ 或 $x=\psi(p,c)$，那末原方程可解． $y=F(x,\varphi(x,c))$ 或 $\begin{cases}x=\psi(p,c)\\ y=F(\psi(p,c),p)\end{cases}$
[拉格朗日方程] $y=xf_1(p)+f_2(p)$ 式中 $p=\frac{dy}{dx}$，f_1,f_2 是已知可微函数	可化为 x 的线性方程 $\frac{dx}{dp}-\frac{f_1'(p)}{p-f_1(p)}x=\frac{f_2'(p)}{p-f_1(p)}$ 再按类型 3 求解．

方　程　类　型	解法要点与通解表达式
[克莱罗方程] $y=xp+F(p)$ 式中 $p=\frac{dy}{dx}$, F 是已知可微函数	化为方程 $[x+F'(p)]\frac{dp}{dx}=0$ 令 $\frac{dp}{dx}=0$，即 $p=c$，代入原方程. $y=cx+F(c)$ [注]这类方程还可能有奇解（见§2,三）
7. 可将 x 解出的方程 $x=F(y,p)$ 式中 $p=\frac{dy}{dx}$	方程两边对 x 求导数，利用 $y''=p\frac{dp}{dy}$，得 $\left(p\frac{\partial F}{\partial y}-1\right)dy+p\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)dp=0$ 如果可求出这个方程的通解 $y=\varphi(p,c)$ 或 $p=\psi(y,c)$ 那末原方程可解. $\begin{cases}x=F(\varphi(p,c),p)\\y=\varphi(p,c)\end{cases}$ 或 $x=F(y,\psi(y,c))$
8. 不显含未知函数的方程 $F(x,y')=0$	引入适当参数 t，化原方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y'=\psi(t)\end{cases}$ $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c\end{cases}$
9. 不显含自变量的方程 $F(y,y')=0$	引入参数 t，化原方程为 $\begin{cases}y=\varphi(t)\\y'=\psi(t)\end{cases}$

方程类型	解法要点与通解表达式
	$\begin{cases} x=\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c \\ y=\varphi(t) \end{cases}$
10. 能化为变量可分离或齐次方程的方程 (a) $\frac{dy}{dx}=F(ax+by+c)$ (b) $\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$	(a) 令 $z=ax+by+c$，化原方程为类型 1 $\frac{dz}{dx}=a+bF(z)$ (b) 若行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 引进新变量ξ, η， $x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\beta$ 式中 α, β 满足方程组 $\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0 \end{cases}$ 则原方程化成齐次方程(类型 2)： $\frac{d\eta}{d\xi}=F\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)$ 若$\Delta=0$, $b_1\neq 0$，则令$z=a_1x+b_1y+c_1$；若$\Delta=0$, $b_2\neq 0$，则令$z=a_2x+b_2y+c_2$，于是原方程化为类型 1.
11. 黎卡提方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$ 式中 $p(x)\neq 0$, $r(x)\neq 0$	如果已知原方程有一个特解 $y=y_1(x)$，作变换 $y=y_1(x)+\frac{1}{u}$ 可把原方程化为线性方程(类型 3)： $\frac{du}{dx}+[q(x)+2p(x)y_1]u+p(x)=0$ 或用变换 $y=y_1(x)+u$ 化为伯努利方程(类型4)： $\frac{du}{dx}=u[q(x)+2p(x)y_1]+p(x)u^2$ 再分别按类型 3 和类型 4 求解.

方　程　类　型	解法要点与通解表达式
12. 含积分因子的方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 式中 $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ 但存在 $\mu(x,y)$ 满足 $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ $\mu(x,y)$ 称为原方程的积分因子	找出积分因子 $\mu(x,y)$，再按类型 5 求解．找积分因子的方法见下表．

找积分因子的方法

条　　件	积分因子 $\mu(x,y)$	条　　件	积分因子 $\mu(x,y)$
$xM+yN=0$	$\frac{1}{xM-yN}$	$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ $=Mf_1(y)-Nf_2(x)$	形为 $m(x)n(y)$
$xM-yN=0$	$\frac{1}{xM+yN}$		
$xM+yN\neq0$, M,N 是同次的齐次式	$\frac{1}{xM+yN}$	存在适合 $nxM-myN$ $+xy\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0$ 的常数 m 和 n （用比较系数法确定）	$x^m y^n$
$xM-yN\neq0$, $M(x,y)=yM_1(xy)$ $N(x,y)=xN_1(xy)$	$\frac{1}{xM-yN}$		
$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$	$e^{\int f(x)dx}$	$\begin{cases}\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y}\\ \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\partial N}{\partial x}\end{cases}$ 即 $M+iN$ 在使微分方程满足的单连通区域内是 $x+iy$ 的解析函数	$\frac{1}{M^2+N^2}$
$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=f(y)$	$e^{\int f(y)dy}$		

三、奇解及其求法

［微分方程的奇解］ 微分方程 $F(x, y, y')=0$ 的一族积分曲线(通解)的包络，称为这个微分方程的奇解．奇解是方程的解，同时过奇解上的每一点都不止有一条积分曲线，即在奇解上的每一点，方程的解不是唯一的．

［c-判别曲线法］ 设一阶微分方程 $F(x, y, y')=0$ 的通解为 $\Phi(x, y, c)=0$，其中 c 是任意常数，把 c 看成参数．从下面方程组

$$\begin{cases}\Phi(x, y, c)=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c}=0\end{cases}$$

中消去 c 而得到的所有曲线，都称为曲线族 $\Phi(x, y, c)=0$ 的 c-判别曲线，其中包含着曲线族 $\Phi(x, y, c)=0$ 的包络．但应注意 c-判别曲线不一定都是曲线族的包络，还要作实际检验．

例 求一阶微分方程

$$x-y=\frac{4}{9}y'^2-\frac{8}{27}y'^3$$

的通解和奇解．

解 把方程写成

$$y=x-\frac{4}{9}y'^2+\frac{8}{27}y'^3$$

令 $y'=p$．方程两边对 p 求导数，得

$$\frac{dx}{dp}=\frac{8}{9}p$$

于是有

$$x+c=\frac{4}{9}p^2$$

即

$$p=y'=\pm\frac{3}{2}(x+c)^{\frac{1}{2}}$$

代入原方程，得通解

$$\Phi(x, y, c)=(y+c)^2-(x+c)^3=0$$

从

$$\begin{cases}\Phi(x, y, c)=(y+c)^2-(x+c)^3=0\\ \dfrac{\partial\Phi(x, y, c)}{\partial c}=2(y+c)-3(x+c)^2=0\end{cases}$$

中消去c，得c-判别曲线$y=x$和$x-y=\frac{4}{27}$. 直接代入原方程可知$y=x$不是已知方程的解，所以不是奇解，而$x-y=\frac{4}{27}$是奇解.

[p-判别曲线法]　对于一阶微分方程$F(x,y,y')=0$，令$y'=p$，那末方程的奇解一定包含在下面方程组

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0 \end{cases}$$

消去p后得到的曲线（称为p-判别曲线）中. 至于p-判别曲线是否是奇解，也需要实际检验.

例　求微分方程

$$y'^2+y^2-1=0$$

的奇解.

解　从

$$\begin{cases} F(x,y,p)=p^2+y^2-1=0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=2p=0 \end{cases}$$

中消去p得p-判别曲线$y^2=1$，即$y=\pm1$. 代入原方程知$y=\pm1$是奇解.

§3　线性微分方程

一、一般概念

[齐次线性微分方程与非齐次线性微分方程]　设微分方程

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=R(x)$$

$$a_0(x)\neq0 \qquad (1)$$

如果方程中的未知函数$y(x)$及其各阶导数$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$，…，$\frac{d^ny}{dx^n}$都是一次的，这种方程称为线性微分方程. 因为$a_0(x)\neq0$，所以(1)称为n阶线性微分方程. 当$R(x)\equiv0$，(1)称为齐次线性微分方程. 当$R(x)\not\equiv0$，(1)称为非齐次线性微分方程. 如果$a_0(x),a_1(x),\cdots,a_n(x)$都是常数，(1)就称为常系数线性微分方程.

[解的存在和唯一性定理]　如果$a_0(x)$，$a_1(x)$，…，$a_n(x)$和$R(x)$在区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$内连续，且$a_0(x)\neq0$，那末对任意给定的初始条件

$$y(x_0)=b_0,\ \ y'(x_0)=b_1,\ \ \cdots,\ \ y^{(n-1)}(x_0)=b_{n-1}$$

方程(1)存在唯一解 $y=y(x)$，式中 $b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}$ 为实数.

[函数的线性相关性] 对于一组函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$，如果有不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，使等式

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)\equiv 0$$

在区间$[a,b]$上成立，则称这组函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 在区间$[a,\ b]$上线性相关. 否则称这组函数线性无关(线性独立).

[朗斯基行列式] 如果 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 是 n 个 $n-1$ 次可微的函数，则称行列式

$$W[y_1,y_2,\cdots,y_n]\equiv W(x)\equiv\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

为函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的朗斯基行列式.

朗斯基行列式具有以下性质:

1° 如果函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$线性相关，那末它们的朗斯基行列式 $W[y_1,y_2,\cdots,y_n]\equiv 0$.

2° 如果函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是某齐次线性微分方程的解，那末它们线性相关的充分必要条件是它们的朗斯基行列式

$$W[y_1,y_2,\cdots,y_n]\equiv 0$$

[n阶齐次线性微分方程解的结构] 如果 n 阶齐次线性微分方程

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0,\qquad a_0(x)\neq 0$$

有 n 个线性无关的解 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$. 那末它的通解是这 n 个解的线性组合，即

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$是任意常数. 这时又称 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$为所给齐次线性微分方程的一组基本解.

[n阶非齐次线性微分方程解的结构] 非齐次线性微分方程的通解是它的一个特解与对应齐次方程的通解之和，即

$$y(x)=y^*(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

式中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意常数.

二、常系数线性微分方程

1. 齐次线性微分方程通解的求法

［特征方程与特征根］ 对于n阶实常系数齐次线性微分方程

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n=0,\qquad a_0\neq 0 \tag{2}$$

作相应的n次代数方程

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0,\qquad a_0\neq 0 \tag{3}$$

称它为微分方程(2)的特征方程，特征方程(3)的n个根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$称为相应微分方程(2)的特征根.

［齐次方程的通解］ 为了求n阶常系数齐次线性微分方程(2)的通解，只要找出它的n个线性无关的特解就可以了．根据其全体特征根的各种情况，分别列出对应的线性无关特解.

特　征　根	对应的线性无关特解
$\lambda_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 是互异实根	$y_j(x)=e^{\lambda_j x}\ (j=1,2,\cdots,n)$
$\lambda=\alpha+i\beta$ 是特征方程的单根，则 $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ 也是特征方程的单根	$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$
λ 是特征方程的 r 重实根	$y_1(x)=e^{\lambda x},\ y_2(x)=xe^{\lambda x},\cdots,$ $y_r(x)=x^{r-1}e^{\lambda x}$
$\lambda=\alpha+i\beta$ 是特征方程的 r 重复根，则 $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ 也是 r 重复根	$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2(x)=xe^{\alpha x}\cos\beta x,$ $\cdots,y_r(x)=x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $y_{r+1}(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{r+2}(x)=xe^{\alpha x}\sin\beta x,$ $\cdots,y_{2r}(x)=x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

2. 非齐次线性微分方程特解的求法

给定n阶非齐次线性微分方程

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=R(x),\qquad a_0\neq 0$$

它的特解可用下面两种方法来求.

［常数变易法］ 设其相应的齐次线性微分方程的通解是

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

那末非齐次线性微分方程有一个特解

$$y^*(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)+\cdots+c_n(x)y_n(x)$$

式中 $c_j(x)(j=1,2,\cdots,n)$是待定函数，它们的导数满足方程组

$$\begin{cases}c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)+\cdots+c_n'(x)y_n(x)=0\\ c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)+\cdots+c_n'(x)y_n'(x)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=R(x)\end{cases}$$

例 求微分方程

$$y''+y=\sec x$$

的通解.

解 先求其相应的齐次方程 $y''+y=0$ 的通解.

因特征方程 $\lambda^2+1=0$，有特征根 $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$. 于是齐次方程的通解为

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$$

利用常数变易法求非齐次方程的一个特解 $y^*(x)$. 令

$$y^*(x)=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$$

而 $c_1(x),c_2(x)$由下列方程组确定

$$\begin{cases}c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x=0\\ -c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x=\sec x\end{cases}$$

解方程组得

$$c_1'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x},\quad c_2'(x)=1$$

积分后得

$$c_1(x)=\ln\cos x+k_1,\quad c_2(x)=x+k_2\quad (k_1,k_2\text{是任意常数})$$

(因为只要一个特解，可令 $k_1=k_2=0$)，所以原方程的通解为

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+(\ln\cos x)\cos x+x\sin x$$

[待定系数法] 对特殊类型的 $R(x)$，可把特解 $y^*(x)$ 的待定表达式及其相应的各阶导数代入原微分方程，然后比较同类项系数，定出 $y^*(x)$的待定表达式里所含的系数 A_i,B_i，最后得出方程的特解 $y^*(x)$. 现在把部分情况下的特解形式列表如下：

$R(x)$ 类 型	特解 $y^*(x)$的待定表达式
$ae^{\mu x}$	$Ae^{\mu x}$
$a\cos\beta x+b\sin\beta x$	$A\cos\beta x+B\sin\beta x$
$a_1x^k+a_2x^{k-1}+\cdots+a_kx+a_{k+1}$	$A_1x^k+A_2x^{k-1}+\cdots+A_kx+A_{k+1}$

$R(x)$ 类型	特解 $y^*(x)$ 的待定表达式
$e^{\alpha x}(a\cos\beta x+b\sin\beta x)$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$
$e^{\mu x}(a_1x^k+a_2x^{k-1}+\cdots+a_kx+a_{k+1})$	$e^{\mu x}(A_1x^k+A_2x^{k-1}+\cdots+A_kx+A_{k+1})$
$(a_1x^k+a_2x^{k-1}+\cdots+a_kx+a_{k+1})\cdot\cos\beta x+(b_1x^k+b_2x^{k-1}+\cdots+b_kx+b_{k+1})\sin\beta x$	$(A_1x^k+A_2x^{k-1}+\cdots+A_kx+A_{k+1})\cos\beta x+(B_1x^k+B_2x^{k-1}+\cdots+B_kx+B_{k+1})\sin\beta x$
$e^{\alpha x}\cos\beta x(a_1x^k+a_2x^{k-1}+\cdots+a_kx+a_{k+1})+e^{\alpha x}\sin\beta x(b_1x^k+b_2x^{k-1}+\cdots+b_kx+b_{k+1})$	$e^{\alpha x}\cos\beta x(A_1x^k+A_2x^{k-1}+\cdots+A_kx+A_{k+1})+e^{\alpha x}\sin\beta x(B_1x^k+B_2x^{k-1}+\cdots+B_kx+B_{k+1})$

表中 a, b, a_j, b_j $(j=1,2,\cdots,k+1)$ 为已知常数；k 是正整数．如果 $R(x)$ 的两个多项式的次数不相同，则取 k 为次数较大者；A，B，A_j，B_j $(j=1,2,\cdots,k+1)$ 是待定常数．

表中右栏表达式分别是（自上而下）在 μ，$\pm i\beta$，0，$\alpha\pm i\beta$，μ，$\pm i\beta$，$\alpha\pm i\beta$ 不是其特征根的情形下的特解 $y^*(x)$ 的待定表达式；如果它们是特征方程的 r 重根，那末在表中的表达式上再乘以 x^r．

例　求解微分方程

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^2y}{dx^2}+y=\sin 2x$$

解　先求相应的齐次线性方程 $y^{(4)}+2y''+y=0$ 的通解．

由特征方程　$\lambda^4+2\lambda^2+1=(\lambda^2+1)^2=0$　可知特征根 $\lambda=\pm i$ 都是二重根．所以齐次方程的通解为

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3x\cos x+c_4x\sin x$$

利用待定系数法，求非齐次线性方程的一个特解．由于 $R(x)=\sin 2x$，属于表中第二类表达式（$a=0, b=1$，$\beta=2$），同时 $\pm i\beta=\pm 2i$ 不是特征根，所以特解应为 $y^*(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$．代入原方程，比较同类项系数得

$$A=0,\ \ B=\frac{1}{9}$$

所以特解是　　　　$y^*(x)=\frac{1}{9}\sin 2x$

原方程的通解为

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3x\cos x+c_4x\sin x+\frac{1}{9}\sin 2x$$

式中 c_1, c_2, c_3, c_4 是任意常数.

三、欧拉方程

具有形状

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ 是常数})$$

的方程称为欧拉方程.

欧拉方程可以通过变量替换　$x=e^t$ 或 $t=\ln x$ 化成未知函数 y 关于新自变量 t 的常系数线性微分方程.

例　求解欧拉方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0$$

解　令 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$, 原方程变成

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=0$$

特征方程是

$$\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2=0$$

$\lambda=-1$ 是二重根. 通解为

$$y=e^{-t}(c_1+c_2t)$$

所以原方程的通解是

$$y(x)=\frac{1}{x}(c_1+c_2\ln x)$$

四、齐次线性微分方程的幂级数解法

[具有幂级数形式的解]　一般变系数的齐次线性微分方程, 不一定能找到用初等函数表示的解, 这时可考虑求具有幂级数形式的解.

现以二阶齐次线性微分方程为例说明解法(高阶方程同样适用). 设

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0$$

其中 $a(x)$ 和 $b(x)$ 在 $x=x_0$ 可展成幂级数. 要求方程在 $x=x_0$ 附近的解, 只要先假定这个解具有幂级数形式

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$$

然后形式地算出所需的各阶导数，代入原方程变成恒等式，确定待定的系数 a_k，从而得出所求的幂级数解。

如果 $a(x)$，$b(x)$ 在 $x=x_0$ 不能展成幂级数，比如是 x 的有理分式，而分母在 $x=x_0$ 等于零，这时可试求具广义幂级数形式

$$y(x)=(x-x_0)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$$

的解，其中 α 和 a_k 都是待定常数。

［求勒让德方程的解］ 方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

称为勒让德方程，它的解称为勒让德函数。

在 $x=0$ 附近，方程的系数可以展成幂级数，令

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

代入原方程，可以定出两个线性无关解

$$y_1(x)=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4+\cdots$$

$$=F\left(-\frac{n}{2},\frac{1+n}{2};\ \frac{1}{2};\ x^2\right)$$

$$y_2(x)=x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+\cdots$$

$$=xF\left(\frac{1-n}{2},1+\frac{n}{2};\ \frac{3}{2};x^2\right)$$

所以勒让德方程的通解为

$$y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$$

式中 A,B 是任意常数，$F(\alpha,\beta;\gamma;\ x)$是高斯超几何级数。

若 n 为整数，则 $y_1(x)$与 $y_2(x)$中有一个为多项式，另一个仍然是无穷级数。适当选取任意常数 A,B，使当 $x=1$ 时，多项式的值为 1，这个多项式称为勒让德多项式，记作 $P_n(x)$，它属于第一类勒让德函数。另一个则与 $P_n(x)$线性无关，它是无穷级数，记作 $Q_n(x)$，属于第二类勒让德函数。此时，勒让德方程的通解为

$$y(x)=AP_n(x)+BQ_n(x)$$

式中 A,B 为任意常数.

[求贝塞耳方程的解]　方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

称为 ν 阶贝塞耳方程,式中 ν 为任意实数(或复数),它的解称为贝塞耳函数.

因方程系数 $a(x)=\frac{1}{x}$, $b(x)=1-\frac{\nu^2}{x^2}$,在 $x=0$ 不能展成幂级数,而是 x 的有理分式. 令

$$y(x)=x^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

代入原方程,令 x 各次幂的系数等于零,得 $\alpha=\pm\nu$,先取 $\alpha=\nu$,得

$$a_1=0,\ a_k=\frac{-a_{k-2}}{k(2n+k)}$$

所以

$$a_1=a_3=\cdots=a_{2m+1}=\cdots=0$$

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}$$

取 $a_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$,得贝塞耳方程的一个特解,记作

$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{\nu+2m}}{2^{\nu+2m}m!\Gamma(\nu+m+1)}\qquad(\nu\geqslant0)$$

它称为 ν 阶第一类贝塞耳函数.

取 $\alpha=-\nu$,得另一特解

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{-\nu+2m}}{2^{-\nu+2m}m!\Gamma(-\nu+m+1)}$$

当 ν 不为整数时,这两个特解线性无关,此时贝塞耳方程的通解为

$$y(x)=AJ_\nu(x)+BJ_{-\nu}(x)$$

式中 A,B 是任意常数.

当 $\nu=n$ 为整数时, $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 线性相关. 此时记

$$N_n(x)=\lim_{\alpha\to n}\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$$

它也是贝塞耳方程的一个解,而且与 $J_n(x)$ 线性无关. 称 $N_n(x)$ 为 n 阶第二类贝塞耳函数. 于是贝塞耳方程的通解为

$$y(x)=AJ_n(x)+BN_n(x)$$

式中 A,B 是任意常数.

§4 高阶微分方程与微分方程组

一、高阶微分方程与微分方程组的互化

已给一个 n 阶方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)})$$

设 $y_1=y,y_2=y',y_3=y'',\cdots,y_n=y^{(n-1)}$，那末解上面 n 阶微分方程就相当于解下面 n 个一阶微分方程的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=y_2\\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_3\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx}=y_n\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\end{cases}$$

式中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 看作自变量 x 的 n 个未知函数.

反过来，在许多情况下，已给 n 个一阶微分方程的方程组也可以化为一个 n 阶微分方程. 比如，两个一阶微分方程的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2)\\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2)\end{cases}\tag{1}$$

将方程(1)对 x 求导数

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}f_2$$

记作

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F(x,y_1,y_2)\tag{2}$$

从方程(1)中解出 y_2

$$y_2=y_2(x,y_1,y_1')$$

代入方程(2)的右边，就得到一个二阶微分方程

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\Phi(x,y_1,y_1')$$

这里函数 $\Phi(x,y_1,y_1')$ 由函数 f_1，f_2 所确定，因而是已知的。所以两个一阶微分方程组可以化为一个二阶微分方程。

二、高阶微分方程的几种可积类型及其解法

1. $y^{(n)}=f(x)$

将方程写成

$$\frac{d}{dx}y^{(n-1)}=f(x)$$

积分后得到

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx+c_1$$

重复这一过程到积分 n 次，就得到微分方程的通解：

$$y=\underbrace{\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n}f(x)(dx)^n+\frac{c_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{c_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$+\cdots+c_{n-1}(x-x_0)+c_n$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^{n-1}f(\xi)\ d\xi+\frac{c_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{c_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$+\cdots+c_{n-1}(x-x_0)+c_n$$

2. $F(x,y^{(n)})=0$

1° 若能解出 $y^{(n)}$，则方程化成类型 1 求解。

2° 若不能解出 $y^{(n)}$，或解出后表达式太复杂，就设法求它的参数形式的解：设函数 $\varphi(t),\psi(t)\quad(\alpha<t<\beta)$ 满足

$$F(\varphi(t),\psi(t))\equiv 0$$

则原方程可写成参数形式

$$x=\varphi(t),\qquad y^{(n)}=\psi(t)$$

由

$$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=\psi(t)\varphi'(t)dt$$

得

$$y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c_1=\psi_1(t,c_1)$$

又由

$$dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=\psi_1(t,c_1)\varphi'(t)dt$$

得

$$y^{(n-2)}=\int\psi_1(t,c_1)\varphi'(t)dt+c_2=\psi_2(t,c_1,c_2)$$

最后得原方程的参数形式的通解

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi_n(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

3. $F(y^{(n-1)}, y^{(n)})=0$

1° 若从方程可解出 $y^{(n)}$：

$$y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$$

则令 $y^{(n-1)}=z$，上式化成

$$\frac{dz}{dx}=f(z)$$

这是变量可分离的方程，设解为

$$z=\omega(x,c_1)$$

那末化成类型1

$$y^{(n-1)}=\omega(x,c_1)$$

其通解为

$$y(x)=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^{n-2}\omega(\xi,c_1)\,d\xi+\frac{c_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\cdots+c_n$$

2° 若不能解出 $y^{(n)}$，但原方程可写成参数形式：

$$y^{(n-1)}=\varphi(t),\quad y^{(n)}=\psi(t)$$

则从

$$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$$

得

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c,\quad y^{(n-1)}=\varphi(t)$$

按类型2的方法，可得通解（参数形式）

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c,\quad y=\varphi_{n-1}(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})$$

4. $F(y^{(n-2)}, y^{(n)})=0$

设方程可解出 $y^{(n)}$：

$$y^{(n)}=f(y^{(n-2)})$$

令 $z=y^{(n-2)}$，方程两边乘以 $2z'$ 化成

$$d(z'^2)=2f(z)dz$$

积分后有

$$z'=\sqrt{\int 2f(z)dz+c_1}$$

用分离变量法求得

$$z=\omega(x,c_1,c_2)$$

那末

$$y^{(n-2)}=\omega(x,c_1,c_2)$$

再积分 $n-2$ 次就得原方程的通解。

三、线性微分方程组

1. 齐次线性微分方程组与非齐次线性微分方程组

[齐次与非齐次] 线性微分方程组的一般形式为

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=a_{11}(t)y_1+a_{12}(t)y_2+\cdots+a_{1n}(t)y_n+f_1(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt}=a_{21}(t)y_1+a_{22}(t)y_2+\cdots+a_{2n}(t)y_n+f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dt}=a_{n1}(t)y_1+a_{n2}(t)y_2+\cdots+a_{nn}(t)y_n+f_n(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中$a_{ik}(t)$和$f_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,n)$都是自变量$t$的已知连续函数. 如果至少有一个$f_i(t)$不恒等于零，则称(1)为非齐次线性微分方程组. 如果所有$f_i(t)$都恒等于零,则称(1)为齐次线性微分方程组,它的一般形式是

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=a_{11}(t)y_1+a_{12}(t)y_2+\cdots+a_{1n}(t)y_n \\ \dfrac{dy_2}{dt}=a_{21}(t)y_1+a_{22}(t)y_2+\cdots+a_{2n}(t)y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dt}=a_{n1}(t)y_1+a_{n2}(t)y_2+\cdots+a_{nn}(t)y_n \end{cases} \quad (2)$$

如果齐次线性微分方程组(2)与非齐次线性微分方程组(1)具有相同的系数(即对应的$a_{ik}(t)$都相同),就称(2)是非齐次线性微分方程组(1)的对应的齐次线性微分方程组.

[解的存在定理] 如果线性微分方程组(1)的所有系数$a_{ik}(t)$和右端函数$f_i(t)$在区间(t_1,t_2)内连续，那末方程组(1)在此区间的每一点$t_0(t_1<t_0<t_2)$都存在唯一满足初始条件$(t_0,y_1^{(0)},\cdots,y_n^{(0)})$的解，而且这个解定义在整个区间$(t_1,t_2)$内.

[解的基本结构]

1° 齐次线性微分方程组的任意两个解的线性组合还是这个方程组的解.

2° 含n个未知函数的齐次线性微分方程组的通解可以表示成它的n个线性无关解的线性组合.

3° 含n个未知函数的非齐次线性微分方程组的通解可以表示成它的一个特解与它的对应的齐次线性微分方程组的通解的和.

2. 常系数线性微分方程组

微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dt}=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n+f_1(t)\\
\dfrac{dy_2}{dt}=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n+f_2(t)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{dy_n}{dt}=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n+f_n(t)
\end{cases}
\tag{3}
$$

称为常系数线性微分方程组，式中 a_{ij} 是常数．当 $f_i(t)\equiv 0(i=1,2,\cdots,n)$，称(3)为齐次的，当 $f_i(t)$ 不全恒等于零，称(3)为非齐次的．

[特征根与齐次方程组的线性无关解]

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda
\end{vmatrix}=0
$$

是 λ 的 n 次代数方程，它称为非齐次线性微分方程组(3)所对应的齐次线性微分方程组的特征方程，特征方程的根称为特征根．

根据特征根的不同情形，给出齐次线性微分方程组线性无关解的不同形式．

特 征 根 λ	线性无关解中相应的解的形式	说　　明
λ 是单实根	$y_j(t)=A_je^{\lambda t}\quad(j=1,2,\cdots,n)$	A_j 是待定常数
λ 是 r 重实根	$y_j(t)=P_j(t)e^{\lambda t}\quad(j=1,2,\cdots,n)$	$P_j(t)$ 是系数待定的次数不超过 $r-1$ 次的多项式
$\lambda=\alpha\pm i\beta$ 是 k 重复根	$y_j(t)=e^{\alpha t}[Q_j(t)\cos\beta t+R_j(t)\sin\beta t]\quad(j=1,2,\cdots,n)$	$Q_j(t)$，$R_j(t)$ 是系数待定的次数不超过 $k-1$ 次的多项式

[用常数变易法求非齐次方程组的特解]　非齐次线性微分方程组(3)的一个特解，可由对应的齐次线性微分方程组的通解利用常数变易法求得．

设 $y_{11},y_{21},\cdots,y_{n1}$；$y_{12},y_{22},\cdots,y_{n2}$；$\cdots$；$y_{1n},y_{2n},\cdots,y_{nn}$ 是对应的齐次线性微分方程组的 n 个线性无关解．那末非齐次线性方程组的一个特解 $y_1^*,y_2^*,\cdots,y_n^*$ 可由下列形式确定

$$
\begin{cases}
y_1^* = c_1(t)y_{11} + c_2(t)y_{12} + \cdots + c_n(t)y_{1n} \\
y_2^* = c_1(t)y_{21} + c_2(t)y_{22} + \cdots + c_n(t)y_{2n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n^* = c_1(t)y_{n1} + c_2(t)y_{n2} + \cdots + c_n(t)y_{nn}
\end{cases}
$$

式中 $c_i(t)$是待定函数，它们满足下列方程组：

$$
\begin{cases}
y_{11}\dfrac{dc_1}{dt} + y_{12}\dfrac{dc_2}{dt} + \cdots + y_{1n}\dfrac{dc_n}{dt} = f_1(t) \\
y_{21}\dfrac{dc_1}{dt} + y_{22}\dfrac{dc_2}{dt} + \cdots + y_{2n}\dfrac{dc_n}{dt} = f_2(t) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{n1}\dfrac{dc_1}{dt} + y_{n2}\dfrac{dc_2}{dt} + \cdots + y_{nn}\dfrac{dc_n}{dt} = f_n(t)
\end{cases}
$$

从上面方程组解出$\dfrac{dc_1}{dt}, \dfrac{dc_2}{dt}, \cdots, \dfrac{dc_n}{dt}$，再积分就得出所要求的 $c_i(t)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

例 求解微分方程组：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = x + 2y - e^{-t} \\
\dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y + 4e^{-t}
\end{cases}
\tag{1}
$$

解 先求对应的齐次线性微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\
\dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y
\end{cases}
\tag{2}
$$

的通解．由特征方程

$$
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0
$$

可知特征根为 $\lambda=5, \lambda=-1$．则相应的线性无关解是如下形式：

$$
\begin{cases}
x_1(t) = A_1 e^{5t} \\
y_1(t) = A_2 e^{5t}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
x_2(t) = B_1 e^{-t} \\
y_2(t) = B_2 e^{-t}
\end{cases}
$$

分别代入齐次线性方程组(2)，利用待定系数法，确定出

$$A_1 = c_1, \quad A_2 = 2c_1, \quad (c_1 \text{是任意常数})$$

$$B_1 = c_2, \quad B_2 = -c_2 \quad (c_2 \text{是任意常数})$$

所以齐次线性方程组(2)的通解为

$$\begin{cases} x(t)=c_1e^{5t}+c_2e^{-t} \\ y(t)=2c_1e^{5t}-c_2e^{-t} \end{cases} \quad (c_1, c_2\text{是任意常数})$$

其次，利用常数变易法求非齐次线性方程组(1)的一个特解．把 c_1，c_2 看成是 t 的函数，解下列方程组

$$\begin{cases} e^{5t}\dfrac{dc_1}{dt}+e^{-t}\dfrac{dc_2}{dt}=-e^{-t} \\ 2e^{5t}\dfrac{dc_1}{dt}-e^{-t}\dfrac{dc_2}{dt}=4e^{-t} \end{cases}$$

得

$$\frac{dc_1}{dt}=e^{-6t}, \quad \frac{dc_2}{dt}=-2$$

积分后，取

$$\begin{cases} c_1(t)=-\dfrac{1}{6}e^{-6t} \\ c_2(t)=-2t \end{cases}$$

于是所求方程组(1)的通解是

$$\begin{cases} x(t)=c_1e^{5t}+\left(c_2-\dfrac{1}{6}-2t\right)e^{-t} \\ y(t)=2c_1e^{5t}+\left(2t-\dfrac{1}{3}-c_2\right)e^{-t} \end{cases}$$

式中 c_1, c_2 为任意常数．

四、常系数非齐次线性微分方程的算子解法与方程组的算子解法（消去法）

［微分算子与逆算子］　记

$$\frac{df(t)}{dt}=Df(t), \quad \frac{d^2f(t)}{dt^2}=DDf(t)=D^2f(t), \cdots,$$

$$\frac{d^nf(t)}{dt^n}=DD^{n-1}f(t)=D^nf(t)$$

称 $D, D^2, \cdots, D^n$ 为微分算子。一般地引进微分算子

$P(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$　($a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是常数)规定它的意义是

$$P(D)f(t)=D^nf(t)+a_1D^{n-1}f(t)+\cdots+a_{n-1}Df(t)+a_n$$

还引进微分算子的逆算子，D^k 的逆算子记为 $\frac{1}{D^k}$，规定它的意义是

$$\frac{1}{D^k}f(t)=\underbrace{\int\cdots\int}_{k}f(t)(dt)^k \quad (k\text{为正整数})$$

$P(D)$ 的逆算子记为$\frac{1}{P(D)}$，它满足条件

$$P(D)\left[\frac{1}{P(D)}f(t)\right]=f(t)$$

注意，$\frac{1}{P(D)}f(t)$的结果不是唯一的，而是一族函数.

[微分算子的简单性质与运算公式]

微　分　算　子	逆　算　子
1° 若$c_1,c_2,\cdots,c_k$为常数，则 $P(D)[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+\cdots+c_kf_k(t)]$ $=c_1P(D)f_1(t)+c_2P(D)f_2(t)+\cdots+c_kP(D)f_k(t)$ （线性）	若$c_1,c_2,\cdots,c_k$为常数，则 $\frac{1}{P(D)}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+\cdots+c_kf_k(t)]$ $=c_1\frac{1}{P(D)}f_1(t)+c_2\frac{1}{P(D)}f_2(t)+\cdots+c_k\frac{1}{P(D)}f_k(t)$ （线性）
2° 若$P(D)=P_1(D)\cdot P_2(D)$，则 $P(D)f(t)=P_1(D)[P_2(D)f(t)]$ $=P_2(D)[P_1(D)f(t)]$ （交换律）	若$P(D)=P_1(D)\cdot P_2(D)$，则 $\frac{1}{P(D)}f(t)=\frac{1}{P_1(D)}\left[\frac{1}{P_2(D)}f(t)\right]$ $=\frac{1}{P_2(D)}\left[\frac{1}{P_1(D)}f(t)\right]$ （交换律）
3° $P(D)e^{\lambda t}=e^{\lambda t}P(\lambda)$	$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}=\frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda t}$　$(P(\lambda)\neq 0)$
4° $P(D^2)\sin\beta t=P(-\beta^2)\sin\beta t$	$\frac{1}{P(D^2)}\sin\beta t=\frac{1}{P(-\beta^2)}\sin\beta t$　$(P(-\beta^2)\neq 0)$
5° $P(D^2)\cos\beta t=P(-\beta^2)\cos\beta t$	$\frac{1}{P(D^2)}\cos\beta t=\frac{1}{P(-\beta^2)}\cos\beta t$　$(P(-\beta^2)\neq 0)$

微　分　算　子	逆　算　子
6° $P(D)e^{\lambda t}g(t)=e^{\lambda t}P(D+\lambda)g(t)$ (位移定理)	$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}g(t)=e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}g(t)$ (位移定理)
7°	设 $P(0)=a_n\neq 0$, 则 $\frac{1}{P(D)}(A_0t^k+A_1t^{k-1}+\cdots+A_k)$ $=Q_k(D)(A_0t^k+A_1t^{k-1}+\cdots+A_k)$ 其中 $Q_k(D)=a_0'+a_1'D+\cdots+a_k'D^k$ 按以下方法求得: 将 $P(D)$(按D的升幂排列), 依一般的多项式除法规则去除 1, 在第 $k+1$ 步得到的商,当商中得到 k 次多项式时,除法停止,这 k 次多项式即 $Q_k(D)$.

上表左栏各等式的意义是通常的，而右栏各等式的意义则是等号两边的函数族相同.

[用算子解法求常系数非齐次线性微分方程的特解]

1°　方程 $P(D)x=f_k(t)$,其中 $f_k(t)$是 t 的 k 次多项式.

分两种情形:

(i)　$P(0)\neq 0$. 依上表公式 7°得

$$x(t)=Q_k(D)f_k(t)$$

(ii)　$P(0)=0$. 此时 $P(D)=Q(D)D^r$(整数 $r\geqslant 1$), 而 $Q(0)\neq 0$. 依上表公式 2°有

$$x(t)=\frac{1}{P(D)}f_k(t)=\frac{1}{D^r}\left[\frac{1}{Q(D)}f_k(t)\right]$$

设 $\hat{x}(t)=\frac{1}{Q(D)}f_k(t)$, 则

$$x(t)=\frac{1}{D^r}\hat{x}(t)$$

2°　方程 $P(D)x=e^{\lambda t}f_k(t)$(当 $f_k(t)$为常数时 $P(\lambda)\neq 0$).

依上表公式 6°, 一个特解为

$$x(t)=\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}f_k(t)$$

$$=e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}f_k(t)$$

3°　方程 $P(D)x=\cos\beta t\, f_k(t)$ 或 $P(D)x=\sin\beta t\, f_k(t)$.

考虑辅助方程

$$P(D)x=e^{i\beta t}f_k(t)$$

它与方程 2° 同类型，设它的一个特解是

$$x(t)=x_1(t)+ix_2(t)$$

那末方程
$$P(D)x=\cos\beta t\, f_k(t)$$
有一特解

$$x(t)=x_1(t)$$

而方程
$$P(D)x=\sin\beta t\, f_k(t)$$
有一特解

$$x(t)=x_2(t)$$

4°　方程 $P(D^2)x=\cos\beta t$ 或 $P(D^2)x=\sin\beta t$.

若 $P(-\beta^2)\neq 0$，则由上表公式 4°，5° 得

$$x(t)=\frac{1}{P(D^2)}\cos\beta t=\cos\beta t\frac{1}{P(-\beta^2)}$$

或
$$x(t)=\frac{1}{P(D^2)}\sin\beta t=\sin\beta t\frac{1}{P(-\beta^2)}$$

若 $P(-\beta^2)=0$，则有正整数 r 和多项式 Q $(Q(-\beta^2)\neq 0)$ 使

$$P(D^2)=(D^2+\beta^2)^rQ(D^2)$$

可按方程 1°(ii)的方法处理.

［用算子解法(消去法)求线性微分方程组的解］　消去法是解代数方程组的有效方法之一．引进微分算子 $D=\frac{d}{dt}$ 之后，同样适用于解线性微分方程组．下面用具体例子来说明这个方法.

设已给线性微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_2}{dt}+x_1=-t\\ \frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{dx_2}{dt}+3x_1-x_2=e^{2t}\end{cases}$$

应用微分算子，上面方程组可写成

$$\begin{cases}(D+1)x_1-Dx_2=-t & (1)\\ (D^2+3)x_1-(D+1)x_2=e^{2t} & (2)\end{cases}$$

把这个方程组看成两个未知数 x_1, x_2 的代数方程组. 利用消去法, 依次解出 x_1, x_2.

$$\begin{vmatrix} D+1 & -D \\ D^2+3 & -(D+1) \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} -t & -D \\ e^{2t} & -(D+1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} D+1 & -D \\ D^2+3 & -(D+1) \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} D+1 & -t \\ D^2+3 & e^{2t} \end{vmatrix}$$

即

$$(D^3-D^2+D-1)x_1=(D+1)t+De^{2t}=1+t+2e^{2t} \qquad (1')$$

$$(D^3-D^2+D-1)x_2=(D+1)e^{2t}+(D^2+3)t=3e^{2t}+3t \qquad (2')$$

先解(1′), 为此先求其对应的齐次方程

$$(D^3-D^2+D-1)x_1=0$$

的通解. 特征根为

$$\lambda_1=1, \lambda_2=i, \lambda_3=-i$$

所以齐次方程的通解为

$$\bar{x}_1(t)=c_1e^t+c_2\cos t+c_3\sin t\ (c_1, c_2, c_3 \text{ 为任意常数})$$

再用算子解法, 求方程(1′)的一个特解

$$\hat{x}_1(t)=\frac{1}{D^3-D^2+D-1}(1+t+2e^{2t})$$

$$=\frac{1}{D^3-D^2+D-1}(1+t)+\frac{1}{D^3-D^2+D-1}2e^{2t}$$

由前表公式 7° 有

$$\frac{1}{D^3-D^2+D-1}(1+t)=-(1+D)(1+t)=-2-t$$

由前表公式 3° 有

$$\frac{1}{D^3-D^2+D-1}2e^{2t}=2e^{2t}\frac{1}{2^3-2^2+2-1}=\frac{2}{5}e^{2t}$$

得到方程(1′)的特解

$$\hat{x}_1(t)=\frac{2}{5}e^{2t}-t-2$$

最后得出方程(1′)的通解

$$x_1(t)=c_1e^t+c_2\cos t+c_3\sin t+\frac{2}{5}e^{2t}-t-2$$

为求出 $x_2(t)$, (1)减(2)得

$$x_2=(D^2-D+2)x_1-t-e^{2t}$$

用 $x_1(t)$ 代入即得

$$x_2(t)=2c_1e^t+(c_2-c_3)\cos t+(c_2+c_3)\sin t+\frac{3}{5}e^{2t}-3t-3$$

§ 5 稳定性理论大意

稳定性理论研究的是当微分方程右端函数与初始条件发生变化时，解的变化情况.

一、稳定性的概念

［解的稳定与不稳定］ 设微分方程组

$$\frac{dy_i}{dt}=\Phi_i(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

满足初始条件 $y_i(t_0)=\bar{y}_{i0}\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 的解是 $\bar{y}_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$.

如果任意给定 $\varepsilon>0$，总存在相应的正数 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$，使得只要初始值 y_{i0} 满足

$$|y_{i0}-\bar{y}_{i0}|<\delta\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

此微分方程组相应的解 $y_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 对所有 $t>t_0$ 就满足

$$|y_i(t)-\bar{y}_i(t)|<\varepsilon\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

则称解 $\bar{y}_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是稳定的.

简单地说，如果初始值靠近某解初始值的所有解当 $t>t_0$ 时总靠近某解，就说某解是稳定的.

如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，不管 $\delta>0$ 取得多么小，总存在满足

$$|y_{i0}-\bar{y}_{i0}|<\delta\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

的初始值 $y^*_{i0}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 及 $\tau>t_0$，它相应的解 $y^*_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 不满足条件

$$|y^*_i(\tau)-\bar{y}_i(\tau)|<\varepsilon\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

则称解 $\bar{y}_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是不稳定的.

如果 $\bar{y}_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 稳定，并且初始值满足

$$|y_{i0}-\bar{y}_{i0}|<\delta\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

的所有解 $y_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 都满足

$$\lim_{t\to+\infty}|y_i(t)-\bar{y}_i(t)|=0\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

则称 $\bar{y}_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是渐近稳定的.

［问题的简化］　给定方程组

$$\frac{dy_i}{dt}=\Phi_i(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

为了研究它满足初始条件 $y_i(t_0)=\bar{y}_{i0}$ $(i=1,2,\cdots,n)$的解 $\bar{y}_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的稳定性，必须考察别的解 $y_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$与它的偏差．今令

$$x_i(t)=y_i(t)-\bar{y}_i(t)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

原方程组便变为如下形式：

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=-\frac{d\bar{y}_i}{dt}+\Phi_i(t,x_1+\bar{y}_1(t),x_2+\bar{y}_2(t),\cdots,x_n+\bar{y}_n(t))\\&=f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\tag{1}$$

而$\bar{y}_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的稳定性归结为方程组(1)的零解 $x_i\equiv0$ $(i=1,2,\cdots,n)$的稳定性．

任何微分方程组的常数解常称为它的平衡点(奇点)．所以(1)的零解

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$$

是平衡点．

如果任意给定 $\varepsilon>0$，总存在相应的正数 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$，使得只要初始值满足

$$|x_{i0}|<\delta\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

(1)的相应解 $x_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$对所有 $t>t_0$ 就满足

$$|x_i(t)|<\varepsilon\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

则称(1)的平衡点 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 是稳定的．

如果进而满足条件

$$\lim_{t\to+\infty}x_i(t)=0\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

则称平衡点 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 是渐近稳定的．

如果不论正数 δ 选得多么小，对于预先给定的正数 ε，总存在满足

$$|x_{i0}|<\delta\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

的初始值 x_{i0}^* 及 $\tau>t_0$，它相应的解 $x_i^*(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$不满足条件

$$|x_i^*(\tau)|<\varepsilon\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

则称(1)的平衡点 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 不稳定．

［相空间］　给定方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

称$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的空间为此方程组的相空间，特别当 $n=2$ 时，称为相平面．当方程组右端函数不显含 t 时，它的解作为相空间的曲线，称为轨道．在其他情况

下,解曲线常称为积分曲线.

二、稳定性问题的解法

[常系数齐次线性微分方程组平衡点的稳定性问题] 为了简便起见, 只研究含两个未知函数的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y \end{cases}$$

式中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 都为实数,且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

从特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

算出特征根 λ_1,λ_2,依次代入下面方程组:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)u_1+a_{12}u_2=0 \\ a_{21}u_1+(a_{22}-\lambda)u_2=0 \end{cases}$$

分别确定出两组解 α_1,α_2 和 β_1,β_2.

这时线性方程组的平衡点 $x\equiv 0,y\equiv 0$ 的稳定性可分下列几种情况讨论:

1° 特征根是实数:

$$\lambda_1\neq\lambda_2$$

通解的形式是

$$\begin{cases} x=c_1\alpha_1e^{\lambda_1t}+c_2\beta_1e^{\lambda_2t} \\ y=c_1\alpha_2e^{\lambda_1t}+c_2\beta_2e^{\lambda_2t} \end{cases}$$

式中 c_1,c_2 为任意常数.

(i) $\lambda_1<0,\lambda_2<0$.

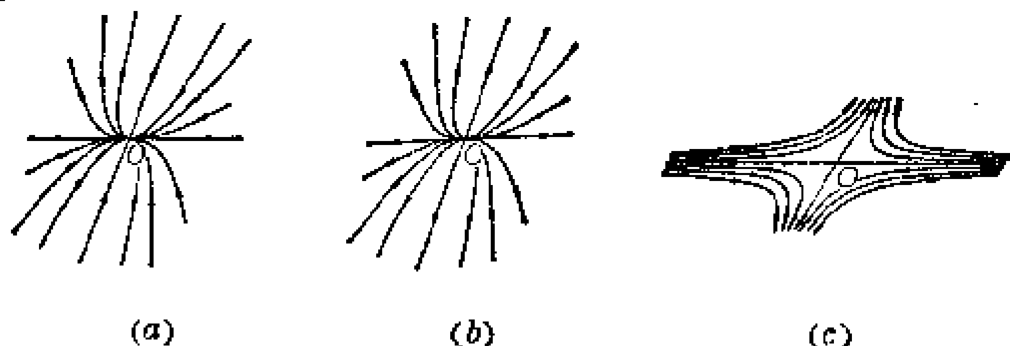
零解是渐近稳定的. 轨道形状如图 13.1(a) (箭头表示 t 增大的方向, 下同). 这种类型的平衡点(0,0)称为稳定结点.

(ii) $\lambda_1>0,\lambda_2>0$.

零解是不稳定的. 轨道形状如图 13.1(b). 这种类型的平衡点 (0,0) 称为不稳定结点.

(iii) $\lambda_1>0,\lambda_2<0$.

零解是不稳定的．轨道形状如图 13.1(c)．这种类型的平衡点 (0,0) 称为鞍点．



(a)　　　　(b)　　　　(c)

图　13.1

2° 特征根是复数：

$$\lambda_1=p+iq,\quad \lambda_2=p-iq,\quad q\neq 0$$

通解的形式是

$$\begin{cases}x=e^{pt}(c_1\cos qt+c_2\sin qt)\\ y=e^{pt}(c_1^*\cos qt+c_2^*\sin qt)\end{cases}$$

式中 c_1,c_2 是任意常数，c_1^*,c_2^* 是 c_1,c_2 的线性组合．

(i) $\lambda_{1,2}=p\pm iq$，$p<0,q\neq 0$．

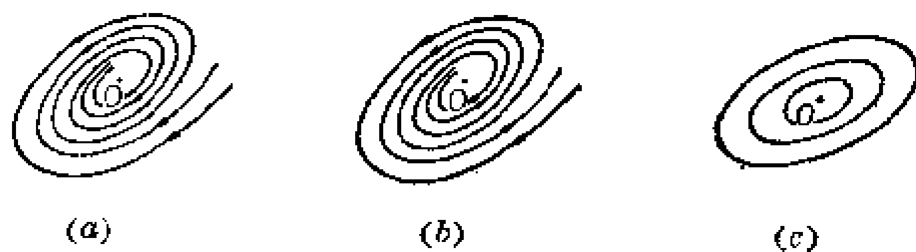
零解是稳定的．轨道形状如图 13.2(a)．这种类型的平衡点 (0,0) 称为稳定的焦点．

(ii) $\lambda_{1,2}=p\pm iq$，$p>0,q\neq 0$．

零解是不稳定的．轨道形状如图 13.2(b)．这种类型的平衡点(0,0)称为不稳定的焦点．

(iii) $\lambda_{1,2}=\pm iq$，$q\neq 0$．

零解是稳定的．轨道形状如图 13.2(c)．这种类型的平衡点 (0,0) 称为中心．中心是稳定的．



(a)　　　　(b)　　　　(c)

图　13.2

3° 特征方程有重根：

$$\lambda_1=\lambda_2$$

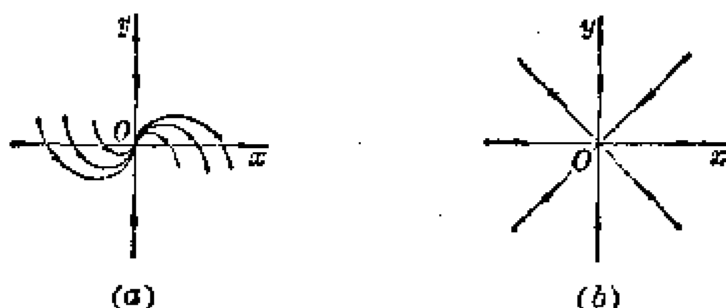
通解的形式是

$$\begin{cases}x=(c_1\alpha_1+c_2\beta_1 t)e^{\lambda_1 t}\\ y=(c_1\alpha_2+c_2\beta_2 t)e^{\lambda_1 t}\end{cases}$$

(i) $\lambda_1=\lambda_2<0$.

零解是渐近稳定的．轨道形状如图 13.3(a)．这种类型的平衡点 (0,0) 称为稳定的退化结点．

如果$\beta_1=\beta_2=0$，零解是稳定的结点，称为临界结点．轨道形状如图 13.3(b)．



(a)　　(b)

图　13.3

(ii) $\lambda_1=\lambda_2>0$.

零解是不稳定的．轨道形状如图 13.3(a)与(b)，但箭头的方向相反．这种类型的平衡点(0,0)称为不稳定的退化结点与不稳定的临界结点．

综合上述各种情况可得如下结论：如果特征方程的根都有负的实部，那末零解是稳定的，而且是渐近稳定的；如果特征方程有一个具有正实部的根，那末零解是不稳定的．

这个结论，对一般的常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

也是成立的．

定理　如果常系数齐次线性微分方程组的特征方程

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

所有的根的实部都是负的，则零解是渐近稳定的；如果特征方程的所有根中至少

有一个实部为正的根，则零解是不稳定的。

[按一次近似判定稳定性] 考虑方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+R_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

式中 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$是常数，$R_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n)$对 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ 来说是不低于二阶。

其一次近似方程组为

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \ (i=1,2,\cdots,n)$$

研究一次近似方程组的特征根 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的各种情况可以判定稳定性。有两个基本定理：

第一定理 如果一次近似方程组的所有特征根都具有负的实部，那末原方程组的零解是渐近稳定的。

第二定理 如果一次近似方程组的特征根至少有一个具有正实部，那末原方程组的零解是不稳定的。

这两个定理包括了所有可以用一次近似方程组来研究原方程组零解的稳定情况(称为非临界情况)。至于至少有一个实部为零的根，而其他各根都有负的实部的临界情况，方程组右边的高阶项对于零解的稳定性起着重要的作用，因而一般不可能借一次近似方程组来研究稳定性问题。

[胡尔威茨判别法] 它是直接利用特征方程的系数所构成的行列式的某些性质来判别常系数线性微分方程组零解稳定性的方法。

设常系数线性微分方程组的特征方程为

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

那末常系数线性微分方程组零解是渐近稳定的充分必要条件是：$a_0>0$，且所有的胡尔威茨行列式

$$\Delta_1=a_1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_0\\ a_3 & a_2\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_5 & a_4 & a_3\end{vmatrix},\quad \cdots$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

都是正的(最后的 $\Delta_n>0$ 可用条件 $a_n>0$ 代替)。

如果 $\Delta_n=0$，那末由于 $\Delta_n=a_n\Delta_{n-1}=0$，必有 $a_n=0$ 或 $\Delta_{n-1}=0$。若 $a_n=0$，则特征方程有零根；若 $\Delta_{n-1}=0$，则特征方程有纯虚根，在这两种情况下，零解可能是稳定的也可能是不稳定的。

特征方程是二次、三次和四次时的胡尔威茨判别条件(为作图方便，以下都取 $a_0=1$)：

(i) 特征方程： $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$

胡尔威茨条件为 $a_1>0, a_2>0$。

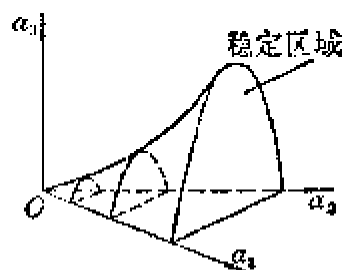
稳定区域见图 13.4(*a*)。

(ii) 特征方程： $\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$

胡尔威茨条件为 $a_1>0, a_1a_2-a_3>0, a_3>0$。

稳定区域见图 13.4(*b*)。

(*a*)



(*b*)

图 13.4

(iii) 特征方程： $\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0$

胡尔威茨条件为 $a_1>0, a_1a_2-a_3>0, (a_1a_2-a_3)a_3-a_1^2a_4>0, a_4>0$。

[李雅普诺夫第二方法(直接方法)] 研究微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

的平衡点的稳定性有一个比较一般的方法，即所谓李雅普诺夫方法。

1° 李雅普诺夫稳定性定理 对于方程组(1)，如果可以找到一个在原点邻

域内满足下列条件的可微函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$（称为李雅普诺夫函数）：

(i) $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$（或$\leqslant 0$），且只在 $x_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$V=0$。

(ii) 当 $t\geqslant t_0$ 时，V 沿方程组(1)的积分曲线的全导数

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 0\ (\text{或}\geqslant 0)$$

那末方程组(1)的平衡点 $x_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是稳定的。

2° 李雅普诺夫渐近稳定性定理 对于方程组(1)，如果可以找到一个在原点的邻域内满足下列条件的可微函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$（称为李雅普诺夫函数）：

(i) $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$（或$\leqslant 0$），且只在 $x_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$V=0$。

(ii) 沿方程组(1)的积分曲线的全导数

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 0\ (\text{或}\geqslant 0)$$

而在原点某适当小的 δ 邻域外部$\left(\text{即}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\delta^2>0\right)$，$t\geqslant t_0$ 时，$\frac{dV}{dt}<0$ $\left(\text{或}\frac{dV}{dt}>0\right)$

那末方程组(1)的平衡点 $x_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是渐近稳定的。

例 研究微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4y-x^3\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=3x-y^3\end{cases}$$

在平衡点 $x=0,y=0$ 的稳定性。

解 这个方程组的一次近似方程的特征方程有两个纯虚根，因此是一临界情况，不能用一次近似方法研究。现用李雅普诺夫方法。取

$$V(x,y)=3x^2+4y^2$$

因为

(i) $V(0,0)=0$；$V(x,y)>0$，$x^2+y^2\neq 0$；

(ii) $\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}=-(6x^4+8y^4)\leqslant 0$

对于任意的$\delta>0$，当 $x^2+y^2\geqslant\delta^2$，$t>t_0$ 时，$\frac{dV}{dt}<0$。所以，平衡点$(0,0)$是渐近稳定的。

三、极限圈(或极限环)

这里只讨论 $n=2$ 的情形.

[周期解] 方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_1(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=f_2(x,y)\end{cases}$$

以 T 为周期的周期解是满足 $x(t+T)=x(t)$, $y(t+T)=y(t)$ 的解. 周期解所对应的轨道是闭曲线. 反过来,闭轨道对应于周期解.

[极限圈] 孤立的周期解称为方程的极限圈. 完整地说,就是:设 $x=x(t)$, $y=y(t)$是方程的周期解, K是这个解在相平面上描出的闭曲线. 如果存在正数 ρ, 使得对于相平面上任一与K距离小于 ρ 的点 ξ, 方程过点 ξ 的解就不是周期的,那末称 $x=x(t)$, $y=y(t)$(即闭轨道K)为孤立的周期解,或极限圈.

例

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+x(1-x^2-y^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y(1-x^2-y^2)\end{cases}$$

作坐标变换: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 方程组化为

$$\frac{dr}{dt}=r(1-r^2),\quad \frac{d\theta}{dt}=-1$$

通解为

$$r=\frac{1}{(1+ke^{-2t})^{\frac{1}{2}}},\quad \theta=-(t-t_0)$$

其中 k, t_0是任意的. 取 $t_0=0$,则方程组的解为

$$x=\frac{\cos t}{(1+ke^{-2t})^{\frac{1}{2}}},\quad y=\frac{-\sin t}{(1+ke^{-2t})^{\frac{1}{2}}}$$

当 $k=0$ 时,是圆周 $x^2+y^2=1$; 当 $k=c^2$ $(c>0)$时是一螺线,当 $t\to-\infty$ 时,趋于原点,而当 $t\to\infty$ 时,从内部盘旋逼近圆周 $x^2+y^2=1$; 当 $k=-c^2$ $(c>0)$时,轨道是一曲线、当 $t\to\log c+0$ 时,趋向无穷,而当 $t\to\infty$ 时,从外部盘旋逼近圆周 $x^2+y^2=1$.

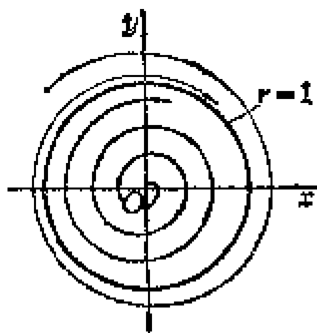


图 13.5

轨道分布如图 13.5.

这时圆周 $x^2+y^2=1$ 就是方程组的唯一极限圈.

(0, 0)是唯一的奇点.

[极限圈存在性定理] 对于方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=f_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt}=f_2(x,y) \end{cases}$$

1° 设在 xy 平面上有两个简单闭曲线 C_1 及 C_2, C_2 在 C_1 的内部, 满足下面两个条件:

(i) C_1 上的点的矢量场由 C_1 的外部指向内部, C_2 上的点的矢量场由 C_2 的内部指向外部;

(ii) C_1 及 C_2 所围成的环形区域中方程组没有奇点;

那末在 C_1 及 C_2 所围成的环形区域中, 一定存在稳定的极限圈(称为庞卡莱-班狄克生定理).

2° 如果在某单连通区域 G 内, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ 不变号,并且在任何子区域 $D(\subset G)$ 内都不恒等于零,那末在 G 内,方程组没有任何闭轨道.

§6 常微分方程的数值解法

一、一阶微分方程初值问题的数值解

要求微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

在初始条件

$$y(x_0)=y_0$$

下的数值解,就是要在解存在的区间的一系列点

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$$

上从初值 y_0 出发,逐个求出 $y(x_i)$ 的近似值 y_i.

[改进的欧拉方法(预报校正法)] 计算公式为

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n) & (1)\\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)})] & (2) \end{cases}$$

式中 y_n 表示 $y(x_n)$ 的近似值, $h=x_{i+1}-x_i$ 表示步长. 这里截断误差为

$$R=O(h^3)$$

这个方法中，(1)式用折线法提供初值，称为预报公式．(2)式用梯形法给出较精确的值，称为校正公式．合称预报校正公式．

[龙格-库塔方法]　计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

式中

$$k_1=hf(x_n,y_n)$$

$$k_2=hf\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3=hf\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4=hf(x_n+h,\ y_n+k_3)$$

截断误差为　$R=O(h^5)$

手算时按下表自上而下进行．

x_m	y_m	$k_i=hf$	k
x_0	y_0	$k_1=hf(x_0,y_0)$	k_1+k_4
$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_1}{2}$	$k_2=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{k_1}{2}\right)$	$+2(k_2+k_3)$
$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_2}{2}$	$k_3=hf\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{k_2}{2}\right)$	$=k$
x_0+h	y_0+k_3	$k_4=hf(x_0+h,\ y_0+k_3)$	
$x_1=x_0+h$	$y_1=y_0+\frac{k}{6}$		

[阿达姆斯方法]

1° 内插公式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}[9f(x_{n+1},y_{n+1})+19f(x_n,y_n)-5f(x_{n-1},y_{n-1})$$
$$+f(x_{n-2},y_{n-2})]$$

这是关于 y_{n+1} 的隐式方程，只要 h 比较小，可用迭代法求解．

2° 外推公式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}[55f(x_n,y_n)-59f(x_{n-1},y_{n-1})$$
$$+37f(x_{n-2},y_{n-2})-9f(x_{n-3},y_{n-3})]$$

这是关于 y_{n+1} 的显式方程，只要知道前几点的值，就可从公式中直接算出 y_{n+1}．

3° 预报校正公式

$$y_{n+1}^{(0)}=y_n+\frac{h}{24}[55f(x_n,y_n)-59f(x_{n-1},y_{n-1})$$
$$+37f(x_{n-2},y_{n-2})-9f(x_{n-3},y_{n-3})]$$
$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}[9f(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)})+19f(x_n,y_n)$$
$$-5f(x_{n-1},y_{n-1})+f(x_{n-2},y_{n-2})]$$

截断误差都为

$$R=O(h^5)$$

阿达姆斯方法可以单独采用外推公式计算，每算一个 y_{n+1}，只要计算一次 $f(x,y)$的值，计算量比龙格-库塔法小，而截断误差同阶，所以计算量小是外推法优点之一．缺点是前几个 y_i 值不能用此法计算，计算 y_1、y_2, y_3 需采用其他方法(一般可用龙格-库塔法)．

补充说明　1° 阿达姆斯方法中，计算 y_{n+1} 的值，要用到 y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}，所以称为多步法．而改进的欧拉法、龙格-库塔法，只要用到 y_n，所以称为一步法．

2° 一步法中途改变步长方便，多步法中途改变步长麻烦，因要用一步法重新算出开头几项．

3° 多步法还有一个优点，即可顺便估计出截断误差．

用 $y_{n+1}^{(E)}$ 和 $y_{n+1}^{(I)}$ 分别表示用外推和内插公式算得的值，有

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(I)}=-\frac{19}{720}h^5y^{(5)}(x_n)+\cdots$$
$$\approx-\frac{19}{720}(y_{n+1}^{(I)}-y_{n+1}^{(E)})$$

式中 $y^{(5)}(x_n)=\left.\frac{d^5y}{dx^5}\right|_{x=x_n}$．若计算时规定的允许误差不超过$\varepsilon$，就将 ε 与

$$\left|-\frac{19}{720}(y_{n+1}^{(I)}-y_{n+1}^{(E)})\right|$$

比较，如果$\left|-\frac{19}{720}(y_{n+1}^{(I)}-y_{n+1}^{(E)})\right|\leqslant\varepsilon$，可继续计算；否则说明误差太大，应当缩小步长．若$\left|-\frac{19}{720}(y_{n+1}^{(I)}-y_{n+1}^{(E)})\right|$比 ε 小得多，不妨将步长放大，提高计算速度．

二、一阶微分方程组初值问题的数值解

这里为书写简便，只讨论含两个未知函数的微分方程组，含多个未知函数的微分方程组，计算公式类同.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y,z) \\ \dfrac{dz}{dx}=g(x,y,z) \end{cases}$$

和初始条件

$$y(x_0)=y_0,\qquad z(x_0)=z_0$$

[改进的欧拉方法(预报校正法)]

预报公式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n,z_n) \\ z_{n+1}^{(0)}=z_n+hg(x_n,y_n,z_n) \end{cases}$$

校正公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n,z_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)},z_{n+1}^{(0)})] \\ z_{n+1}=z_n+\dfrac{h}{2}[g(x_n,y_n,z_n)+g(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)},z_{n+1}^{(0)})] \end{cases}$$

[龙格-库塔方法] 计算公式为

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ z_{n+1}=z_n+\dfrac{1}{6}(l_1+2l_2+2l_3+l_4) \end{cases}$$

其中 $k_1=hf(x_n,y_n,z_n)$

$$k_2=hf\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{k_1}{2},\ z_n+\frac{l_1}{2}\right)$$

$$k_3=hf\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{k_2}{2},\ z_n+\frac{l_2}{2}\right)$$

$$k_4=hf(x_n+h,\ y_n+k_3,\ z_n+l_3)$$

$$l_1=hg(x_n,\ y_n,\ z_n)$$

$$l_2=hg\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{k_1}{2},\ z_n+\frac{l_1}{2}\right)$$

$$l_3=hg\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{k_2}{2},\ z_n+\frac{l_2}{2}\right)$$

$$l_4=hg(x_n+h,\ y_n+k_3,\ z_n+l_3)$$

先计算 $k_1, l_1, k_2, l_2, k_3, l_3, k_4, l_4$，再计算 y_{n+1}, z_{n+1}.

[阿达姆斯方法的预报校正公式]

预报值(外推公式)

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{24}[55f(x_n, y_n, z_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \\ \qquad\qquad + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3}, z_{n-3})] \\ z_{n+1}^{(0)} = z_n + \dfrac{h}{24}[55g(x_n, y_n, z_n) - 59g(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \\ \qquad\qquad + 37g(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2}) - 9g(x_{n-3}, y_{n-3}, z_{n-3})] \end{cases}$$

校正值(内插公式)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{24}[9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}, z_{n+1}^{(0)}) + 19f(x_n, y_n, z_n) \\ \qquad\qquad - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})] \\ z_{n+1} = z_n + \dfrac{h}{24}[9g(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}, z_{n+1}^{(0)}) + 19g(x_n, y_n, z_n) \\ \qquad\qquad - 5g(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) + g(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})] \end{cases}$$

前几个 y_j 和 z_j 的计算与本节一中的龙格-库塔方法相同.

三、边值问题

这里只讨论二阶线性常微分方程的边值问题.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + p(x)\dfrac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \\ x = a, \quad y = \alpha \\ x = b, \quad y = \beta \end{cases} \tag{1}$$

[差分方法]　将区间 $[a, b]$ 分成 n 等份，步长 $h = \dfrac{b-a}{n}$，分点 $x_0 = a$，$x_1 = a + h, \cdots, x_k = a + kh, \cdots, x_n = b$ 称为节点. 把微商用差商代替，边值问题化为下面差分方程组的求解问题.

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k\dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2k} + q_k y_k = f_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1) \\ y_0 = \alpha \\ y_n = \beta \end{cases}$$

式中 $y_k = y(x_k), p_k = p(x_k), q_k = q(x_k), f_k = f(x_k)$　$(k = 1, 2, \cdots, n-1)$. 上面的差分方程组可看成 $n+1$ 个未知量 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的线性代数方程组，方程个数也是 $n+1$. 整理合并同类项，差分方程组可改写成

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = d_k \qquad (k=1,2,\cdots,n-1) \\ y_n = \beta \end{cases}$$

式中

$$\begin{cases} a_k = 1 - \frac{h}{2} p_k \\ b_k = -2 + h^2 q_k \\ c_k = 1 + \frac{h}{2} p_k \\ d_k = h^2 f_k \end{cases} \qquad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

这是一种特殊形式的线性代数方程组，除了可用消元法，迭代法等求解外，还可用更简便有效的方法——追赶法(见第四章，§ 3)。

在应用上，还可能遇到下面形式的边界条件：

$$\begin{cases} x = a, \ \frac{dy}{dx} = \alpha_1 y + \beta_1 \\ x = b, \ \frac{dy}{dx} = \alpha_2 y + \beta_2 \end{cases}$$

式中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是已知常数．这时，上面差分方程组中相应于边界条件的那两个方程要换成：

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha_1 y_0 + \beta_1$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \alpha_2 y_n + \beta_2$$

［化为初值问题的数值解］　先求出初值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = 0 \end{cases}$$

的数值解 $y_0(x)$，再求出满足初始条件 $y(a)=0, y'(a)=1$ 的相应齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的数值解 $y_1(x)$．原边值问题(1)的解可表示为

$$y(x) = y_0(x) + \frac{\beta - y_0(b)}{y_1(b)} y_1(x)$$

四、小参数法

当微分方程含有绝对值很小的参数 ε 时，将解写成 ε 的幂级数以求得近似

解析解的方法，称为小参数法．下面就常微分方程初值问题作简略介绍．

给定微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\cdots,x_n,\varepsilon)\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1}$$

假设所有 $f_i(t,x_1,\cdots,x_n,\varepsilon)$ 作为 t 的函数是充分光滑的，作为 $x_1,\cdots,x_n,\varepsilon$ 的函数是解析的，并且在 $\varepsilon=0$ 可以展开成 ε 的幂级数

$$f_i(t,x_1,\cdots,x_n,\varepsilon)=f_i^{(0)}(t,x_1,\cdots,x_n)+\varepsilon f_i^{(1)}(t,x_1,\cdots,x_n)+\cdots$$

系数 $f_i^{(m)}(t,x_1,\cdots,x_n)$ 又都是 $x_1,\cdots,x_n$ 的解析函数．

又给定初始条件

$$t=t_0\text{时},\quad x_i=x_i(\varepsilon)=x_i^{(0)}+\varepsilon x_i^{(1)}+\cdots\tag{2}$$

于是方程组(1)的满足初始条件(2)的解在 t 与 ε 的某区域上存在，并且可以展开成 ε 的幂级数

$$x_i=x_i(t,\varepsilon)=x_i^{(0)}(t)+\varepsilon x_i^{(1)}(t)+\cdots\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{3}$$

而(3)的任何部分和便是(1)的满足(2)的近似解析解．在具体计算时，只需把级数(3)代入(1)，把两边化为 ε 的幂级数形状，再比较系数．

例　求包含小参数 ε 的黎卡提方程

$$\frac{dx}{dt}=t+\varepsilon x^2$$

满足初始条件

$$t=0,\quad x=0$$

的解．

解　设

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k(t)\varepsilon^k$$

代入上述微分方程，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{dx_k}{dt}\varepsilon^k=t+\varepsilon\left(\sum_{j=0}^{\infty}x_j\varepsilon^j\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}x_l\varepsilon^l\right)$$

$$=t+\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}x_lx_{k-l}\right)\varepsilon^k$$

即

$$\frac{dx_0}{dt}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{dx_k}{dt}\varepsilon^k=t+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k-1}x_lx_{k-1-l}\right)\varepsilon^k$$

令两边 ε 的同次幂系数相等,得到

$$\frac{dx_0}{dt}=t$$

$$\frac{dx_1}{dt}=x_0^2$$

$$\frac{dx_2}{dt}=2x_0x_1$$

$$\frac{dx_3}{dt}=2x_0x_2+x_1^2$$

…………………………

另外初始条件可改写为

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}x_k(0)\varepsilon^k$$

于是又可列出

$$x_0(0)=0$$

$$x_1(0)=0$$

$$x_2(0)=0$$

$$x_3(0)=0$$

…………

求出

$$x_0(t)=\frac{t^2}{2}$$

$$x_1(t)=\frac{t^5}{20}$$

$$x_2(t)=\frac{t^8}{160}$$

$$x_3(t)=\frac{7t^{11}}{8800}$$

…………………

而

$$x(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{\varepsilon}{20}t^5+\frac{\varepsilon^2}{160}t^8+\frac{7\varepsilon^3}{8800}t^{11}$$

是所求解的近似表达式(即近似解析解).

第十四章　偏微分方程

物理、力学、工程技术和其他自然科学经常提出大量的偏微分方程问题．由于实践的需要和一些数学学科(如泛函分析，计算技术)的发展，促进了偏微分方程理论的发展，使它形成一门内容十分丰富的数学学科．

本章主要介绍一阶偏微分方程、线性方程组及二阶线性偏微分方程的理论．在二阶方程中，叙述了极值原理、能量积分及唯一性定理．阐明了一些解的性质和物理意义；介绍典型椭圆型、双曲型、抛物型方程的常用解法：分离变量法，基本解，格林方法，黎曼方法，势位方法及积分变换法．最后，扼要地介绍了有实用意义的数值解法：差分方法和变分方法．

§1　偏微分方程的一般概念与定解问题

[偏微分方程及其阶数]　一个包含未知函数的偏导数的等式称为偏微分方程．如果等式不止一个，就称为偏微分方程组．出现在方程或方程组中的最高阶偏导数的阶数称为方程或方程组的阶数．

[方程的解与积分曲面]　设函数 u 在区域 D 内具有方程中所出现的各阶的连续偏导数，如果将 u 代入方程后，能使它在区域 D 内成为恒等式，就称 u 为方程在区域 D 中的解，或称正规解．$u=u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $n+1$ 维空间 $(u, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中是一曲面，称它为方程的积分曲面．

[齐次线性偏微分方程与非齐次线性偏微分方程]　对于未知函数和它的各阶偏导数都是线性的方程称为线性偏微分方程．如

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y)$$

就是线性方程．在线性方程中，不含未知函数及其偏导数的项称为自由项，如上式的 $f(x,y)$．若自由项不为零，称方程为非齐次的．若自由项为零，则称方程为齐次的．

[拟线性方程与半线性方程]　如果一个方程，对于未知函数的最高阶偏导数是线性的，称它为拟线性方程．如

$$a_{11}(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_{12}(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y,u)=0$$

就是拟线性方程. 在拟线性方程中，由最高阶偏导数所组成的部分称为方程的主部. 上面方程的主部为

$$a_{11}(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_{12}(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

如果方程的主部的各项系数不含未知函数，就称它为半线性方程. 如

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+d(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

就是半线性方程.

[非线性方程]　不是线性也不是拟线性的方程称为非线性方程. 如

$$u^2\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1$$

就是一阶非线性偏微分方程.

[定解条件]　给定一个方程，一般只能描写某种运动的一般规律，还不能确定具体的运动状态，所以把这个方程称为泛定方程. 如果附加一些条件(如已知开始运动的情况或在边界上受到外界的约束）后，就能完全确定具体运动状态，称这样的条件为定解条件. 表示开始情况的附加条件称为初始条件，表示在边界上受到约束的条件称为边界条件.

[定解问题]　给定了泛定方程(在区域 D 内)和相应的定解条件的数学物理问题称为定解问题. 根据不同定解条件，定解问题分为三类.

1°　初值问题　只有初始条件而没有边界条件的定解问题称为初值问题或柯西问题.

2°　边值问题　只有边值条件而没有初始条件的定解问题称为边值问题.

3°　混合问题　既有边界条件也有初始条件的定解问题称为混合问题（有时也称为边值问题).

[定解问题的解]　设函数 u 在区域 D 内满足泛定方程，当点从区域 D 内趋于给出初值的超平面或趋于给出边界条件的边界曲面时，定解条件中所要求的 u 及它的导数的极限处处存在而且满足相应的定解条件，就称 u 为定解问题的解.

[解的稳定性]　如果定解条件的微小变化只引起定解问题的解在整个定义域中的微小变化，也就是解对定解条件存在着连续依赖关系，那末称定解问题的解是稳定的.

[定解问题的适定性] 如果定解问题的解存在与唯一并且关于定解条件是稳定的，就说定解问题的提法是适定的.

§2 一阶偏微分方程

一、柯西-柯娃列夫斯卡娅定理.

[一阶偏微分方程的通解] 一阶偏微分方程的一般形式*是

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0$$

或

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, p_2, \cdots, p_n)=0, \quad 其中\ p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$$

如解出 p_1，可得：

$$p_1=f(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_2, \cdots, p_n)$$

当方程的解包含某些"任意元素"(指函数)，如果适当选取"任意元素"时，可得方程的任意解(某些"奇异解"除外)，则称这样的解为通解.

在偏微分方程的研究中，重点在于确定方程在一些附加条件(即定解条件)下的解，而不在于求通解.

[一阶方程的柯西问题]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=f(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_2, \cdots, p_n)\\ u|_{x_1=x_1^0}=\varphi(x_2, \cdots, x_n)\end{cases}$$

称为柯西问题，式中 $\varphi(x_2, \cdots, x_n)$为已知函数，对柯西问题有如下的存在唯一性定理.

[柯西-柯娃列夫斯卡娅定理] 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_2, \cdots, p_n)$ 在点$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, u^0, p_2^0, \cdots, p_n^0)$的某一邻域内解析，而 $\varphi(x_2, \cdots, x_n)$ 在点$(x_2^0, \cdots, x_n^0)$的某邻域内解析，则柯西问题在点$(x_1^0, \cdots, x_n^0)$的某一邻域内存在着唯一的解析解.

这个定理应用的局限性较大，因它要求 f 及初始条件都是解析函数，一般的定解问题未必能满足这种条件.

对高阶方程也有类似定理.

---

* 在有些书中写作

$$F\left(t, x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0$$

二、一阶线性方程

1. 一阶齐次线性方程

[特征方程・特征曲线・初积分(首次积分)]　给定一阶齐次线性方程

$$a_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+a_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \tag{1}$$

式中 a_i 为连续可微函数，在所考虑的区域内的每一点不同时为零(下同)．方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=a_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\frac{dx_2}{a_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{a_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)} \tag{2}$$

称为一阶齐次线性偏微分方程的特征方程．如果曲线 l: $x_i=x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$满足特征方程(2)，就称曲线 l 为一阶齐次线性方程的特征曲线．

如果函数 $\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在特征曲线 $x_i=x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$上等于常数，即

$$\psi(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t))=c$$

就称函数 $\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为特征方程(2)的初积分(首次积分)．

[齐次方程的通解]

1° 连续可微函数 $u=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是齐次线性方程(1)的解的充分必要条件是：$\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是这个方程的特征方程的初积分．

2° 设 $\psi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$是特征方程(2)在区域 D 上连续可微而且相互独立的初积分(因此在 D 内的每一点，矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

的秩为 $n-1$)，则

$$u=w(\psi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ \cdots,\ \psi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n))$$

是一阶齐次线性方程(1)的通解，其中 w 为 $n-1$ 个变量的任意连续可微函数．

[柯西问题] 考虑方程的柯西问题

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0 \\ u|_{x_1=x_1^0}=\varphi(x_2, \cdots, x_n)\end{cases}$$

式中 $\varphi(x_2, \cdots, x_n)$ 为已知的连续可微函数。

设 $\psi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为特征方程的任意 $n-1$ 个相互独立的初积分，引入参变量 $\overline{\psi}_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，从方程组

$$\begin{cases}\psi_1(x_1^0, x_2, \cdots, x_n)=\overline{\psi}_1 \\ \psi_2(x_1^0, x_2, \cdots, x_n)=\overline{\psi}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{n-1}(x_1^0, x_2, \cdots, x_n)=\overline{\psi}_{n-1}\end{cases}$$

解出 $x_2, \cdots, x_n$ 得

$$\begin{cases}x_2=w_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \cdots, \overline{\psi}_{n-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=w_n(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \cdots, \overline{\psi}_{n-1})\end{cases}$$

则柯西问题的解为

$$u=\varphi(w_2(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{n-1}), \cdots, w_n(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{n-1}))$$

2. 非齐次线性方程

它的求解方法与拟线性方程相同.

三、一阶拟线性方程

一阶拟线性方程为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=R(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$$

其中 a_i 及 R 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, u$ 的连续可微函数且不同时为零.

[一阶拟线性方程的求解和它的特征方程]

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, u) \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \\ \dfrac{du}{dt}=R(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)\end{cases}$$

或

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \cdots, x_n, u)}=\cdots=\frac{dx_n}{a_n(x_1, \cdots, x_n, u)}=\frac{du}{R(x_1, \cdots, x_n, u)}$$

为原拟线性方程的特征方程. 如果曲线 l: $x_i=x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$, $u=u(t)$

满足特征方程，则称它为拟线性方程的特征曲线.

设 $\psi_i(x_1,\cdots,x_n,u)(i=1,2,\cdots,n)$ 为特征方程的 n 个相互独立的初积分，那末对于任何连续可微函数 w，

$$w(\psi_1(x_1,\cdots,x_n,u),\ \psi_2(x_1,\cdots,x_n,u),\cdots,\psi_n(x_1,\cdots,x_n,u))=0$$

都是拟线性方程的隐式解.

[柯西问题]　考虑方程的柯西问题

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=R(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\\ u|_{x_1=x_1^0}=\varphi(x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

φ 为已知的连续可微函数.

设 $\psi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u),\cdots,\psi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)$ 为特征方程的 n 个相互独立的初积分，引入参变量 $\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\cdots,\overline{\psi}_n$，从

$$\begin{cases}\psi_1(x_1^0,x_2,\cdots,x_n,u)=\overline{\psi}_1\\ \psi_2(x_1^0,x_2,\cdots,x_n,u)=\overline{\psi}_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \psi_n(x_1^0,x_2,\cdots,x_n,u)=\overline{\psi}_n\end{cases}$$

解出 $x_2,\cdots,x_n,u$

$$\begin{cases}x_2=w_2(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\cdots,\overline{\psi}_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=w_n(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\cdots,\overline{\psi}_n)\\ u=w(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\cdots,\overline{\psi}_n)\end{cases}$$

则由

$$\begin{aligned}V(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\equiv\ & w(\psi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u),\cdots,\psi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u))\\ &-\varphi(w_2(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\cdots,\overline{\psi}_n),\cdots,w_n(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\cdots,\overline{\psi}_n))=0\end{aligned}$$

给出柯西问题的隐式解.

四、一阶非线性方程

[完全解·通解·奇异解]　一阶非线性方程的一般形式为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,p_1,p_2,\cdots,p_n)=0$$

$$p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

若一阶偏微分方程的解包含任意 n 个独立的常数，则称这样的解为完全解(全积分).

若$V(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, c_1, c_2, \cdots, c_n)=0$为方程的完全解,从

$$V=0, \quad \frac{\partial V}{\partial c_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

消去c_i,若得一个解,则称它为方程的奇异解(奇积分).

以两个独立变量为例说明完全解与通解、奇异解的关系,设方程

$$F(x,y,z,p,q)=0, \quad p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

有完全解

$$V(x,y,z,a,b)=0 \qquad (a, b \text{ 为任意常数}),$$

则方程等价于从方程组

$$\begin{cases} V(x,y,z,a,b)=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial z}p=0, \ \dfrac{\partial V}{\partial y}+\dfrac{\partial V}{\partial z}q=0 \end{cases}$$

消去a, b所得的方程

利用常数变易法把a, b看作x, y的函数,将$V(x,y,z,a,b)=0$求关于x, y的偏导数,得

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}p+\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}q+\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}=0$$

那末

$$\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}=0$$

与$V=0$联立可确定a, b. 有三种情况:

1° $\dfrac{\partial V}{\partial a}\equiv\dfrac{\partial V}{\partial b}\equiv 0$. 将其与$V(x,y,z,a,b)=0$联立可确定不含任意常数的奇异解.

2° 如$\dfrac{\partial a}{\partial x}=\dfrac{\partial a}{\partial y}=\dfrac{\partial b}{\partial x}=\dfrac{\partial b}{\partial y}=0$, 即回到完全解.

3° 当$\dfrac{\partial V}{\partial a}\neq 0, \dfrac{\partial V}{\partial b}\neq 0$时,必有$\dfrac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)}=0$, 这时,如果不属于情形2°,则$a$与$b$存在函数关系: $b=w(a)$, 这里w为任意可微函数,并从方程$V(x,y,z,a,b)=0$和$\dfrac{\partial V}{\partial a}+\dfrac{\partial V}{\partial b}w'(a)=0$消去$a, b$,可确定方程的通解.

定理 偏微分方程的任何解包含在完全解内或通解内或奇异解内.

［特征方程・特征带・特征曲线・初积分］　在一阶非线性方程：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_1, p_2, \cdots, p_n)=0$$

中，设F对所有变量的二阶偏导数存在且连续，称

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{du}{dt}=\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$\frac{dp_i}{dt}=-\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}+p_i \frac{\partial F}{\partial u}\right) \qquad (i=1,2, \cdots, n)$$

或

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}}=\cdots=\frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}=\frac{du}{\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}}=-\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1 \frac{\partial F}{\partial u}}=\cdots=-\frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}+p_n \frac{\partial F}{\partial u}}$$

为非线性方程的特征方程．设特征方程的解为$x_i=x_i(t)$，$u=u(t)$，$p_i=p_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，称它为非线性方程的特征带．在x_1，x_2，$\cdots$，x_n，u空间的曲线$x_i=x_i(t)$，$u=u(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 称为非线性方程的特征曲线．如果函数$G(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,p_1,p_2,\cdots,p_n)$在特征方程的任一解$x_i=x_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$，$u=u(t)$，$p_i=p_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$上等于常数，即

$$G(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),u(t),p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t))=C$$

那末函数　$G(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,p_1,p_2,\cdots,p_n)$称为特征方程的初积分．

［求完全解的拉格朗日-恰比方法］　考虑两个变量的情况．

对于方程$F(x,y,z,p,q)=0$，选择使雅可比式$\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}\neq 0$的一个初积分$G(x,y,z,p,q)$．解方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z,p,q)=0\\ G(x,y,z,p,q)=a \qquad (a\text{为任意常数})\end{cases}$$

得$p(x,y,z,a)$及$q(x,y,z,a)$．则方程

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

的通解$V(x,y,z,a,b)=0$（b是积分$dz=pdx+qdy$出现的任意常数）就是方程$F(x,y,z,p,q)=0$的完全解．

例　求方程$z^2(p^2+q^2)=x^2+y^2$的完全解．

解　方程的特征方程为

$$\frac{dx}{2z^2p}=\frac{dy}{2z^2q}=\frac{dz}{2z^2(p^2+q^2)}=\frac{dp}{2x-2z(p^2+q^2)p}=\frac{dq}{2y-2z(x^2+y^2)q}$$

这里成立

$$\frac{pdz+zdp}{x}=\frac{dx}{zp}$$

所以特征方程的一个初积分为 $z^2p^2-x^2$.

解方程组 $\begin{cases}z^2(p^2+q^2)-(x^2+y^2)=0\\ z^2p^2-x^2=a \quad (a\text{为任意常数})\end{cases}$

得 $$p=\frac{\sqrt{a+x^2}}{z},\qquad q=\frac{\sqrt{y^2-a}}{z}$$

积分微分方程

$$dz=\frac{\sqrt{a+x^2}}{z}dx+\frac{\sqrt{y^2-a}}{z}dy$$

得完全解

$$z^2=x\sqrt{x^2+a}+y\sqrt{y^2-a}+a\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{y+\sqrt{y^2-a}}+b \qquad (b\text{为任意常数})$$

[某些容易求完全解的方程]

1° 仅含 p,q 的方程 $F(p,q)=0$

$G=p$ 是特征方程的一个初积分. 从 $F(p,q)=0$ 与 $p=a$(a 为任意常数)得 $q=\psi(a)$,积分

$$dz=adx+\psi(a)dy$$

得完全解

$$z=ax+\psi(a)y+b \qquad (b\text{为任意常数})$$

2° 不显含 x,y 的方程 $F(z,p,q)=0$

特征方程为

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}=-\frac{dp}{p\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{dq}{q\frac{\partial F}{\partial z}}$$

因此 $qdp-pdq=0$, 显然 $G=\frac{q}{p}$ 为一个初积分, 由 $F(z,p,q)=0$, $q=pa$(a 为任意常数)解得 $p=\psi(z,a)$. 于是由

$$dz=\psi(z,a)dx+a\psi(z,a)dy$$

得

$$\int\frac{dz}{\psi(z,a)}=x+ay+b \qquad (b\text{为任意常数})$$

可确定完全解.

3° 变量分离形式的方程 $\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x_i,p_i)=0$

特征方程为

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f_1}{\partial p_1}}=\cdots=\frac{dx_n}{\frac{\partial f_n}{\partial p_n}}=\frac{dz}{\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial f_i}{\partial p_i}}=-\frac{dp_1}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}=\cdots=-\frac{dp_n}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}}$$

可取初积分 $G_i=f_i(x_i,p_i)$, $(i=1,2,\cdots,n)$. 从 $f_i(x_i,p_i)=a_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 解出

$$p_i=\varphi_i(x_i,a_i)$$

得完全解

$$z=\sum_{i=1}^{n}\int\varphi_i(x_i,\ a_i)dx_i+b$$

式中 a_i, b 为任意常数, 且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$.

[克莱罗方程] 方程

$$z=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i+f(p_1,p_2,\cdots,p_n)$$

称为克莱罗方程. 其完全解为

$$z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i+f(c_1,\ c_2,\cdots,\ c_n)$$

对 c_i 微分得

$$x_i=-\frac{\partial f}{\partial c_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

与完全解的表达式联立消去 c_i 即得奇异解.

例 求方程 $z-xp-yq-pq=0$ 的完全解和奇异解.

解 这是克莱罗方程, 它的完全解是

$$z=ax+by+ab$$

对 a, b 微分, 得 $x=-b$, $y=-a$, 消去 a, b 得奇异解

$$z=-xy$$

[发甫方程] 方程

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0\tag{1}$$

称为发甫方程, 如果 P, Q, R 二次连续可微并满足适当条件, 那末方程可积分. 如果可积分成一关系式时, 则称它为完全可积.

1° 方程完全可积的充分必要条件 当且仅当 P,Q, R 满足条件

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \qquad (2)$$

时，存在一个积分因子 $\mu(x,y,z)$，使

$$dU_1=\mu(Pdx+Qdy+Rdz)$$

从而方程的通解为

$$U_1(x,y,z)=c$$

特别，当 $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0, \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$ 时，存在一个函数 $U(x,y,z)$ 满足

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial U}{\partial y},\quad R=\frac{\partial U}{\partial z}$$

从而

$$dU=Pdx+Qdy+Rdz$$

所以方程的通解为

$$U(x,y,z)=c$$

所以完全可积的发甫方程的通解是一单参数的曲面族.

定理　设对于发甫方程(1)在某区域 D 上的完全可积条件(2)成立，则对 D 内任一点 $M(x,y,z)$ 一定有方程的积分曲面通过，而且只有一个这样的积分曲面通过.

2°　方程积分曲面的求法

设完全可积条件(2)成立. 为了构造积分曲面，把 z 看成 x, y 的函数（设 $R(x,y,z)\neq 0$），于是原方程化为

$$dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy$$

由此得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{P}{R}\equiv P_1(x,y,z) & (3)\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{Q}{R}\equiv Q_1(x,y,z) & (4)\end{cases}$$

发甫方程(1)与此方程组等价.

把方程(3)中的 y 看成参变量，积分后得一个含有常数 $\tilde{c}$ 的通解

$$z=\varphi(x,y,\tilde{c})$$

然后用未知函数 $\tilde{c}(y)$ 代替常数 $\tilde{c}$，将 $z=\varphi(x,y,\tilde{c}(y))$ 代入方程(4)，在完全可积的条件下，可得 $\tilde{c}(y)$ 的一个常微分方程，其通解为

$$\tilde{c}(y)=\psi(y,c)$$

$\bar{c}$ 为任意常数，代回 $z=\varphi(x,y,\bar{c}(y))$ 中即得发甫方程的积分曲面

$$z=\varphi(x,y,\psi(y,c))$$

由于发甫方程关于 x,y,z 的对称性，在上面的讨论中，也可把 x 或 y 看成未知函数，得到同样的结果。

例　求方程 $yzdx+2xzdy+xydz=0$ 的积分曲面族

解　容易验证完全可积条件成立，显然存在一个积分因子 $\mu=\frac{1}{xyz}$，用它乘原方程得

$$\frac{dx}{x}+\frac{2dy}{y}+\frac{dz}{z}=0$$

积分后得积分曲面族

$$xy^2z=c$$

也可把方程化为等价的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{z}{x}\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2z}{y}\end{cases}$$

把 y 看成参变量，积分 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z}{x}$ 得通解

$$zx=\bar{c}$$

用未知函数 $\bar{c}(y)$ 代替 $\bar{c}$，将 $zx=\bar{c}(y)$ 代入方程 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2z}{y}$ 得

$$\frac{d\bar{c}(y)}{dy}=-\frac{2\bar{c}(y)}{y}$$

积分后有

$$\bar{c}(y)=\frac{c}{y^2}$$

所以原方程的积分曲面族是

$$xy^2z=c$$

五、一阶线性偏微分方程组

［一阶线性偏微分方程组的一般形式］　两个自变量的一阶线性方程组的形式是

$$\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}B_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}C_{ij}u_j+F_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}u_j+f_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1)$$

其中 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, F_i, a_{ij}, b_{ij}, f_i 是(x,t)的充分光滑函数。

[特征方程·特征方向·特征曲线]

$$\det\left(a_{ij}-\delta_{ij}\frac{dx}{dt}\right)=0, \qquad \delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

称为方程组(1)的特征方程．在点(x,t)满足特征方程的方向$\frac{dx}{dt}$称为该点的特征方向．如果一条曲线 l，它上面的每一点的切线方向都和这点的特征方向一致，那末称曲线 l 为特征曲线。

[狭义双曲型方程与椭圆型方程]　如果区域D内的每一点都存在n个不同的实的特征方向，那末称方程组在D内为狭义双曲型的．

如果区域D内的每一点没有一个实的特征方向，那末称方程组在D内为椭圆型的．

[狭义双曲型方程组的柯西问题]

1° 化方程组为标准形式——对角型

因为$\det(a_{ij}-\delta_{ij}\lambda)=0$ 有 n 个不同的实根 $\lambda_1(x,t)$, $\cdots$, $\lambda_n(x,t)$, 不妨设

$$\lambda_1(x,t)<\lambda_2(x,t)<\cdots<\lambda_n(x,t)$$

那末常微分方程

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_i(x,t) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

的积分曲线 $l_i(i=1,2,\cdots,n)$就是方程组(1)的特征曲线。

方程

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}-\lambda_k\delta_{ij})\lambda_k^{(i)}=0$$

的非零解$(\lambda_k^{(1)}, \cdots, \lambda_k^{(n)})$称为对应于特征方向 λ_k的特征矢量．

作变换

$$v_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda_i^{(j)}u_j \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

可将方程组化为标准形式——对角型

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\lambda_i(x, t)\frac{\partial v_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x, t)v_j+\beta_i(x, t) \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

所以狭义双曲型方程组可化为对角型，而一般的线性微分方程组(1)如在区域D内通过未知函数的实系数可逆线性变换可化为对角型的话，(此时不一定要求λ_i都不相同)，就称这样的微分方程组在D内为双曲型的。

2° 对角型方程组的柯西问题

考虑对角型方程组的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_i}{\partial t}+\lambda_i(x, t)\dfrac{\partial v_i}{\partial x}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x, t)v_j+\beta_i(x, t) \\ v_i(x, 0)=\varphi_i(x)\end{cases} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$\varphi_i(x)$是$[a, b]$上的连续可微函数．设$a_{ij}, \beta_i, \lambda_i$在区域$D$内连续可微，在$D$内可得相应的积分方程组

$$v_i(x, t)=\varphi_i(x_i)+\int_{\tilde{l}_i}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j+\beta_i\right]dt \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

式中$\tilde{l}_i$为第i条特征曲线l_i上点(x, t)与点$(x_i, 0)$之间的一段，$(x_i, 0)$为l_i与x轴上$[a, b]$的交点．上式可以更确切地写为

$$v_i(x, t)=\varphi_i[x_i(x, t, 0)]+\int_0^t\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[x_i(x, t, \tau), \tau]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot v_j[x_i(x, t, \tau), \tau]+[\beta_i[x_i(x, t, \tau), \tau]\right\}d\tau$$

$$(i=1, 2, \cdots, n)$$

式中$x_i=x_i(x^\circ, t^\circ, t)$为过点$(x^\circ, t^\circ)$的第$i$条特征曲线，利用逐次逼近法可解此积分方程．为此令

$$v_i^{(0)}(x, t)=\varphi_i[x_i(x, t, 0)] \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$v_i^{(1)}(x, t)=\varphi_i[x_i(x, t, 0)]+\int_0^t\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[x_i(x, t, \tau), \tau]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot v_j^{(0)}[x_i(x, t, \tau), \tau]+\beta_i[x_i(x, t, \tau), \tau]\right\}d\tau \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

………………

$$v_i^{(k)}(x, t)=\varphi_i[x_i(x, t, 0)]+\int_0^t\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[x_i(x, t, \tau), \tau]\cdot\right.$$

$$\cdot v_j^{(k-1)}[x_i(x,t,\tau),\tau]+\beta_i[x_i(x,t,\tau),\tau]\Big\}d\tau \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

…………

序列$\{v_i^{(k)}\}$($k=0,1,2,\cdots$)一致收敛于积分方程的连续可微解$v_i(x,t)$($i=1,2,\cdots,n$),这个$v_i(x,t)$也就是对角型方程组的柯西问题的解.

设在区域D内对角型方程组的柯西问题的解存在，那末解与初值有下面的关系:

(i) 依赖区间：过D中任意点$M(x,t)$作特征曲线l_1, l_n, 交x轴于B, A, 称区间$[A,B]$为M点的依赖区间(图 14.1(a)), 解在M点的值由区间$[A,B]$的初值确定而与$[A,B]$外的初值无关.

(ii) 决定区域：过点A, B分别作特征曲线l_n, l_1, 称l_n, l_1与区间$[A,B]$围成的区域D_1为区间$[A,B]$的决定区域(图 14.1(b)), 在区域D_1中解的值完全由$[A,B]$上的初值决定.

(iii) 影响区域:过点A, B分别作特征曲线l_1, l_n, 称l_1, l_n与$[A,B]$围成的区域D_2为区间$[A,B]$的影响区域(图 14.1(c)). 特别当区间$[A,B]$缩为一点A时, A点的影响区域为D_3(图 14.1(d)). 在区域D_2中解的值受$[A,B]$上的初值影响,而在区域D_2外的解的值则不受$[A,B]$上的初值影响.

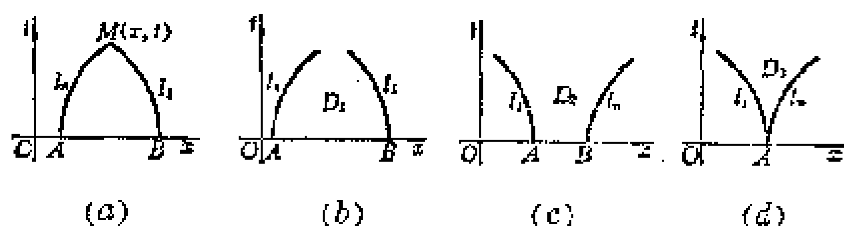


图 14.1

[线性双曲型方程组的边值问题] 以下列线性方程组来说明:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\lambda_1\dfrac{\partial u}{\partial x}=a_1u+b_1v+c_1\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial t}+\lambda_2\dfrac{\partial v}{\partial x}=a_2u+b_2v+c_2 \qquad (\lambda_1<\lambda_2)\end{cases} \tag{1}$$

1° 第一边值问题(广义柯西问题) 设在平面(x,t)上给定曲线段$\widehat{AB}$, 它处处不与特征方向相切. 过A, B分别引最左和最右的特征曲线l_1及l_2, 要求函数$u(x,t)$, $v(x,t)$在$\widehat{AB}$, l_1及l_2围成的闭区域$\bar{D}$上满足方程组, 且在$\widehat{AB}$上取给定的函数值(图 14.2(a)).

2° 第二边值问题(古沙问题) 设l_1是过P点的第一族特征线, l_2是第二

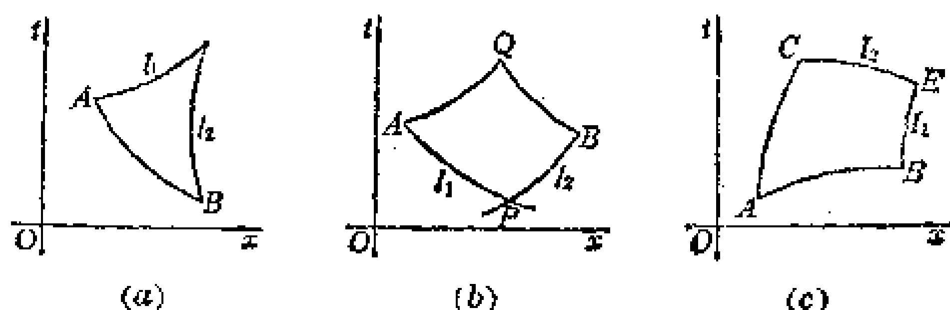


图 14.2

族特征线，在 l_1 的一段 PA 上给定 $v(x,t)$ 的数值，在 l_2 的一段 PB 上给定 $u(x,t)$ 的数值，过 A 点作第二族特征线，过 B 点作第一族特征线相交于 Q. 求在闭区域 $PAQB$ 上方程组的解(图 14.2(b)).

3° 第三边值问题 设 AB 为非特征曲线的曲线弧，AC 为一特征线弧，且在 AB 与 AC 之间不存在过 A 点的另外特征曲线，过 C 点作第二族特征线与过 B 点的第一族特征线交于 E 点，在 AC 上给定 $v(x,t)$ 的数值，在 AB 上给定 $u(x,t)$ 的数值. 求 $ACEBA$ 所围成的闭区域 D 上的方程组的解(图 14.2(c)).

[边值问题的近似解——特征线法] 以上定解问题，可用逐步逼近法求解，也可用特征线法求解的近似值. 以第一边值问题为例说明.

在曲线 AB 上取 n 个分点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，并记 A 为 A_0，B 为 A_{n+1}. 过 A_0 按 A_0 的第二特征方向作直线与过 A_1 按 A_1 的第一特征方向作直线相交于 B_0. 过 A_1 按 A_1 第二特征方向作直线与过 A_2 按 A_2 的第一特征方向作直线相交于 B_1，…最后得到 B_n (图 14.3). 用如下的近似公式来确定方程组(1)的解 $u(x,t)$，$v(x,t)$ 在 $B_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的数值:

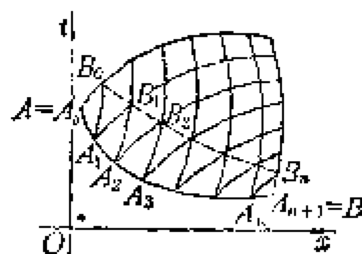


图 14.3

$$\begin{cases} u(B_i)-u(A_{i+1})=\overline{B_iA_{i+1}}\{a_1(A_{i+1})u(A_{i+1})+b_1(A_{i+1})v(A_{i+1})+c_1(A_{i+1})\}\times \\ \qquad\times[1+\lambda_1^2(A_{i+1})]^{-\frac{1}{2}} \\ v(B_i)-v(A_i)=\overline{B_iA_i}\{a_2(A_i)u(A_i)+b_2(A_i)v(A_i)+c_2(A_i)\}\times \\ \qquad\times[1+\lambda_2^2(A_i)]^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

于是在一个三角形网格的节点上得到 u, v 的数值. 再经过适当的插值，当 n 相当大，A_i、A_{i+1} 的距离相当小时，就得到所提问题的足够近似的解.

[特殊形式的拟线性方程组——可化约系统] 一般的拟线性方程组的问题比较复杂，目前研究的结果不多，下面介绍一类特殊形式的拟线性方程组——可化约系统. 如果方程组

$$
\begin{cases}
A_1\dfrac{\partial u}{\partial t}+B_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+C_1\dfrac{\partial v}{\partial t}+D_1\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\
A_2\dfrac{\partial u}{\partial t}+B_2\dfrac{\partial u}{\partial x}+C_2\dfrac{\partial v}{\partial t}+D_2\dfrac{\partial v}{\partial x}=0
\end{cases}
$$

中所有的系数只是 u, v 的函数，称它为可化约系统。

考虑满足条件

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,t)}\neq 0$$

的方程组的解 $u=u(x,t)$，$v=v(x,t)$，x, t 可以表示成 u, v 的函数，且

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial(x,t)}{\partial(u,v)}},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\dfrac{\partial t}{\partial v}}{\dfrac{\partial(x,t)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{-\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial(x,t)}{\partial(u,v)}},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial t}{\partial u}}{\dfrac{\partial(x,t)}{\partial(u,v)}}$$

原方程化为

$$
\begin{cases}
A_1\dfrac{\partial x}{\partial v}-B_1\dfrac{\partial t}{\partial v}-C_1\dfrac{\partial x}{\partial u}+D_1\dfrac{\partial t}{\partial u}=0\\
A_2\dfrac{\partial x}{\partial v}-B_2\dfrac{\partial t}{\partial v}-C_2\dfrac{\partial x}{\partial u}+D_2\dfrac{\partial t}{\partial u}=0
\end{cases}
$$

这是关于自变量 u, v 的线性方程组. 这样就把求拟线性方程组满足 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,t)}\neq 0$ 的解，化为解线性方程组的问题. 而此线性方程组满足条件 $\dfrac{\partial(x,t)}{\partial(u,v)}\neq 0$ 的解，在 (x,t) 平面上的象即为原来拟线性方程组的解.

§3　二阶偏微分方程

一、二阶偏微分方程的分类、标准形式与特征方程

考虑二阶偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+F\left(x_1,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \tag{1}$$

式中 $a_{ij}(\boldsymbol{x})=a_{ij}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的已知函数.

[特征方程・特征方向・特征曲面・特征平面・特征锥面]

代数方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j=0$$

称为二阶方程(1)的特征方程；这里 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是某些参数，且有 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\neq0$. 如果点 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 满足特征方程，即

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\alpha_i\alpha_j=0$$

则过 x^0 的平面 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x_k-x_k^0)=0$ 的法线方向 l：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 称为二阶方程的特征方向；如果一个$(n-1)$维曲面，其每点的法线方向都是特征方向，则称此曲面为特征曲面；过一点的$(n-1)$维平面，如其法线方向为特征方向，则称这个平面为特征平面，在一点由特征平面的包络组成的锥面称为特征锥面.

[n 个自变量方程的分类与标准形式]　在点 $P(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$，根据二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\alpha_i\alpha_j \qquad (\alpha_i\text{ 为参量})$$

的特征根的符号，可将方程分为四类：

(i) 特征根同号，都不为零，称方程在点 P 为椭圆型.

(ii) 特征根都不为零，有 $n-1$ 个具有同一种符号，余下一个符号相反，称方程在点 P 为双曲型.

(iii) 特征根都不为零，有 $n-m$ 个具有同一种符号$(n>m>1)$，其余 m 个具有另一种符号，称方程在点 P 为超双曲型.

(iv) 特征根至少有一个是零，称方程在点 P 为抛物型.

若在区域 D 内每一点方程为椭圆型、双曲型或抛物型，则分别称方程在区域 D 内是椭圆型、双曲型或抛物型.

在点 P 作自变量的线性变换可将方程化为标准形式：

椭圆型：$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\Phi=0$$

双曲型：$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\Phi=0$$

超双曲型: $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\Phi=0 \qquad (n>m>1)$

抛物型: $\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\Phi=0 \qquad (m>0)$

式中Φ为不包含二阶导数的项.

[两个自变量方程的分类与标准形式] 方程的一般形式为

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (2)$$

a_{11},a_{12},a_{22}为x,y的二次连续可微函数,不同时为零.

方程

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0$$

称为方程(2)的特征方程. 特征方程的积分曲线称为二阶方程(2)的特征曲线.

在某点$P(x_0,y_0)$的邻域D内,根据$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$的符号将方程分类:

当$\Delta>0$时,方程为双曲型;

当$\Delta=0$时,方程为抛物型;

当$\Delta<0$时,方程为椭圆型.

在点P的邻域D内作变量替换,可将方程化为标准形式:

(i) 双曲型: 因$\Delta>0$,存在两族实特征曲线$\varphi_1(x,y)=c_1,\varphi_2(x,y)=c_2$,作变换$\xi=\varphi_1(x,y),\eta=\varphi_2(x,y)$和$s=\xi+\eta,t=\xi-\eta$,方程化为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Phi\left(s,t,u,\frac{\partial u}{\partial s},\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

或
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\Phi_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

(ii) 抛物型: 因$\Delta=0$,只存在一族实的特征曲线$\varphi(x,y)=c$,取二次连续可微函数$\psi(x,y)$,使$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\neq 0$,作变换$\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$,方程化为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

(iii) 椭圆型: 因$\Delta<0$,不存在实特征曲线,设

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+i\varphi_2(x,y)=c$$

为$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$的积分,$\varphi_x,\varphi_y$不同时为零,作变量替换$\xi=\varphi_1(x,y)$, $\eta=\varphi_2(x,y)$,方程化为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\Phi_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

二、极值原理·能量积分·定解问题的唯一性定理

椭圆型方程、抛物型方程的极值原理及双曲型方程的能量守恒原理是相应方程的解所具有的最基本性质之一，在定解问题的研究中起着重要的作用.

[椭圆型方程的极值原理与解的唯一性定理]

1° 极值原理　设D为n维欧氏空间E^n的有界区域，S是D的边界，在D内考虑椭圆型方程

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x)$$

式中$a_{ij}(x), b_i(x), c(x), f(x)$在$\bar{D}$上连续，$c(x)\leqslant 0$且二次型$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j$正定，即存在常数$\mu>0$，对任意$x\in\bar{D}$和任意的$\alpha_i$有

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\geqslant\mu\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$$

定理1　设$u(x)$为D内椭圆型方程的解，它在D内二次连续可微，在$\bar{D}$上连续，且不是常数，如$f(x)\leqslant 0$（或$f(x)\geqslant 0$），则$u(x)$不能在D的内点取非正最小值（或非负最大值）.

如果过边界S上的任一点P都可作一球，使它在P点与S相切且完全包含在区域D内，则有

定理2　设$u(x)$为椭圆型方程在D内二次连续可微，在$\bar{D}$上连续可微的解，且不是常数，并设$f(x)\leqslant 0$（或$f(x)\geqslant 0$）. 若$u(x)$在边界S上某点M处取非正最小值（或非负最大值），只要外法向导数$\frac{\partial u}{\partial N}$在点$M$存在，则

$$\frac{\partial u(M)}{\partial N}<0 \qquad \left(\text{或}\frac{\partial u(M)}{\partial N}>0\right)$$

2° 定解问题

(i) 第一边值问题（狄利克莱问题）

$$lu\equiv u(\xi)=\psi(\xi)\quad(\xi\in S)$$

(ii) 第二边值问题（诺伊曼问题）

$$lu\equiv\frac{\partial u}{\partial N}=\psi(\xi)\qquad(\xi\in S)$$

其中N为S的外法线方向.

(iii) 第三边值问题(混合问题)

$$lu\equiv a(\xi)\frac{\partial u}{\partial N}+b(\xi)u=\psi(\xi)\quad(\xi\in S)$$

$a(\xi)$, $b(\xi)$, $\psi(\xi)$ 在S上连续, N是S的外法线方向, $a(\xi)\geqslant 0, b(\xi)\leqslant 0$, 且$a^2(\xi)+b^2(\xi)\neq 0$.

3° **解的唯一性定理**　设$c(x)$及$b(\xi)$不同时恒等于零, 如果定解问题$Lu=f$, $lu=\psi$的解存在, 则是唯一的. 设$c(x)$及$b(\xi)$都恒等于零, 如果定解问题$Lu=f$, $lu=\psi$的解存在, 则除相差一个常数外, 解是唯一的.

[抛物型方程的极值原理与解的唯一性定理]　设$\bar{Q}$为柱体$\bar{D}\times[0,T]$, 在柱体内部$D\times(0,T]$考虑抛物型方程

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t)$$

式中$a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ 在$\bar{Q}$上连续, $c(x,t)\leqslant 0$, 且$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\alpha_i\alpha_j$正定.

1° 强极值原理　设$u(x,t)$为抛物型方程$Lu=f(x,t)$在$D\times(0,T)$内连续可微在$\bar{Q}$上连续的解. 并设$f(x)=0$, 若$u(x,t)$在$D\times(0,T]$的某点(x_0,t_0)取非负的最大值, 即

$$u(x_0,t_0)=\max_{\bar{Q}}u(x,t)=m\geqslant 0$$

则对任意满足下列条件的点$P(x,t)$, 都有$u(x,t)=m$: 点$P(x,t)$满足$t<t_0$, 且可用完全在$D\times(0,T]$内的连续曲线$x=x(t)$与点(x_0,t_0)相连.

如在$\bar{Q}$的侧边界Γ: $S\times[0,T]$上(S是D的边界)任一点P都可作一球, 使它在P点与Γ相切且完全在$D\times(0,T)$内, 则有

定理　设$u(x,t)$在$\bar{Q}$上连续, 在$D\times(0,T]$内满足抛物型方程$Lu=f$, 且不是常数, 设$f\leqslant 0$, 若$u(x,t)$在Γ上某点M处取非正最小值, 只要外法向导数$\frac{\partial u}{\partial N}$在点$M$存在, 则

$$\frac{\partial u(M)}{\partial N}<0$$

2° 柯西问题与混合问题

柯西问题的初值条件是

$$u|_{t=0}=\varphi(x)$$

混合问题按下列的定解条件分别称为

(i) 第一边值问题：$u|_{t=0}=\varphi(x)$，$u|_{\Gamma}=\psi(\xi,t)$；

(ii) 线性边值问题：$u|_{t=0}=\varphi(x)$，$\left[a(\xi,t)\dfrac{\partial u}{\partial N}+b(\xi,t)u\right]\Big|_{\Gamma}=\psi(\xi,t)$，

其中 N 为 Γ 的外法线方向 $\varphi(x)$ $(x\in\bar{D})$，$\psi(\xi,t)$，$a(\xi,t)$，$b(\xi,t)$ $(\xi\in S,\ 0\leqslant t\leqslant T)$为已知函数，$a\geqslant0$，$b\leqslant0$，$a^2+b^2\neq0$.

3° 解的唯一性定理　如果抛物型方程 $Lu=f$ 的混合问题的解存在，那末它是唯一的．如果柯西问题存在有界的解，那末在有界函数类中，解是唯一的．

[波动方程的能量积分与解的唯一性定理]

1° 波动方程的柯西问题与混合问题　设波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f(x,t),\qquad \Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

柯西问题的初始条件是

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$$

如果在有界区域 Q：$D\times(0,T]$中考虑波动方程，记 $\bar{Q}$ 的侧边界为 Γ，则混合问题的定解条件是

(i) 第一边值问题

$$\begin{cases} u\Big|_{t=0}=\varphi(x), & \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\\ u|_{\Gamma}=\mu(\xi,t) \end{cases}$$

(ii) 第二边值问题

$$\begin{cases} u\Big|_{t=0}=\varphi(x), & \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\\ \dfrac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\Gamma}=\mu(\xi,t) \end{cases}$$

(iii) 第三边值问题

$$\begin{cases} u\Big|_{t=0}=\varphi(x), & \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial N}+\sigma u\right)\Big|_{\Gamma}=\mu(\xi,t) \end{cases}$$

式中 N 为 Γ 的外法线方向，$\varphi(x)$，$\psi(x)$为 D 上的已知函数，$\sigma(\xi,t)$ 及 $\mu(\xi,t)$ $(\xi\in\Gamma,\ 0\leqslant t\leqslant T)$为定义在 Γ 上的已知函数，$\sigma(\xi,t)\neq0$.

2° 解的唯一性定理　波动方程的混合问题与柯西问题的解如果存在必定

唯一.

唯一性定理可用下面能量积分证明.

3° 能量积分 积分

$$E(t)=\int_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]d\Omega^*$$

称为波动方程的能量积分.

满足齐次波动方程及$u|_\Gamma=0\left(\text{或}\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_\Gamma=0\right)$的函数$u(x,t)$成立:

能量守恒原理 $E(t)=E(0)$.

能量不等式 $E_0(t)\leqslant e^tE_0(0)+e^t\int_0^te^{-\tau}E(\tau)d\tau$

式中 $$E_0(t)=\int_D u^2d\Omega$$

满足齐次波动方程及$\left(\frac{\partial u}{\partial N}+\sigma u\right)\bigg|_\Gamma=0$ 的函数，在上面能量不等式$E(t)$中增加一项$a^2\int_\Gamma\sigma u^2ds$，上面关系仍成立.

对于柯西问题，在特征锥

$$\sum_{i=1}^n(x_i-x_i^0)^2\leqslant c^2(R-t)^2 \qquad (R\text{为大于零的常数})$$

中考虑齐次波动方程的解u，记特征锥与$t=t_0$的截面为Ω_{t_0}，关于能量积分

$$E_1(\Omega_t)=\int_{\Omega_t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]d\Omega$$

成立下面的能量不等式

$$E_1(\Omega_t)\leqslant E_1(\Omega_{t_0})$$
$$E_0(\pi_t)\leqslant e^tE_0(\Omega_{t_0})+(e^t-1)E_1(\Omega_{t_0})$$

式中 $$E_0(\Omega_t)=\int_{\Omega_t}u^2d\Omega$$

π_t是$t=$常数的超平面与以Ω_{t_0}为上底所作的柱体(母线平行于Ot轴)的交截面.

---

* $\int_D[\quad]d\Omega$ 是 $\int\cdots\int_D[\quad]dx_1\cdots dx_n$的简写，下同.

三、三种典型方程

1. 波动方程

研究下面形式的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x,y,z,t)$$

式中 $f(x,y,z,t)$ 为已知函数.

许多物体的运动规律可用波动方程来描述. 如弦振动可用一维波动方程描述；膜的振动可用二维波动方程描述；声波和电磁波的振荡可用三维波动方程描述.

[齐次方程柯西问题的解]　设齐次波动方程的柯西问题满足下面初始条件：

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y,z)$$

并设 φ 三次连续可微, ψ 二次连续可微, 那末解 u 的表达式分别为

1°　三维(克希霍夫公式)

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint\limits_{S_{at}}\frac{\psi}{t}dS+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\varphi}{t}dS\right]$$

式中 S_{at} 表示球面: $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=a^2t^2$, dS 表示球面的面积元素.

2°　二维(泊松公式)

$$u(x,y,t)$$
$$=\frac{1}{2\pi a}\left[\iint\limits_{K_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}+\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{K_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}\right]$$

式中 K_{at} 表示圆:　　$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant a^2t^2$.

3°　一维(达兰贝尔公式)

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

利用降维法可从高维的解推得低维的解.

[非齐次方程柯西问题的解]　非齐次波动方程柯西问题的解等于上面齐次方程柯西问题的解添加一项所谓推迟势 u_1.

1°　三维

$$u_1(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leqslant at}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}d\xi d\eta d\zeta$$

式中积分区域是以(x,y,z)为心，at 为半径的球体，

$$r=[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{1}{2}}$$

2° 二维

$$u_1(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\Big[\iint_{\rho\leqslant a(t-\tau)}\frac{f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta}{[a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}\Big]d\tau$$

式中　$$\rho^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2.$$

一维

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\Big[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi\Big]d\tau$$

[解的物理意义]　波动方程解的表达式具有明确的物理意义.

1° **波的传播**　以弦振动为例，在达兰贝尔公式中，形如$\varphi(x-at)$的解描写了弦振动以常速度a向右传播，称$\varphi(x-at)$为右传播波，$\varphi(x+at)$为左传播波，a为波速.

2° **依赖区间**　过点$P(x,t)$作两条特征线$x-at=c_1$，$x+at=c_2$交x轴于x_1,x_2，则区间$[x_1,x_2]$称为点P的依赖区间，由达兰贝尔公式可见解在P点的值只与$[x_1,x_2]$上初始条件有关，而与区间外$\varphi(x)$，$\psi(x)$的值无关.

3° **决定区域**　过x轴上两点$x_1,x_2(x_1<x_2)$分别作特征线

$$x=x_1+at,\quad x=x_2-at$$

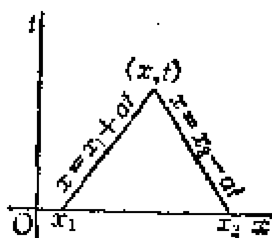
则三角形区域　$$x_1+at\leqslant x\leqslant x_2-at\qquad(t>0)$$

称为$[x_1,x_2]$的决定区域(图 14.4(a))，在区域中解的数值由$[x_1,x_2]$上的初始条件完全决定．任意改变初始条件在$[x_1,x_2]$外的数值，解在此区域中不会发生任何变化.

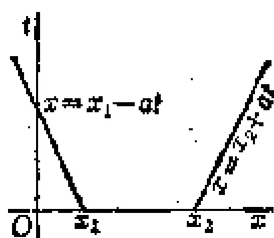
4° **影响区域**　过x轴上两点x_1,x_2 $(x_1<x_2)$分别作特征线

$$x=x_1-at,\quad x=x_2+at$$

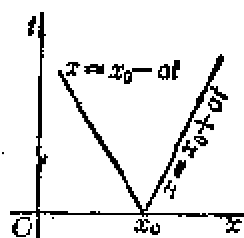
称区域　$$x_1-at\leqslant x\leqslant x_2+at\qquad(t>0)$$



决定区域
(a)



$[x_1,x_2]$的影响区域
(b)



x_0 的影响区域
(c)

图 14.4

为 $[x_1,x_2]$ 的影响区域(图 14.4(b)). 在此区域中，解的数值受到 $[x_1,x_2]$ 上初始条件的影响，而在此区域外，解的值不受 $[x_1,x_2]$ 上的初始条件影响，当区域 $[x_1,x_2]$ 缩为一点 x_0 时，点 x_0 的影响区域为 x 轴上区间(图 14.4(c))

$$x_0-at\leqslant x\leqslant x_0+at \qquad (t>0)$$

对二维波动方程，点(x_0,y_0,t_0)的依赖区域为 $t=0$ 上的圆.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2t_0^2$$

在 $t=0$ 上圆$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2t_0^2$ 的决定区域是以 (x_0,y_0,t_0) 为顶点的圆锥体区域(图 14.5(a)).

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2(t-t_0)^2 \quad (t\leqslant t_0)$$

初始平面 $t=0$ 上一点$(x_0,y_0,0)$的影响区域为圆锥体(图 14.5(b)).

$$(x_0-x)^2+(y_0-y)^2\leqslant a^2t^2 \quad (t>0) \tag{1}$$

初始平面$t=0$上某一区域的影响区域，就是由此区域上每一点所作的圆锥体(1)的包络面所围成的区域.

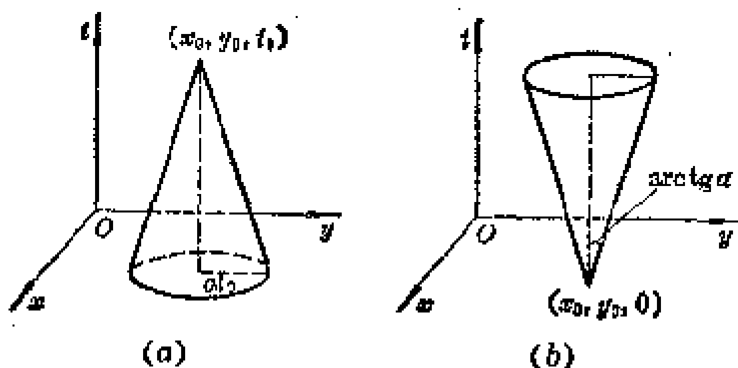


图　14.5

对三维波动方程，点(x_0,y_0,z_0,t_0)的依赖区域为 $t=0$ 上的球面

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2t_0^2$$

初始平面 $t=0$ 上的球体

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant a^2t_0^2$$

的决定区域是以它为底，以(x_0,y_0,z_0,t_0)为顶点的圆锥体区域

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0^2)\leqslant a^2(t_0-t)^2 \quad (t\leqslant t_0)$$

在初始平面 $t=0$ 上点$(x_0,y_0,z_0,0)$的影响区域为锥面

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2t^2 \qquad (t>0) \tag{2}$$

初始平面上某一区域的影响区域就是它上面的每一点所作的锥面 (2) 的包络面围成的区域.

二维与三维波的传播存在着下述本质区别,

5° 惠更斯原理　对三维波动方程，点$(x_0,y_0,z_0,0)$的影响区域为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2t^2 \qquad (t\geqslant 0)$$

若在某一有界区域Ω有一个初始扰动，在时刻t受到此初始扰动的影响区域就是所有以点$M\in\Omega$为中心，以at为半径的球面全体，当t足够大时，这种球面族有内外包络面，称外包络面为传播波的前阵面，内包络面为后阵面．前阵面以外的部分表示扰动尚未传到的区域，后阵面以内的部分是波已传过并恢复了原来状态的区域，前后阵面之间的区域就是受到扰动影响的部分．在三维，波的传播有清晰的前阵面与后阵面，称为惠更斯原理或称无后效现象．

6° 波的弥散　对二维波动方程，点(x_0,y_0)的影响区域为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2t^2$$

若在有界区域Ω内有一个初始扰动，则波的传播只有前阵面而无后阵面，所以当Ω的初始扰动传到某点后，扰动对此点的影响不会消失，不过随时间的增加而逐渐减弱．这种现象称为波的弥散，或说波具有后效现象．

2．热传导方程

热传导方程的一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(x,t)$$

式中$f(x,t)$为连续有界函数．

热传导方程是描述热的传导过程、分子的扩散过程等物理规律的．

对于n维热传导方程的柯西问题的初值条件为

$$u|_{t=0}=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) \qquad (-\infty<x_i<+\infty,\ i=1,2,\cdots,n)$$

式中φ为连续有界函数，方程的解的表达式为

$$u(x_1,\cdots,x_n,t)$$
$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n}\varphi(\xi_1,\cdots,\xi_n)\exp\left(-\frac{(x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2}{4a^2t}\right)$$
$$d\xi_1\cdots d\xi_n$$
$$+\int_0^t\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n}\frac{f(\xi_1,\cdots,\xi_n,\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n}\exp\left(-\frac{(x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right.$$
$$\left.d\xi_1\cdots d\xi_n\right]d\tau$$

3. 拉普拉斯方程

研究重力场、静力场、磁场以及一些物理现象(如振动、热传导、扩散)的平衡或稳定过程,通常得到椭圆型方程,最典型的方程为拉普拉斯方程

$$\Delta u=0$$

及泊松方程

$$\Delta u=\rho$$

式中 ρ 为已知函数, Δ 为拉普拉斯算子, $\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

[圆或球的狄利克莱问题解的泊松积分]　当区域为圆或球时,分别采用极坐标(r,φ)或球坐标(r,θ,φ)较为方便.

$\Delta u=0$ 的极坐标形式为

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

$\Delta u=0$ 的球坐标形式为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

狄利克莱问题解的泊松积分为

1° 区域是圆时, $\Delta u=0,\ u|_{r=a}=\xi(\varphi)$,解为泊松积分

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\xi(\psi)\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\psi-\varphi)+r^2}d\psi$$

式中 $\xi(\varphi)$ 为已知连续函数, $\xi(\varphi)=\xi(\varphi+2\pi)$.

2° 区域是球时, $\Delta u=0,\ u|_{r=a}=\xi(\theta,\varphi)$解为泊松积分

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\xi(\theta',\varphi')\frac{a^2-r^2}{(a^2-2ar\cos\gamma+r^2)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

式中 $\xi(\theta,\varphi)$为已知连续函数,

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

[调和函数的性质]　二维拉普拉斯方程的连续解称为调和函数,它具有以下重要性质:

1° 设函数 $u(x,y)$ 在以 S 为边界的有界区域 D 内调和,在 $\bar{D}$ 上有连续一阶偏导数,则

$$\int_S\frac{\partial u}{\partial N}ds=0$$

式中$\frac{\partial u}{\partial N}$为外法向导数.

2° 算术平均值定理 设函数 $u(x,y)$ 在圆的内部调和，在闭圆上连续，则 $u(x,y)$ 在圆心的值等于它在圆周上的值的算术平均值.

3° 每一个调和函数 $u(x,y)$ 对 x,y 无穷次可微.

4° 哈拉克第一定理（一致收敛定理） 设 $\{u_k(x,y)\}$，$(k=1,2,\cdots)$ 在有界区域 D 内调和，在 $\bar{D}$ 上连续，如果 $u_k(x,y)$ 在 D 的边界上一致收敛，则在 D 内也一致收敛，并且极限函数在 D 内调和.

5° 哈拉克第二定理（单调性定理） 设调和函数列 $\{u_k(x,y)\}$，$(k=1,2,\cdots)$ 在 D 的某一内点收敛，且对于任意 k，

$$u_{k+1}(x,y)\geqslant u_k(x,y)$$

则 $u_k(x,y)$ 在 D 内处处收敛于某调和函数，同时在 D 的每一有界闭子区域上一致收敛.

6° 刘维尔定理 如函数 $u(x,y)$ 在全平面上调和且不是常数，则它不可能有上界和下界.

7° 可去奇点定理 设 $u(x,y)$ 在 A 点的一个邻域（除 A 点外）调和且有界，但在 A 点没有定义，则可定义函数 $u(x,y)$ 在 A 点的值，使 u 在整个 A 点的邻域（包括 A 点）内是调和函数.

[李雅普诺夫闭曲面与内、外边值问题] 设 S 为 E^3 的有限闭曲面，如果满足下列条件，那末 S 称为李雅普诺夫闭曲面：

(i) 曲面到处有切面.

(ii) 存在常数 $d>0$，对曲面上每一点 P，可作一个以 P 为中心、d 为半径的球，使曲面在此球内的部分和任意一条与 P 点法线平行的直线相交不多于一点

(iii) 曲面上任意二点 P_1 及 P_2 的法线的夹角 $\gamma(P_1,P_2)$ 满足

$$\gamma(P_1,P_2)\leqslant A r_{P_1P_2}^{\delta}$$

式中 A,δ 为正常数，$0<\delta\leqslant 1$，$r_{P_1P_2}$ 是点 P_1 与 P_2 之间的距离.

(iv) 从空间任意一点 P_0 看曲面的任一部分 σ 的立体角 ω_σ 有界，即

$$|\omega_\sigma|\leqslant k \quad (k\text{ 为常数})$$

（从点 P_0 看曲面 S 的立体角为

$$\int_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}_{P_0P},\boldsymbol{N}_P)}{r_{P_0P}^2}dS_P$$

式中 $\boldsymbol{r}_{P_0P}$ 表示矢量 $\overrightarrow{P_0P}$，$\boldsymbol{N}_P$ 表示 S 在点 P 的外法线矢量，dS_P 表示点 P 的面积元素.）

设D为E^n的有界区域，其边界S为李雅普诺夫闭曲面．求在D内满足

$$\Delta u=0$$

而在S上满足给定边界条件的解称为内边值问题；求在D外满足$\Delta u=0$而在S上满足给定边界条件的解称为外边值问题．

[狄利克莱问题与诺伊曼问题的解]

狄利克莱问题　　$\Delta u=0,\ u|_S=\psi(M_S)$

诺伊曼问题　　$\Delta u=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial N}\right|_S=\psi(M_S)$

式中$M_S\in S$, ψ为S上的已知连续函数，$\dfrac{\partial u}{\partial N}$为外法向导数．

1° 狄利克莱问题的解可表示为面积分

$$u(M)=\int_S\frac{\cos(r_{PM},N_P)}{r_{PM}^2}\nu(P)dS_P.$$

式中$\nu(P)$称为面密度，面积分$u(M)$称为双层位势，r_{PM}为点M与变点P之间的距离，$\boldsymbol{r}_{PM}$为矢量$\overrightarrow{PM}$, N_P为S在点P的外法线矢量，$\nu(M)$满足第二类弗雷德霍姆积分方程(第十五章§1)：

(i) 内边值问题

$$2\pi\nu(M_S)=\int_S\nu(P)\frac{\cos(r_{PM_S},N_P)}{r_{PM_S}^2}dS_P-\psi(M_S)$$

(ii) 外边值问题

$$2\pi\nu(M_S)=-\int_S\nu(P)\frac{\cos(r_{PM_S},N_P)}{r_{PM_S}^2}dS_P+\psi(M_S)$$

2° 诺伊曼问题的解可表示为面积分

$$u(M)=\int_S\frac{\omega(P)}{r_{PM}}dS_P$$

式中$\omega(P)$称为面密度，面积分$u(M)$称为单层位势，$\omega(P)$满足第二类弗雷德霍姆积分方程：

(i) 内边值问题

$$2\pi\omega(M_S)=\int_S\omega(P)\frac{\cos(r_{PM_S},N_{M_S})}{r_{PM_S}^2}dS_P+\psi(M_S)$$

(ii) 外边值问题

$$2\pi\omega(M_S)=-\int_S\omega(P)\frac{\cos(r_{PM_S},N_{M_S})}{r_{PM_S}^2}dS_P+\psi(M_S)$$

定理：狄利克莱的内外边值问题及诺伊曼的外边值问题有唯一解，而诺伊曼的内边值问题解存在的充分必要条件是：

$$\int_S \psi(P)dS_P = 0$$

［泊松方程］　在区域D内，泊松方程 $\Delta u=\rho$（ρ为已知连续函数）有特解：

三维：体势位

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\rho(P)}{r_{PM}}dV_P$$

二维：对数势位

$$U(M) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D \rho(P)\ln\frac{1}{r_{PM}}dS_P$$

式中 r_{PM} 为点M与变点P之间的距离.

如果已知泊松方程的一个特解 $U(M)$，则 $w=u-U$ 满足 $\Delta w=0$，从而泊松方程的边值问题可化为拉普拉斯方程相应的边值问题.

四、基本解与广义解

［共轭微分算子与自共轭微分算子］　算子

$$L\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c$$

称为二阶线性微分算子，式中 a_{ij},b_i,c为$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次连续可微函数. 由公式

$$L_v^*\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(a_{ij}v)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_iv)+cv$$

决定的算子L^*称为L的共轭微分算子. 如果$L=L^*$，则称L为自共轭微分算子.

［格林公式］

1° 算子L的格林公式是

$$\int_D[vLu-uL^*v]d\Omega=\int_S\sum_{i=1}^{n}p_i\cos(\boldsymbol{N},\boldsymbol{e}_i)dS$$

式中S为区域D的边界，$\boldsymbol{N}$ 为S的外法线矢量，$\boldsymbol{e}_i$ 为 x_i 轴的矢量

$$(0,\cdots,0,\underset{i}{1},0,\cdots,0),$$

$\cos(\boldsymbol{N},\boldsymbol{e}_i)$表示矢量 $\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{e}_i$ 的夹角的余弦.

$$p_i=\sum_{j=1}^{n}\left[va_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}-u\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}v)\right]+b_iuv$$

2° 三维拉普拉斯算子的格林公式

$$\iiint_D (v\Delta u - u\Delta v)dxdydz = \iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}\right)dS$$

其中$\frac{\partial u}{\partial N}$是外法向导数.

3° 算子

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y)$$

的格林公式

$$\iint_D [vLu - uL^*v]dxdy$$

$$= \int_S \left\{\left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + auv\right]\cos(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{i})\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + buv\right]\cos(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{j})\right\} dS$$

式中 L^* 为 L 的共轭微分算子, $\boldsymbol{N}$ 为外法线矢量, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 分别为 x 轴, y 轴上的单位矢量.

[基本解]

1° 方程 $Lu=f$ 的基本解:

设M, M_0 为 E^n 中的点, 满足方程

$$Lu = \delta(M - M_0) = \begin{cases} 0, & M \neq M_0 \\ \infty, & M = M_0 \end{cases}$$

的解 $U(M, M_0)$ 称为方程 $Lu=f$ 的基本解, 有时也称为方程 $Lu=0$ 的基本解, 式中 $\delta(M-M_0)$ 称为 n 维狄拉克函数(δ-函数).

基本解 $U(M, M_0)$满足

(i) $LU(M, M_0) = 0$, 当 $M \neq M_0$,

(ii) 对任意充分光滑的函数 $f(M)$,

$$U(M) = \int_{E^n} U(M, M_0) f(M_0) dM_0$$

于是 $U(M, M_0)$满足 $Lu = f(M)$.

所以有时也就把满足条件(i)、(ii)的函数$U(M, M_0)$定义为方程 $Lu=f(M)$ 的基本解.

(a) $\Delta u = 0$ 的基本解

二维:

$$U(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}$$

三维: $$U(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$$

n 维: $$U(M,M_0)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(n-2)\pi^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{r_{MM_0}^{n-2}}$$

式中 r_{MM_0} 表示点 M 与 M_0 之间的距离。

(b) n 维空间的多重调和方程 $\Delta^m u=0$ 的基本解

$$U_{(M,M_0)}=\begin{cases}cr_{MM_0}^{2m-n}\ln r_{MM_0}, & 2m\geqslant n, n\text{ 为偶数}\\ cr_{MM_0}^{2m-n}, & \text{其他情况}\end{cases}$$

(c) 热传导方程的基本解

$$U(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, & t\geqslant\tau\\ 0, & t<\tau\end{cases}$$

(d) 波动方程的基本解

一维:

$$U(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & |x-\xi|\leqslant a(t-\tau) \quad t\geqslant\tau\\ 0, & |x-\xi|>a(t-\tau), \quad t<\tau\end{cases}$$

二维: $U(x,y,t;\xi,\eta,\tau)$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\pi a[a^2(t-\tau)^2-r^2]^{\frac{1}{2}}}, & r=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}}\leqslant a(t-\tau) \quad t\geqslant\tau\\ 0, & r>a(t-\tau), \quad t<\tau\end{cases}$$

三维: $U(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,\tau)$

$$=\begin{cases}\frac{\delta(r-a(t-\tau))}{4\pi ar}, & r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\leqslant a(t-\tau) \quad t\geqslant\tau\\ 0, & r>a(t-\tau), \quad t<\tau\end{cases}$$

2° 柯西问题的基本解

(i) 称满足

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=0\\ u\Big|_{t=0}=0, \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\delta(M-M_0)\end{cases}$$

的解为波动方程柯西问题的基本解，它的形式为

一维:

$$U(x-\xi,t)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & |x-\xi|\leqslant at\\ 0, & |x-\xi|>at\end{cases}$$

二维：$U(x-\xi,y-\eta,t)$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-r^2}}, & r=[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}\leqslant at\\ 0, & r>at\end{cases}$$

三维：$U(x-\xi,y-\eta,z-\zeta,t)=\dfrac{\delta(r-at)}{4\pi ar}$

$$(r=[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{1}{2}}$$

(ii) 称满足

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u|_{t=0}=\delta(x-\xi)\end{cases}$$

的解为热传导方程柯西问题的基本解，它的形式是

$$U(x-\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

同样方法可以定义其他定解问题的基本解．

由定义可见，基本解表示由集中量(如点热源，点电荷等)所产生的解，下段介绍的格林函数，黎曼函数也具有这种特点，统称它们为点源函数，或影响函数．

［广义解］ 在区域D中给定二阶线性方程

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f$$

式中f在D上连续．

1° 设$u_n(x)$为D上充分光滑(如二阶连续可微)的函数序列，当$n\to\infty$时，$u_n(x)$一致(或在适当意义下)收敛于函数$u(x)$，同时Lu_n也一致(或在适当意义下)收敛于$f(x)$，则称$u(x)$为$Lu=f$的广义解．

2° 设函数$u(x)$在区域D内连续，如果对于任意二次连续可微且在与D的边界距离小于某一正数ρ的点上恒等于零的函数w(ρ与w无关，w称为D的试验函数)有

$$\int_D[uL^*w-fw]d\Omega=0$$

那末称$u(x)$为方程$Lu=f$的广义解．

有时为了区别广义解，称以前定义的解为古典解，古典解一定是广义解．但

因广义解不一定光滑，甚至不可微，所以不一定是古典解.

例如，当 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 只是 x 的连续函数时，函数

$$u(x,t)=\varphi(x+t)+\psi(x-t)$$

为波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

的广义解，但不是古典解.

五、二阶偏微分方程的常用解法

1. 分离变量法

它是解线性微分方程常用的一种方法，特别当区域是矩形、柱体、球体时使用更为普遍. 这种方法是先求满足边界条件的特解，利用迭加原理，作这些特解的线性组合，得到定解问题的解. 求特解时常归结为求某些常微分方程边值问题的特征值和特征函数. 以下对不同类型方程说明分离变量法的具体解法.

[弦振动方程]

1° 两端固定的弦振动齐次方程混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,\ t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), & 0\leqslant x\leqslant l\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\geqslant 0\end{cases}$$

设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，具体解法如下：

(1) $X(x)$，$T(t)$ 满足的常微分方程：

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0$$

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0\ \ (\lambda\ 为常数)$$

(2) 用此二常微分方程的解的乘积表示弦振动方程的特解 $u_n(x,t)$.

解边值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda^2X(x)=0\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

当

$$\lambda^2=\lambda_n^2=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

时，有非零解

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x\qquad(n=1,2,\cdots)$$

称 λ_n 为边值问题的特征值，$X_n(x)$为特征函数。把 λ_n 代入 $T(t)$的方程，得

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{na\pi t}{l}+B_n\sin\frac{na\pi t}{l}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

式中 A_n,B_n 为任意常数，这样就得到弦振动方程的特解：

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(A_n\cos\frac{na\pi t}{l}+B_n\sin\frac{na\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

(3) 把 $u_n(x,t)$迭加，形式上作级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{na\pi t}{l}+B_n\sin\frac{na\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

(4) 利用特征函数的正交性，确定系数 A_n,B_n.

把 $\varphi(x)$及 $\psi(x)$展开成傅立叶级数

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

式中

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

利用初始条件可得

$$A_n=\varphi_n,\quad B_n=\frac{l}{n\pi a}\psi_n$$

于是混合问题的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{na\pi t}{l}+\frac{l}{na\pi}\psi_n\sin\frac{na\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

若 (i)$\varphi(x)$具有一阶和二阶连续导数，三阶导数逐段连续，且 $\varphi(0)=\varphi(l)$，$\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$；(ii) $\psi(x)$连续可微，二阶导数逐段连续，$\psi(0)=\psi(l)=0$，那末形式解右端的级数一致收敛，形式解就是混合问题的正规解。

2° 解的物理意义

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{na\pi t}{l}+B_n\sin\frac{na\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$= a_n \cos\frac{n a \pi(t+\delta_n)}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

弦的这种形式的振动称为驻波，点 $x=m\frac{l}{n}$ $(m=0,1,\cdots,n)$ 为不动的点，称为节点；点 $x=\frac{2m+1}{2n}l$ $(m=0,1,2,\cdots,n-1)$处振幅最大，称为腹点；$\omega_n=\frac{n\pi}{l}a$ 称为弦振动的固有频率；弦线发出的最低音的频率为 $\omega_1=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$（$\tau$ 为张力，ρ 为弦的线密度）称为该弦的基音，其他频率都是它的整数倍，称为泛音。

3° 非齐次方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), & 0\leqslant x\leqslant l\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\geqslant 0\end{cases}$$

将 $u(x,t)$和 $f(x,t)$展开成傅立叶级数：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

那末根据定解条件再利用 1° 中 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$的傅立叶展开式，有

$$\begin{cases}u_n''(t)+\dfrac{n^2a^2\pi^2}{l^2}u_n(t)=f_n(t)\\ u_n(0)=\varphi_n,\quad u_n'(0)=\psi_n\end{cases}$$

所以

$$u_n(t)=\varphi_n\cos\frac{na\pi t}{l}+\frac{l}{na\pi}\psi_n\sin\frac{na\pi t}{l}$$
$$+\frac{l}{na\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{na\pi(t-\tau)}{l}d\tau$$

形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\varphi_n\cos\frac{na\pi t}{l}+\frac{l}{na\pi}\psi_n\sin\frac{na\pi t}{l}$$
$$+\frac{l}{na\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{na\pi(t-\tau)}{l}d\tau\Big]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

若 $\varphi(x)$ 具有一、二阶连续导数，三阶导数逐段连续. $\psi(x)$ 和 $f(x,t)$ 连续可微，二阶导数逐段连续，同时

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$$
$$\psi(0)=\psi(l)=f(0,t)=f(l,t)=0$$

则级数一致收敛，形式解就是非齐次方程混合问题的正规解.

4° 遇到非齐次边界条件

$$\begin{cases}u(0,t)=\mu_1(t)\\u(l,t)=\mu_2(t)\end{cases}\quad(t>0)$$

作变换

$$u(x,t)=v(x,t)+\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]$$

可化为关于 $v(x,t)$ 的齐次边界条件求解.

[热传导方程] 热传导方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(0<x<l,\ t>0)\\u(0,t)=u(l,t)=0\\u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，得

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0$$
$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0$$

特征值 $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$，对应的特征函数为 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$，而

$$T_n(t)=c_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a^2t}\quad(n=1,2,\cdots)$$

作形式解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{l}\ e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a^2t}$$

式中 c_n 等于 $\varphi(x)$ 的傅立叶系数即 $c_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$.

当 $\varphi(x)$ 具有一、二阶连续导数，三阶导数逐段连续，$\varphi(0)=\varphi(l)=0$，则上述级数一致收敛，形式解就是正规解了.

[拉普拉斯方程] 球内定常温度分布的狄利克莱问题——拉普拉斯方程的狄利克莱问题.

选用球坐标

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\\ u(r,\theta,\varphi)|_{r=a}=f(\theta,\varphi)\end{cases}$$

令 $u(r,\theta,\varphi)=v(r,\theta)\psi(\varphi)$. 代入方程，分离变量 φ 得

$$\psi''(\varphi)+k^2\psi(\varphi)=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)-\frac{k^2}{\sin^2\theta}v=0 \tag{2}$$

利用对于变量 φ 的周期性，$u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta,\varphi+2\pi)$，可知方程(1)中的 k 只能取 m $(m=0,1,\cdots)$，那末 $\psi(\varphi)$ 取 $\{\cos m\varphi,\ \sin m\varphi\}$. 再将方程(2)分离变量，令 $v=R(r)H(\theta)$，得

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=\lambda^2R \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}H=-\lambda^2H \tag{4}$$

方程(4)的解可用勒让德多项式表示，为了使解有界，λ 只能取

$$\lambda_n^2=n(n+1)\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

对应的解 $H(\theta)=P_n^{(m)}(\cos\theta)$，$P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^m}{dx^m}[P_n(x)]$，$P_n(x)$ 为勒让德多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

方程(3)可写成

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-n(n+1)R=0$$

这是欧拉方程，其有界解为 $R(r)=c_1r^n$. 最后将 u 的特解迭加，利用边界条件和球函数的正交性得

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

式中 $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ 为一般勒让德函数.

$$\begin{cases}A_{n,0}=\dfrac{2n+1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n^{(0)}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta d\varphi\\ A_{nm}=\dfrac{2n+1}{2\pi}\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\,d\theta d\varphi\\ B_{nm}=\dfrac{2n+1}{2\pi}\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta\,d\theta d\varphi\end{cases}$$

如果 $f(\theta,\varphi)$ 二次连续可微，则表示 $u(r,\theta,\varphi)$ 的级数一致收敛，它就是狄

利克莱问题的解.

[高阶方程] 梁的横向振动方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0 \qquad (a\text{ 为常数}) \tag{1}$$

定解条件为

$$\begin{cases} y(0,t)=y(l,t)=0 \\ \left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0 \\ \left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \\ y(x,0)=x(l-x) \end{cases}$$

设 $y(x,t)=X(x)T(t)$, 那末

$$X^{(4)}(x)-\lambda^4 X(x)=0 \tag{2}$$

$$T''(t)+a^2\lambda^4 T(t)=0 \tag{3}$$

方程(2)满足 $X''(0)=X''(l)=0$ 的特征值 $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, 特征函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}(n=1,2,\cdots)$, 方程(3)的解为

$$T_n(t)=E_n\cos\frac{n^2\pi^2 at}{l^2}$$

所以方程(1)的形式解为

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n^2\pi^2 at}{l^2}$$

由 $y(x,0)=x(l-x)$ 得

$$E_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\begin{cases} 0, & n\text{ 为偶数} \\ \dfrac{8l^2}{n^3\pi^3}, & n\text{ 为奇数} \end{cases}$$

最后得到方程(1)的解.

$$y(x,t)=\frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2k+1)^2\pi^2 at}{l^2}$$

2. 双曲型方程的黎曼方法

考虑拉普拉斯双曲型方程

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y)$$

[古沙问题的特征线法] 古沙问题是

$$\begin{cases} Lu = f \\ u|_{x=x_0} = \varphi_1(y), \quad u|_{y=y_0} = \varphi_2(x) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1,\ y_0 \leqslant y \leqslant y_1) \end{cases}$$

设 $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y)$ 为连续函数; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$ 连续可微且 $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(x_0)$, 令

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = w$$

则古沙问题化为下面积分方程组的求解问题

$$\begin{cases} v(x,y) = \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} [f(x,y) - a(x,y)v - b(x,y)w - c(x,y)u]dy \\ w(x,y) = \varphi_1'(y) + \int_{x_0}^{x} [f(x,y) - a(x,y)v - b(x,y)w - c(x,y)u]dx \\ u(x,y) = \varphi_2(x) + \int_{y_0}^{y} w dy \end{cases}$$

它可用逐次逼近法求解, 显然 $x = x_0$, $y = y_0$ 为拉普拉斯双曲型方程的特征线, 所以此法也称为特征线法.

[广义柯西问题的黎曼方法] 广义柯西问题是

$$\begin{cases} Lu = f(x,y) \\ u|_{y=\mu(x)} = \varphi_1(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\mu(x)} = \varphi_2(x) \end{cases}$$

设 $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $\varphi_1(x)$ 及 $\mu(x)$ 为连续可微函数, 且 $\mu'(x) \neq 0$, 而 $f(x,y)$ 及 $\varphi_2(x)$ 为连续函数.

设 $M(x_0, y_0)$ 不是 $y = \mu(x)$ 上的点, 过点 M 作特征线 $x = x_0$, $y = y_0$ 交 $y = \mu(x)$ 于 P 及 Q, 记曲边三角形 PMQ 为 D(图 14.6), 在 D 上用格林公式(本节, 四)得

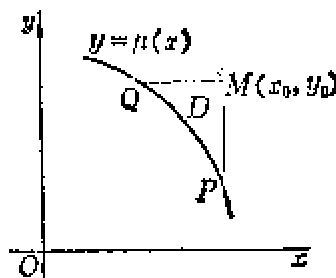


图 14.6

$$\iint_D [vLu - uL^*v]dxdy = \frac{1}{2}(uv)\Big|_P^M + \frac{1}{2}(uv)\Big|_Q^M$$

$$+ \int_P^M v\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + av\right)dy + \int_Q^M u\left(-\frac{\partial v}{\partial x} + bv\right)dx$$

$$+ \int_Q^P \left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - buv\right]dx - \left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - auv\right]dy$$

设 $v(x,y;\ x_0,y_0)$为下面古沙问题的解:

$$\begin{cases} L^*v=0 \\ v(x_0,\ y;\ x_0,\ y_0)=e^{\int_{y_0}^{y}a(x_0,\ y)dy} \\ v(x,\ y_0;\ x_0,\ y_0)=e^{\int_{x_0}^{x}b(x,y_0)dx} \end{cases}$$

那末广义柯西问题解的黎曼公式为

$$u(x_0,\ y_0)=\frac{1}{2}(uv)_P+\frac{1}{2}(uv)_Q-\int_Q^P\left\{\left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-buv\right]dx\right.$$
$$\left.-\left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-auv\right]dy\right\}+\iint_D v(x,y;x_0,y_0)f(x,y)dxdy.$$

式中 $v(x,y;x_0,y_0)$称为黎曼函数,这个方法称为黎曼方法.

一般可用特征线法求黎曼函数。但对常系数偏微分方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{c}{4}v=0 \qquad (c\ 为常数)$$

也可用下法求黎曼函数. 设 $v=v(z)$, $z=[(x-x_0)(y-y_0)]^{\frac{1}{2}}$, 则方程化为贝塞耳方程

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}+cv=0$$

黎曼函数就是满足此贝塞耳方程及条件 $v(0)=1$ 的零阶贝塞耳函数,

$$v(x,y;\ x_0,y_0)=J_0(\sqrt{c(x-x_0)(y-y_0)})$$

对常系数的拉普拉斯双曲型方程通过变换可化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{c}{4}u=f$$

的形式,它的黎曼函数就是上式.

3. 椭圆型方程的格林方法

在区域D考虑椭圆型方程

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f$$

式中 a_{ij}, b_i, c, f 为 $x_1,\cdots,x_n$ 的连续可微函数, $a_{ij}=a_{ji}$, 二次型$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_i\alpha_j$ 是正定的.

[格林函数及其性质] 若 $Lu=0$ 的共轭方程 $L^*u=0$ 的基本解 $G(\boldsymbol{x},\xi)$ 在 D的边界S 上满足

$$G(\boldsymbol{x},\xi)=0,\quad \boldsymbol{x}\in S$$

则称 $G(\boldsymbol{x},\xi)$ 为方程 $Lu=0$ 的格林函数, 式中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$, ξ 为参变点,

$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，即 $G(x,\xi)=G(x_1,\cdots x_n;\ \xi_1,\cdots,\xi_n)$.

格林函数具有对称性质：设 $G(x,\xi)$，$V(x,\xi)$分别为方程 $Lu=0$ 及其共轭方程的格林函数，则成立对称关系

$$G(x,\xi)=V(\xi,x)$$

特别如果 Lu 为自共轭微分算子，则有

$$G(x,\xi)=G(\xi,x)$$

[利用格林函数解边值问题]

1° 一般公式　在区域D上应用格林公式(本节，四)，并取 $v=G(x,\xi)$，则方程 $Lu=f$ 的狄利克莱问题 $u|_S=\varphi$ 的解为

$$u(x)=\int_D\cdots\int f(\xi)G(x,\xi)d\xi_1\cdots d\xi_n+\int_S\varphi(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial N}dS_\xi$$

式中

$$\frac{\partial}{\partial N}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\cos(N,e_i)\frac{\partial}{\partial x_j}\qquad (N\text{ 是 }S\text{ 的外法线方向})$$

2° 对于球体(球心为O，半径为a)，$\Delta u=0$ 的基本解为$\frac{1}{4\pi r}$，r 为$P(x,y,z)$与参变点$M(\xi,\eta,\zeta)$的距离，作M关于球面的反演点M_1，记r_1为M_1与P的距离，则格林函数为

$$G(x,y,z;\ \xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{a}{\rho_0}\cdot\frac{1}{r_1}\right)$$

$\rho_0=(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}$. 狄利克莱问题 $u|_S=\varphi$ 的解为

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi a}\iint_S\varphi(\xi)\frac{a^2-\rho_0^2}{r^3}dS_\xi$$

式中S为球面．引用球坐标时，解为泊松积分(本节，三，3)．

3° 在圆上(半径为a)，$\Delta u=0$ 的格林函数为

$$G(x,y;\ \xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r}-\ln\left(\frac{a}{\rho_0}\cdot\frac{1}{r_1}\right)\right]$$

式中r为$P(x,y)$与参变点$M(\xi,\eta)$的距离，r_1为P与M点关于圆的反演点M_1的距离，圆上狄利克莱问题的解为泊松积分．

4. 积分变换法

积分变换法是解线性微分方程，特别是常系数方程的一种有效方法，它是把方程的某一独立变量看成参变量，作未知函数的积分变换，这样可减少原方程独立变量的个数而将方程化为简单形式(最简单的情况是常微分方程，甚至是代数方程)．解此简化方程的对应定解问题并通过逆积分变换就得到原定解问题的

解. 下面举例说明傅立叶变换和拉普拉斯变换方法.

例 1 用傅立叶变换法解弦振动方程的柯西问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\end{cases}$$

解 把 t 作为参变量, 作 $u(x,t)$ 关于 x 的傅立叶变换

$$\mathscr{F}[u(x,\ t)]=\bar{u}(p,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{ipx}dx$$

原来的柯西问题化为下面的定解问题

$$\begin{cases}\frac{d^2\bar{u}}{dt^2}=-a^2p^2\bar{u}\\ \bar{u}|_{t=0}=\mathscr{F}[\varphi(x)]=\overline{\varphi}(p)\\ \left.\frac{d\bar{u}}{dt}\right|_{t=0}=0\end{cases}$$

把 p 看作参数, 其解为

$$\bar{u}(p,t)=\overline{\varphi}(p)\cos apt$$

由傅立叶变换的反演公式得到原问题的解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\overline{\varphi}(p)\cos apt]e^{-ipx}dp\\&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i(\xi-x-at)p}+e^{i(\xi-x+at)p})\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-ip\xi}d\xi dp\\&=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]\end{aligned}$$

例 2 用拉普拉斯变换法解热传导方程的定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x<+\infty,\quad t>0\\ u|_{t=0}=0, & 0<x<\infty\\ u|_{x=0}=u_0, & t>0\end{cases}$$

解 把 x 当作参变量, 作 $u(x,t)$ 关于 t 的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}(u(x,\ t)]=\bar{u}(x,p)=\int_0^{\infty}u(x,t)e^{-pt}dt$$

原问题化为

$$\begin{cases} p\bar{u}=a^2\dfrac{d^2\bar{u}}{dt^2} \\ \bar{u}\big|_{x=0}=\dfrac{u_0}{p} \end{cases}$$

通解为

$$\bar{u}=c_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+c_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x},$$

要求解有界，c_2必须为零，所以 $c_1=\dfrac{u_0}{p}$，

$$\bar{u}=\frac{u_0}{p}\ e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

查拉普拉斯变换表(第十一章)得

$$u(x,t)=u_0\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

式中 $\operatorname{erfc}(y)$为余误差函数.

§4　偏微分方程的数值解法

一、差分法

差分法是常用的一种数值解法. 它是在微分方程中用差商代替偏导数，得到相应的差分方程，通过解差分方程得到微分方程解的近似值.

1. 网格与差商

在平面(x,y) 上的一个以S为边界的有界区域D上考虑定解问题. 为了用差分法求解，分别作平行于x轴和y轴的直线族，

$$\begin{cases} x=x_i=ih \\ y=y_j=jh \end{cases}\quad (i,j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm n)$$

作成一个正方形网格，这里h为事先指定的正数，称为步长；网格的交点称为节点，简记为(i,j). 取一些与边界S接近的网格节点，用它们连成折线S_h，S_h所围成的区域记作D_h. 称D_h内的节点为内节点，位于S_h上的节点称为边界节点（图14.7）. 下面都在网格D_h+S_h上考虑问题：寻求各个节点上解的近似值. 在边界节点上取与它最接近的边界点上的边值作为解的近似值，而在内节点上，用以下的差商代替偏导数：

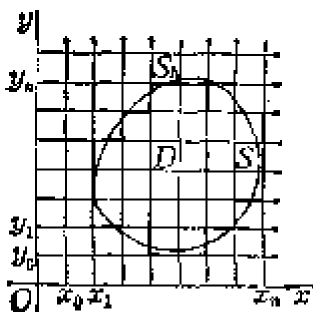


图　14.7

$$\frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{1}{h}[u(x+h,y)-u(x,y)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\approx\frac{1}{h}[u(x,y+h)-u(x,y)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{1}{h^2}[u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\approx\frac{1}{h^2}[u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\approx\frac{1}{h^2}[u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x-h,y)]$$

注意，1° 式中的差商 $\frac{1}{h}[u(x+h,y)-u(x,y)]$ 称为向后差商，而 $\frac{1}{h}[u(x,y)-u(x-h,y)]$ 称为向前差商，$\frac{1}{2h}[u(x+h,y)-u(x-h,y)]$ 称为中心差商. 也可用向前差商或中心差商代替一阶偏导数.

2° x 轴与 y 轴也可分别采用不同的步长 h, l，即用直线族

$$\begin{cases}x=x_i=ih\\ y=y_j=jl\end{cases}\quad(i,j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

作一个矩形网格.

2. 椭圆型方程的差分方法

[五点格式] 考虑拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & (x,\ y\in D)\\ u|_S=\mu(x,y)\end{cases}$$

式中 $\mu(x,y)$ 为定义在 D 的边界 S 上的已知函数.

采用正方形网格，记 $u(x_i,y_j)=u_{ij}$，在节点 (i,j) 上分别用差商

$$\frac{u_{i-1,j}-2u_{ij}+u_{i+1,j}}{h^2},\quad\frac{u_{i,j-1}-2u_{ij}+u_{i,j+1}}{h^2}$$

代替 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，对应的差分方程为

$$\frac{u_{i-1,j}-2u_{ij}+u_{i+1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j-1}-2u_{ij}+u_{i,j+1}}{h^2}=0$$

或

$$u_{ij}=\frac{1}{4}[u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}]\tag{1}$$

即任一节点 (i,j) 上 u_{ij} 的值等于周围相邻节点上解的值的算术平均，这种形式的差分方程称为五点格式，在边界节点上取

$$u_{ij}=\mu(x_i^*,\ y_j^*)\qquad((i,j)\in S_h)\tag{2}$$

式中(x_i^*,y_j^*)是与节点(i,j)最接近的S上的点．于是得到了以所有内节点上的u_{ij}值为未知量的若干个线性代数方程，由于每一个节点都可列出一个方程，所以未知量的个数与方程的个数都等于节点的总数，于是，可用通常的方法（如高斯消去法）解此线性代数方程组，但当步长不很大时，用高斯消去法将会遇到很大困难，可用下面介绍的其他方法求解．

若$h\to 0$时，差分方程的解收敛于微分方程的解，则称差分方程为收敛的．

在计算过程中，由于进行四则运算引起舍入误差，每一步计算的舍入误差都会影响以后的计算结果，如果这种影响所产生的计算偏差可以控制，而不至于随着计算次数的增加而无限增大，则称差分方程是稳定的．

［迭代法解差分方程］ 在五点格式的差分方程中，任意取一组初值$\{u_{ij}\}$，只要求它们在边界节点(i,j)上取已知值$\mu(x_i^*,y_j^*)$，然后用逐次逼近法（也称迭代法）解五点格式：

$$u_{ij}^{(n+1)}=\frac{1}{4}[u_{i+1,j}^{(n)}+u_{i-1,j}^{(n)}+u_{i,j-1}^{(n)}+u_{i,j+1}^{(n)}]\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

逐次求出$\{u_{ij}^{(n)}\}$．当$(i+1,j)$，$(i-1,j)$，$(i,j-1)$，$(i,j+1)$中有一点是边界节点时，每次迭代时，都要在这一点上取最接近的边界点的值．当$n\to\infty$时，$u_{ij}^{(n)}$收敛于差分方程的解，因此n充分大时，$\{u_{ij}^{(n)}\}$可作差分方程的近似解，迭代次数越多，近似解越接近差分方程的解．

［用调节余数法求节点上解的近似值］ 以差商代替Δu时，用节点$(i+1,j)$，$(i-1,j)$，$(i,j+1)$，$(i,j-1)$上u的近似值来表示u在节点(i,j)的值将产生误差，称此误差为余数R_{ij}，即

$$u(x_i+h,y_j)+u(x_i-h,y_j)+u(x_i,y_j+h)+u(x_i,y_j-h)-4u(x_i,y_j)=R_{ij}$$

设在(i,j)上给u_{ij}以改变量δu_{ij}，从上式可见R_{ij}将减少$4\delta u_{ij}$，而其余含有$u(x_i,y_j)$的差分方程中的余数将增加δu_{ij}，多次调整δu_{ij}的值就可将余数调整到许可的有效数字的范围内，这样可获得各节点上$u(x,y)$的近似值．这种方法比较简单，特别在对称区域中计算更简捷．

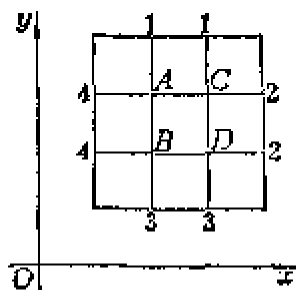


图 14.8

例 求$\Delta u=0$在内节点A,B,C,D上解的近似值，设在边界节点1，2，3，4上分别取值为1，2，3，4（图14.8）

解 记$u(A)=u_A$，点A,B,C,D的余数分别为

$$
\begin{aligned}
-4u_A+u_B+u_C \qquad\qquad +5&=R_A\\
u_A-\quad 4u_B+u_D\ +7&=R_B\\
u_A+\quad -4u_C+u_D\ +3&=R_C\\
u_B+u_C-4u_D+5&=R_D
\end{aligned}
$$

以边界节点的边值的算术平均值作为初次近似值，即

$$u_A^{(0)}=u_B^{(0)}=u_C^{(0)}=u_D^{(0)}=2.5$$

则相应的余数为：

$$R_A=0,\ \ R_B=2,\ \ R_C=-2,\ \ R_D=0$$

最大余数为±2．先用$\delta u_C=-0.5$把R_C缩减为零，u_C相应地变为2，这时R_A，R_B，R_D也同时缩减（-0.5），新余数是$R_A=-0.5$，$R_B=1.5$，$R_C=0$，$R_D=-0.5$．类似地再变更$\delta u_B=0.4$，从而u_B变为2.9，则得新余数为$R_A=-0.1$，$R_B=-0.1$，$R_C=0.4$，$R_D=-0.1$．现在最大的余数为0.4，故最后只要再变更$\delta u_C=0.1$，从而u_C变为2.1便可消去所有的余数，于是各节点u的近似值为：

$$u_A=2.5,\ \ u_B=2.9,\ \ u_C=2.1,\ \ u_D=2.5$$

现将各次近似值及余数列表如下：

次数	调整值	第n次近似值及余数							
		u_A	R_A	u_B	R_B	u_C	R_C	u_D	R_D
0		2.5	0	2.5	2	2.5	−2	2.5	0
1	$\delta u_C=-0.5$	2.5	−0.5	2.5	1.5	2	0	2.5	−0.5
2	$\delta u_B=\ \ 0.4$	2.5	−0.1	2.9	−0.1	2	0.4	2.5	−0.1
3	$\delta u_C=\ \ 0.1$	2.5	0	2.9	0	2.1	0	2.5	0
结果近似值		2.5		2.9		2.1		2.5	

［解重调和方程的差分方法］ 在矩形$D(x_0\leqslant x\leqslant x_0+a,\ y_0\leqslant y\leqslant y_0+a)$中考虑重调和方程

$$\Delta^2u=\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4u}{\partial y^4}=0$$

取步长$h=\dfrac{a}{n}$，引直线族

$$\begin{cases}x=x_0+ih\\ y=y_0+jh\end{cases}\quad (i,j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n)$$

作成一个正方形网格．用差商代替偏导数

$$u(x,y)=\frac{1}{20}\{8[u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)]$$
$$-2[u(x+h,y+h)+u(x+h,y-h)+u(x-h,y+h)+u(x-h,y-h)]$$
$$-[u(x+2h,y)+u(x-2h,y)+u(x,y+2h)+u(x,y-2h)]\}$$

上式表明了以(x,y)为中心时，$u(x,y)$的函数值与周围各点函数值的关系，但对于邻近边界节点的点(x,y)，如图 14.9中的A，就不能直接使用上式，此时将划分网格的直线族延伸，在延伸线上定出与边界距离为h的点，称这些点为外邻边界节点，如图 14.9 以A为中心时，点E、C为边界节点，点J，K为E，C的外邻边界节点，用下法补充定义外邻边界节点J处函数的近似值u_J，便可应用上面的公式．

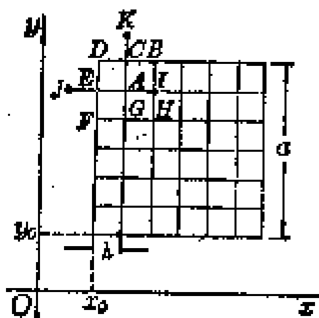


图 14.9

1° 边界条件为

$$u\Big|_S=\mu_1(P),\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_S=\mu_2(P)\quad (P\in S)$$

时，定义 $u_J=u_A-2\mu_2(E)h$．

2° 边界条件为

$$u\Big|_S=\mu_1(P),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_S=\mu_2(P)\quad (P\in S)$$

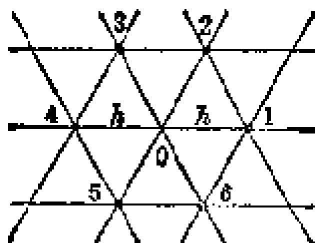
时，定义 $u_J=2\mu_1(E)-u_A+h^2\mu_2(E)$．

［其他与 Δu 有关的网格］

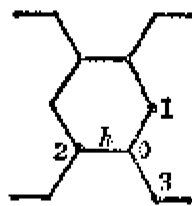
1° 三角网格（图 14.10(a)）

取 $P_0(x,y)$为中心，它的周围 6 个邻近节点分别为：

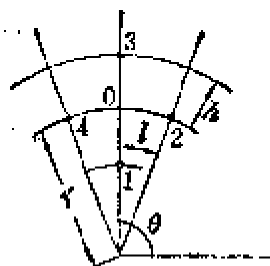
$$P_1(x+h,y),\quad P_2\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)$$



(a)



(b)



(c)

图 14.10

$$P_3\left(x-\frac{h}{2},\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),\quad P_4(x-h,y)$$

$$P_5\left(x-\frac{h}{2},\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),\quad P_6\left(x+\frac{h}{2},\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)$$

则 $\dfrac{2}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{6}u_i-6u_0\right)=\Delta u+\dfrac{1}{16}h^2\Delta^2u+R$,

式中 $u_i=u(P_i)$, $u_0=u(P_0)$, R表示余项.

2° 六角网格(图 14.10(b))

取 $P_0(x,y)$为中心, 它的三个邻近节点分别为

$$P_1\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{\sqrt{3}}{2}h\right),\quad P_2(x-h,y)$$

$$P_3\left(x+\frac{h}{2},\ y-\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)$$

则 $\dfrac{4}{3h^2}\left(\sum_{i=1}^{3}u_i-3u_0\right)=\Delta u+R$.

3° 极坐标系中的网格(图 14.10(c))

取 $P_0(r,\theta)$为中心, 它的四个邻近节点分别为

$$P_1(r-h,\ \theta),\qquad P_2(r,\ \theta-l)$$

$$P_3(r+h,\ \theta),\qquad P_4(r,\ \theta+l)$$

而拉普拉斯方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0$$

的相应的差分方程为

$$\frac{1}{h^2}(u_1+u_3)+\frac{1}{r^2l^2}(u_2+u_4)+\frac{1}{2rh}(u_3-u_1)-2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{r^2l^2}\right)u_0=0$$

3. 抛物型方程的差分方法

考虑热传导方程的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<b,\ t>0\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<b\\ u(0,t)=\mu_1(t),\ u(b,t)=\mu_2(t),\quad t\geqslant0\end{cases}$$

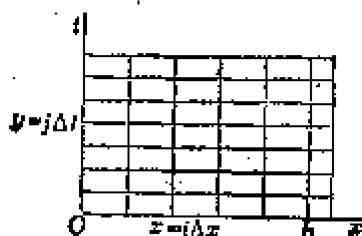


图 14.11

将[0, b]分为 n 等份, 每段长为 $\Delta x=\dfrac{b}{n}$. 引两族平行线(图 14.11)

$$x=x_i=i\Delta x\qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

$$y=y_j=j\Delta t\qquad (j=0,1,2,\cdots,\quad \Delta t\text{ 取值见后})$$

作成一个长方形的网格，记 $u(x_i,t_j)$ 为 u_{ij}，节点 (x_i,t_j) 为 (i,j)，在节点 (i,j) 上分别用

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{\Delta t},\quad \frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$i=1,2,\cdots,n-1,\quad j=1,2,\cdots$$

代替 $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，于是边值问题化为差分方程

$$\begin{cases}\dfrac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{\Delta t}-a^2\dfrac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}=0\\ \qquad i=1,2,\cdots,n-1,\quad j=0,1,2,\cdots\\ u_{i0}=\varphi(i\Delta x),\quad i=1,2,\cdots,n-1\\ u_{0j}=\mu_1(j\Delta t),\quad u_{nj}=\mu_2(j\Delta t),\quad j=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

记 $\lambda=a^2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$，差分方程可写成

$$u_{i,j+1}=\lambda u_{i+1,j}+(1-2\lambda)u_{ij}+\lambda u_{i-1,j}$$

$$i=1,2,\cdots,n-1,\quad j=1,2,\cdots \tag{1}$$

由此可按 t 增加的方向逐排求解。在第 0 排上 u_{i0} 的值由初值 $\varphi(i\Delta x)$ 确定，$j+1$ 排 $u_{i,j+1}$ 的值可由第 j 排的三点 $(i+1,j),(i,j),(i-1,j)$ 上的值 $u_{i+1,j}$，$u_{ij},u_{i-1,j}$ 确定，而 $u_{0,j+1},u_{n,j+1}$ 已由边界条件 $\mu_1((j+1)\Delta t)$ 及 $\mu_2((j+1)\Delta t)$ 给定，于是可逐排计算一切节点上的 u_{ij} 值。当 $\varphi(x)$，$\mu_1(x)$ 和 $\mu_2(x)$ 充分光滑，且 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 时，差分方程收敛而且稳定。所以利用差分方程(1)计算时，必须使 $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$，即 $\Delta t\leqslant\frac{1}{2a^2}(\Delta x)^2$。

热传导方程还可用差分方程

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{\Delta t}-a^2\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{(\Delta x)^2}=0$$

代替，此时如已知前 j 排 u_{ij} 的值，为求第 $j+1$ 排的 $u_{i,j+1}$ 必须解包含 $n-1$ 个未知量 $u_{1,j+1},\cdots,u_{n-1,j+1}$ 的线性代数方程组，这种差分方程称为隐式格式的差分方程，前面所提的差分方程称为显式格式差分方程。

隐式格式差分方程对任意的 λ 都是稳定的。

4. 双曲型方程的差分方法

考虑弦振动方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<b,\ t>0\\ u(x,0)=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), & 0<x<b\\ u(0,t)=\mu_1(t),\ u(b,t)=\mu_2(t), & t\geqslant 0\end{cases}$$

用矩形网格，列出对应的差分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2}-a^2\dfrac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}=0\\ \qquad i=1,2,\cdots,n-1,\quad j=1,2,\cdots\\ u_{i0}=\varphi(i\Delta x),\ \dfrac{u_{i1}-u_{i0}}{\Delta t}=\psi(i\Delta x),\quad i=1,2,\cdots,n-1\\ u_{0j}=\mu_1(j\Delta t),\ u_{nj}=\mu_2(j\Delta t),\quad j=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

记 $\omega=a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ 与上段一样，利用 u_{02},u_{n2} 和在第 0 排及第 1 排的已知数值（初始条件）u_{i0},u_{i1} 可计算 u_{i2}，然后用已知的 u_{i1},u_{i2} 及 u_{03},u_{n3} 可计算 u_{i3}，类似地可确定一切节点上的 u_{ij} 值。

当 $\varphi(x),\psi(x),\ \mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 充分光滑，且 $\omega\leqslant 1$ 时，差分方程收敛且稳定，所以要取 $\Delta t\leqslant\dfrac{1}{a}\Delta x$。

二、变分方法

1. 自共轭边值问题

将§3定义的共轭微分算子的概念推广到一般方程。

设 D 是 E^n 中的有界区域，S 为其边界，在 $\bar{D}$ 上考虑 $2k$ 阶线性微分方程

$$Lu\equiv\sum_{m=0}^{2k}\sum_{i_1+\cdots+i_n=m}a^m_{i_1\cdots i_n}\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}=f(x)$$

的齐次边值问题

$$l_j u|_S=0\qquad (j=1,2,\cdots,r)$$

式中 $f(x)$ 是 D 内的已知函数，$l_j u$ 是线性微分算子。

将 $\int_D vLud\Omega$ 分部积分 k 次得

$$\int_D v\,Lud\Omega=\Lambda(u,v)+\int_S\left(\sum_{j=1}^{k}R_ju\tilde{R}_jv\right)dS$$

式中 $\Lambda(u,v)$ 是一个 D 上的积分，其被积函数包含 u,v 的 k 阶导数；R_j 和 $\tilde{R}_j$ 是定义在边界 S 上的两个线性微分算子。再将 $\Lambda(u,v)$ 分部积分 k 次得

$$\Lambda(u,v)=\int_D uL^*vd\Omega-\int_S\left(\sum_{j=1}^{k}R_j^*v\widetilde{R}_j^*u\right)dS$$

式中 L^* 是一个 $2k$ 阶的微分算子，称为 L 的共轭微分算子．若 $L=L^*$，则称 L 为自共轭微分算子．从上面可推出格林公式

$$\int_D\left(vLu-uL^*v\right)d\Omega=\int_S\sum_{j=1}^{k}(R_ju\widetilde{R}_jv-R_j^*v\widetilde{R}_j^*u)dS$$

如从 $l_ju|_S=l_jv|_S=0$ 可推出在边界 S 上

$$\sum_{j=1}^{k}(R_ju\widetilde{R}_jv-R_j^*v\widetilde{R}_j^*u)=0$$

则称 $l_ju|_S=0$ 为自共轭边界条件．如果微分算子及边界条件都是自共轭的，则称相应的边值问题为自共轭边值问题，此时有

$$\int_D[vLu-uLv]d\Omega=0$$

每个边值问题对应于某希尔伯特空间 H（例如 $L_2(D)$，见第九章 §7）中的一个算子 A，其定义域 M_A 是 H 中一线性稠密集合，它由足够次连续可微且满足边界条件的函数组成，在 M_A 上，Au 的数值与 Lu 的数值相同，从而求解边值问题化为解算子方程

$$Au=f$$

的问题．

设 A 为定义在实的希尔伯特空间 H 中的某线性稠密集合 M_A 上的线性算子．若对于 M_A 的任意非零元素 u,v，成立

$$(Au,v)=(u,Av)$$

则称 A 为对称算子．若对任意非零元素 u 成立

$$(Au,u)>0$$

则称 A 为正算子．如成立更强的不等式

$$(Au,u)\geqslant r\|u\|^2\qquad(r>0)$$

则称 A 为正定算子．此处 (u,v) 表示希尔伯特空间的内积，$\|u\|^2=(u,u)$．

2. 变分原理与广义解

定理　设 A 是正定算子，u 是方程 $Au=f$ 在 M_A 上的解的充分必要条件是：u 使泛函

$$F(u)=(Au,u)-2(f,u)$$

取极小值.

上述将边值问题化为等价的求泛函极值问题的方法称为能量法. 在算子的定义域不够大时,泛函 $F(u)$的极值问题可能无解. 不过对于正定算子, 可以开拓集合 M_A,使在开拓了的集合上,泛函的极值问题有解. 为开拓 M_A, 在M_A上引进新的内积$[u,v]=(Au,v)$, 定义模$\|u\|^2=[u,u]=(Au,u)$, 在模$\|u\|$的意义下,补充极限元素,得到一个新的完备希尔伯特空间 H_0,在 H_0上, 泛函 $F(u)$仍然有意义,而泛函的极值问题有解. 但必须注意, 此时使泛函 $F(u)$取极小的元素u_0不一定属于 M_A, 因此它不一定在原来的意义下满足方程 $Au=f$ 及边界条件. 称 u_0为广义解.

3. 极小化序列与里兹方法

在处理变分问题中,极小化序列起着重要的作用. 考虑泛函

$$F(u)=(Au,u)-2(f,u)$$

以d 表示泛函的极小值. 设在希尔伯特空间中存在一列 元素 $\{u_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$,使

$$\lim_{n\to\infty}F(u_n)=d$$

则称$\{u_n\}$为极小化序列.

定理　若算子A是正定的,则$F(u)$的每一个极小化序列既按H空间的模也按 H_0的模收敛于使泛函 $F(u)$取极小的元素.

这个定理不但指出利用极小化序列可求问题的解, 而且提供一种近似解的求法,即把极小化序列中的每一个元素当作问题的近似解.

设算子A是正定的,构造极小化序列的里兹方法的主要步骤是:

(1) 在线性集合M_A中选取 H_0中完备的元素序列$\{\varphi_i\}$, $(i=1,2,\cdots)$并要求对任意的 n, $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 线性无关. 称这样的元素为坐标元素.

(2) 令 $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\varphi_k$, 其中 a_k 为待定系数. 代入泛函 $F(u)$, 得自变量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$的函数

$$F(u_n)=\sum_{j,k=1}^{n}a_ja_k(A\varphi_j,\ \varphi_k)-2\sum_{j=1}^{n}a_j(f,\varphi_j)$$

(3) 为使函数 $F(u_n)$取极小, 必须$\dfrac{\partial F(u_n)}{\partial a_j}=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$, 从而求出 a_k $(k=1,2,\cdots,n)$. 序列$\{u_n\}$即为极小化序列,u_n可作为问题的近似解.

4. 里兹方法在特征值问题上的应用

算子方程

$$Au-\lambda u=0$$

的非零解 λ 称为算子 A 的特征值，对应的非零解 u 称为 λ 所对应的特征函数.

对线性算子 A，若存在常数 K，使对任何 M_A 的元素 φ 成立

$$(A\varphi,\varphi)\geqslant K\|\varphi\|^2$$

则称 A 为下有界算子，正定算子是下有界的(此时 $K=0$)．记 $(A\varphi,\varphi)/\|\varphi\|^2$ 的下确界为 d.

定理 1　设 A 为下有界对称算子，若存在不为零的元素 $\varphi_0\in M_A$，使

$$\frac{(A\varphi_0,\varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2}=d$$

则 d 就是 A 的最小特征值，φ_0 为对应的特征函数.

于是求下有界对称算子的最小特征值问题化为变分问题．即在希尔伯特空间中求使泛函 $(A\varphi,\varphi)/\|\varphi\|^2$ 取极小的元素，或在 $\|\varphi\|=1$ 的条件下求使泛函 $(A\varphi,\varphi)$ 取极小的元素.

定理 2　设 A 是下有界对称算子，$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 是它的前 n 个特征值，$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 是对应的标准正交特征函数，如果存在不为零的元素 φ_{n+1}，在附加条件

$$(\varphi,\varphi)=1,\ (\varphi,\varphi_1)=0,\ (\varphi,\varphi_2)=0,\ \cdots,\ (\varphi,\varphi_n)=0$$

下使泛函 $(A\varphi,\varphi)$ 取极小，则 φ_{n+1} 是算子 A 的特征函数，对应的特征值

$$\lambda=(A\varphi_{n+1},\varphi_{n+1})$$

就是除 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 外的最小的一个特征值.

于是求第 $n+1$ 个特征值就化为变分问题，即在附加条件

$$(\varphi,\varphi)=1,\ (\varphi,\varphi_1)=0,\ (\varphi,\varphi_2)=0,\ \cdots,\ (\varphi,\varphi_n)=0$$

下求使泛函 $(A\varphi,\varphi)$ 取极小的元素.

为了利用里兹方法求特征值，在 M_A 中选取一列在 H_0 中完备的坐标元素序列 $\{\varphi_i\}$，$(i=1,2,\cdots)$，令 $u_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k$，确定 α_k，使在条件 $(u_n,u_n)=1$ 下，(Au_n,u_n) 取极小，这个问题化为求 n 个变元 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的函数

$$(Au_n,u_n)=\sum_{k,m=1}^{n}(A\varphi_m,\varphi_k)\alpha_k\alpha_m$$

在条件

$$(u_n,u_n)=\sum_{k,m=1}^{n}a_k a_m(\varphi_k,\varphi_m)=1$$

下的极值问题，一般可用拉格朗日乘数法解（见第五章§3，十），此时

$$\begin{vmatrix}(A\varphi_1,\varphi_1)-\lambda(\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_1)-\lambda(\varphi_n,\varphi_1)\\(A\varphi_1,\varphi_2)-\lambda(\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_2)-\lambda(\varphi_n,\varphi_2)\\\cdots & \cdots & \cdots\\(A\varphi_1,\varphi_n)-\lambda(\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_n)-\lambda(\varphi_n,\varphi_n)\end{vmatrix}=0$$

的最小的根即为特征值的近似值，如果将上式的根按大小排列，就依次得后面的特征值的近似值，但精确度较差。

对一般算子方程

$$Au-\lambda Bu=0$$

如果A为下有界对称算子，B为正定算子，则

$$\begin{vmatrix}(A\varphi_1,\varphi_1)-\lambda(B\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_1)-\lambda(B\varphi_n,\varphi_1)\\(A\varphi_1,\varphi_2)-\lambda(B\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_2)-\lambda(B\varphi_n,\varphi_2)\\\cdots & \cdots & \cdots\\(A\varphi_1,\varphi_n)-\lambda(B\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_n)-\lambda(B\varphi_n,\varphi_n)\end{vmatrix}=0$$

的根就是特征值的近似值。

5. 迦辽金方法

用里兹方法解数学物理问题有很多限制，最主要的限制是要求算子正定，但很多问题不一定满足这个条件，迦辽金方法弥补了这个缺陷。

迦辽金方法的主要步骤是：

(1) 在M_A中选取在空间H中完备的元素序列$\{\varphi_i\}$ $(i=1,2,\cdots)$，其中任意n个元素线性无关，称$\{\varphi_i\}$ $(i=1,2,\cdots)$为坐标元素序列。

(2) 把方程的近似解表示为

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k$$

式中a_k是待定常数，把u_n代入方程$Au=f$中的u，两端与φ_j $(j=1,2,\cdots,n)$求内积，得a_k的n个代数方程

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(A\varphi_k,\varphi_j)=(f,\varphi_j)\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

(3) 求出a_k，代回u_n的表达式，便得方程的近似解u_n。

在自共轭边值问题中，当算子是正定时，由迦辽金方法和里兹方法得到的关于a_k的代数方程组是相同的。

第十五章　积 分 方 程

积分方程论是泛函分析的一个重要分支，它是研究数学其他学科(例如偏微分方程边值问题）和各种物理问题的一个重要数学工具．本章叙述线性积分方程，重点介绍弗雷德霍姆积分方程的性质和解法；并简略地介绍了沃尔泰拉积分方程以及一些奇异积分方程；此外，还扼要地叙述积分方程的逐次逼近法和预解核，并举例说明近似解法；最后考察了一个非线性积分方程．

§1　积分方程一般概念与弗雷德霍姆方程

一、积分方程一般概念

1．积分方程的定义与分类

[线性积分方程]　在积分号下包含未知函数 $y(x)$的方程

$$a(x)y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{1}$$

称为积分方程．式中 $a(x)$, $F(x)$和 $K(x,\xi)$是已知函数，λ, a, b 是常数，变量 x 和 ξ 可取区间(a,b)内的一切值；$K(x,\xi)$称为积分方程的核，$F(x)$称为自由项，λ 称为方程的参数．如果 $K(x,\xi)$关于 x,ξ 是对称函数，就称方程(1)是具有对称核的积分方程；如果方程中的未知函数是一次的，就称为线性积分方程，方程(1)就是线性积分方程的一般形式；如果 $F(x)\equiv 0$，就称方程(1)为齐次积分方程，否则称为非齐次积分方程．

[一维弗雷德霍姆积分方程(Fr 方程)]

第一类 Fr 方程

$$\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi=F(x)$$

第二类 Fr 方程

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

第三类 Fr 方程

$$\alpha(x)y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

[n 维弗雷德霍姆积分方程] 方程

$$\alpha(P)y(P)=F(P)+\int_D K(P,P_1)y(P_1)dP_1$$

称为 n 维弗雷德霍姆积分方程，式中 D 是 n 维空间中的区域，$P,P_1\in D$，它们的坐标分别是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，$\alpha(P)=\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$F(P)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $K(P,P_1)=K(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 是已知函数，$f(P)$ 是未知函数。

关于 Fr 方程的解法，一维和 $n(>1)$ 维的情况完全类似，因此在以后的讨论中仅着重考虑一维 Fr 方程。

[沃尔泰拉积分方程] 如果积分上限 b 改成变动上限，上面三类 Fr 方程分别称为第一、第二、第三类沃尔泰拉积分方程。

由于第三类 Fr 方程当 $\alpha(x)$ 在 (a,b) 内是正函数时，可以化成

$$\sqrt{\alpha(x)}\,y(x)=\frac{F(x)}{\sqrt{\alpha(x)}}+\lambda\int_a^b\frac{K(x,\xi)}{\sqrt{\alpha(x)\alpha(\xi)}}\sqrt{\alpha(\xi)}\,y(\xi)d\xi$$

它是含有未知函数 $\sqrt{\alpha(x)}\,y(x)$，以 $\frac{K(x,\xi)}{\sqrt{\alpha(x)\alpha(\xi)}}$ 为积分方程的核的第二类 Fr 方程。所以本章重点研究一维第二类 Fr 方程。

2. 积分方程与微分方程之间的关系

某些积分方程可化为微分方程，也可从微分方程推导出积分方程。先来考虑二阶线性微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+A(x)\dfrac{dy}{dx}+B(x)y=f(x)\\ y(a)=y_0,\quad y'(a)=y_0'\end{cases}\tag{2}$$

若从方程(2)中解出 $\frac{d^2y}{dx^2}$，然后在区间 (a,x) 上对 x 求积分两次，利用初始条件，经过简单的计算不难得出*，

---

* 在计算过程中应用了公式

$$\underbrace{\int_a^x\cdots\int_a^x}_{n} f(x)\underbrace{dx\cdots dx}_{n}=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-\xi)^{n-1}f(\xi)d\xi\qquad(n\geqslant2)$$

当 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ 时成立。

$$y(x)=-\int_a^x\{A(\xi)+(x-\xi)[B(\xi)-A'(\xi)]\}y(\xi)d\xi$$
$$+\int_a^x(x-\xi)f(\xi)d\xi+[A(a)y_0+y_0'](x-a)+y_0$$

令

$$K(x,\xi)=(\xi-x)[B(\xi)-A'(\xi)]-A(\xi)$$

和

$$F(x)=\int_a^x(x-\xi)f(\xi)d\xi+[A(a)y_0+y_0'](x-a)+y_0$$

上式就可写为如下的形式:

$$y(x)=\int_a^x K(x,\xi)y(\xi)d\xi+F(x)\tag{3}$$

这是一个第二类沃尔泰拉方程,核K是x的线性函数.

例 1 初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=f(x)\\ y(0)=1,\ \ y'(0)=0\end{cases}\tag{4}$$

变为积分方程

$$y(x)=\lambda\int_0^x(\xi-x)y(\xi)d\xi+1-\int_0^x(\xi-x)f(\xi)d\xi\tag{5}$$

反之,应用积分号下求导法则,微分两次就可把积分方程(3)化为微分方程(2).在(3)及其第一次求导的结果中令$x=a$,就得给定初始条件.在例 1 中,对(5)式求导,得出

$$\frac{dy}{dx}=-\lambda\int_0^x y(\xi)d\xi+\int_0^x f(\xi)d\xi\tag{6}$$

再求导一次得出原微分方程(4),并从方程(6)和(5)给出初始条件

$$y(0)=1,\ \ y'(0)=0$$

对于边值问题,方法类似,先考虑一个简单的例子.

例 2 从问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0\\ y(0)=0,\ \ y(a)=0\end{cases}$$

出发,积分两次,导出关系式

$$y(x)=-\lambda\int_0^x(x-\xi)y(\xi)d\xi+Cx$$

从此立刻可知条件$y(0)=0$成立.从第二端点条件$y(a)=0$决定C:

$$\lambda\int_0^a (a-\xi)y(\xi)d\xi = Ca$$

所以有关系式

$$y(x)=\lambda\int_0^x \frac{\xi}{a}(a-x)y(\xi)d\xi+\lambda\int_x^a \frac{x}{a}(a-\xi)y(\xi)d\xi \tag{7}$$

令

$$K(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\xi}{a}(a-x), & \xi<x\\[2mm] \dfrac{x}{a}(a-\xi), & \xi>x\end{cases}$$

则方程(7)变为

$$y(x)=\lambda\int_0^a K(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{8}$$

这是第二类 Fr 方程. 要从这个积分方程回到微分方程, 只需对方程(8)求导两次, 就得到

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\lambda}{a}[-xy(x)-(a-x)y(x)]=-\lambda y(x)$$

在积分方程(7)中, 令 $x=0$ 和 $x=a$, 可以直接推出边值条件: $y(0)=y(a)=0$.

注意: 在这个例中,

1° $\dfrac{\partial K}{\partial x}$ 在 $x=\xi$ 处不连续, 并当 x 增加而过 ξ 时有一跳跃 -1.

2° K 是 x 的一个线性函数, 即满足 $\dfrac{\partial^2 K}{\partial x^2}=0$, 且 K 在端点 $x=0$, $x=a$ 处等于零.

3° $K(x,\xi)=K(\xi,x)$, 即核是对称的.

如果利用类似的方法, 对更一般的具有齐次端点条件的二阶齐次方程的边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+A\dfrac{dy}{dx}+By=0\\ y(0)=0,\ \ y(a)=0\end{cases}$$

则除 $A=0$ 外, 可得在 $x=\xi$ 不连续的一个核.

二、格林函数及其物理意义

[格林函数]　在区间 $[a,b]$ 上, 考虑微分方程

$$Ly+\Phi(x)=0 \tag{1}$$

的边值问题, 式中 L 是微分算子:

$$L\equiv\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right)+q=p\frac{d^2}{dx^2}+\frac{dp}{dx}\frac{d}{dx}+q$$

齐次边界条件为在端点 $x=a, x=b$ 处，满足 $\alpha y+\beta\frac{dy}{dx}=0$，其中 α,β 为常数.

为了得出这个问题解的形式，首先构造函数 G，使对一给定数 ξ，

$$G=\begin{cases}G_1(x), & x<\xi\\ G_2(x), & x>\xi\end{cases}$$

并且满足条件：

(i) 函数 G_1 和 G_2 在它们的定义区间上满足 $LG=0$，即当 $x<\xi$ 时，$LG_1=0$；当 $x>\xi$ 时，$LG_2=0$.

(ii) 函数 G 满足边界条件，即 G_1 满足在 $x=a$ 的边界条件，G_2 满足在 $x=b$ 的边界条件.

(iii) 函数 G 在 $x=\xi$ 连续，即 $G_1(\xi)=G_2(\xi)$.

(iv) G 的导数以 $x=\xi$ 为一不连续点，其跳跃是 $-\frac{1}{p(\xi)}$，即

$$G_2'(\xi)-G_1'(\xi)=-\frac{1}{p(\xi)}$$

可以证明，若以 ξ 为参数的这个函数 G 存在，则原问题的解有如下的形式：

$$y=\int_a^b\Phi(\xi)G(x,\xi)d\xi \tag{2}$$

例如 $G(x,\xi)$ 可取

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\frac{1}{A}u(x)v(\xi), & x<\xi\\ -\frac{1}{A}u(\xi)v(x), & x>\xi\end{cases} \tag{3}$$

式中 A 是由关系式

$$u(\xi)v'(\xi)-v(\xi)u'(\xi)=\frac{A}{p(\xi)}$$

决定的一个常数，$u(x)$ 是 $Ly=0$ 满足在 $x=a$ 处所给定的齐次边值条件的一个解，$v(x)$ 是在 $x=b$ 处满足边值条件的一个解. 则 $G(x,\xi)$ 显然满足条件(i)～(iv).

此外，还可证明，对由(3)定义的 $G(x,\xi)$，由关系式(2)确定的函数 y 满足微分方程 (1) 并且满足 $u(x)$ 在 $x=a$ 与 $v(x)$ 在 $x=b$ 所规定的相同的齐次边界条件.

满足条件(i)～(iv)或由 (3) 式所定义的函数称为与微分表达式 Ly 和边界

条件相联系的格林函数. 在许多物理问题中，这个函数具有简单的物理意义，将在下一段中说明.

［线性积分方程的一个典型实例］ 考虑一条长为 l 的有弹性的弦，假定在平衡位置时，弦的位置在 Ox 轴的线段 Ol 上. 在点 x 施加单位力，于是弦的每一点得到一个离差，在点 ξ 处所产生的离差以 $G(x,\xi)$ 表示（图 15.1）. 函数 $G(x,\xi)$ 为两点（x 和 ξ）函数，在点 x 施加外力，在点 ξ 计量离差，称 G 为影响函数.

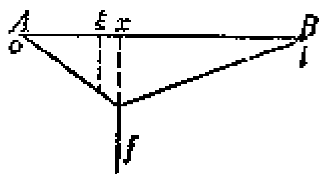


图 15.1

如果弦的两端固定在 x 轴上 A, B 两点，弦的张力为 T_0，则在点 x 处施加的单位力的作用下，弦成图 15.1 所示的形状. 根据虎克(Hooke)定律与力的平衡条件，在点 ξ 处有

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x(l-\xi)}{T_0 l}, & x<\xi\\[2mm] \dfrac{\xi(l-x)}{T_0 l}, & x>\xi\end{cases}$$

这就是弦的影响函数.

从能量守恒定律可导出 $G(x,\xi)$ 的互易原理：在点 x 处施加外力在点 ξ 处产生的离差等于在点 ξ 处施加大小相同的力在点 x 处产生的离差，即

$$G(x,\xi)=G(\xi,x)$$

如果在弦上施加的力 F 是连续分布的，并设线性强度是 $p(\xi)$，则作用于弦上点 ξ 和 $\xi+\Delta\xi$ 之间的一小弦段的力就接近于 $p(\xi)\Delta\xi$. 把引起弦变形的这些力元素相加，便得弦的形状

$$y(x)=\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi$$

1° 设在某个力的作用下，弦成已知形状 $y=y(x)$，求定力分布强度 $p(\xi)$，就得到含未知函数 $p(\xi)$ 的第一类 Fr 积分方程

$$y=\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi \tag{1}$$

2° 设作用力随时间 t 改变，且在点 ξ 的强度是

$$p(\xi)\sin\omega t \qquad (\omega>0)$$

则弦的运动是由方程

$$y=y(x)\sin\omega t$$

描写的周期运动.

设 $\rho(\xi)$ 为弦在点 ξ 的线性密度，则在时刻 t，点 ξ 与 $\xi+\Delta\xi$ 之间的小弦段

除受力 $p(\xi)\sin\omega t\Delta\xi$ 的作用外，还受惯性力

$$-\rho(\xi)\Delta\xi\frac{d^2y}{dt^2}=\rho(\xi)y(\xi)\omega^2\sin\omega t\Delta\xi$$

的作用，则等式(1)可化为如下的形式：

$$y(x)=\lambda\int_0^l K(x,\xi)y(\xi)d\xi+F(x) \tag{2}$$

式中

$$F(x)=\int_0^l G(x,\xi)\,p(\xi)d\xi$$

$$K(x,\xi)=G(x,\xi)\,\rho(\xi),\qquad \lambda=\omega^2$$

如果函数 $p(\xi)$ 给定，那末 $F(x)$ 也就给定，这样积分方程(2)就是确定函数 $y(x)$ 的 Fr 方程．注意，由于 $F(x)$ 的定义，有

$$F(0)=F(l)=0$$

若密度 $\rho(\xi)=\rho$ 是常数，而 $F(x)$ 有二阶的连续导数，则方程(2)的解为

$$y(x)=\omega^2\rho\int_0^x\frac{\xi(l-x)}{T_0l}y(\xi)d\xi+\omega^2\rho\int_x^l\frac{x(l-\xi)}{T_0l}y(\xi)d\xi+F(x)$$

即

$$y(x)=\frac{\omega^2c}{l}(l-x)\int_0^x\xi y(\xi)d\xi+\frac{\omega^2cx}{l}\int_x^l(l-\xi)y(\xi)d\xi+F(x) \tag{3}$$

式中

$$c=\frac{\rho}{T_0}$$

把(3)式微分两次就得到

$$y''(x)=\omega^2cy(x)+F''(x)$$

另一方面，可以证明这个微分方程的任一在 $x=0$ 及 $x=l$ 处等于 0 的解是积分方程(2)的解．

二、具有可分离核(退化核)的 Fr 方程

［可分离核(退化核)］ 若核 $K(x,\xi)$ 可分解为如下的形式：

$$K(x,\xi)=\sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(\xi)$$

则称 $K(x,\xi)$ 为可分离核或称为退化核．不妨假定 n 个函数 $f_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 在有关区间上是线性无关的．

例如，如果核是关于 x 和 ξ 的任一多项式，那末这个核就是退化核，核

$\sin(x+\xi)$ 也是退化核.

[具有可分离核的第二类Fr方程解法] 具有可分离核的第二类Fr方程

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi+F(x) \tag{1}$$

即

$$y(x)=\lambda\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\left[\int_a^b g_k(\xi)y(\xi)d\xi\right]+F(x) \tag{2}$$

的解法如下,首先设

$$c_k=\int_a^b g_k(x)y(x)dx \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

则

$$y(x)=F(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k f_k(x)$$

于是给定积分方程(1)的一切解应取这个形式. 因此问题归结为求出常数 c_1, $c_2,\cdots,c_n$.

再用 g_i 乘(2)式两边且积分,令

$$a_{ij}=\int_a^b g_i(x)f_j(x)dx,\quad b_i=\int_a^b g_i(x)F(x)dx$$
$$(i=1,2,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,n)$$

则 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 满足方程组

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=b_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

即

$$\begin{cases}(1-\lambda a_{11})c_1-\lambda a_{12}c_2-\cdots-\lambda a_{1n}c_n=b_1\\ -\lambda a_{21}c_1+(1-\lambda a_{22})c_2-\cdots-\lambda a_{2n}c_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -\lambda a_{n1}c_1-\lambda a_{n2}c_2-\cdots+(1-\lambda a_{nn})c_n=b_n\end{cases} \tag{3}$$

矩阵形式为

$$(I-\lambda A)c=b$$

式中 I 为 n 阶单位矩阵, $A=(a_{ij})$, $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$. 这个方程组存在唯一解的充分必要条件是:方程的系数行列式

$$\Delta=\det(I-\lambda A)\neq 0$$

如果 $F(x)\equiv 0$, 则 $b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$, 那末方程(3)为齐次方程组. 因此, 当 $\Delta\neq 0$ 时, $y(x)\equiv 0$ 是积分方程(1)的平凡解(零解), 且是唯一解. 当 $\Delta=0$ 时,

至少有一个 c_i 可以任意指定，其余的 c_j 可以求出，于是积分方程(1)存在无穷多个解。

使 $\Delta=0$ 的 λ 值称为特征值。齐次积分方程的任一非平凡解称为对应于积分方程的特征函数。

如果对于 λ 的一个给定的特征值，可以从常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 中任意指定 r 个，那末可得到 r 个线性无关的对应特征函数。

如果 $F(x)\neq 0$，但与 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ 正交，即 $b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，那末方程组(3)仍为齐次的，以上的讨论也适用，除非这里积分方程的解也包含函数 $F(x)$。这样平凡值 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ 导出解 $y=F(x)$。对应于 λ 的特征值的解是 F 与特征函数的任意倍数之和。

最后，如果(3)式右边的 b_i 至少有一个不为零，当行列式 $\Delta\neq 0$ 时，方程组(3)存在唯一的非平凡解，于是可得到积分方程(1)的唯一的非平凡解；当 $\Delta=0$ 时，则方程(3)或者是不相容的，这时积分方程(1)没有解；或者 n 个方程中至少有两个是相同的，这时积分方程(1)有无穷多个解。

例 解积分方程

$$y(x)=\lambda\int_0^1(1-3x\xi)y(\xi)d\xi+F(x) \tag{1}$$

解 可把这个方程改写为

$$y(x)=\lambda(c_1-3c_2x)+F(x) \tag{2}$$

式中

$$c_1=\int_0^1 y(\xi)d\xi, \qquad c_2=\int_0^1 \xi y(\xi)d\xi$$

决定 c_1, c_2 的方程组是

$$\begin{cases}(1-\lambda)c_1+\dfrac{3}{2}\lambda c_2=\displaystyle\int_0^1 F(x)dx\\ -\dfrac{1}{2}\lambda c_1+(1+\lambda)c_2=\displaystyle\int_0^1 xF(x)dx\end{cases} \tag{3}$$

其系数行列式为

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-\lambda & \dfrac{3}{2}\lambda\\ -\dfrac{1}{2}\lambda & 1+\lambda\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(4-\lambda^2)$$

则积分方程(1)存在唯一解的条件是 $\lambda\neq\pm 2$。由(3)解出 c_1, c_2，并代入(2)得到(1)的解。特别，若 $F(x)=0$，$\lambda\neq\pm 2$，则唯一解是平凡解 $y(x)=0$。数 $\lambda=\pm 2$

为问题的特征值。

若 $\lambda=2$，则方程组(3)为

$$\begin{cases}-c_1+3c_2=\int_0^1 F(x)dx\\ -c_1+3c_2=\int_0^1 xF(x)dx\end{cases}$$

这两个方程是不相容的，除非函数 $F(x)$ 满足条件

$$\int_0^1 (1-x)F(x)dx=0$$

这时两个方程相同.

若 $\lambda=-2$，则方程组(3)为

$$\begin{cases}c_1-c_2=\frac{1}{3}\int_0^1 F(x)dx\\ c_1-c_2=\int_0^1 xF(x)dx\end{cases}$$

这两个方程也是不相容的，除非函数 $F(x)$ 满足条件

$$\int_0^1 (1-3x)F(x)dx=0$$

这时两个方程也是相同的.

现在具体讨论积分方程(1)的解.

1° 先考虑齐次方程(即 $F(x)=0$)的情形. 若 $\lambda\neq\pm 2$，则唯一解是平凡解 $y(x)=0$.

当 $\lambda=2$ 时，代数方程组只给出一个条件 $c_1=3c_2$. 这时，解是

$$y(x)=c_1(1-x)$$

式中 $c_1=3\lambda c_2=6c_2$ 是任意常数，$1-x$ 是对应于特征值 $\lambda=2$ 的特征函数.

当 $\lambda=-2$ 时，解是

$$y(x)=c_2(1-3x)$$

式中 $c_2=\lambda c_1=-2c_1$ 是任意常数，$1-3x$ 是对应于 $\lambda=-2$ 的特征函数.

方程(2)表明原积分方程(1)的任一解表示为如下的形式:

$$y(x)=F(x)+c_3(1-x)+c_4(1-3x)$$

式中 $c_3=\frac{3}{2}\lambda(c_1-c_2)$，　$c_4=\frac{\lambda}{2}(3c_2-c_1)$. 于是推出原积分方程(1)的任一解可以用特征函数的某一线性组合与 $F(x)$ 的和来表达.

2° 在非齐次的情形(即 $F(x)\not\equiv 0$)下，若 $\lambda\neq\pm 2$，则积分方程(1)存在唯

一解．

当 $\lambda=2$ 时，积分方程(1)没有解，除非在区间[0, 1]上 $F(x)$ 正交于 $\lambda=2$ 所对应的特征函数 $1-x$*，即

$$\int_0^1 (1-x)F(x)dx=0$$

在此条件下，再利用 $c_1-3c_2=-\int_0^1 F(x)dx$，给出积分方程(1)的解

$$y(x)=F(x)-2\int_0^1 F(x)dx+c_1(1-x)$$

式中 $c_1=6c_2$ 是任意常数，因此，这时存在无穷多个解．

类似地，当 $\lambda=-2$ 时，积分方程(1)没有解，除非在区间[0, 1]上 $F(x)$ 正交于 $1-3x$，即

$$\int_0^1 (1-3x)F(x)dx=0$$

这时存在如下的无穷多个解：

$$y(x)=F(x)-\frac{2}{3}\int_0^1 F(x)dx+c_2(1-3x)$$

式中 $c_2=-2c_1$ 是任意常数．

四、希尔伯特-施密特的理论

当齐次 Fr 方程的核 $K(x,\xi)$ 不可分离，特别，$K(x,\xi)$ 对于 $x>\xi$ 和 $x<\xi$，分别由不同的分析表达式给定时，其特征值一般有无穷多个 $\lambda_n(n=1,2,\cdots)$，每个特征值对应的特征函数除一个乘数外是确定的；在例外的情形，一个给定的特征值 λ_k 可以对应于两个或更多个独立的特征函数．本段将介绍这种特征函数的某些性质．

[具有对称核的 Fr 方程的性质]　如果在实核中交换它的变量时，它本身的值不变，这个核就叫做对称核．

1°　具有对称核的齐次 Fr 方程的特征函数系是正交的．

2°　具有实对称核的 Fr 方程的特征值都是实数．

注意，核不对称的 Fr 方程可以具有虚的特征值．

[希尔伯特-施密特定理]　设 Φ 为一平方可积函数，则形如

---

*　在下一段中会看到，这个情形是原积分方程中核 $K(x,\xi)=1-3x\xi$ 的对称性的一个推论．

$$f(x)=\int_a^b K(x,\xi)\Phi(\xi)d\xi$$

的函数 $f(x)$，可由对称核齐次 Fr 方程

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

在$[a,b]$上的特征函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots$的线性组合表达，如果特征函数有无穷多个，那末所得的无穷级数在区间$[a,b]$上绝对且一致收敛。

［施密特公式］ 考虑非齐次第二类 Fr 方程

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

式中$K(x,\xi)$是在定义区间上平方可积的对称核，并假定在正方形 $k_0(a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant\xi\leqslant b)$上是两变量 x,ξ 的连续函数，$F(x)$是已知的一致连续函数，$y(x)$是未知函数，而 λ 是参数，则有施密特公式

$$y(x)=F(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{\lambda_n-\lambda}y_n(x)\quad(\lambda\neq\lambda_n,\text{即}\lambda\text{不是特征值})\tag{1}$$

右边的级数是绝对且一致收敛的，式中 F_n由下式决定：

$$F_n\int_a^b[y_n(x)]^2dx=\int_a^b F(x)y_n(x)dx\qquad(n=1,2,\cdots)\tag{2}$$

［核的展开定理］ 一个对称核 $K(x,\xi)$可展开为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{\lambda_n}$$

这个级数对任意固定的 ξ，有

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\left[K(x,\xi)-\sum_{n=1}^{m}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{\lambda_n}\right]^2dx=0$$

［具有非对称核的积分方程］ 设核 $K(x,\xi)$ 不是对称的，但可表为如下形式

$$K(x,\xi)=r(\xi)G(x,\xi)$$

式中 $r(\xi)$在(a,b)内连续且不变号，而 $G(x,\xi)$是对称的．这时有以下性质：

1° 对应于不同特征值 λ_m 和 λ_n 的两个特征函数 $y_m(x)$和 $y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于权函数 $r(x)$是正交的，即

$$\int_a^b r(x)y_m(x)y_n(x)dx=0$$

2° $K(x,\xi)$的特征值都是实数．

3° 若非齐次第二类 Fr 方程有一个解，则这个解由(1)给出，并以权函数 $r(x)$ 去乘(2)式两边所包含的被积函数.

[具有埃尔米特核的积分方程] 设 $K(x,\xi)$ 为一复核，如果

$$K(\xi,x)=\overline{K(x,\xi)}$$

则称 $K(x,\xi)$ 为埃尔米特核，式中 $\overline{K(x,\xi)}$ 表示 $K(x,\xi)$ 的共轭复函数. 具有埃尔米特核的积分方程有以下性质:

1° 对应于不同特征值 λ_m 和 λ_n 的两个特征函数 $y_m(x)$ 和 $y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是按埃尔米特意义正交的:

$$\int_a^b \overline{y_m(x)}\,y_n(x)dx=0$$

2° 在 $[a,b]$ 上与埃尔米特核相联系的特征值都是实数.

3° 设特征函数按埃尔米特意义是标准化的:

$$\int_a^b \overline{y_m(x)}\,y_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$$

如果非齐次第二类 Fr 方程有一个解，那末这个解由(1)给出，并且(2)式改为

$$F_n=F_n\int_a^b \overline{y_n(x)}y_n(x)dx=\int_a^b \overline{y_n(x)}F(x)dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$

[具有反对称核的积分方程] 设核 $K(x,\xi)$ 满足条件

$$K(\xi,x)=-K(x,\xi)$$

则称 $K(x,\xi)$ 为反对称核，这时 $iK(x,\xi)$ 是埃尔米特核. 因此，具有反对称核的积分方程

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

如果以 λi 代替 λ，则得到具有埃尔米特核的积分方程

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b iK(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

由此可见，具有反对称核的积分方程必有特征值，而且都是纯虚数.

[伴随核与自伴随核] 设 $u(x)$ 是一复核 $K(x,\xi)$（它不一定是埃尔米特核）对应于特征值 λ 的一个特征函数，$v(x)$ 是核 $\overline{K(\xi,x)}$ 对应于特征值 μ 的一个特征函数。若 $\lambda\neq\overline{\mu}$，则

$$\int_a^b u(x)\overline{v(x)}dx=0$$

这里 $\overline{K(\xi,x)}$ 称为 $K(x,\xi)$ 的伴随核. 如果 $\overline{K(\xi,x)}=K(x,\xi)$，那末 $K(x,\xi)$ 称为自伴随核，显然实对称核与埃尔米特核都是自伴随核.

五、第二类 Fr 方程的逐次逼近法与诺伊曼级数解

[逐次逼近法] 在某种情形下，第二类 Fr 方程可用逐次逼近法来解. 为此，设方程

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{1}$$

的解可用 λ 的幂级数来表达：

$$y(x)=y_0(x)+y_1(x)\lambda+y_2(x)\lambda^2+\cdots \tag{2}$$

如果级数(2)在区间[a, b]上关于 x 是一致收敛的，那末把它代入(1)中，可逐项积分，比较 λ 的系数就得到确定 $y_n(x)$ 的递推公式

$$y_0(x)=F(x),\quad y_n(x)=\int_a^b K(x,\xi)y_{n-1}(\xi)d\xi \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{3}$$

式中 $y_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$都是连续函数. 若$|\lambda|$充分小，则级数(2)关于 x 绝对且一致收敛，于是级数(2)是连续函数并且是积分方程(1)的解.

[叠核・预解核・诺伊曼级数解] 设 $K(x,\xi)$为核，经递推公式

$$K_1(x,\xi)=K(x,\xi),\quad K_n(x,\xi)=\int_a^b K_{n-1}(x,\xi_1)K(\xi_1,\xi)d\xi_1$$

$$(n=2,3,4,\cdots) \tag{4}$$

产生的 $K_n(x,\xi)$称为已知核 $K(x,\xi)$的 n 次叠核. 它满足下面公式

$$K_{p+q}(x,\xi)=\int_a^b K_p(x,\xi_1)K_q(\xi_1,\xi)d\xi_1$$

式中 p, q 为任意正整数.

由于 $F(x)$和 $K(x,\xi)$ 分别在[a, b]上和 k_0 $(a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant\xi\leqslant b)$上连续，所以各有极大值 m 和 M：

$$|F(x)|\leqslant m,\quad |K(x,\xi)|\leqslant M$$

当 $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}K_{n+1}(x,\xi)\lambda^n$ 在 k_0 内绝对且一致收敛，记作

$$R(x,\xi;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}K_{n+1}(x,\xi)\lambda^n \tag{5}$$

如果用自由项 $F(x)$来表达 $y_n(x)$，则由(3)，(4)推出

$$y_n(x)=\int_a^b K_n(x,\xi)F(\xi)d\xi$$

并把它代入级数(2)得到

$$y(x)=F(x)+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b K_{n+1}(x,\xi)\lambda^n F(\xi)d\xi \tag{6}$$

因为级数(5)在 k_0 内一致收敛，所以对$[a,b]$上任一固定值 x，它在区间内关于 ξ 一致收敛，故得积分方程(1)的解

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b R(x,\xi;\lambda)F(\xi)d\xi,\quad |\lambda|<\frac{1}{M(b-a)} \tag{7}$$

式中不依赖于自由项 $F(x)$ 的函数 $R(x,\xi;\lambda)$ 称为核的（或 Fr 方程的）预解核，级数(5)称为诺伊曼级数.

[存在性与唯一性定理]　如果把级数(5)改写为

$$\begin{aligned}R(x,\xi;\lambda)&=K(x,\xi)+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+2}(x,\xi)\\&=K(x,\xi)+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K(x,\xi_1)K_{n+1}(\xi_1,\xi)d\xi_1\end{aligned}$$

由(5)上式化为

$$R(x,\xi;\lambda)=K(x,\xi)+\lambda\int_a^b K(x,\xi_1)R(\xi_1,\xi;\lambda)d\xi_1$$

改变符号可写为

$$R(x,y;\lambda)=K(x,y)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)R(\xi,y;\lambda)d\xi$$

因此，当把方程(1)中 $F(x)$ 换为 $K(x,y)$ 时，上式表明存在预解核 R（看作两个变量 x,y 与参数 λ 的函数）是方程(1)的唯一解.

例　举例说明预解核的实际算法. 设积分方程(1)中

$$K(x,\xi)=1-3x\xi$$

由公式(4)算出它的各次叠核：

$$K_2(x,\xi)=\int_0^1(1-3x\xi_1)(1-3\xi_1\xi)d\xi_1=1-\frac{3}{2}(x+\xi)+3x\xi$$

$$K_3(x,\xi)=\int_0^1 K(x,\xi_1)K_2(\xi_1,\xi)d\xi_1=\frac{1}{4}(1-3x\xi)$$

所以 $K_3=\frac{K_1}{4}$，从此容易推出 $K_n=\frac{K_{n-2}}{4}\,(n\geqslant 3)$，于是有

$$\begin{aligned}R&=K_1+\lambda K_2+\lambda^2K_3+\cdots\\&=\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{16}+\cdots\right)K_1+\lambda\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{16}+\cdots\right)K_2\end{aligned}$$

即

$$R(x,\xi;\lambda)=\frac{1}{1-\frac{\lambda^2}{4}}\left[(1+\lambda)-\frac{3}{2}\lambda(x+\xi)-3(1-\lambda)x\xi\right]\quad(|\lambda|<2)$$

值得注意的是，由此式可以给出一切 λ 值($\lambda=\pm 2$ 除外)的预解核，但相应的诺伊曼级数只当$|\lambda|<2$ 时才收敛.

六、弗雷德霍姆的理论

[Fr 分母] 预解核 $R(x,\xi;\lambda)$ 可以用关于 λ 的两个幂级数之比来表达，这两个级数对一切 λ 值都是收敛的.

若预解核表成

$$R(x,\xi;\lambda)=\frac{D(x,\xi;\lambda)}{\Delta(\lambda)}\tag{1}$$

式中

$$D(x,\xi;\lambda)=K(x,\xi)-\frac{\lambda}{1!}D_1(x,\xi)+\frac{\lambda^2}{2!}D_2(x,\xi)-\cdots\tag{2}$$

$$\Delta(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}c_1+\frac{\lambda^2}{2!}c_2-\cdots\tag{3}$$

$\Delta(\lambda)$称为 Fr 分母，它与变量 x，ξ 无关. 式中系数 c_n 与函数 $D_n(x,\xi)$ 可由下列递推公式逐次算出:

$$c_1=\int_a^b K(x,x)dx,\quad D_1(x,\xi)=c_1K(x,\xi)-\int_a^b K(x,\xi_1)K(\xi_1,\xi)d\xi_1$$

$$c_2=\int_a^b D_1(x,x)dx,\quad D_2=(x,\xi)=c_2K(x,\xi)-2\int_a^b K(x,\xi_1)D_1(\xi_1,\xi)d\xi_1$$

………

$$c_n=\int_a^b D_{n-1}(x,x)dx,\quad D_n(x,\xi)=c_nK(x,\xi)-n\int_a^b K(x,\xi_1)D_{n-1}(\xi_1,\xi)d\xi_1$$

那末方程

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

的解可将(1)代入上段(7)式中得到，其形式为

$$y(x)=F(x)+\frac{\lambda}{\Delta(\lambda)}\int_a^b D(x,\xi;\lambda)F(\xi)d\xi\tag{4}$$

当 $K(x,\xi)$ 是可分离时，这个结果与本节三中所得到的解一致，这时级数(2)与(3)都只包含有限项.

更一般地，若级数(2)与(3)之比用关于 λ 的幂级数（由除法或其他方法）来表达，结果将化为上段的(6)式的级数形式，而它只对充分小的 λ ($|\lambda|<\lambda_1$) 值

收敛；但是(4)中最后一项的分子和分母的级数展开式对 λ 的一切值都收敛.

分母 $\Delta(\lambda)$ 只当 λ 取一特征值时等于零，在这个情形下，Fr 方程或者无解或者有无穷多个解，并且(4)不再成立.

[$\Delta(\lambda)$的零点与 Fr 方程] 应用存在性与唯一性定理，有以下结论：

1° 若 λ 不是 $\Delta(\lambda)$的零点，则对任意的 $F(x)$，(4)式是 Fr 方程的唯一解.

2° 函数 $\Delta(\lambda)$的一切零点都是预解核的极点.

3° 若 λ_0 是 $\Delta(\lambda)$的零点，则齐次方程

$$y(x)=\lambda_0\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

有非零解.

于是 $\Delta(\lambda)$的一切零点都是上面积分方程的特征值，就是说，这时齐次方程

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{5}$$

有非零解. 若 λ 不是 $\Delta(\lambda)$的零点，则由 1°，非齐次 Fr 方程对任意的 $F(x)$ 有唯一解，特别，这时上面齐次方程只有零解，即

若 λ 是 $\Delta(\lambda)$的零点，则它是特征值，若 λ 不是 $\Delta(\lambda)$ 的零点，则它不是特征值，于是得到

4° 积分方程的特征值都是 $\Delta(\lambda)$的零点.

5° 在 λ 平面的任何有限区域内只有有限个特征值.

[转置积分方程] 形如

$$y(x)=G(x)+\lambda\int_a^b K(\xi,x)y(\xi)d\xi \tag{6}$$

的方程叫做 Fr 方程

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

的转置积分方程，它的相应的齐次方程为

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(\xi,x)y(\xi)d\xi \tag{7}$$

这个方程的核记作

$$K_0(x,\xi)=K(\xi,x)$$

转置积分方程具有以下性质：

1° 齐次方程(5)与它的转置方程(7)或同时仅有零解，或同时有非零解.

2° 齐次方程(5)与它的转置方程(7)有相同个数的线性无关的解.

3° 若 λ 是特征值，则非齐次 Fr 方程可解的充分必要条件是：自由项

$F(x)$满足条件

$$\int_a^b F(x)\psi(x)=0$$

式中 $\psi(x)$是转置方程的任何特征函数，即齐次方程(7)的任何解．若这个条件满足，则 Fr 方程有无穷多个解，而一切这样的解取形式

$$y(x)=y_t(x)+\sum_{j=1}^{r} c_j\varphi_j(x)$$

式中 $y_0(x)$为 Fr 方程的任意特解，$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_r$ 为方程(5)的 r 个非平凡的线性无关的解，$c_1,c_2,\cdots,c_r$ 为任意常数．

应当指出，上述结果与 n 个变量的 n 个线性代数方程组的关于解的存在和唯一性的对应结果完全类似．

§ 2 奇异积分方程

一、奇异积分方程的定义与例子

1° 如果积分方程的积分是积分区间为无限（或核 $K(x,\xi)$ 为无界函数)的广义积分，那末称该方程为奇异积分方程，例如

$$F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin x\xi\ y(\xi)d\xi \tag{1}$$

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-x\xi}y(\xi)d\xi \tag{2}$$

和

$$F(x)=\int_0^x \frac{y(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi \tag{3}$$

都是奇异积分方程．

2° 方程(1)的右边所定义的函数可以看作 $y(x)$ 的傅立叶正弦变换．若当 $x>0$ 时，$F(x)$逐段可微且$\int_0^\infty|F(x)|dx$ 存在，则方程(1)有唯一的反演公式：

$$y(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin x\xi\ F(\xi)d\xi\quad(x>0)$$

考虑齐次积分方程

$$y(x)=\lambda\int_0^\infty \sin x\xi\ y(\xi)d\xi \tag{4}$$

从已知的公式

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ax}\pm\frac{x}{a^2+x^2}=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin x\xi\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\xi}\pm\frac{\xi}{a^2+\xi^2}\right]d\xi \quad (x>0,a>0)$$

可知 $\lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 确实是特征值. 当 $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 时, 对任意正常数 a, 函数

$$y_1(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ax}+\frac{x}{a^2+x^2} \qquad (x>0)$$

满足方程 (4); 而当 $\lambda=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 时, 对任意正常数 a, 函数

$$y_2(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ax}-\frac{x}{a^2+x^2} \qquad (x>0)$$

也满足方程(4). 于是这两个 λ 值是无穷重的特征值, 即每个值对应无穷多个特征函数. 这个事实与 Fr 方程的任一特征值只对应有限个独立特征函数是大不相同的.

3° 由方程(2)右边所定义的函数 $F(x)$ 是函数 $y(x)$ 的拉普拉斯变换. 因为不是一切函数都能作拉普拉斯变换, 两个不同函数不能有同一个拉普拉斯变换. 所以对一个给定函数 $F(x)$, 若(2)存在一个解, 则解是唯一的.

考虑齐次积分方程

$$y(x)=\lambda\int_0^\infty e^{-x\xi}y(\xi)d\xi \qquad (x>0) \tag{5}$$

根据伽马函数的定义有

$$\int_0^\infty e^{-x\xi}\xi^{a-1}d\xi=\Gamma(a)x^{-a} \qquad (a>0)$$

以 $1-a$ 代替 a, 得

$$\int_0^\infty e^{-x\xi}\xi^{-a}d\xi=\Gamma(1-a)x^{a-1} \qquad (a<1)$$

由上面两等式推出

$$\int_0^\infty e^{-x\xi}\left[\sqrt{\Gamma(1-a)}\xi^{a-1}+\sqrt{\Gamma(a)}\xi^{-a}\right]d\xi$$
$$=\sqrt{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}\left[\sqrt{\Gamma(1-a)}x^{a-1}+\sqrt{\Gamma(a)}x^{-a}\right] \quad (0<a<1)$$

如果令

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}} \qquad (0<a<1)$$

那末上式表明, 函数

$$y(x)=\sqrt{\Gamma(1-a)}x^{a-1}+\sqrt{\Gamma(a)}x^{-a} \qquad (x>0)$$

是积分方程(5)的解.

因此，对参数 α 的任一值 $(0<\alpha<1)$，有一个 λ 值对应，并且决定了方程(5)的一个非平凡解。

利用恒等式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \qquad (0<\alpha<1)$$

有

$$\lambda=\sqrt{\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}} \qquad (0<\alpha<1)$$

由此推出，在区间 $0<\lambda\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ 内的一切 λ 值都是奇异积分方程(5)的特征值。

还能证明在区间 $\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\leqslant\lambda<0$ 内的一切 λ 值也是奇异积分方程(5)的特征值。

积分方程(3)的积分区间是有限的，但是核是无界函数，这种奇异积分方程将在本节二和§3中考虑。

二、具有柯西核和希尔伯特核的积分方程

[柯西核与希尔伯特核]

定理　设 L 是任一光滑闭曲线，$\varphi(\zeta)$ 是定义在 L 上且满足具有指数 α $(0<\alpha\leqslant1)$ 的李普希茨条件* 的一个函数，当 z 从 L 的内部趋于 L 上任一点 t 时，则柯西型积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{1}$$

趋于极限值

$$F_i(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta$$

当 z 从 L 的外部趋于 L 上任一点 t 时，积分(1)趋于相应的极限值

$$F_i(t)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta$$

上面两个等式中的积分都是广义积分

---

* 如果存在两个常数 K 和 α $(0<\alpha\leqslant1)$，使对区间 $[a, b]$ 上的任意一对值 x', x'' 下面的不等式成立：

$$|f(x')-f(x'')|<K|x'-x''|^{\alpha}$$

则称函数 $f(x)$ 满足具有指数 α 的李普希茨条件。

表达式

$$\frac{d\zeta}{\zeta-t}$$

称为柯西核，式中 ζ 和 t 是 L 上的任意两点.

表达式

$$\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma$$

称为希尔伯特核，式中 s 和 σ 都是实变量，并在闭区间$[0,2\pi]$内变动.

柯西核和希尔伯特核之间有很简单的关系. 设 L 是一简单闭曲线，它是有连续曲率的一条光滑曲线. 设 L 的参数方程是

$$x=x(s),\quad y=y(s)$$

设相应的参数 s 在闭区间$[0,2\pi]$内变动. 令 $t=x+iy$ 和 $t(s)=x(s)+iy(s)$. L 的方程可写作 $t=t(s)$. 设 ζ 是 L 上任一点，则有一参数值 σ，使 $\zeta=t(\sigma)$. 于是不难证明:

$$\frac{d\zeta}{\zeta-t}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+P(s,\sigma)d\sigma$$

式中 $P(s,\sigma)$ 是两个变量 s 和 σ 的连续函数，这函数满足具有某指数的李普希茨条件.

[具有希尔伯特核的奇异积分方程] 考虑如下形式的方程:

$$ay(s)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}y(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\int_0^{2\pi}K(s,\sigma)y(\sigma)d\sigma=F(s)\tag{2}$$

式中 a 和 b 是常数.

假定核 $K(s,\sigma)$ 和自由项 $F(s)$ 都满足李普希茨条件.

如果 $K(s,\sigma)\equiv 0$，则所考虑的方程是

$$ay(s)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}y(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=F(s)\tag{3}$$

若 $a^2+b^2\neq 0$，则这个方程的解是

$$y(s)=\frac{a}{a^2+b^2}F(s)-\frac{b}{2\pi(a^2+b^2)}\int_0^{2\pi}F(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma$$

$$+\frac{b^2}{2\pi a(a^2+b^2)}\int_0^{2\pi}F(\sigma)d\sigma\tag{4}$$

若 $a^2+b^2=0$，则方程一般没有解.

注意特殊情况 $a=0$. 不妨设 $b=1$，则(3)变为第一类 FT 方程

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=F(s)$$

这时，(4)式的解没有用.但方程(3)有解的充分必要条件是：

$$\int_0^{2\pi} F(s)ds=0$$

解的形式是

$$y(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+C$$

式中C是任意常数.

在一般情形下，可以证明方程(2)与一般形式的 Fr 方程等价，于是所考虑的方程归结到解 Fr 方程.

具有希尔伯特核的奇异积分方程的一般形式是

$$a(s)y(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\int_0^{2\pi} K(s,\sigma)y(\sigma)d\sigma=F(s)$$

式中$a(s)$和$b(s)$是变量s的函数. 若$a(s)$和$b(s)$满足李普希茨条件，上式可化为 Fr 方程，但是二者可能不等价.

[具有柯西核的奇异积分方程]　考虑如下形式的方程：

$$ay(t)+\frac{b}{\pi i}\int_L\frac{y(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=F(t)\tag{5}$$

式中a和b是常数，L是闭曲线.

若$a^2-b^2\neq 0$，则(5)的解为

$$y(t)=\frac{a}{a^2-b^2}F(t)-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\int_L\frac{F(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta$$

具有柯西核的奇异积分方程的一般形式是

$$a(t)y(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{y(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta+\int_L K(t,\zeta)y(\zeta)d\zeta=F(t)$$

$$(a^2(t)-b^2(t)\neq 0)$$

它也可化为Fr方程. 若a和b是常数，则得到的 Fr 方程与上面方程等价. 在一般情形下需加补充说明.

§ 3　沃尔泰拉积分方程

[第二类沃尔泰拉积分方程]　一维的第二类沃尔泰拉方程为

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^x K(x,\xi)y(\xi)d\xi\tag{1}$$

这是 Fr 方程的特殊情形(当$\xi>x$时，$K(x,\xi)=0$). 假定$F(x)$在区间$[a,b]$上连续，$K(x,\xi)$在正方形k_0 $(a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant\xi\leqslant b)$上连续，且当$\xi>x$时，

$$K(x,\xi)=0$$

因此，当 $K(x,x)\neq 0$ 时，核有第一类不连续点 $x=\xi$.

积分方程(1)的解用 λ 的幂级数表示为

$$y(x)=y_0(x)+y_1(x)\lambda+y_2(x)\lambda^2+\cdots \tag{2}$$

对函数 $y_n(x)$ 有下列递推公式：

$$y_0(x)=F(x),\quad y_n(x)=\int_a^x K(x,\xi)y_{n-1}(\xi)d\xi \quad (n=1,2,\cdots)$$

设在有限区间或正方形上，连续函数 $F(x)$ 和 $K(x,\xi)$ 满足

$$|F(x)|\leqslant m,\quad |K(x,\xi)|\leqslant M$$

式中 m,M 为常数. 因此当 $|\lambda|$ 充分小时，级数(2)在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛，其和 $y(x)$ 是连续函数且满足方程(1).

也可以作预解核

$$R(x,\xi;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}K_{n+1}(x,\xi)\lambda^n \tag{3}$$

式中叠核 $K_n(x,\xi)$ 由下面递推公式计算：

$$K_1(x,\xi)=K(x,\xi);\quad K_n(x,\xi)=\int_a^x K_{n-1}(x,\xi_1)K(\xi_1,\xi)d\xi_1 \quad (n=2,3,\cdots)$$

且从此得出当 $\xi>x$ 时，$K_n(x,\xi)=0$. 事实上，若 $\xi>x$，则 $\xi_1<\xi$，因而

$$K(\xi_1,\xi)=0$$

可证明级数(3)对一切 λ 值绝对且一致收敛. 于是，沃尔泰拉方程(1)的预解核是整函数，并且对任何 λ 有如下形式的唯一解：

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^x R(x,\xi;\lambda)F(\xi)d\xi$$

所以沃尔泰拉方程没有特征值，就是说齐次方程

$$y(x)=\lambda\int_a^x K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

对任何 λ 只有平凡解 $y(x)\equiv 0$. 因此，若作方程(1)的 Fr 分母 $\Delta(\lambda)$，则可发现它根本没有零点.

[特殊沃尔泰拉方程] 设 $u(x)$，$v(x)$ 是定义在 $x\geqslant 0$ 上的两个连续函数. 由积分

$$\int_0^x u(x-\xi)v(\xi)d\xi$$

所定义的函数称为函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的卷积(或褶积).

根据卷积的性质(即 u 和 v 的卷积的拉普拉斯变换等于 u 和 v 的拉普拉斯变换之积)可把解特殊沃尔泰拉方程(其核只与两个变量之差有关)：

$$y(x)=F(x)+\int_0^x K(x-\xi)y(\xi)d\xi$$

的问题变为决定一个拉普拉斯变换的反演变换问题．为此，将上式两边各取拉普拉斯变换，并利用卷积的性质，有

$$\mathscr{L}[y(x)]=\mathscr{L}[F(x)]+\mathscr{L}[K(x)]\mathscr{L}[y(x)]$$

得

$$\mathscr{L}[y(x)]=\frac{\mathscr{L}[F(x)]}{1-\mathscr{L}[K(x)]}$$

查拉普拉斯变换表或用其他方法便可以确定 $y(x)$.

[第一类沃尔泰拉积分方程]　第一类沃尔泰拉积分方程

$$F(x)=\int_0^x K(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{1}$$

可变为第二类沃尔泰拉积分方程．在核($\xi\leqslant x$)是连续可微的假定下，有两种变换方法．一种方法是，对(1)两边求导，便得

$$F'(x)=K(x,x)y(x)+\int_0^x \frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x}y(\xi)d\xi$$

若 $K(x,x)\neq0$，这个方程可化为

$$y(x)=\overline{F}(x)+\int_0^x \overline{K}(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

式中

$$\overline{F}(x)=\frac{F'(x)}{K(x,x)},\qquad \overline{K}(x,\xi)=-\frac{1}{K(x,x)}\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x}$$

另一种方法是，设

$$Y(x)=\int_0^x y(\xi)d\xi$$

则方程(1)化为

$$F(x)=\int_0^x K(x,\xi)Y'(\xi)d\xi$$

分部积分得

$$F(x)=K(x,x)Y(x)-\int_0^x \frac{\partial K(x,\xi)}{\partial\xi}Y(\xi)d\xi$$

若 $K(x,x)\neq0$，这个方程可改写为

$$Y(x)=\widetilde{F}(x)+\int_0^x \widetilde{K}(x,\xi)Y(\xi)d\xi$$

式中

$$\widetilde{F}(x)=\frac{F(x)}{K(x,x)},\quad \widetilde{K}(x,\xi)=\frac{1}{K(x,x)}\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial\xi}$$

[阿贝耳积分方程]　形如

$$F(x)=\int_0^x \frac{y(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi \tag{1}$$

的沃尔泰拉积分方程称为阿贝耳积分方程. 对给定函数 $F(x)$ 适当加以限制下, 积分方程(1)可用间接方法求解. (1)式除以 $\sqrt{s-x}$ (s 是一参数), 然后两边积分, 得

$$\int_0^s \frac{F(x)}{\sqrt{s-x}}dx=\int_0^s \left\{\int_0^x \frac{y(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi\right\}\frac{dx}{\sqrt{s-x}}$$

把上式右边的积分次序交换, 并改变积分限, 化为

$$\int_0^s \frac{F(x)}{\sqrt{s-x}}dx=\int_0^s \left\{\int_\xi^s \frac{dx}{\sqrt{(x-\xi)(s-x)}}\right\}y(\xi)d\xi \tag{2}$$

令 $x=(s-\xi)t+\xi$, 则有

$$\int_\xi^s \frac{dx}{\sqrt{(x-\xi)(s-x)}}=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}=\pi$$

代入(2)式有

$$\int_0^s y(\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^s \frac{F(x)}{\sqrt{s-x}}dx$$

或者写为

$$\int_0^x y(\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{F(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi$$

把这个等式求导, 便得所求的解为

$$y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{F(x)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi$$

若 $F(x)$ 不能使这个等式的右边存在且连续, 则方程(1)没有连续解.

§4　积分方程的近似解法

[对 Fr 方程的线性代数方程组的逼近法]　Fr 方程

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{1}$$

可按形式

$$y(x)\approx F(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} w_k K(x,x_k)y(x_k)\qquad (n\to\infty) \tag{2}$$

来逼近, 其中 x_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 是区间 $[a,b]$ 上 n 个适当选定的求积节点, 常数 w_k 是对应的求积系数. 如果要求在每点 x_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 处, (2)式两边相等,

则得到关于 n 个未知函数 $y(x_1), y(x_2), \cdots, y(x_n)$ 的 n 个线性方程:

$$y(x_i)=F(x_i)+\lambda\sum_{k=1}^{n}w_kK(x_i,x_k)y(x_k)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{3}$$

式中 $y(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为未知函数 $y(x)$ 分别在 n 个点 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 处指定的近似值.

若令

$$y_i=y(x_i),\quad F_i=F(x_i),\quad K_{ij}=K(x_i,x_j)$$

(3)可改写为

$$y_i=F_i+\lambda\sum_{k=1}^{n}K_{ik}w_ky_k\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}+\lambda KW\boldsymbol{y}$$

或

$$A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}\tag{4}$$

式中 $A=I-\lambda KW$, I 为 n 阶单位矩阵, $K=(K_{ij})$, W 为对角线矩阵

$$W=[w_1,w_2,\cdots,w_n],\quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\tau},\quad \boldsymbol{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_n)^{\tau}$$

例　解第二类 FI 方程

$$y(x)=x+\int_0^1K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

$$K(x,\xi)=\begin{cases}x(1-\xi), & x<\xi\\ \xi(1-x), & x>\xi\end{cases}$$

解　1° 在这个特例中,积分方程可化为具端点条件 $y(0)=0, y(1)=1$ 的微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

其精确解为

$$y(x)=\frac{\sin x}{\sin 1}$$

2° 用逼近法来求近似解. 取 $n=5$ 个等距节点:

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{1}{4},\quad x_3=\frac{1}{2},\quad x_4=\frac{3}{4},\quad x_5=1$$

可以算出矩阵 K 为

$$K=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果采用梯形法求积，那末求积系数的对角线矩阵W为

$$W=\left[\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}\right]$$

由于 $\lambda=1$，则

$$A=I-KW=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{61}{64} & -\frac{1}{32} & -\frac{1}{64} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{32} & \frac{15}{16} & -\frac{1}{32} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{64} & -\frac{1}{32} & \frac{61}{64} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而
$$F=\left(0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1\right)^{\tau}$$

解线性方程组，计算到小数点后四位得到

$$y_1=0,\quad y_2=0.2943,\quad y_3=0.5702,\quad y_4=0.8104,\quad y_5=1$$

与精确解 $y(x)$ 在点 $x=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}$和 1 的值

$$y_1=0,\quad y_2=0.2940,\quad y_3=0.5697,\quad y_4=0.8100,\quad y_5=1$$

进行比较，可以看到误差程度。

上述方法显然可以用来求第一类 Fr 方程的近似解，以及处理特征值问题。

应当指出，当核$K(x,\xi)$不是以分析表达式给定，而由实验数据确定时，上述方法特别有用。

[待定系数逼近法]　为了求积分方程

$$y(x)=F(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{1}$$

的解，可适当选择 n 个函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$，用它们的线性组合来逼近

$$y(x)\approx\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)$$

其中 n 个系数 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 可以这样决定：使这个线性组合尽可能近似地满足(1)，即

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)\approx F(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k\int_a^b K(x,\xi)\varphi_k(\xi)d\xi\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$$

令

$$\Phi_k=\int_a^b K(x,\xi)\varphi_k(\xi)d\xi$$

上式变成

$$\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)-\lambda\Phi_k(x)]a_k\approx F(x)\qquad(a\leqslant x\leqslant b)\tag{2}$$

待定系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可由 n 个条件决定，方法如下：

1° 配置法　令

$$\psi_k(x)=\varphi_k(x)-\lambda\Phi_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x)a_k\approx F(x)\qquad(a\leqslant x\leqslant b)\tag{3}$$

为决定这 n 个常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，在区间$[a,b]$上适当选择 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant b$ (x_i 称为配置点)，使

$$\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x_i)a_k=F(x_i)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

其矩阵形式为

$$\Psi\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}\tag{4}$$

式中 $\Psi=(\psi_{ij})=(\psi_j(x_i))$，$\boldsymbol{F}=(F(x_1),F(x_2),\cdots,F(x_n))^{\mathrm{T}}$ 为已知量，

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$$

为未知量．解线性方程组(4)便得到所求的系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$．

2° 权函数法　设 $w_1(x),w_2(x),\cdots,w_n(x)$为区间$[a,b]$上 n 个线性无关的函数(称为权函数)．为决定系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，可以要求(3)式两边之差

$$\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x)a_k-F(x)$$

与这 n 个权函数正交，即使得

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b w_i(x)\psi_k(x)dx\right)\alpha_k=\int_a^b w_i(x)F(x)dx \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

其矩阵形式为

$$A\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{b} \tag{5}$$

式中

$$A=(a_{ij})=\left(\int_a^b w_i(x)\psi_j(x)dx\right)$$

$$\boldsymbol{b}=\left(\int_a^b w_1(x)F(x)dx,\cdots,\int_a^b w_n(x)F(x)dx\right)^{\mathrm{T}}$$

为已知量，

$$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$$

为未知量. 解线性方程组(5)便得到所求的系数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

通常选取权函数 $w_i(x)$ 与近似函数 $\varphi_i(x)$ 恒等比较方便，一般都取为

$$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$$

[核的逼近法] §1 指出 Fr 方程的核可用 x 和 ξ 的一个多项式或一个更一般形式的可分离核来逼近，并用那里的方法来解所得的近似方程.

例 积分方程

$$y(x)=x+\int_0^1 K(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{1}$$

中的核

$$K(x,\xi)=\begin{cases}x(1-\xi), & x<\xi\\ \xi(1-x), & x>\xi\end{cases}$$

可用多项式 $A_1+A_2x+A_3x^2$ 或更适当的形式 $x(1-x)(B_1+B_2x+B_3x^2)$ 来逼近，其中 A,B 为包含 ξ 的参数，采用权函数或配置点可决定 A 与 B.

首先取一个粗糙的逼近形式

$$K(x,\xi)\approx Bx(1-x)$$

它在端点 $x=0$ 和 $x=1$ 是精确的，为决定系数 B，可要求在[0,1]上核的积分等于它的近似表达式的积分，即

$$\int_0^1 K(x,\xi)dx=B\int_0^1 x(1-x)dx$$

直接计算得

$$B=3\xi(1-\xi)$$

并把对应的近似核代入(1)导出近似积分方程

$$y(x)=x+3x(1-x)\int_0^1\xi(1-\xi)y(\xi)d\xi \tag{2}$$

令

$$c=\int_0^1 x(1-x)y(x)dx$$

(2)式化为

$$y(x)=x+3cx(1-x) \tag{3}$$

为了决定 c，以 $x(1-x)$ 乘上式的两边，并在[0,1]上积分，得

$$c=\int_0^1 x^2(1-x)dx+3c\int_0^1 x^2(1-x)^2dx$$

从此算出 $c=\frac{5}{54}$，代入(3)得到方程(1)的近似解

$$y(x)\approx x+\frac{5}{18}x(1-x)=\frac{23}{18}x-\frac{5}{18}x^2$$

更一般地，如果取近似核为

$$K(x,\xi)\approx x\xi(1-x)(1-\xi)(a_1+a_2x\xi+a_3x^2\xi^2+\cdots)$$

则类似地可得方程(1)的近似解

$$y(x)\approx x+x(1-x)(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots)$$

§ 5　非线性积分方程

[积分算子与线性算子]　考虑表达式

$$F(x)=\int_a^b K(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

对于给定的核 $K(x,\xi)$，每个函数 $f(x)$ 都有另一个函数 $F(x)$ 与之对应，这种对应关系称为积分算子，记作 K，即

$$F=Kf$$

使得函数 $F=Kf$ 存在的那些函数 f 的集合称为算子 K 的定义域。

如果算子 K 满足条件

$$K(f+g)=Kf+Kg$$
$$K(af)=aKf\qquad (a\text{ 为常数})$$

则称 K 为线性算子。

[有界算子及其范数]　如果存在某常数 M，对一切函数 f 都有

$$\|Kf\|\leqslant M\|f\|$$

则称 K 为有界算子，式中 $\|f\|$ 表示函数 f 的范数（模）。使上面不等式成立的一切 M 的最大下界称为算子 K 的范数，记作 $\|K\|$，它也可以定义为

$$\|K\|=\sup_{f\neq 0}\frac{\|Kf\|}{\|f\|}$$

有界算子具有以下性质:

1° 若K_1和K_2是有界算子,则K_1K_2也是有界算子.

2° 如果对有限正方形k_0 $(a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant\xi\leqslant b)$上的一切$x,\xi$,函数$K(x,\xi)$是连续的,则由

$$Kf=\int_a^b K(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

定义的算子K是有界算子.

3° 如果在无限区间$[a,b]$上,函数$K(x,\xi)$满足

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,\xi)|^2 dxd\xi=M^2<\infty$$

则由

$$Kf=\int_a^b K(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

定义的算子K是有界算子.

[非线性积分方程解的存在定理] 考虑如下形式的积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,\xi)\psi(\xi,\varphi(\xi))d\xi \tag{1}$$

前几节中解线性积分方程的方法对于非线性积分方程是不适用的. 下面仅列出几个解的存在性定理.

定理1 假定$K(x,\xi)$对单位正方形$k_0(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant\xi\leqslant 1)$上的一切$x,\xi$是连续的,设$|K(x,\xi)|\leqslant C$ (C为常数),$\psi(\xi,t)$对单位正方形k_0上的一切ξ,t也是连续的,并且

$$\int_0^1|\psi(\xi,\varphi(\xi))|^2d\xi\leqslant A^2\|\varphi\|^2 \qquad (A\text{为常数})$$

又假定$\psi(\xi,t)$满足李普希茨条件

$$|\psi(\xi,t')-\psi(\xi,t'')|\leqslant B|t'-t''|$$

式中B是与ξ无关的常数. 那末当$|\lambda|<\frac{1}{BC}$时,积分方程(1)在$L_2[0,1]$*中有唯一的解.

定理2 假定$K(x,\xi)$对单位正方形k_0上的一切x,ξ是连续的,设

$$|K(x,\xi)|\leqslant C \qquad (C\text{为常数})$$

$\psi(\xi,t)$满足

$$|\psi(\xi,t)|\leqslant B \qquad (B\text{为常数})$$

并对任意$\varepsilon>0$,都存在$\delta=\delta(\varepsilon)$使得

* $L_2[0,1]$表示在区间$[0,1]$上一切平方可积的函数的全体.

$$\int_0^1 |\psi(\xi, \varphi_1(\xi)) - \psi(\xi, \varphi_2(\xi))|^2 d\xi < \varepsilon \qquad (\text{当} \|\varphi_1 - \varphi_2\| < \delta \text{ 时})$$

式中 $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2[0, 1]$. 那末当 $|\lambda| < \frac{1}{BC}$ 时, 积分方程(1)在 $L_2[0, 1]$ 中至少有一个解.

定理 3 假定 $K(x, \xi)$ 和 $\psi(\xi, t)$ 都是它们的自变量的连续函数. 设 S 是 $L_2[0, 1]$ 中满足

$$\|\varphi\| \leqslant M \ (M \text{为常数})$$

的函数 φ 的全体. 假定

$$|K(x, \xi)| \leqslant C \ (C \text{为常数})$$

$$\int_0^1 |\psi(\xi, \varphi(\xi))|^2 d\xi \leqslant B^2 \ (\text{一切} \varphi \in S)$$

并对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得

$$\int_0^1 |\psi(\xi, \varphi_1(\xi)) - \psi(\xi, \varphi_2(\xi))|^2 d\xi < \varepsilon \qquad (\text{当} \|\varphi_1 - \varphi_2\| < \delta \text{ 时})$$

那末当 $|\lambda| \leqslant \frac{M}{BC}$ 时, 积分方程(1)在 S 中至少有一个解.

这个定理的条件要求 $K(x, \xi)$ 是连续的. 事实上可以证明, 只要核 $K(x, \xi)$ 是平方可积的就有同样的结论.

定理 4 假定 $\psi(\xi, t)$ 满足定理 3 所述的条件, 并设 $K(x, \xi)$ 满足

$$\int_0^1\int_0^1 |K(x, \xi)|^2 dx d\xi < C^2 < \infty$$

那末当 $|\lambda| \leqslant \frac{M}{BC}$ 时, 积分方程(1)在 S 中至少有一个解.

第十六章 概率统计与随机过程

本章扼要地介绍了概率论的重要内容，除了介绍随机事件及其概率、随机变量和分布函数、随机变量的数值表征、概率母函数、矩母函数和特征函数、大数法则和中心极限定理等基本概念外，还介绍了正态分布表和概率纸的用途．这一章着重地叙述了常用数理统计方法，包括样本及其频率分布、总体参数的区间估计、统计检验、方差分析、回归分析、正交试验设计、抽样检验、质量评估（工序控制）等八个部分；最后简述了随机过程论的基本内容，突出了较为常用的马尔科夫过程和平稳随机过程．

§1 概 率 论

一、事件与概率

1. 随机事件及其运算关系

[随机事件·必然事件·不可能事件] 在一定条件下，可能发生也可能不发生的试验结果称为随机事件，简称事件，用 $A,B,C,\cdots$ 表示．随机事件有两个特殊情况，即必然事件（在一定条件下，每次试验都必定发生的事件）和不可能事件（在一定条件下，各次试验都一定不发生的事件），分别记为 Ω 和 $\varnothing$．

[事件的运算关系]

1° 包含 当事件 B 发生时，事件 A 也一定发生，则称 A 包含 B 或 B 含于 A 中，记作 $A\supset B$，或 $B\subset A$．

2° 等价 如果 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，即事件 A 和 B 同时发生或不发生，则称 A 与 B 等价，记作 $A=B$．

3° 积 表示事件 A 和 B 同时发生的事件，称为 A 与 B 的积，记作 $A\cap B$（或 AB）．

4° 和 表示事件 A 或事件 B 发生的事件，称为 A 与 B 的和，记作 $A\cup B$（或 $A+B$）．

5° 差 表示事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为 A 与 B 的差，记作 $A\setminus B$（或 $A-B$）．

6° 互斥 如果事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，那末称 A 与 B 是

互斥(或互不相容)的.

7° 对立 如果事件A与B互斥,又在每次试验中不是出现A就是出现B,即$A\cap B=\varnothing$ 且$A\cup B=\Omega$,那末称B为A的对立事件,记作$B=\bar{A}$.

8° 完备 如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$在每次试验中至少发生一个,即$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$,则称$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$构成一个事件完备组.特别当$A_1, A_2, \cdots, A_n$又是两两互斥时,即$A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j,\ i, j=1, 2, \cdots, n)$,就称$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是两两互斥的事件完备组.

2. 概率的几种定义

[频率与概率] 随机事件在一次试验中是否发生,固然是无法事先肯定的偶然现象,但当进行多次重复试验,就可以发现其发生的可能性大小的统计规律性.具体说,如果在相同条件下进行n次重复试验,事件A出现了ν次,那末事件A在n次试验中出现的频率$\frac{\nu}{n}$当n无限增大时呈现稳定性.这一统计规律性表明事件发生的可能性大小是事件本身所固有的、不以人们主观意志改变的一种客观属性.事件A发生的可能性大小称为事件A的概率,记作$P(A)$.当试验的次数n足够大,可用事件的频率近似地表示该事件的概率,即

$$P(A)\approx\frac{\nu}{n}$$

[概率的古典定义] 设一个随机试验(不能事先准确地预言它的结果,而且在相同条件下可以重复进行的试验)只有有限个不同的基本事件$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$(基本事件也是一种事件,一般的事件总是由几个基本事件共同组成的),每个基本事件都是等可能*的,基本事件的全体记作Ω,称它为基本事件空间,如果事件A由k $(k\leqslant n)$个不同的基本事件组成,那末规定A的概率$P(A)$为

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

不可能事件$\varnothing$的概率规定为

$$P(\varnothing)=0$$

[概率的公理化定义]

定义1 设$\Omega=\{\omega\}$, $\mathscr{F}=\{A\mid A\subset\Omega\}$,如果$\mathscr{F}$满足下面条件:

(i) $\Omega\in\mathscr{F}$;

---

* 在应用中,往往当一种事件没有任何理由比另一事件更容易发生时,就认为这两个事件等可能.

(ii) 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\bar{A}\in\mathscr{F}$ $(\bar{A}=\Omega\setminus A)$；

(iii) 对于任意 $A_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathscr{F}$$

则称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 中的一个 σ 代数.

定义 2 设 $P(A)(A\in\mathscr{F})$ 是 σ 代数 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数，如果它满足条件：

(i) 对任意 $A\in\mathscr{F}$，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(ii) $P(\Omega)=1$；

(iii) 对任意 $A_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，$A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ 有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

则称 $P(A)$ 为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度，或简称概率. 这时，称 ω 为基本事件，$A(\in\mathscr{F})$ 称为事件，$\mathscr{F}$ 是事件的全体，$P(A)$ 称为事件 A 的概率，$\langle\Omega,\mathscr{F},P\rangle$ 称为概率空间.

3. 概率的基本性质

1° $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

2° $P(\text{必然事件})=P(\Omega)=1$

3° $P(\text{不可能事件})=P(\varnothing)=0$

4° $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

若 A, B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

5° 若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$

6° 若 $A\supset B$，则 $P(A)-P(B)=P(A\setminus B)$

7° 对任意事件 A，$P(\bar{A})=1-P(A)$

8° 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互斥的事件完备组，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$$

9° 设 $A_n\in\mathscr{F}$，$A_n\supset A_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，令 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P(A_n) \qquad \text{(连续性定理)}$$

4. 概率的计算公式

[条件概率与乘法公式] 在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率称为

事件A在事件B已发生的条件下的条件概率，记作$P(A|B)$. 当$P(B)>0$时，规定

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

当$P(B)=0$时，规定$P(A|B)=0$. 由此得出乘法公式:

$$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\quad (P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

［独立性公式］ 如果事件A与B满足$P(A|B)=P(A)$，那末称事件A关于事件B是独立的. 独立性是相互的性质，即A关于B独立，B一定关于A独立，或称A与B相互独立.

A与B相互独立的充分必要条件是:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

如果事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中任意m个$(2\leqslant m\leqslant n)$ $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_m}$都满足关系式

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{m}A_{i_k}\right)=\prod_{k=1}^{m}P(A_{i_k})$$

称$A_1,A_2,\cdots,A_n$是总起来独立的，简称为相互独立.

［全概率公式］ 如果事件组$B_1,B_2,\cdots$满足

$$B_i\cap B_j=\varnothing\quad(i\neq j)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=1,\quad P(B_i)>0\qquad (i=1,2,\cdots)$$

则对于任意一事件A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A|B_i)P(B_i)$$

如果B_i只有n个，公式也成立，此时右端只有n项相加.

［贝叶斯公式］ 如果事件组$B_1,B_2,\cdots$满足

$$B_i\cap B_j=\varnothing\quad(i\neq j)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=1,\quad P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots)$$

则对于任一事件A $(P(A)>0)$，有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B_i)P(A|B_i)}$$

如果 B_i 只有 n 个，公式也成立，此时右端分母只有 n 项相加。

[伯努利公式]　设一次试验中某事件 A 出现的概率为 p，则 n 次重复试验中事件 A 出现 k 次的概率 $p_{n,k}$ 为

$$p_{n,k}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

式中 $\binom{n}{k}$ 为二项系数。

当 n 和 k 都很大时，有近似公式

$$p_{n,k}\approx\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

式中 $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$，$x=\frac{k-np}{\sigma}$。

[泊松公式]　当 n 充分大，且 p 很小时，有近似公式

$$p_{n,k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

式中 $\lambda=np$。

二、随机变量与分布函数

[随机变量及其概率分布函数]　每次试验的结果可以用一个变量 ξ 的数值来表示，这个变量的取值随偶然因素而变化，但又遵从一定的概率分布规律，这种变量称为随机变量，用 $\xi,\eta,\cdots$ 表示。它是随机现象的数量化。

给定随机变量 ξ，它的取值不超过实数 x 的事件的概率 $P(\xi\leqslant x)$ 是 x 的函数，称为 ξ 的概率分布函数，简称分布函数，记作 $F(x)$，即

$$F(x)=P(\xi\leqslant x)\qquad(-\infty<x<\infty)$$

[分布函数的基本性质]

1°　$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$

2°　若 $x_1<x_2$，则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$　　（单调性）

3°　$F(x+0)=F(x)$　　（右连续性）

4°　$P(a<\xi\leqslant b)=F(b)-F(a)$

5°　$P(\xi=a)=F(a)-F(a-0)$

[离散分布与概率分布列]　如果随机变量ξ只能取有限个或可列个数值$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，就称$\xi$为离散型随机变量.若记$P(\xi=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$，则$\xi$取值的概率分布由$\{p_k\}$完全确定．称$\{p_k\}$为$\xi$的概率分布列．$\{p_k\}$有以下性质：

1°　$p_k\geqslant 0$

2°　$\sum\limits_k p_k=1$

3°　设D为实数轴上任一可测集，则$P(\xi\in D)=\sum\limits_{x_k\in D} p_k$

4°　ξ的分布函数

$$F(x)=\sum_{x_k<x} p_k$$

是在x_k处有跳跃p_k的阶梯函数.

[连续分布与分布密度函数]　如果随机变量ξ的分布函数$F(x)$能够表示为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt \quad (p(x)\text{非负})$$

就称ξ是连续型随机变量．$p(x)$称为ξ的分布密度函数(或分布密度)．分布密度函数具有以下性质：

1°　$p(x)=\dfrac{d}{dx}F(x)\geqslant 0$

2°　$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx=1$

3°　若$p(x)$是连续型随机变量ξ的分布密度，则对实数轴上的任一可测集D，有

$$P(\xi\in D)=\int_D p(x)dx$$

[随机变量的函数的分布]　如果随机变量η是随机变量ξ的函数

$$\eta=f(\xi)$$

设随机变量ξ的分布函数为$F(x)$，则$\eta=f(\xi)$的分布函数$G(x)$为

$$G(x)=\int_{f(y)\leqslant x} dF(y)$$

特别，当ξ是离散型随机变量时，其可能值为$x_1, x_2, \cdots$，且$P(\xi=x_k)=p_k$，则

$$G(x)=\sum_{f(x_k)\leqslant x} p_k$$

当ξ是连续型随机变量时，其分布密度为$p(x)$，则

$$G(x)=\int_{f(y)\leqslant x} p(y)dy$$

［随机矢量的联合分布函数与边缘分布函数］ 如果$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$是联系于同一组条件下的$n$个随机变量，则称$\xi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为$n$维随机变量或随机矢量.

若$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n维实数空间R^n上的一点，则事件"$\xi_1\leqslant x_1, \xi_2\leqslant x_2, \cdots, \xi_n\leqslant x_n$"的概率

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(\xi_1\leqslant x_1, \xi_2\leqslant x_2, \cdots, \xi_n\leqslant x_n)$$

作为$x_1,x_2,\cdots,x_n$的函数，称为随机矢量$\xi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的联合分布函数.

设$(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_m})$是$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$中任意取出$m(m\leqslant n)$个分量构成的$m$维随机变量，则称$(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_m})$的联合分布函数为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的$m$维边缘分布函数.

这时，如果分别记$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$与$(\xi_{i_1},\xi_{i_2},\cdots,\xi_{i_m})$的分布函数为$F(x_1, x_2,\cdots,x_n)$与$F_{i_1i_2\cdots i_m}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})$，那末

$$F_{i_1i_2\cdots i_m}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m})=F(\infty,\cdots,x_{i_1},\cdots,\infty,\cdots,x_{i_m},\cdots,\infty)$$

［条件分布函数与独立性］ 设ξ是一随机变量，事件B满足$P(B)>0$，则称

$$F(x|B)=P(\xi\leqslant x|B)$$

为ξ在事件B已发生的条件下的条件分布函数.

1° 设(ξ,η)是二维离散型随机变量，ξ和η的可能取值分别为$x_i(i=1, 2,\cdots)$和$y_k(k=1,2,\cdots)$．又记(ξ,η)的联合分布为

$$P(\xi=x_i,\quad \eta=y_k)=p_{ik}$$

两个一维边缘分布为

$$P(\xi=x_i)=p_{i\cdot}=\sum_k p_{ik}\quad (i=1,2,\cdots)$$

$$P(\eta=y_k)=p_{\cdot k}=\sum_i p_{ik}\quad (k=1,2,\cdots)$$

则称

$$P(\xi=x_i|\eta=y_k)=\frac{p_{ik}}{p_{\cdot k}}\quad (p_{\cdot k}>0,\quad i=1,2,\cdots)$$

为在$\eta=y_k$条件下离散型随机变量ξ的条件分布．类似地，称

$$P(\eta=y_k|\xi=x_i)=\frac{p_{ik}}{p_{i\cdot}}\quad(p_{i\cdot}>0,\ k=1,2,\cdots)$$

为在 $\xi=x_i$ 条件下离散型随机变量 η 的条件分布.

2° 设 (ξ,η) 是二维连续型随机变量，其联合分布密度是 $f(x,y)$，在点 y，$\int_{-\infty}^{\infty}f(t,y)dt>0$，则称

$$F(x|y)=P(\xi\leqslant x|\eta=y)=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(t,y)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}f(t,y)dt}$$

为 ξ 在 $\eta=y$ 条件下的条件分布函数，在点 x，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)dt>0$，则称

$$F(y|x)=P(\eta\leqslant y|\xi=x)=\frac{\int_{-\infty}^{y}f(x,t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)dt}$$

为 η 在 $\xi=x$ 条件下的条件分布函数.

3° 如果 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的联合分布函数等于所有一维边缘分布函数的乘积，即

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n)$$

(它相当于 $P(\xi_1\leqslant x_1,\cdots,\xi_n\leqslant x_n)=P(\xi_1\leqslant x_1)\cdots P(\xi_n\leqslant x_n)$)那末称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是相互独立的.

三、随机变量的数字特征

[数学期望(均值)与方差]　随机变量 ξ 的数学期望（或均值）记作 $E\xi$（或 $M\xi$），它描述了随机变量的取值中心. 随机变量 $(\xi-E\xi)^2$ 的数学期望称为 ξ 的方差，记作 $D\xi$（或 $\mathrm{Var}\xi$），而 $D\xi$ 的平方根称为 ξ 的均方差（或标准差），记作 $\sigma=\sqrt{D\xi}$. 它们描述了随机变量的可能取值与均值的偏差的疏密程度.

1° 若 ξ 是连续型随机变量，其分布密度为 $p(x)$，分布函数为 $F(x)$，则(当积分绝对收敛时)

$$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2p(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2dF(x)$$

2° 若 ξ 是离散型随机变量，其可能取值为 x_k，$k=1,2,\cdots$，且 $P(\xi=x_k)=p_k$，则(当级数是绝对收敛时)

$$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$$

$$D\xi=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E\xi)^2 p_k$$

[均值与方差的几个公式]

1° $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$

2° $Ea=a$, $Da=0$ （a 为常数）

3° $E(c\xi)=cE\xi$, $D(c\xi)=c^2 D\xi$ （c 为常数）

4° $E(\xi\eta)=E\xi E\eta+E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)]$

5° 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 n 个随机变量，则

$$E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=E\xi_1+E\xi_2+\cdots+E\xi_n$$

$$D(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=\sum_{i,j=1}^{n}E[(\xi_i-E\xi_i)(\xi_j-E\xi_j)]$$

6° 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为互相独立的 n 个随机变量，则

$$E(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)=(E\xi_1)(E\xi_2)\cdots(E\xi_n)$$

$$D(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=D\xi_1+D\xi_2+\cdots+D\xi_n$$

7° 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为互相独立的随机变量，且 $E\xi_k=0$, $D\xi_k=\sigma^2(k=1,2,\cdots,n)$，则随机变量 $\eta=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ 的均值与方差分别为

$$E\eta=0,\quad D\eta=\frac{\sigma^2}{n}$$

[契贝谢夫不等式]　对任一给定的正数 ε，有

$$P(|\xi-E\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

[条件数学期望与全数学期望公式]　设 $F(x|B)$ 是随机变量 ξ 对事件 B 的条件分布函数，则

$$E(\xi|B)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,dF(x|B)$$

称为（当积分绝对收敛时）ξ 对事件 B 的条件数学期望. 若 ξ 是连续型随机变量，其条件分布密度为 $p(x|B)$，则

$$E(\xi|B)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x|B)dx$$

若 ξ 是离散型随机变量，其可能取值为 $x_1,x_2,\cdots$，则

$$E(\xi|B)=\sum_k x_k P(\xi=x_k|B)$$

若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是两两互斥的事件完备组，则有全数学期望公式

$$E\xi=\sum_{k=1}^{n} P(B_k)E(\xi|B_k)$$

[中位数.众数与均值的关系]　满足

$$P(\xi\leqslant m)\geqslant\frac{1}{2},\quad P(\xi\geqslant m)\geqslant\frac{1}{2}$$

的数 m 称为随机变量 ξ 的中位数．换句话说，m 满足下面两式：

$$P(\xi\leqslant m)\geqslant P(\xi>m)$$

$$P(\xi\geqslant m)\geqslant P(\xi<m)$$

使分布密度函数取值为最大，即

$$p(\hat{x})=\text{极大值}$$

的 $\hat{x}$ 称为随机变量 ξ 的众数．

对于单峰对称分布函数，$m=\hat{x}=\mu=E\xi$（均值）．

对于非对称单峰分布函数，m 位于 μ 与 $\hat{x}$ 之间．

[高阶原点矩与中心矩]　当 $r\geqslant 0$，随机变量 ξ^r 和 $(\xi-E\xi)^r$ 的数学期望（假设存在）分别称为随机变量 ξ 的 r 阶原点矩和 r 阶中心矩．分别记作 ν_r 和 μ_r．特别，$\nu_1=M\xi=\mu$ 为均值，$\mu_2=D\xi=\sigma^2$ 为方差．

1°　若 ξ 是连续型随机变量，其分布密度为 $p(x)$，则

$$\nu_r=E\xi^r=\int_{-\infty}^{\infty}x^r p(x)dx$$

$$\mu_r=E(\xi-E\xi)^r=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^r p(x)dx$$

2°　若 ξ 是离散型随机变量，其可能取值为 $x_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$，且 $P(\xi=x_k)=p_k$，则

$$\nu_r=E\xi^r=\sum_k x_k^r p_k$$

$$\mu_r=E(\xi-E\xi)^r=\sum_k (x_k-E\xi)^r p_k$$

3°　当 $r\geqslant 0$，随机变量 $|\xi|^r$ 和 $|\xi-E\xi|^r$ 的数学期望（假设存在）分别称为随机变量 ξ 的 r 阶绝对原点矩和 r 阶绝对中心矩．且有类似公式与 1°，2° 对应．

4° 原点矩 ν_r 和中心矩 μ_r 满足如下关系(r 是正整数):

$$\mu_r=\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\nu_1{}^{r-j}\nu_j$$

$$\nu_r=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\nu_1{}^{r-j}\mu_j$$

式中 $\binom{r}{j}$ 为二项系数.

[协方差与相关系数] 设随机变量 ξ_1 和 ξ_2 的均值和方差都存在,则 ξ_1 和 ξ_2 的协方差 $\sigma_{\xi_1\xi_2}$ 或 $\mathrm{Cov}(\xi_1,\xi_2)$ 为

$$\sigma_{\xi_1\xi_2}=E[(\xi_1-E\xi_1)(\xi_2-E\xi_2)]$$

ξ_1 和 ξ_2 的相关系数 $\rho_{\xi_1\xi_2}$ 为

$$\rho_{\xi_1\xi_2}=\frac{E[(\xi_1-E\xi_1)(\xi_2-E\xi_2)]}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_2}}$$

四、概率母函数·矩母函数·特征函数

[整数值随机变量的概率母函数] 若 ξ 是只取非负整数值的随机变量, 则称随机变量函数 θ^ξ 的均值 $E\theta^\xi$ 为随机变量 ξ 的概率母函数. 记 $P(\xi=k)=p_k$ $(k=0,1,2,\cdots)$,则 ξ 的概率母函数是

$$P(\theta)=\sum_k p_k\theta^k\quad(-1\leqslant\theta\leqslant1)$$

设 $P^{(m)}(\theta)=\frac{d^m}{d\theta^m}P(\theta)$, 则

$$P'(1)=E\xi=\mu$$

$$P''(1)=E[\xi(\xi-1)]=\nu_2-\mu$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P^{(m)}(1)=E[\xi(\xi-1)\cdots(\xi-m)]$$

反过来有

$$\mu=P'(1)$$

$$\sigma^2=P''(1)+P'(1)-[P'(1)]^2$$

[矩母函数] 若 ξ 是随机变量,则称随机变量函数 $e^{t\xi}$ 的均值

$$\mu(t)=E(e^{t\xi})$$

为 ξ 的矩母函数. 如果 ξ 有任意阶原点矩 $\nu_k(k=1,2,\cdots)$,则

$$\mu(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_k}{k!}t^k$$

$$\nu_k = \mu^{(k)}(0)$$

1° 若ξ是离散型随机变量，其可能取值为$x_1, x_2, \cdots, P(\xi = x_k) = p_k$，则

$$\mu(t) = \sum_k e^{tx_k} p_k$$

2° 若ξ是连续型随机变量，其分布密度为$p(x)$，则

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p(x) dx$$

[特征函数]　若ξ是随机变量，称复值随机变量$e^{it\xi}$的均值

$$\varphi(t) = E(e^{it\xi}) \quad (i = \sqrt{-1})$$

为ξ的特征函数．如果ξ有任意阶原点矩$\nu_k (k = 1, 2, \cdots)$，则

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{k!} (it)^k$$

$$\nu_k = (-i)^k \varphi^{(k)}(0)$$

1° 若ξ是离散型随机变量，其可能取值为$x_1, x_2, \cdots, P(\xi = x_k) = p_k$，则

$$\varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k$$

2° 若ξ是连续型随机变量，其分布密度为$p(x)$，则

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx$$

[概率母函数、矩母函数和特征函数之间的关系]

$$P(e^t) = \mu(t)$$

$$P(e^{it}) = \varphi(t)$$

$$\mu(it) = \varphi(t)$$

五、常用分布函数

1. 常用离散型分布

名称记号	概率分布及其定义域、参数条件	均值 $E\xi$	方差 $D\xi$
二项分布 $B(n,p)$	$P_B(\xi=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ $x=0,1,\cdots,n$ $p>0,\ q>0,\ p+q=1$ n 为正整数	np	npq
泊松分布 $P(\lambda)$	$P_P(\xi=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ $x=0,1,2,\cdots$ λ 为正实数	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$P_G(\xi=x)=pq^{x-1}$ $x=1,2,\cdots$ $p>0,q>0,p+q=1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
负二项分布 $B^-(a,p)$	$P_{B^-}(\xi=x)=\binom{a+x-1}{x}p^a q^x$ $x=0,1,2,\cdots$ $p>0,q>0,p+q=1$ a 为正实数	$\frac{aq}{p}$	$\frac{aq}{p^2}$
单点分布 $\delta(c)$	$P_\delta(\xi=x)=\begin{cases}1, & x=c\\0, & x\neq c\end{cases}$ c 为正整数	c	0

概率母函数 $p(\theta)$	矩母函数 $\mu(t)$	特征函数 $\varphi(t)$	图　　示
$(p\theta+q)^n$	$(pe^t+q)^n$	$(pe^{it}+q)^n$	$B(20, 0.1)$, $B(20, 0.3)$, $B(20, 0.5)$
$e^{\lambda(\theta-1)}$	$e^{\lambda(e^t-1)}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$
$\frac{p\theta}{1-q\theta}$	$\frac{p}{e^{-t}-q}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$	$G(0.5)$, $G(0.3)$, $G(0.1)$
$\left(\frac{p}{1-q\theta}\right)^\alpha$	$\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^\alpha$	$\left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^\alpha$	$B(0.5, 0.5)$, $B(0.5, 0.1)$
θ^c	e^{ct}	e^{ict}	$\delta(c)$

名称记号	概率分布及其定义域、参数条件	均值 $E\xi$	方差 $D\xi$
对数分布 $L(p)$	$P_L(\xi=x)=-\frac{1}{\ln p}\frac{q^x}{x}$ $x=1,2,\cdots$ $p>0, q>0, p+q=1$	$-\frac{q}{p\ln p}$	$-\frac{q\left(1+\frac{q}{\ln p}\right)}{p^2\ln p}$
超几何分布 $H(n,M,N)$	$P_H(\xi=x)=\frac{\binom{N-M}{n-x}\binom{M}{x}}{\binom{N}{n}}$ $x=\max\{0,n-N+M\},\cdots,$ $\min\{n,M\}$ N,M,n 为正整数 $0\leqslant M\leqslant N, 0\leqslant n\leqslant N$	$E\xi=n\frac{M}{N}$ $D\xi=n\frac{N-n}{N-1}\frac{M(N-M)}{N^2}$	

2. 常用连续型分布

名称记号	分布密度及其定义域、参数条件	均值 $E\xi$	方差 $D\xi$
均匀分布 $u(a,b)$	$p_u(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & x<a \text{ 或 } x>b\end{cases}$ $-\infty<a<b<\infty$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
标准正态分布 $N(0,1)$	$p_N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $-\infty<x<\infty$	0	1
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$p_N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$ $-\infty<\mu<\infty,\ \sigma>0$	μ	σ^2

概率母函数 $p(\theta)$	矩母函数 $\mu(t)$	特征函数 $\varphi(t)$	图　　示
$\frac{\ln(1-q\theta)}{\ln p}$	$\frac{\ln(1-qe^{t})}{\ln p}$	$\frac{\ln(1-qe^{it})}{\ln p}$	

$$\varphi(t)=\frac{\binom{N-M}{n}}{\binom{N}{n}}F(-n,-M;N-M-n+1;e^{it})$$

（F为超几何函数）

矩母函数 $\mu(t)$	特征函数 $\varphi(t)$	图　　示
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$	$\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{it(b-a)}$	
$e^{\frac{t^2}{2}}$	$e^{-\frac{t^2}{2}}$	
$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$	$e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$	

名称记号	分布密度及其定义域、参数条件	均值 $E\xi$	方差 $D\xi$
瑞利分布 $R(\mu)$	$p_R(x)=\begin{cases}\frac{x}{\mu^2}e^{-\frac{x^2}{2\mu^2}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $\mu>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mu$	$\frac{4-\pi}{2}\mu^2$
指数分布 $e(\mu,\lambda)$	$p_e(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-\mu)}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$	$\mu+\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
贝塔分布 $\beta(p,q)$	$p_\beta(x)=\begin{cases}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}, & 0<x<1\\ 0, & x\leqslant 0\text{或}x\geqslant 1\end{cases}$ $p>0,\ q>0$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$
伽马分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$p_\Gamma(x)=\begin{cases}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(x-c)^{\alpha-1}e^{-\beta(x-c)}, & x>c\\ 0, & x\leqslant c\end{cases}$ $\alpha>0,\ \beta>0$	$\frac{\alpha}{\beta}+c$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
对数正态分布 $Ln(\mu,\sigma^2)$	$p_{Ln}(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $-\infty<\mu<\infty,\ \sigma>0$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$

矩母函数 $\mu(t)$	特征函数 $\varphi(t)$	图　　示
$e^{\mu t}\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$	$e^{i\mu t}\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$	
${}_1F_1(p;p+q;it)$ (库默尔函数)		
$e^{ct}\left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}$	$e^{ict}\left(1-\frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$	

名称记号	分布密度及其定义域、参数条件	均值 $E\xi$
χ^2分布 (自由度n) $\chi^2(n)$	$p_{\chi^2}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ n为正整数	n
t分布 (自由度n) $t(n)$	$p_t(x)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ n为正整数	0 $(n>1)$
F分布 (自由度(m,n)) $F(m,n)$	$p_F(x)=$ $\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1+\dfrac{mx}{n}\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ m, n为正整数	$\dfrac{n}{n-2}$ $(n>2)$
威布尔分布 $W(m,\alpha)$	$p_W(x)=\begin{cases}\dfrac{m}{\alpha}(x-\gamma)^{m-1}e^{-\frac{(x-\gamma)^m}{\alpha}}, & x\geqslant\gamma\\ 0, & x<\gamma\end{cases}$ 形状参数$m>0$，尺度参数$\alpha>0$，位置参数γ	$\alpha^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(1+\dfrac{1}{m}\right)+\gamma$
柯西分布 $C(\mu,\alpha)$	$\dfrac{\alpha}{\pi}\dfrac{1}{\alpha^2+(x-\mu)^2}$ $-\infty<x<\infty$ $-\infty<\mu<\infty$, $\alpha>0$	不

如果某随机变量ξ遵从标准正态分布，则简记作$\xi\sim N(0,1)$，等等。

方差 $D\xi$	矩母函数 $\mu(t)$	特征函数 $\varphi(t)$	图　　示
$2n$	$(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$	$(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$	$p_{\chi^2}(x)$；0.5，0.4，0.3，0.2，0.1；$\chi^2(1)$，$\chi^2(2)$，$\chi^2(6)$；O 2 4 6 8 10 x
$\frac{n}{n-2}$ $(n>2)$		$\frac{1}{\pi\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\lvert t\rvert}{2\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot N_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\lvert t\rvert}{\sqrt{n}}\right)$ $N_{\frac{n}{2}}(y)$为诺伊曼函数	$p_t(x)$；0.5；$N(0,1)$，$t(3)$；-3 -2 -1 1 2 3 4 x
$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ $(n>4)$		$\varphi(t)=$ ${}_1F_1\left(\frac{m}{2};-\frac{n}{2};-\frac{n}{m}it\right)$ (库默尔函数)	$p_F(x)$；1.0，0.8，0.6，0.4，0.2；$F(1,5)$，$F(10,10)$，$F(5,4)$；O 1 2 3 4 5 x
$a^{\frac{2}{m}}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]$			$\gamma=0$；$p_W(x)$；1；$W(3,1)$，$W(2,1)$；O 1 2 x
存在		$e^{i\mu t-a\lvert t\rvert}$	

六、大数法则与中心极限定理

［大数法则］

1° 伯努利定理 随机事件A在n次独立试验中的频率$\frac{\nu}{n}$依概率收敛于事件A的概率p，即对任意$\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\nu}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

2° 互相独立的随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots$，如果(i)存在均值和方差，记$E\xi_k=\mu$，$D\xi_k=\sigma^2(k=1,2,\cdots)$；或者(ii)具有相同分布，且有有限均值$E\xi_k=\mu$，那末

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

依概率收敛于随机变量的均值$E\xi_k=\mu$，即对任意$\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\mu\right|<\varepsilon\right)=1$$

3° 如果互相独立具有相同分布的随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots$的均值和方差都存在，记$E\xi_k=\mu$，$D\xi_k=\sigma^2(k=1,2,\cdots)$，那末

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2$$

依概率收敛于随机变量的方差$D\xi_k=\sigma^2$，即对任意$\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right]=1$$

［中心极限定理］

1° 如果互相独立具有相同分布的随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots$的均值和方差都存在，记$E\xi_k=\mu$，$D\xi_k=\sigma^2(k=1,2,\cdots)$，那末随机变量

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

渐近地遵从标准正态分布$N(0,1)$，即

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqslant x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

2° 在 1° 的条件下，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2}}\leqslant x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2}}\leqslant x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

七、正态分布表的用途

实用中，很多随机现象都遵从正态分布，或经适当变换而渐近地遵从正态分布。本手册附有正态概率积分

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

的数值表，以及积分

$$P(\xi\geqslant K_\alpha)=\int_{K_\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\alpha\quad(K_\alpha\geqslant 0)$$

中 α 值与 K_α 值对应表。利用它们可计算下列问题：

1° 遵从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量 ξ 落在区间 $[\beta_1,\beta_2]$ 内的概率为

$$P(\beta_1\leqslant\xi\leqslant\beta_2)=\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\Phi(\beta_2)-\Phi(\beta_1)$$

单边概率为

$$P(\xi\leqslant\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\Phi(\lambda)$$

$$P(\xi>\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=1-\Phi(\lambda)$$

(或从 α 值与 K_α 值对应表中查出 $K_\alpha=\lambda$ 的 α 值来)。

2° 已知 α,确定积分

$$\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=1-\alpha$$

中的 u_α. 由对称性

$$\int_{u_\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\frac{\alpha}{2}=\int_{K_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

从 α 值与 K_α 值对应表中找出 $K_{\frac{\alpha}{2}}$, 则 $u_\alpha=K_{\frac{\alpha}{2}}$.

3° 遵从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 ξ 落在区间 $[\beta_1,\beta_2]$ 内的概率为

$$P(\beta_1\leqslant\xi\leqslant\beta_2)=\Phi\left(\frac{\beta_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\beta_1-\mu}{\sigma}\right)$$

单边概率为

$$P(\xi\leqslant\lambda)=\Phi\left(\frac{\lambda-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(\xi>\lambda)=1-\Phi\left(\frac{\lambda-\mu}{\sigma}\right)$$

八、概率纸

概率纸是按某种分布函数而设计的一种特殊的坐标纸. 横轴与试验值有关, 纵轴与累积概率有关. 利用概率纸可以检验试验数值所遵从的分布类型, 估计分布的参数和作各种统计推断. 常用的概率纸介绍于下:

[正态概率纸]　(图 16.1)它的横轴按等分刻度, 表示观测值(x), 纵轴用非等分刻度,表示累积正态概率(频率)

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

遵从正态分布的观测值在正态概率纸上作图是一条直线. 利用它可求分布的均值和方差的近似值.

[对数正态概率纸]　(图 16.2)它的横轴用自然对数刻度. 纵轴用累积正态概率刻度. 遵从对数正态分布的观测值在对数正态概率纸上作图是一条直线. 利用它可估计对数正态分布的均值和方差.

[威布尔概率纸]　(图 16.3)它的横轴用自然对数刻度, 纵轴用双自然对数刻度.

设威布尔分布函数为

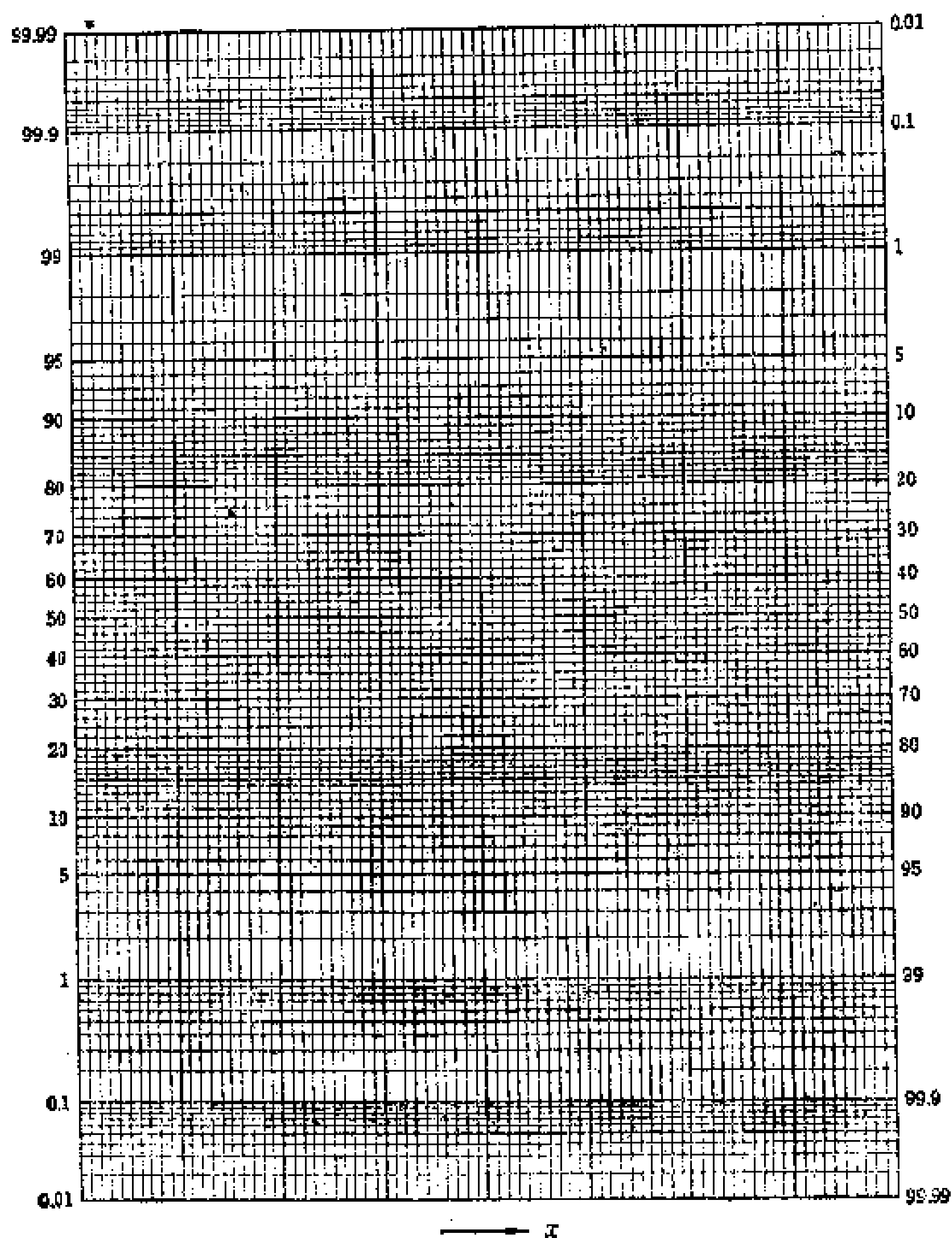

99.99
99.9
99
95
90
80
70
60
50
40
30
20
10
5
1
0.1
0.01
0.01
0.1
1
5
10
20
30
40
50
60
70
80
90
95
99
99.9
99.99
x

图 16.1　正态概率纸

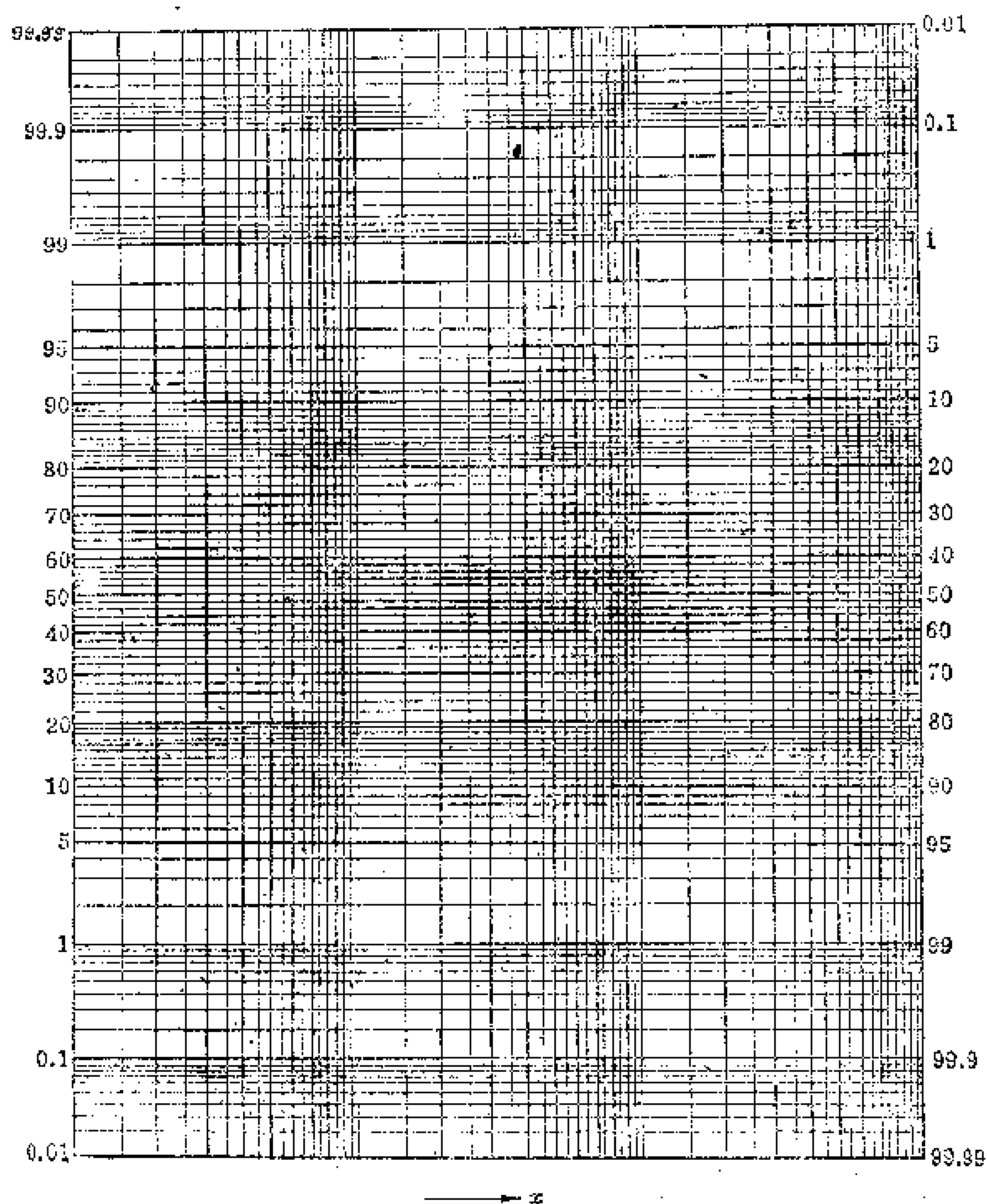


图 16.2　对数正态概率纸

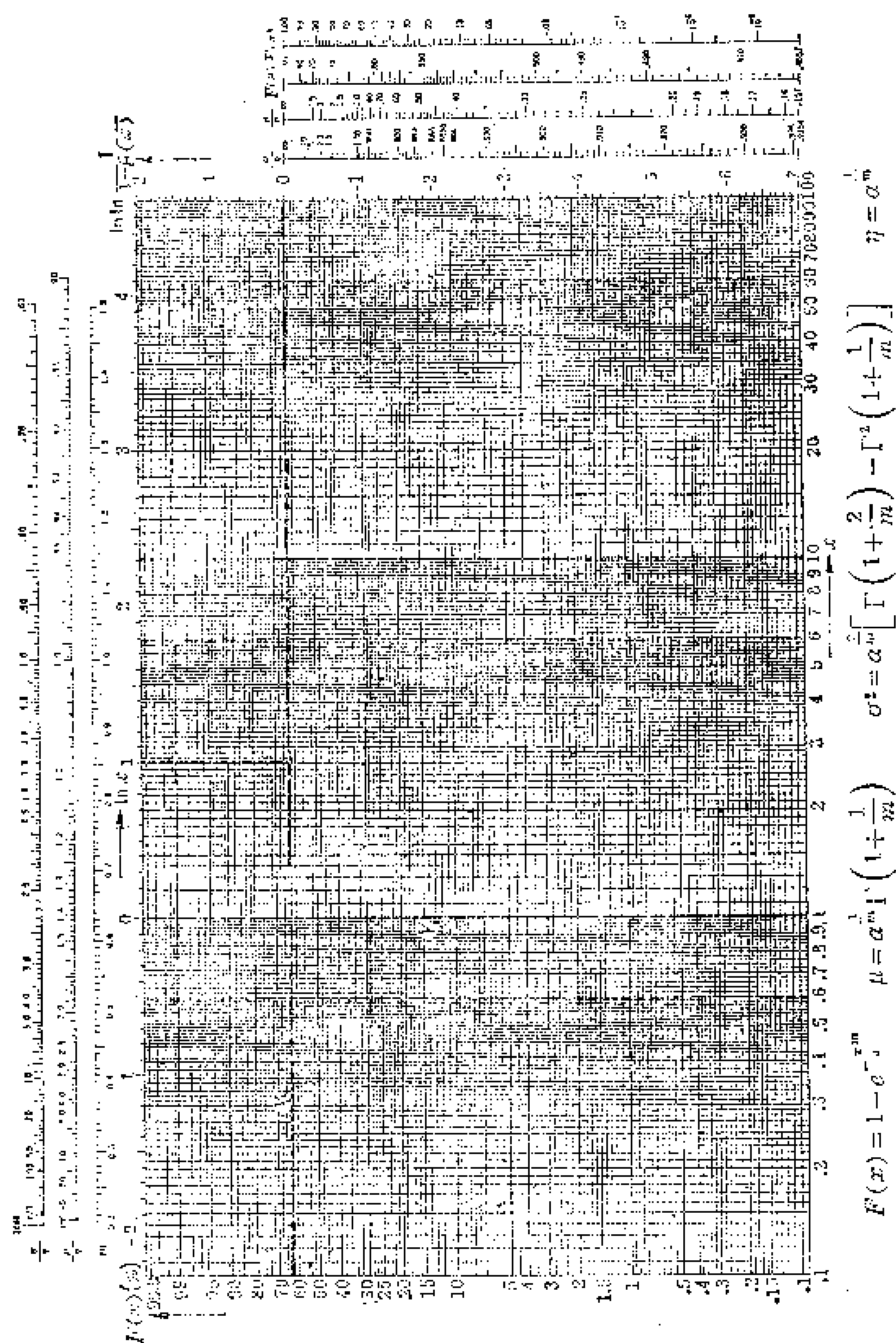

$F(x)=1-e^{-\frac{x^m}{\alpha}}$
$\mu=\alpha^{\frac{1}{m}}\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)$
$\sigma^2=\alpha^{\frac{2}{m}}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]$
$\eta=\alpha^{\frac{1}{m}}$
$\ln\ln\frac{1}{1-F(x)}$
$\ln x$

图 16.3　威布尔概率纸

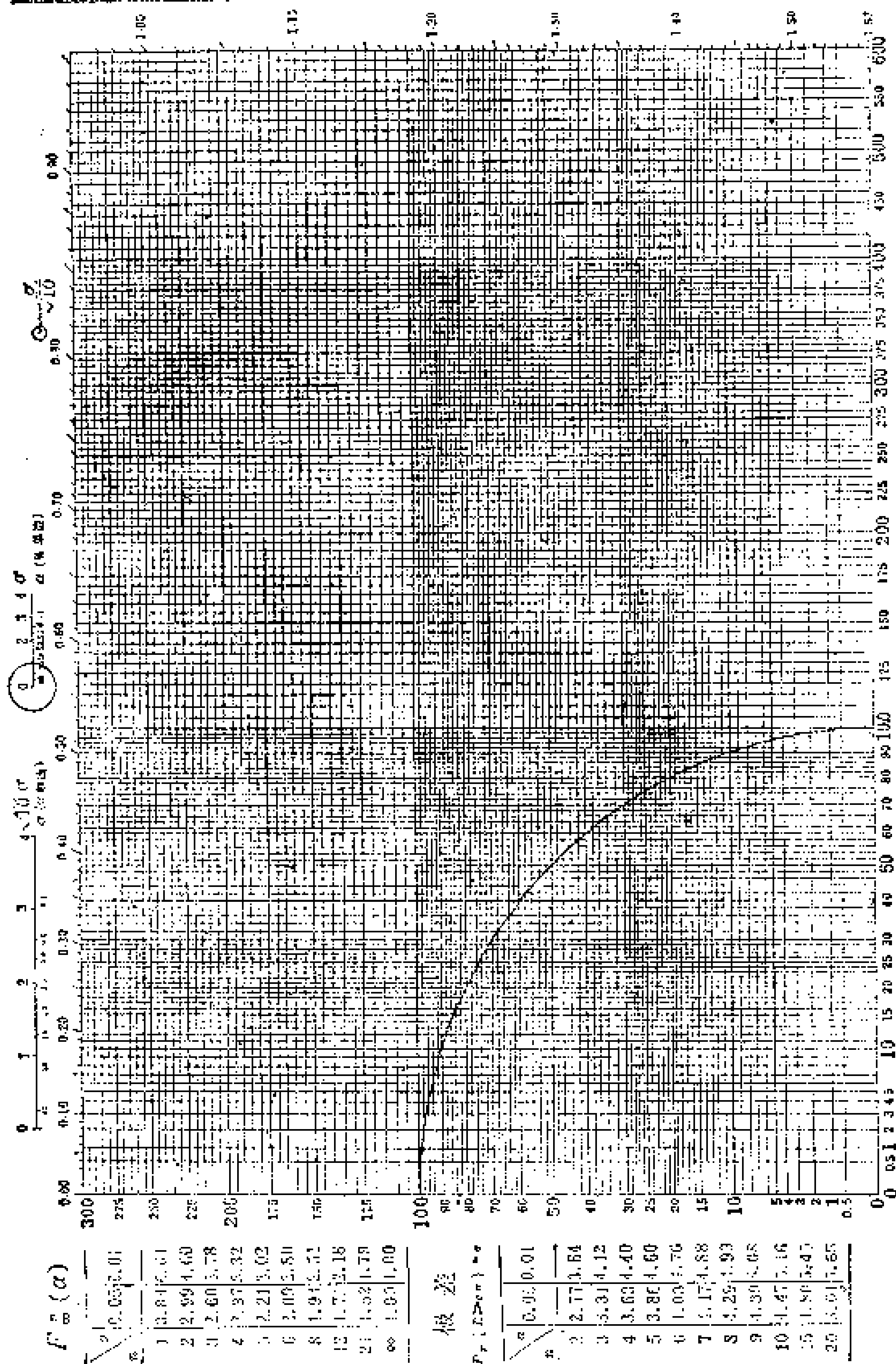


图 16.4　统计分析纸(二项概率纸)

$$F(x)=1-e^{-\frac{x^m}{\alpha}}$$

变形后两边取两次对数得

$$\ln\ln\frac{1}{1-F(x)}=m\ln x-\ln\alpha$$

再设　　$Y=\ln\ln\frac{1}{1-F(x)}$，$X=\ln x$，$B=\ln\alpha$

则有　　$Y=mX-B$

因此遵从威布尔分布的观测值在该概率纸上作图是一条直线.

[统计分析纸（二项概率纸）]　（图16.4）它的横轴与纵轴都采用平方根刻度. 在坐标100处画有四分之一个圆. 纸的左边有两个表，上方有三根特殊刻度的标尺. 左边一个标尺上面的刻度是均匀的，称为σ尺；下面的刻度不均匀，称为α尺. 从σ尺0点到α尺某个刻度α的长度记作K_α，这里α表示信度（或显著性水平）.

§2　数理统计方法

一、总体参数的估计

1. 总体(母体)与样本(子样)

研究某个问题，它的对象的所有可能观测结果称为总体(或母体)，记作ξ. 总体ξ中抽取一部分样品$x_1,x_2,\cdots,x_n$称为总体的一个样本(或子样). 样本中样品的个数称为样本的大小(或容量). $n>30$，可以认为是大样本，否则称为小样本.

数理统计方法就是应用概率论的结果，通过样本来了解和判断总体的统计特性的科学方法.

2. 样本特征数与总体数字特征对照表

名　称	样　本　特　征　数	总体数字特征
均　值	$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$	$\mu=E\xi$
方　差	$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$	$\sigma^2=D\xi$

名称	样本特征数	总体数字特征
标准差	$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}$	$\sigma=\sqrt{D\xi}$
变异系数	$C_v=\frac{s}{\bar{x}}$	$C_v=\frac{\sqrt{D\xi}}{E\xi}=\frac{\sigma}{\mu}$
偏态系数	$C_s=\frac{n}{(n-1)(n-2)}\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^3}{s^3}$	$C_s=\frac{\mu_3}{(\sqrt{D\xi})^3}$
峰态系数	$C_e=\frac{n^2-2n+3}{(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^4}{s^4}-\frac{3(2n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\frac{\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\right]^2}{s^4}$	$C_e=\frac{\mu_4}{(D\xi)^2}-3$

注意：1° 当 n 较大时，取

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$$

（有时称此 s^2 为样本方差，而称表中的 s^2 为样本修正方差）

$$C_s=\frac{1}{n-3}\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^3}{s^3}$$

$$C_e=\frac{n-2}{n^2-6n+11}\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^4}{s^4}-\frac{6}{n^3-6n^2+11n-6}\frac{\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\right]^2}{s^4}$$

2° 样本特征数还有

样本 r 阶原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^r$

样本 r 阶中心矩 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^r$

样本中位数 $x_{\frac{n-1}{2}+1}$ (样本大小 n 为奇数)

样本均差 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-\bar{x}|$

样本极差 $\max_{1\leq k\leq n}\{x_k\}-\min_{1\leq k\leq n}\{x_k\}$

3. 总体参数的点估计

记 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是从总体 ξ 中取出的一个样本，可用样本的特征数来估计总体的数字特征. 其常用方法有以下两种:

[矩法] 矩法是用样本的 r 阶矩作为总体 r 阶矩的估值. 具体步骤如下:

设 ξ 的分布函数包含 k 个参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ (其取值未知), 记作 $F(x, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$. 假定 ξ 的 k 阶原点矩存在, 它们自然是 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的函数, 即

$$\nu_r=\nu_r(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)=\int_{-\infty}^{\infty}x^r dF(x, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) \qquad (r=1,2,\cdots,k)$$

考虑总体的一个样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 作出这一样本的 r 阶矩 $\hat{\nu}_r$, 即

$$\hat{\nu}_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^r \quad (r=1,2,\cdots,k)$$

然后解方程组

$$\nu_r(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)=\hat{\nu}_r \quad (r=1,2,\cdots,k)$$

记所得的解为

$$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \quad \hat{\theta}_k=\hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

用 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 分别作为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估值.

[最大似然法] 设总体的分布是连续型的, 分布密度函数为 $p(x, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$, 其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 是待估计的未知参数. 对于给定的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使函数 $\prod_{i=1}^{n}p(x_i, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ 达到最大值的 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$, 并用它们分别作为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估值.

由于 $\ln\prod_{i=1}^{n}p(x_i, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ 与 $\prod_{i=1}^{n}p(x_i, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ 在同一点 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k)$ 上达到最大值, 因此, 引入函数

$$L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)=\ln\prod_{i=1}^{n}p(x_i, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

它称为似然函数. 只要解方程组

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,k)$$

就可以从中确定所要求的 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k$，它们分别称为参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的最大似然估值.

如果总体的分布是离散型的，只要把上述似然函数中的 $p(x_i,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 取为 $P(\xi=x_i)$ 就可以了.

例 正态总体的参数估计. 假定已知总体遵从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，但参数 μ,σ^2 未知. 现在要用总体的 n 次观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 求 μ,σ^2 的最大似然估值.

解 因为总体的分布密度函数为

$$p(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

因此，似然函数为

$$L(\mu,\sigma)=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-n\ln\sigma-\frac{n}{2}\ln 2\pi$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial \mu}=0\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial \sigma}=0\end{cases}$$

得

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

容易检验 $\hat{\mu},\hat{\sigma}^2$ 确实使 $L(\mu,\sigma)$ 取到最大值. 因此它们分别是 μ,σ^2 的最大似然估值.

[估值好坏的判别标准]

1° 无偏性 如果参数 θ 的估值 $\hat{\theta}_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足关系式

$$E\hat{\theta}_n=\theta$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的无偏估值.

2° 有效性 如果 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\theta}'$ 都是参数 θ 的无偏估值,

$$D\hat{\theta} \leqslant D\hat{\theta}'$$

则称 $\hat{\theta}$ 比 $\hat{\theta}'$ 有效. 进一步，如果固定样本的容量 n，使 $D\hat{\theta}$ = 极小值的无偏估值 $\hat{\theta}$ 就称为 θ 的有效估值.

3° 一致性 如果对任意给定的正数 ε，总有

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

则称 θ 的估值 $\hat{\theta}_n$ 是一致的.

由契贝谢夫不等式(见 § 1，三)易见，当

$$\lim_{n \to \infty} E|\hat{\theta}_n - \theta|^r = 0$$

对某 $r \geqslant 0$ 成立时，$\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一致估值.

在实用中，往往应用这一充分条件来验证 $\hat{\theta}_n$ 是否是 θ 的一致估值.

例

总体分布	未知总体参数	总体参数估值	无偏性	有效性	一致性
$B(1, p)$	p	$\hat{p} = \bar{x}$	有		有
$P(\lambda)$	λ	$\hat{\lambda} = \bar{x}$	有	有	有
$u(a, b)$	a、b	$\hat{a} = x_1$，$\hat{b} = x_n$	有		
$N(\mu, \sigma^2)$	μ, σ^2	$\hat{\mu} = \bar{x}$	有	有	有
$N(\mu, \sigma^2)$	σ^2	$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$	有	有	有
$N(\mu, \sigma^2)$	μ, σ^2	$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$			有
$N(\mu, \sigma^2)$	μ, σ^2	$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$	有		
$e(\mu, \lambda)$	μ	$\hat{\mu} = \bar{x}$	有	有	有

4. 样本的频率分布

频率分布较完整地反映实验数据的变化规律. 建立频率分布的步骤（设样本为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$）是:

(1) 找出最大值与最小值，求得极差 $R = \max\{x_i\} - \min\{x_i\}$.

(2) 根据样本大小分组，通常大样本分成 10～20 组，小样本分成 5～6 组，再根据组数 k 和极差 R 决定组距 c，如果按等距分组，则 $c \approx \frac{R}{k}$.

(3) 确定分点(常取比原数据的精度高一位)。

(4) 数出各组的频数 ν_i.

(5) 计算频率$\frac{\nu_i}{n}$.

(6) 画直方图(分点为横坐标,频率与组距之比为纵坐标).

(7) 如果变量是连续的,则描出光滑曲线,近似地代替总体的分布.

5. 总体参数的区间估计

[小概率原理] 在一次试验中,概率很小(接近于零)的事件认为是实际上不可能发生的事件;而概率接近于1的事件认为是实际上必然发生的事件.

[置信区间与信度] 对总体参数 θ (如 μ,σ^2,σ 等) 进行区间估计 (即估计参数的取值范围)时,如果对于预先给定的很小的概率 α,能找到一个区间 (θ_1,θ_2),使得

$$P(\theta_1<\theta<\theta_2)=1-\alpha$$

那末称区间(θ_1,θ_2)为参数 θ 的置信区间,θ_1 和 θ_2 称为置信限(或临界值);$\theta\leqslant\theta_1$ 和 $\theta\geqslant\theta_2$ 称为否定域;概率 α 称为信度(或显著性水平),$1-\alpha$ 称为置信水平(或置信概率).

[总体参数的区间估计表] 假设总体遵从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 对于预先给定的信度 α,可以用一个样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的均值 $\bar{x}$ 和标准差 s 来估计总体的均值 μ 和方差 σ^2 的置信区间,也可用两个样本$\{x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n_1}\}$与$\{x_{21},x_{22},\cdots,x_{2n_2}\}$的均值$\bar{x}_1,\bar{x}_2$ 和标准差 s_1,s_2 来估计两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间.

样本情况	总体参数 μ 或 σ^2 的置信区间	与置信区间有关的 $u_\alpha,t_\alpha,\chi^2_\alpha$ 与 F_α 的确定
大样本 已知总体方差 σ^2	$\mu\in\left(\bar{x}-\frac{u_\alpha\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{u_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=1-\alpha$ 查正态分布表
大样本 总体方差未知	$\mu\in\left(\bar{x}-\frac{u_\alpha s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{u_\alpha s}{\sqrt{n}}\right)$	同 上
小样本 已知总体方差 σ^2	$\mu\in\left(\bar{x}-\frac{u_\alpha\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{u_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	同 上

样本情况	总体参数 μ 或 σ^2 的置信区间	与置信区间有关的 $u_\alpha, t_\alpha, \chi_\alpha^2$ 与 F_α 的确定
小样本 总体方差未知	$\mu\in\left(\bar{x}-\frac{t_\alpha s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{t_\alpha s}{\sqrt{n}}\right)$	$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} t(n-1)dv=1-\alpha$ 查 t 分布表(自由度为 $n-1$)
已知两总体的方差 σ_1^2,σ_2^2	$\mu_1-\mu_2\in(\bar{x}_1-\bar{x}_2-u_\alpha\sigma_3,$ $\bar{x}_1-\bar{x}_2+u_\alpha\sigma_3)$ $\sigma_3=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=1-\alpha$ 查正态分布表
两总体的方差未知	$\mu_1-\mu_2\in\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_\alpha s_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\right.$ $\left.\bar{x}_1-\bar{x}_2+t_\alpha s_0\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$ 式中 $s_0=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$	$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} t(n_1+n_2-2)dx=1-\alpha$ 查 t 分布表 (自由度为 n_1+n_2-2)
小样本 已知总体均值 μ	$\sigma^2\in\left(\frac{1}{\chi_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,\ \frac{1}{\chi_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$	$\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2}\chi^2(n)dv=1-\alpha$ 查 χ^2 分布表 (自由度为 n)
小样本 总体均值未知	$\sigma^2\in\left(\frac{n-1}{\chi_2^2}s^2,\ \frac{n-1}{\chi_1^2}s^2\right)$	$\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2}\chi^2(n-1)dv=1-\alpha$ 查 χ^2 分布表 (自由度为 $n-1$)
小样本 两总体的均值与方差未知	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\in\left(\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_\alpha(n_1-1,n_2-1)},\ F_\alpha'(n_2-1,n_1-1)\frac{s_1^2}{s_2^2}\right)$	$\int_0^{F_\alpha}F(n_1-1,n_2-1)dv=1-\alpha$ 查 F 分布表 (自由度为 $(n_1-1,\ n_2-1)$) $\int_0^{F_\alpha'}F(n_2-1,n_1-1)dv=1-\alpha$ 查 F 分布表 (自由度为 (n_2-1,n_1-1))

二、统计检验

1. 统计检验的步骤

先假设总体具有某种统计特性（如具有某种参数，或遵从某种分布等），然后再检验这个假设是否可信，这种方法称为统计检验（或假设检验），其步骤如下：

例 已知某产品平均强度 $\mu_0=9.73$ 公斤，现改变制作方法，并随意抽取200件，算得 $\bar{x}=9.94$ 公斤，$s=1.62$ 公斤．问制作方法的改变对强度有无显著影响？

统计检验步骤	过 程 分 析
(1) 假设 H_0	H_0: $\mu=\mu_0$ （μ是制作方法改变后的总体均值）
(2) 选取统计量，明确其分布	$u=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s}\sim N(0,1)$
(3) 给出信度 α	$\alpha=5\%$
(4) 查出置信限 u_α	由 $\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=1-\alpha$ 查正态分布表得 $u_{5\%}=1.96$
(5) 计算统计量 u	$u=\dfrac{\sqrt{200}(9.94-9.73)}{1.62}=1.83\cdots<1.84$
(6) 统计推断 当 $\|u\|<u_\alpha$ 时，接受 H_0 当 $\|u\|\geqslant u_\alpha$ 时，否定 H_0	由于 $\|u\|<1.84<1.96=u_{5\%}$ 所以相信 H_0，以 5% 的信度认为制作方法的改变对产品强度无显著影响．

2. 正态总体参数的统计检验表

对于大样本，不管总体遵从什么分布，根据中心极限定理，可以认为样本均值 $\bar{x}$ 渐近遵从正态分布．因此，利用下述"u 检验法"对总体参数进行统计检验．

表中 α 为给定的信度，$\bar{x}$ 为样本均值，s 为样本标准差．

名称	条件与检验目的	假设 H_0	统计量及其分布	否定域	置信限的确定
[u 检验法]	已知总体方差 σ^2，检验总体的均值 μ 是否等于(或小于或大于)已知常数 μ_0	$\mu=\mu_0$	$u=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma}\sim N(0,1)$	$\lvert u\rvert\geqslant u_\alpha$	$\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\alpha$
		$\mu\leqslant\mu_0$		$u\geqslant u_\alpha$	$\int_{-\infty}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\alpha$
		$\mu\geqslant\mu_0$		$u\leqslant -u_\alpha$	$\int_{-u_\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\alpha$
	已知两总体方差相等 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 比较两总体均值 μ_1 和 μ_2	$\mu_1=\mu_2$	$u=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\lvert u\rvert\geqslant u_\alpha$	$\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\alpha$
		$\mu_1\leqslant\mu_2$		$u\geqslant u_\alpha$	$\int_{-\infty}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\alpha$
		$\mu_1\geqslant\mu_2$		$u\leqslant -u_\alpha$	$\int_{-u_\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\alpha$
	已知两总体方差 σ_1^2,σ_2^2 比较两总体均值 μ_1 和 μ_2	$\mu_1=\mu_2$	$u=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\lvert u\rvert\geqslant u_\alpha$	$\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\alpha$
		$\mu_1\leqslant\mu_2$		$u\geqslant u_\alpha$	$\int_{-\infty}^{u_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\alpha$
		$\mu_1\geqslant\mu_2$		$u\leqslant -u_\alpha$	$\int_{-u_\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\alpha$

名称	条件与检验目的	假设 H_0	统计量及其分布	否定域	置信限的确定
[t检验法]	总体方差未知，检验总体均值是否等于(或小于或大于)已知常数 μ_0	$\mu=\mu_0$	$t=\dfrac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-\mu_0)}{s}\sim t(n-1)$	$\lvert t\rvert\geqslant t_\alpha$	$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha}t(n-1)dv=1-\alpha$
		$\mu\leqslant\mu_0$		$t\geqslant t_\alpha$	$\int_{-\infty}^{t_\alpha}t(n-1)dv=1-\alpha$
		$\mu\geqslant\mu_0$		$t\leqslant -t_\alpha$	$\int_{-t_\alpha}^{\infty}t(n-1)dv=1-\alpha$
	已知两总体方差相同(但值未知)，比较两总体的均值 μ_1 和 μ_2	$\mu_1=\mu_2$	$t=\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s_0\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\lvert t\rvert\geqslant t_\alpha$	$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha}t(n_1+n_2-2)dv=1-\alpha$
		$\mu_1\leqslant\mu_2$	$s_0=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$	$t\geqslant t_\alpha$	$\int_{-\infty}^{t_\alpha}t(n_1+n_2-2)dv=1-\alpha$
		$\mu_1\geqslant\mu_2$		$t\leqslant -t_\alpha$	$\int_{-t_\alpha}^{\infty}t(n_1+n_2-2)dv=1-\alpha$
[χ^2检	已知总体均值 μ_0，检验总体方差 σ^2 是否等于(或小于或大于)已	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\sim\chi^2(n)$	$\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\int_{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty}\chi^2(n)dv=\dfrac{\alpha}{2}$ 或 $\int_{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{\infty}\chi^2(n)dv=1-\dfrac{\alpha}{2}$
		$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$		$\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha$	$\int_{\chi^2_\alpha}^{\infty}\chi^2(n)dv=\alpha$

	知常数 σ_0^2	$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$		$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}$	$\int_{\chi^2_{1-\alpha}}^{\infty} \chi^2(n)dv = 1-\alpha$
验 法	总体均值未知，检验总体方差σ^2是否等于(或小于或大于)已知常数σ_0^2	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\int_{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} \chi^2(n-1)dv = \frac{\alpha}{2}$，或 $\int_{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} \chi^2(n-1)dv = 1-\frac{\alpha}{2}$
		$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$		$\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha}$	$\int_{\chi^2_{\alpha}}^{\infty} \chi^2(n-1)dv = \alpha$
		$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$		$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}$	$\int_{\chi^2_{1-\alpha}}^{\infty} \chi^2(n-1)dv = 1-\alpha$
F检验法	两总体的均值和方差未知，比较两总体方差	$\sigma_1 = \sigma_2$	$F = \frac{\max\{s_1^2, s_2^2\}}{\min\{s_1^2, s_2^2\}} \xlongequal{\text{记}} \frac{s_{大}}{s_{小}} \sim F(n_{大}-1, n_{小}-1)$	$F \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}$	$\int_0^{F_{\frac{\alpha}{2}}} F(n_{大}-1, n_{小}-1)dv = 1-\frac{\alpha}{2}$
		$\sigma_1 \leqslant \sigma_2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$	$F \geqslant F_{\alpha}$	$\int_0^{F_{\alpha}} F(n_1-1, n_2-1)dv = 1-\alpha$
		$\sigma_1 \geqslant \sigma_2$	$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} \sim F(n_2-1, n_1-1)$	$F \geqslant F_{\alpha}$	$\int_0^{F_{\alpha}} F(n_2-1, n_1-1)dv = 1-\alpha$

3. 总体分布函数的统计检验

设 $F_0(x)=F_0(x,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 为已知类型的分布函数，$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 为参数(已知或部分已知)，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体 ξ 的样本，假设 ξ 的分布函数为 $F(x)$，分两种情况进行统计检验．

1° $F_0(x)$的全部参数已知　把实轴$(-\infty,\infty)$分成m个不相交的区间：$(c_i,c_{i+1}]$ $(i=1,2,\cdots,m)$，$c_1=-\infty$，$c_{m+1}=\infty$，其中$(c_m,c_{m+1}]$理解成(c_m,∞)，记理论频率为

$$r_i=F_0(c_{i+1})-F_0(c_i)=P(c_i<\xi\leqslant c_{i+1})$$

ξ 的样本$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 落在区间$(c_i,c_{i+1}]$ 的个数为 ν_i(经验频数)，那末统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{m}\frac{(\nu_i-nr_i)^2}{nr_i}$$

遵从自由度为 $m-1$ 的 χ^2 分布，应用 χ^2 检验法便可检验假设

$$H_0:\ F(x)=F_0(x)$$

是否可信．

2° $F_0(x)$的参数全部或一部分未知　设$F_0(x)$有 l 个参数 $\theta_{j_1},\theta_{j_2},\cdots,\theta_{j_l}$ $(l\leqslant k)$未知，可先用最大似然法(本节，一，3)定出这 l 个参数的估值，把这些估值就当作 $F_0(x)$的相应参数，于是类似 1° 的情形可计算理论频率，再算出经验频数，那末统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{m}\frac{(\nu_i-nr_i)^2}{nr_i}$$

当 n 很大时遵从自由度为 $m-l-1$ 的 χ^2 分布．应用 χ^2 检验法便可检验假设

$$H_0:\ F(x)=F_0(x)$$

是否可信．

4. 两个样本是否来自同分布总体的统计检验

[符号检验法]　此法简单、直观，不要求对检验量的分布规律有所了解，常用来检验波动的程度是否一样和检验生产的状况有无明显的改变等问题．

用符号"＋"，"－"与"0"分别表示甲比乙的数据大、小与相等，并用 n_+，n_-与 n_0 表示出现"＋"，"－"与"0"的次数，统计检验步骤用例说明如下：

例　甲乙两人分析同一物质中某成分的含量，得下表

甲	14.7	15.0	15.2	14.8	15.5	14.6	14.9	14.8	15.1	15.0
乙	14.6	15.1	15.4	14.7	15.3	14.7	14.8	14.6	15.2	15.0
符号	+	−	−	+	+	−	+	+	−	0
甲	14.7	14.8	14.7	15.0	14.9	14.9	15.2	14.7	15.4	15.3
乙	14.6	14.6	14.8	15.3	14.7	14.6	14.8	14.9	15.2	15.0
符号	+	+	−	−	+	+	+	−	+	+

问两人的分析结果有无显著差异？

统计检验步骤	过　程　分　析
(1)假设 H_0	假设两人分析结果具有相同的分布函数
(2)统计量	$r=\min\{n_+,n_-\}$
(3)给出信度 α	$\alpha=10\%$
(4)查出置信限	查符号检验表(见下页)，由$N=n_++n_-=12+7=19$，$\alpha=10\%$ 得 $r_\alpha=5$．即否定域为 $r\leqslant r_\alpha=5$．
(5)计算统计量	$r=\min\{12,7\}=7$
(6)统计推断 当 $r>r_\alpha$ 时，接受 H_0 当 $r\leqslant r_\alpha$ 时，否定 H_0	因为　$r=7>5=r_{10\%}$ 所以接受H_0，即以 10% 的信度认为甲乙两人的分析结果无显著差异．

符号检验表

α \ N	1	5 (%) 10		25	α \ N	1	5 (%) 10		25	α \ N	1	5 (%) 10		25
	1	5	10	25		1	5	10	25		1	5	10	25
1					31	7	9	10	11	61	20	22	23	25
2					32	8	9	10	12	62	20	22	24	25
3				0	33	8	10	11	12	63	20	23	24	26
4				0	34	9	10	11	13	64	21	23	24	26
5			0	0	35	9	11	12	13	65	21	24	25	27
6		0	0	1	36	9	11	12	14	66	22	24	25	27
7		0	0	1	37	10	12	13	14	67	22	25	26	28
8	0	0	1	1	38	10	12	13	14	68	22	25	26	28
9	0	1	1	2	39	11	12	13	15	69	23	25	27	29
10	0	1	1	2	40	11	13	14	15	70	23	26	27	29
11	0	1	2	3	41	11	13	14	16	71	24	26	28	30
12	1	2	2	3	42	12	14	15	16	72	24	27	28	30
13	1	2	3	3	43	12	14	15	17	73	25	27	28	31
14	1	2	3	4	44	13	15	16	17	74	25	28	29	31
15	2	3	3	4	45	13	15	16	18	75	25	28	29	32
16	2	3	4	5	46	13	15	16	18	76	26	28	30	32
17	2	4	4	5	47	14	16	17	19	77	26	29	30	32
18	3	4	5	6	48	14	16	17	19	78	27	29	31	33
19	3	4	5	6	49	15	17	18	19	79	27	30	31	33
20	3	5	5	6	50	15	17	18	20	80	28	30	32	34
21	4	5	6	7	51	15	18	19	20	81	28	31	32	34
22	4	5	6	7	52	16	18	19	21	82	28	31	33	35
23	4	6	7	8	53	16	18	20	21	83	29	32	33	35
24	5	6	7	8	54	17	19	20	22	84	29	32	33	36
25	5	7	7	9	55	17	19	20	22	85	30	32	34	36
26	6	7	8	9	56	17	20	21	23	86	30	33	34	37
27	6	7	8	10	57	18	20	21	23	87	31	33	35	37
28	6	8	9	10	58	18	21	22	24	88	31	34	35	38
29	7	8	9	10	59	19	21	22	24	89	31	34	36	38
30	7	9	10	11	60	19	21	23	25	90	32	35	36	39

[注]　表中数字表示对应于符号和N与信度α的符号限r_α.

［秩和检验法］　此法比符号检验法的精度要高，能更好地利用数据提供的信息，并且不要求数据“成对”．其步骤用例说明如下：

例　对用甲乙两种材料制成的产品进行寿命试验，得

甲　1610　1650　1680　1700　1750　1720　1800

乙　1580　1600　1640　1640　1700

问两种材料对产品质量的影响有无显著差异？

解　把上述数据从小到大排成下表：

秩	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
甲			1610			1650	1680	1700		1720	1750	1800
乙	1580	1600		1640	1640			1700				

上表中第一行秩表示从小到大排列的序数，数据 1700 甲乙均有，排在 8，9 两个序位，其秩按平均秩取为 $\frac{8+9}{2}=8.5$．

统计检验步骤	过　程　分　析
(1)假设 H_0	假设两种材料对产品寿命影响无显著差异
(2)统计量	$T=$样品数目小的那组的秩和
(3)给出信度	$\alpha=5\%$
(4)查出置信限	查“秩和检验表”(见下页)，参数 $n_1=5$，$n_2=7$ ($n_1\leqslant n_2$，为两样本的大小)对 $\alpha=5\%$，得 T 的下限 $T'_\alpha=22$ 和上限 $T''_\alpha=43$ (即否定域 $T\leqslant T'_\alpha=22$ 或 $T\geqslant T''_\alpha=43$)
(5)计算统计量	$T=1+2+4+5+8.5=20.5$ (乙组的秩和)
(6)统计推断 当 $T'_\alpha<T<T''_\alpha$ 时，接受 H_0 当 $T\leqslant T'_\alpha$ 或 $T\geqslant T''_\alpha$ 时，否定 H_0	因为 $T=20.5<22=T'_{5\%}$，所以否定 H_0，即以 5% 的信度认为两种材料对产品寿命的影响有显著差异

秩 和 检 验 表

n_1	n_2	T'_α	T''_α	n_1	n_2	T'_α	T''_α	n_1	n_2	T'_α	T''_α	n_1	n_2	T'_α	T''_α	n_1	n_2	T'_α	T''_α
2	4	**3**	11	3	6	**7**	**23**	4	7	15	33	5	10	**24**	**56**	7	9	43	76
2	5	3	13	3	6	8	22	4	8	**14**	**38**	5	10	26	54	7	10	**43**	**83**
2	6	3	15	3	7	**8**	**25**	4	8	16	36	6	6	**26**	**52**	7	10	46	80
2	6	4	14	3	7	9	24	4	9	**15**	**41**	6	6	28	50	8	8	**49**	**87**
2	7	**3**	**17**	3	8	8	**28**	4	9	17	39	6	7	**28**	**50**	8	8	52	84
2	7	4	16	3	8	9	27	4	10	**16**	**44**	6	7	30	51	8	9	**51**	**93**
2	8	**3**	**19**	3	9	**9**	**30**	4	10	18	42	6	8	**29**	**61**	8	9	54	90
2	8	4	18	3	9	10	29	5	5	**18**	**37**	6	8	32	58	8	10	**54**	**98**
2	9	3	**21**	3	10	**9**	**33**	5	5	19	36	6	9	**31**	**65**	8	10	57	95
2	9	4	20	3	10	11	31	5	6	**19**	**41**	6	9	33	63	9	9	**63**	**108**
2	10	**4**	**22**	4	4	**11**	**25**	5	6	20	40	6	10	**33**	**69**	9	9	66	105
2	10	5	21	4	4	12	24	5	7	**20**	**45**	6	10	35	67	9	10	**66**	**114**
3	3	6	15	4	5	**12**	**28**	5	7	22	43	7	7	**37**	**68**	9	10	69	111
3	4	**6**	**18**	4	5	13	27	5	8	**21**	**49**	7	7	39	66	10	10	**79**	**131**
3	4	7	17	4	6	**12**	**32**	5	8	23	47	7	8	**39**	**73**	10	10	83	127
3	5	6	**21**	4	6	14	30	5	9	**22**	**53**	7	8	41	71				
3	5	7	20	4	7	**13**	**35**	5	9	25	50	7	9	**41**	**78**				

[注] 表头 n_1, n_2 ($n_1 \leqslant n_2$)表示两组数据的个数；T'_α 和 T''_α 分别为秩和的下限和上限，信度 $\alpha = 2.5\%$ 对应的秩和上、下限用黑体数字表示，信度 $\alpha = 5\%$ 对应的秩和上、下限用普通字体表示。

三、方差分析

方差分析是分析试验(或观测)数据的一种方法，它所要解决的基本问题是通过数据的分析，弄清与研究对象有关的各个因素以及各个因素之间交互作用对该对象的影响．它所研究的对象都假定遵从正态分布．

[单因素方差分析]　考虑一个因素A的不同水平对所考察对象的影响．对A的k个不同水平A_i(其分布$\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\cdots,k$)进行试验，得试验数据$\{x_{ij}\}$($i=1,2,\cdots,k$；$j=1,2,\cdots,n_i$)．假定$\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_k$(尽管数值未知)，检验各$A_i$的试验结果的平均值有无显著差异．其检验步骤如下：

(1) 假设H_0：$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k$．

(2) 选取统计量并明确其分布

$$F=\frac{s_1}{s_2}=\frac{\dfrac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2}{\dfrac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}$$

$$\sim F(k-1,\ n-k)$$

式中

$$\bar{x}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\qquad(i=1,2,\cdots,k),\ n=\sum_{i=1}^{k}n_i$$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{x}_i$$

(3) 给出信度α．

(4) 由F分布表(自由度为$(k-1,n-k)$)可以查出置信限F_α，它满足

$$\int_{F_\alpha}^{\infty}F(k-1,n-k)dv=\alpha$$

(5) 列表计算统计量(见下页)．

分级	试验数据 x_{ij}	n_i	$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$	$\left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\right)^2$	$\frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\right)^2$	$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2$
A_1	$x_{11}\quad x_{12}\cdots x_{1n_1}$	n_1	$\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}$	$\left(\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\right)^2$	$\frac{1}{n_1}\left(\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\right)^2$	$\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}^2$
A_2	$x_{21}\quad x_{22}\cdots x_{2n_2}$	n_2	$\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}$	$\left(\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}\right)^2$	$\frac{1}{n_2}\left(\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}\right)^2$	$\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}^2$
$\vdots$	$\vdots\quad \vdots\cdots\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_k	$x_{k1}\quad x_{k2}\cdots x_{kn_k}$	n_k	$\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj}$	$\left(\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj}\right)^2$	$\frac{1}{n_k}\left(\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj}\right)^2$	$\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj}^2$
	$\sum_{i=1}^{k}$	$n=\sum_{i=1}^{k} n_i$	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$		$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2$
	记号	$P=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\right)^2$		$Q=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\right)^2$		$R=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2$

(5) 单因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均　方	统计量	置信限	统计推断
组间	$S_1=Q-P$	$k-1$	$s_1=\frac{S_1}{k-1}$	$F=\frac{s_1}{s_2}$	$F_\alpha(k-1,n-k)$	当$F<F_\alpha$时，接受H_0
组内	$S_2=R-Q$	$n-k$	$s_2=\frac{S_2}{n-k}$			当$F\geqslant F_\alpha$时，否定H_0
总和	$S=R-P$	$n-1$				

说明：1° 若x_{ij}的数值较大，取$x'_{ij}=x_{ij}-c$，c为某常数，则用x'_{ij}代替x_{ij}进行上述计算，其分析结果不变．2° 组间方差S_1反映了因素A的不同水平引起的系统误差，而组内方差S_2则是随机因素引起的组内差异．如果不同因素A_i所起的作用差不多，组间方差与组内方差之比就较小，则可认为$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k$；如果不同因素A_i所起的作用显著不同，组间方差与组内方差之比就较大，就不能认为$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k$．

［双因素方差分析］　考虑两个因素A和B的影响．A分成l个等级A_1，A_2，…，A_l．B分成m个等级B_1，B_2，…，B_m，在双因素$A_i\times B_j$条件下(即每次试验都要让A_i与B_j作lm种配合)作n次试验，得lmn个数据$x_{ij}^{(k)}$($k=1,2,\cdots,n$；$i=1,2,\cdots,l$；$j=1,2,\cdots,m$)．假定$\{x_{ij}^{(k)}\}$的分布$\sim N(\mu_{ij},\sigma)$，检验A的作用或B的作用或$A\times B$的作用分别对试验结果有无显著影响．其检验步骤如下：

(1) 假设H_0：对应的作用(A或B或$A\times B$)对试验结果无显著影响．

(2) 选取统计量并明确其分布

$$F_A=\frac{s_A}{s_{误}}=\frac{\frac{mn}{l-1}\sum_{i=1}^{l}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2}{\frac{1}{lm(n-1)}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ij}^{(k)}-\bar{x}_{ij})^2}\sim F(l-1,lm(n-1))$$

$$F_B=\frac{s_B}{s_{误}}=\frac{\frac{ln}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2}{\frac{1}{lm(n-1)}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ij}^{(k)}-\bar{x}_{ij})^2}\sim F(m-1,lm(n-1))$$

$$F_{A\times B}=\frac{S_{A\times B}}{S_{误}}=\frac{\dfrac{n}{(l-1)(m-1)}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2}{\dfrac{1}{lm(n-1)}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ij}^{(k)}-\bar{x}_{ij})^2}$$

$$\sim F((l-1)(m-1),lm(n-1))$$

式中 F_A, F_B 及 $F_{A\times B}$ 分别表示因素 A 的作用, B 的作用及因素 A 与 B 的交互作用，且(接下页)

表

A	B	试验结果 $x_{ij}^{(k)}$	$x_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)}$
A_1	B_1	$x_{11}^{(1)}$ $x_{11}^{(2)}$ … $x_{11}^{(n)}$	x_{11}
	B_2	$x_{12}^{(1)}$ $x_{12}^{(2)}$ … $x_{12}^{(n)}$	x_{12}
	⋮	⋮ ⋮ … ⋮	⋮
	B_m	$x_{1m}^{(1)}$ $x_{1m}^{(2)}$ … $x_{1m}^{(n)}$	x_{1m}
⋮	⋮	⋮	⋮
A_l	B_1	$x_{l1}^{(1)}$ $x_{l1}^{(2)}$ …, $x_{l1}^{(n)}$	x_{l1}
	B_2	$x_{l2}^{(1)}$ $x_{l2}^{(2)}$ …, $x_{l2}^{(n)}$	x_{l2}
	⋮	⋮ ⋮ … ⋮	⋮
	B_m	$x_{lm}^{(1)}$ $x_{lm}^{(2)}$ … $x_{lm}^{(n)}$	x_{lm}
		$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}$	$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}$
		记 号	$P=\frac{1}{lmn}\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\right)^2$

$$\bar{x}_{ij}=\frac{1}{n}x_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)},\quad \bar{x}_{i\cdot}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{x}_{ij}=\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)}$$

$$\bar{x}_{\cdot j}=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\bar{x}_{ij}=\frac{1}{ln}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)},\quad \bar{x}=\frac{1}{lmn}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)}$$

(3) 给出信度 α.

(4) 查出置信限 F_α. 当自由度为(f_1, f_2),则 F_α 满足

$$\int_{F_\alpha}^{\infty}F(f_1,f_2)dy=\alpha$$

(5) 列表计算统计量(表 1 和表 2)。

1

$x_{ij}^2=\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)}\right)^2$	$\sum_{k=1}^{n}(x_{ij}^{(k)})^2$
x_{11}^2	$\sum_{k=1}^{n}(x_{11}^{(k)})^2$
x_{12}^2	$\sum_{k=1}^{n}(x_{12}^{(k)})^2$
⋮	⋮
x_{1m}^2	$\sum_{k=1}^{n}(x_{1m}^{(k)})^2$
⋮	⋮
x_{l1}^2	$\sum_{k=1}^{n}(x_{l1}^{(k)})^2$
x_{l2}^2	$\sum_{k=1}^{n}(x_{l2}^{(k)})^2$
⋮	⋮
x_{lm}^2	$\sum_{k=1}^{n}(x_{lm}^{(k)})^2$
$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}^2$	$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ij}^{(k)})^2$
$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}^2$	$W=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ij}^{(k)})^2$

表 2

A \ B	B_1	B_2	…	B_m	$\sum\limits_{j=1}^{m}$	$\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\right)^2$
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1m}	$\sum\limits_{j=1}^{m}x_{1j}$	$\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_{1j}\right)^2$
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2m}	$\sum\limits_{j=1}^{m}x_{2j}$	$\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_{2j}\right)^2$
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮
A_l	x_{l1}	x_{l2}	…	x_{lm}	$\sum\limits_{j=1}^{m}x_{lj}$	$\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_{lj}\right)^2$
$\sum\limits_{i=1}^{l}$	$\sum\limits_{i=1}^{l}x_{i1}$	$\sum\limits_{i=1}^{l}x_{i2}$	…	$\sum\limits_{i=1}^{l}x_{im}$	$\sum$	$\sum\limits_{i=1}^{l}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_{ij}\right)^2$
$\left(\sum\limits_{i=1}^{l}\right)^2$	$\left(\sum\limits_{i=1}^{l}x_{i1}\right)^2$	$\left(\sum\limits_{i=1}^{l}x_{i2}\right)^2$	…	$\left(\sum\limits_{i=1}^{l}x_{im}\right)^2$	$\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{l}x_{ij}\right)^2$	$Q=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{l}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_{ij}\right)^2$ $R=\frac{1}{l}\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{l}x_{ij}\right)^2$

(6) 双因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	统计量	置信限	统计推断
A 的作用	$S_A = Q - P$	$l-1$	$s_A = \frac{S_A}{l-1}$	$F_A = \frac{s_A}{s_误}$	$F_\alpha(l-1, lm(n-1))$	当 $F < F_\alpha$ 时，接受 H_0
B 的作用	$S_B = R - P$	$m-1$	$s_B = \frac{S_B}{m-1}$	$F_B = \frac{s_B}{s_误}$	$F_\alpha(m-1, lm(n-1))$	当 $F \geqslant F_\alpha$ 时，否定 H_0
$A\times B$的作用	$S_{A\times B} = T - Q - R + P$	$(l-1)(m-1)$	$s_{A\times B} = \frac{S_{A\times B}}{(l-1)(m-1)}$	$F_{A\times B} = \frac{s_{A\times B}}{s_误}$	$F_\alpha((l-1)(m-1), lm(n-1))$	
随机作用	$S_误 = W - T$	$lm(n-1)$	$s_误 = \frac{S_误}{lm(n-1)}$			
总平方和	S	$lmn-1$				

当 A, B 两个因素的交互作用不显著时，$S_{A\times B}$ 与 $S_误$ 混合在一起，这时若在 $A_i\times B_j$ 条件下只作一次试验（即 $n=1$），测得试验数据为 x_{ij}，记

$$P=\frac{1}{lm}\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\right)^2$$

$$Q=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\right)^2$$

$$R=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{l}x_{ij}\right)^2$$

$$T=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}^2$$

则

$$S_A=Q-P,\qquad S_B=R-P,\qquad S_误=T-Q-R+P$$

这时，因素 A 及因素 B 的统计量与分布分别为

$$F_A=\frac{s_A}{s_误}=\frac{\dfrac{S_A}{l-1}}{\dfrac{S_误}{(l-1)(m-1)}}$$

$$\sim F(l-1,\ (l-1)(m-1))$$

$$F_B=\frac{s_B}{s_误}=\frac{\dfrac{S_B}{m-1}}{\dfrac{S_误}{(l-1)(m-1)}}$$

$$\sim F(m-1,\ (l-1)(m-1))$$

计算过程和方差分析同前.

［系统分组的方差分析］　作调查时常采用按系统分组的方法．例如到某县调查时，选几个公社，每个公社又分别选几个大队，每个大队又选几个生产队，这种分组方法称为系统分组．

系统分组的方差分析与多因素方差分析是不同的．譬如双因素方差分析中，因素 A, B 是平行的，而在系统分组的方差分析中，A, B 不是平行的，它是先按

因素A分组为$A_1, A_2, \cdots, A_l$, 然后在每一组A_i中再按因素B分组为$B_{i1}, B_{i2}, \cdots, B_{im}$. 不过,分析的方法是类似的.

设在因素A_i和因素B_{ij}的条件下作n次试验, 试验数据为$x_{ij}^{(k)}$, 其检验步骤如下:

(1) 假设H_0: 在$A_i \times B_{ij}(i=1,2,\cdots,l; j=1,2,\cdots,m)$条件下,因素$A$(或$B$)影响不显著.

(2) 选取统计量

$$F_{AB}=\frac{s_A}{s_B}=\frac{\dfrac{mn}{l-1}\sum_{i=1}^{l}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2}{\dfrac{n}{l(m-1)}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{ij}-\bar{x}_{i\cdot})^2}$$

$$\sim F(l-1, l(m-1))$$

$$F_B=\frac{s_B}{s_{误}}=\frac{\dfrac{n}{m-1}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{ij}-\bar{x}_{i\cdot})^2}{\dfrac{1}{m(n-1)}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ij}^{(k)}-\bar{x}_{ij})^2}$$

$$\sim F(l(m-1), lm(n-1))$$

式中F_{AB}和F_B分别表示因素A和因素B的影响的显著性,而且

$$x_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)}, \bar{x}_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)}$$

$$\bar{x}_{i\cdot}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{x}_{ij}$$

$$\bar{x}=\frac{1}{lmn}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)}$$

(3) 给出信度α.

(4) 查出置信限F_α. 当自由度为(f_1, f_2)时, F_α满足

$$\int_{F_\alpha}^{\infty}F(f_1, f_2)dv=\alpha$$

(5) 列表计算统计量

A	B	试验结果 $x_{ij}^{(k)}$	$x_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)}$	$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}$
A_1	B_{11}	$x_{11}^{(1)}\quad x_{11}^{(2)}\ \cdots\ x_{11}^{(n)}$	x_{11}	$\sum_{j=1}^{m}x_{1j}$
	B_{12}	$x_{12}^{(1)}\quad x_{12}^{(2)}\ \cdots\ x_{12}^{(n)}$	x_{12}	
	$\vdots$	$\vdots\quad \vdots\ \cdots\ \vdots$	$\vdots$	
	B_{1m}	$x_{1m}^{(1)}\quad x_{1m}^{(2)}\ \cdots\ x_{1m}^{(n)}$	x_{1m}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_l	B_{l1}	$x_{l1}^{(1)}\quad x_{l1}^{(2)}\ \cdots\ x_{l1}^{(n)}$	x_{l1}	$\sum_{j=1}^{m}x_{lj}$
	B_{l2}	$x_{l2}^{(1)}\quad x_{l2}^{(2)}\ \cdots\ x_{l2}^{(n)}$	x_{l2}	
	$\vdots$	$\vdots\quad \vdots\ \cdots\ \vdots$	$\vdots$	
	B_{lm}	$x_{lm}^{(1)}\quad x_{lm}^{(2)}\ \cdots\ x_{lm}^{(n)}$	x_{lm}	
		$\sum$	$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}$	
		记号	$P=\frac{1}{lmn}\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\right)^2$	

(6) 系统分组方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均　方
A的作用	$S_A=Q-P$	$l-1$	$s_A=\frac{S_A}{l-1}$
B的作用	$S_B=T-Q$	$l(m-1)$	$s_B=\frac{S_B}{l(m-1)}$
随机作用	$S_{误}=W-T$	$lm(n-1)$	$s_{误}=\frac{S_{误}}{lm(n-1)}$
总平方和	$S=W-P$	$lmn-1$	

$\left(\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\right)^2$	$x_{ij}^2=\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ij}^{(k)}\right)^2$	$\sum_{k=1}^{n}(x_{ij}^{(k)})^2$
$\left(\sum_{j=1}^{m}x_{1j}\right)^2$	x_{11}^2 x_{12}^2 $\vdots$ x_{1m}^2	$\sum_{k=1}^{n}(x_{11}^{(k)})^2$ $\sum_{k=1}^{n}(x_{12}^{(k)})^2$ $\vdots$ $\sum_{k=1}^{n}(x_{1m}^{(k)})^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\left(\sum_{j=1}^{m}x_{lj}\right)^2$	x_{l1}^2 x_{l2}^2 $\vdots$ x_{lm}^2	$\sum_{k=1}^{n}(x_{l1}^{(k)})^2$ $\sum_{k=1}^{n}(x_{l2}^{(k)})^2$ $\vdots$ $\sum_{k=1}^{n}(x_{lm}^{(k)})^2$
$\sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}^2$	$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ij}^{(k)})^2$
$Q=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\right)^2$	$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}^2$	$W=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ij}^{(k)})^2$

统 计 量	置 信 限	统 计 推 断
$F_{AB}=\frac{s_A}{s_B}$ $F_B=\frac{s_B}{s_{误}}$	$F_\alpha(l-1,l(m-1))$ $F_\alpha(l(m-1),$ $lm(n-1))$	当 $F<F_\alpha$ 时，接受 H_0， 认为相应的因素影响不显著； 当 $F\geqslant F_\alpha$ 时，否定 H_0， 认为相应的因素影响显著

四、回归分析

1. 最小二乘法原理

设 u 是变量 $x,y,\cdots$ 的函数，含有 m 个参数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，即

$$u=f(a_1,a_2,\cdots,a_m;x,y,\cdots)$$

今对 u 和 $x,y,\cdots$ 作 n 次观测得 $(x_i,y_i,\cdots;u_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 于是 u 的理论值 $\hat{u}_i=f(a_1,a_2,\cdots,a_m;x_i,y_i,\cdots)$ 与观测值 u_i 的绝对误差为

$$|u_i-\hat{u}_i| \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

所谓最小二乘法，就是要求上面 n 个误差在平方和最小的意义下，使得函数 $u=f(a_1,a_2,\cdots,a_m;x,y,\cdots)$ 与观测值 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 最佳拟合. 也就是参数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 应使

$$Q=\sum_{i=1}^{n}[u_i-f(a_1,a_2,\cdots,a_m;x_i,y_i,\cdots)]^2=\text{最小值}$$

由微分学的求极值方法可知，$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 应满足下列方程组

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

2. 一元线性回归

［一元回归方程］ 自变量 x 与变量 y 对应的观测值为

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

如果变量间存在着线性关系，则可用直线

$$\hat{y}=a+bx$$

来拟合它们之间的变化关系. 由最小二乘法，a,b 应使

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-\hat{y}_i]^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2=\text{最小值}$$

得

$$\begin{cases}b=\dfrac{l_{xy}}{l_{xx}}\\ a=\bar{y}-b\bar{x}\end{cases}$$

式中

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\qquad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\quad l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

方程 $\hat{y}=a+bx$ 称为回归方程(或回归直线), b 称为回归系数.

[相关系数及其检验表] 相关系数 r_{xy} 反映了变量 x 和 y 之间的线性关系的密切程度,它是用下式定义

$$r_{xy}=\frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}\,l_{yy}}},\quad 其中\ l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

(在不致误会时, r_{xy} 简记为 r). 显然 $|r|\leqslant 1$, 当 $|r|=1$ 时,称为完全线性相关;当 $|r|=0$ 时,称全无线性相关;当 $|r|$ 越接近 1,线性相关越大。

下表给出相关系数的起码值(它与观测次数 n 及所给信度 α 有关),当 $|r|$ 大于表中相应的值,所配的直线才有意义.

$n-2$	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$	$n-2$	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$	$n-2$	$\alpha=5\%$	$\alpha=1\%$
1	0.997	1.000	16	0.468	0.590	35	0.325	0.418
2	0.950	0.990	17	0.456	0.575	40	0.304	0.393
3	0.878	0.959	18	0.444	0.561	45	0.288	0.372
4	0.811	0.917	19	0.433	0.549	50	0.273	0.354
5	0.754	0.874	20	0.423	0.537	60	0.250	0.325
6	0.707	0.834	21	0.413	0.526	70	0.232	0.302
7	0.666	0.798	22	0.404	0.515	80	0.217	0.283
8	0.632	0.765	23	0.396	0.505	90	0.205	0.267
9	0.602	0.735	24	0.388	0.496	100	0.195	0.254
10	0.576	0.708	25	0.381	0.487	125	0.174	0.228
11	0.553	0.684	26	0.374	0.478	150	0.159	0.208
12	0.532	0.661	27	0.367	0.470	200	0.138	0.181
13	0.514	0.641	28	0.361	0.463	300	0.113	0.148
14	0.497	0.623	29	0.355	0.456	400	0.098	0.128
15	0.482	0.606	30	0.349	0.449	1000	0.062	0.081

注意，当观测次数 n 很大时，相关系数可用下述方法近似求得：将观测数对 (x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ 描在坐标纸上，先作一水平直线使位在直线的上下点数相等，再作一垂直线使左右点数相等，这两条直线(尽量使两直线上没有点)将平面分成四块(图 16.5)，设落在右上方，左上方，左下方，右下方的点数分别为 n_1, n_2, n_3, n_4，设

$$n_+ = n_1 + n_3, \qquad n_- = n_2 + n_4$$

那末相关系数近似为

$$r \approx \sin\left(\frac{n_+}{n_+ + n_-} - \frac{1}{2}\right)\pi = -\cos\frac{n_+\pi}{n_+ + n_-}$$

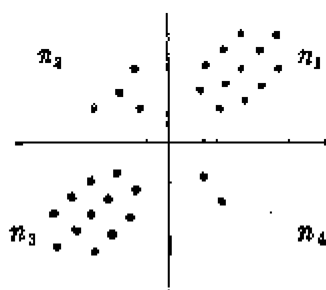


图 16.5

[剩余标准差]

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2} = \sqrt{\frac{l_{yy} - bl_{xy}}{n-2}} = \sqrt{\frac{(1-r^2)l_{yy}}{n-2}}$$

称为剩余标准差，它描述回归直线的精度：对于试验范围的每个 x，有 95.4% 的 y 值落在两条平行直线

$$y' = a + bx - 2s, \qquad y'' = a + bx + 2s$$

之间(图 16.6)；有 99.7% 的 y 值落在两条平行直线

$$y' = a + bx - 3s, \qquad y'' = a + bx + 3s$$

之间.

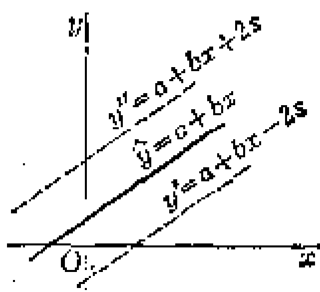


图 16.6

[一元回归计算步骤] 为了方便计算，将 l_{xx}，l_{yy}，l_{xy} 改写成

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

并将数据整数化. 即令

$$x' = 10^{m_1}(x - \alpha), \qquad y' = 10^{m_2}(y - \beta)$$

经整数化之后，有

$$\bar{x} = \alpha + 10^{-m_1}\bar{x}', \quad \bar{y} = \beta + 10^{-m_2}\bar{y}', \quad l_{xx} = 10^{-2m_1} l_{x'x'}$$

$$l_{yy} = 10^{-2m_2} l_{y'y'}, \quad l_{xy} = 10^{-(m_1+m_2)} l_{x'y'}, \quad b = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = 10^{m_1-m_2}\frac{l_{x'y'}}{l_{x'x'}}$$

于是列表计算如下:

序 号	x_i'	y_i'	$(x_i')^2$	$(y_i')^2$	$x_i'y_i'$
1 2 ⋮ n	x_1' x_2' ⋮ x_n'	y_1' y_2' ⋮ y_n'	$(x_1')^2$ $(x_2')^2$ ⋮ $(x_n')^2$	$(y_1')^2$ $(y_2')^2$ ⋮ $(y_n')^2$	$x_1'y_1'$ $x_2'y_2'$ ⋮ $x_n'y_n'$
$\sum$	$\sum_{i=1}^{n}x_i'$	$\sum_{i=1}^{n}y_i'$	$\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2$	$\sum_{i=1}^{n}(y_i')^2$	$\sum_{i=1}^{n}x_i'y_i'$
	$\sum_{i=1}^{n}x_i'$	$\sum_{i=1}^{n}y_i'$	$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i'\right)^2$	$\left(\sum_{i=1}^{n}y_i'\right)^2$	$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i'\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i'\right)$
$\frac{1}{n}\sum$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i'$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i'$	$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i'\right)^2$	$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i'\right)^2$	$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i'\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i'\right)$
记 号	$\bar{x}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i'$	$\bar{y}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i'$	$l_{x'x'}=\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i'\right)^2$	$l_{y'y'}=\sum_{i=1}^{n}(y_i')^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i'\right)^2$	$l_{x'y'}=\sum_{i=1}^{n}x_i'y_i'-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i'\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i'\right)$

计算结果	回归系数　$b=10^{m_1-m_2}\frac{l_{x'y'}}{l_{x'x'}}$ 常数项　$a=\beta+10^{-m_2}\bar{y}'-b(\alpha+10^{-m_1}\bar{x}')$ 回归方程　$\hat{y}=a+bx$ 相关系数　$r_{xy}=\frac{l_{x'y'}}{\sqrt{l_{x'x'}l_{y'y'}}}$ 剩余标准差　$s=10^{-m_2}\sqrt{\frac{(1-r^2)l_{y'y'}}{n-2}}$

[一元线性回归的方差分析]　将自变量 x 看作单因素，对每个 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 作 k 次重复试验得到数据 $y_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,k)$，记录如下：

x	y_{ij}				$\bar{y}_i=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}y_{ij}$
x_1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1k}	$\bar{y}_1$
x_2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2k}	$\bar{y}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_{n1}	y_{n2}	$\cdots$	y_{nk}	$\bar{y}_n$
					$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i$

按照数对 $(x_i,\bar{y}_i)(i=1,2,\cdots,n)$，求出回归方程

$$\hat{y}=a+bx$$

$(\hat{y}_i=a+bx_i,\ \ i=1,2,\cdots,n)$

y 的总平方和为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(y_{ij}-\bar{y})^2=k\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$$

$$+k\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_i-\hat{y}_i)^2$$

记作

$$S_{总}=S_{回}+S_{误}+S_{余}$$

上述右边的 $S_{回}$ 称为回归平方和，它是由于 x 的变化使 y 也随之变化而引起的；

$S_误$称为误差平方和，它是由试验误差引起的；$S_余$称为剩余平方和，它是由其他随机因素或回归直线配得不适当而引起的。

同单因素方差分析类似，作一元线性回归方差分析表如下：

方差来源	平方和	自由度	均 方	统计量	置信限	统计推断
回 归	$S_回$	$k-1$	$s_回=\frac{S_回}{k-1}$	$F_回=\frac{s_回}{s_误}$	$F_\alpha(k-1,n)$	当$F<F_\alpha$时，认为影响不显著；
剩 余	$S_余$	$n-2$	$s_余=\frac{S_余}{n-2}$	$F_余=\frac{s_余}{s_误}$	$F_\alpha(n-2,n)$	当$F\geqslant F_\alpha$时，认为影响显著
误 差	$S_误$	n	$s_误=\frac{S_误}{n}$			
总平方和	$S_总$	$nk-1$				

检验$F_余$时，若影响不显著，则表明剩余平方和基本上是试验误差等随机因素引起的；若影响显著，则表明有可能存在另外不可忽略的因素，或者x与y不是直线相关，或者x与y无关。这时求出的回归直线不能刻划x与y之间的关系，需进一步查明原因，重新配线。

检验$F_回$时，若影响显著，则表明x与y之间有线性关系；若影响不显著，则需重新配线。

$S_总$、$S_回$，$S_余$和$S_误$按下列公式计算（可先将数据整数化$x'=10^{m_1}(x-\alpha)$，$y'=10^{m_2}(y-\beta)$）：

$$S_总=10^{-2m_2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(y'_{ij})^2-\frac{1}{nk}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}y'_{ij}\right)^2\right]$$

$$S_回=k10^{-2m_2}\frac{l^2_{x'\bar{y}'}}{l_{x'x'}}$$

$$S_余=k10^{-2m_2}\left(l_{\bar{y}'\bar{y}'}-\frac{l^2_{x'\bar{y}'}}{l_{x'x'}}\right)$$

$$S_误=S_总-S_回-S_余$$

式中

$$\bar{y}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{y}'_i$$

3. 抛物线回归

给定一组观测值 (x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$，如果有抛物线关系，就可用一个 $m(m\geqslant 2)$ 次多项式

$$p(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

来拟合．依照最小二乘法原理，$\{a_k\}$应使

$$Q=\sum_{i=1}^{n}[y_i-p(x_i)]^2=\text{最小值}$$

特别地，若取 $p(x)$ 为二次多项式

$$p(x)=a+bx+cx^2$$

则系数 a, b, c 满足方程组

$$\begin{cases} a+b\overline{x}+c\overline{x^2}=\overline{y} \\ a\overline{x}+b\overline{x^2}+c\overline{x^3}=\overline{xy} \\ a\overline{x^2}+b\overline{x^3}+c\overline{x^4}=\overline{x^2y} \end{cases}$$

式中

$$\overline{x^k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k\,(k=1,2,3,4),\quad \overline{x^k y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i\,(k=1,\ 2)$$

4．可化成线性回归的曲线回归

如果观测数对在坐标纸上的分布形成曲线，可作适当的变量替换，对两个新的变量作线性回归，然后再还原到原来的变量．

可化直线型的常用曲线类型

曲 线 类 型	化直线型的变量替换
1° $y=ax^b(a>0)$ $(b>0)$　　$(b<0)$	设 $X=\lg x$，$Y=\lg y$ 则 $Y=\lg a+bX$ (x,y) 在双对数坐标纸上成一直线

曲　线　类　型	化直线型的变量替换
2° $y=ae^{bx}$ $(a>0)$ $(b>0)$　　$(b<0)$	设 $X=x$, $Y=\lg y$ 则 $Y=\lg a+(b\lg e)X$ (x,y) 在单对数坐标纸上成一直线
3° $y=a+b\lg x$ $(b>0)$　　$(b<0)$	设 $X=\lg x$, $Y=y$ 则 $Y=a+bX$ (x,y) 在单对数坐标纸上成一直线
4° $y=ae^{\frac{b}{x}}$ $(a>0)$ $(b>0)$　　$(b<0)$	设 $X=\frac{1}{x}$ $Y=\lg y$ 则 $Y=\lg a+(b\lg e)X$
5° $y=\frac{1}{a+be^{-x}}$ $(a>0)$ $(b>0)$　　$(b<0)$	设 $X=e^{-x}$ $Y=\frac{1}{y}$ 则 $Y=a+bX$

曲　线　类　型	化直线型的变量替换
6° $y=ax^b+c$　曲线与类型1°相同，只是在y轴方向上作了移动，首先在给定的曲线上取三点：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$(x_3=\sqrt{x_1x_2},y_3)$，则 $c=\dfrac{y_1y_2-y_3^2}{y_1+y_2-2y_3}$	c确定后，设 $X=\lg x$，$Y=\lg(y-c)$，则 $Y=\lg a+bX$
7° $y=ae^{bx}+c$　曲线与类型2°相同，只是在y轴方向上作了移动，首先在给定的曲线上取三点：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$(x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2},y_3)$，则 $c=\dfrac{y_1y_2-y_3^2}{y_1+y_2-2y_3}$	c确定后，设 $X=x$，$Y=\lg(y-c)$，则 $Y=\lg a+(b\lg e)X$
8° $y=\dfrac{x}{ax+b}+c$　$(a>0,c>0)$　（$b>0$）（$b<0$）	设 $X=\dfrac{1}{x}$，$Y=\dfrac{1}{y-c}$，则 $Y=a+bX$
9° $y=\dfrac{1}{ax+b}$　$(a>0)$　（$b>0$）（$b<0$）	设 $X=x$，$Y=\dfrac{1}{y}$，则 $Y=b+aX$

曲 线 类 型	化直线型的变量替换
10° $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(D=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0\right)$ (D<0) (D>0)	在曲线上取一点(x_0, y_0)，设 $X=x$ $Y=\frac{x-x_0}{y-y_0}$ 则 $Y=A+BX$ 用回归直线法，从已给数据可定出A和B
11° $y=ax^2+bx+c$	在曲线上取一点(x_0, y_0)，设 $X=x$ $Y=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ 则 $Y=(b+ax_0)+aX$
12° $y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$	设 $X=x$ $Y=\frac{1}{y}$ 则可化为类型 11°
13° $y^2=ax^2+bx+c$	设 $X=x$ $Y=y^2$ 则可化为类型 11°

曲 线 类 型	化直线型的变量替换
14° $y=\dfrac{x}{ax^2+bx+c}$	设 $X=x$ $Y=\dfrac{x}{y}$ 则可化为类型 11°
15° $y=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$	设 $X=\dfrac{1}{x}$ $Y=y$ 则可化为类型 11°
16° $y=ae^{b+cx+dx^2}$	设 $X=x$ $Y=\lg y$ 则 $Y=\lg a+b\lg e+(c\lg e)X+(d\lg e)X^2$ 化为类型 11°
17° $y=ax^be^{cx}$	若给定的 x 值构成以 h 为公差的等差级数，则设 $X=\Delta\lg x$ （取值 $\lg x_{i+1}-\lg x_i$） $Y=\Delta\lg y$ （取值 $\lg y_{i+1}-\lg y_i$） 而得直线型 $Y=hc\lg e+bX$

曲　线　类　型	化直线型的变量替换
18° $y=ae^{bx}+ce^{dx}$	若给定的 x 值构成以 h 为公差的等差级数，设 $u_1=x+h, u_2=x+2h$，其对应的 y 值为 v_1，v_2， 又设　$X=\frac{v_1}{y}$，$Y=\frac{v_2}{y}$ 而得　$Y=(e^{bh}+e^{dh})X-e^{bh}e^{dh}$ 由此用回归直线法定出 b, d 后，再设 $\xi=e^{(b-d)x}, \eta=ye^{-dx}$ 则得　$\eta=a\xi+c$

5. 二元线性回归

〔回归方程〕 对应自变量 x_1 与 x_2 的值 $x_{1i}, x_{2i}(i=1,2,\cdots,n)$，$y$ 的值为 y_i $(i=1,2,\cdots,n)$，于是得到 n 个点 $(x_{1i}, x_{2i}, y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，其回归方程为

$$\hat{y}=a+b_1x_1+b_2x_2 \tag{1}$$

式中 b_1, b_2 为回归系数，它由下面方程组决定：

$$\begin{cases} l_{11}b_1+l_{12}b_2=l_{10} \\ l_{21}b_1+l_{22}b_2=l_{20} \end{cases} \tag{2}$$

这里

$$l_{11}=\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}'^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}'\right)^2$$

$$l_{22}=\sum_{i=1}^{n}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2=\sum_{i=1}^{n}x_{2i}'^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{2i}'\right)^2$$

$$l_{12}=l_{21}=\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}'x_{2i}'-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}'\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_{2i}'\right)$$

$$l_{10}=\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x'_{1i}y_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x'_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

$$l_{20}=\sum_{i=1}^{n}(x_{2i}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x'_{2i}y_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x'_{2i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

$$\bar{x}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{1i}$$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{2i}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

而其中 x'_{1i}, x'_{2i} 是为了简化计算所作的数据变换(不需整数化)，即

$$x'_{1i}=x_{1i}-a_1,\quad x'_{2i}=x_{2i}-a_2$$

(1)式中的常数项

$$a=\bar{y}-b_1\bar{x}_1-b_2\bar{x}_2 \tag{3}$$

[复相关系数和偏相关系数]

$$R=\sqrt{\frac{S_{回}}{l_{00}}}$$

称为复相关系数，式中

$$S_{回}=b_1l_{10}+b_2l_{20}$$

$$l_{00}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2 \tag{4}$$

这里 l_{10}, l_{20} 如(2)所示. 复相关系数 R 满足 $0\leqslant R\leqslant 1$, 其意义与一元线性回归分析中的相关系数 r 类似，用于衡量 y 与 x_1, x_2 的线性关系的密切程度.

如果只要表示 y 与其中某一个变量(x_1 或 x_2)的相关关系，那末必须除去另一个变量的影响之后再计算它们的相关系数，这称为偏相关系数. x_1, y 在除去 x_2 的影响之后的相关系数称为 x_1, y 对 x_2 的偏相关系数，记作 r_{x_1y,x_2}，它可用普通的相关系数 $r_{x_1x_2}$, r_{x_1y}, r_{x_2y} 表示:

$$r_{x_1y,x_2}=\frac{r_{x_1y}-r_{x_1x_2}r_{yx_2}}{\sqrt{1-r^2_{x_1x_2}}\sqrt{1-r^2_{yx_2}}}$$

同样地，x_2，y 对 x_1 的偏相关系数 r_{x_2y,x_1} 表为

$$r_{x_2y,x_1}=\frac{r_{x_2y}-r_{x_2x_1}r_{yx_1}}{\sqrt{1-r^2_{x_2x_1}}\sqrt{1-r^2_{yx_1}}}$$

[剩余标准差]

$$s=\sqrt{\frac{S_{余}}{n-3}}=\sqrt{\frac{l_{00}-S_{回}}{n-3}}$$

称为剩余标准差，其意义同一元线性回归分析中的剩余标准差 s 类似.

[标准回归系数与偏回归平方和]　在两因素 x_1，x_2 之间关系不密切的情况下，可用下述方法判断哪个因素是主要的.

1°
$$B_1=b_1\sqrt{\frac{l_{11}}{l_{00}}}$$

$$B_2=b_2\sqrt{\frac{l_{22}}{l_{00}}}$$

称为标准回归系数，式中 b_1，b_2 为回归系数，l_{11}，l_{22} 如(2)所示，l_{00} 如(4)所示. 若 $|B_1|>|B_2|$，则表明在影响变量 y 的两个因素中，x_1 是主要因素，x_2 是次要因素.

2°
$$p_1=b_1^2\left(l_{11}-\frac{l_{12}^2}{l_{22}}\right)$$

$$p_2=b_2^2\left(l_{22}-\frac{l_{12}^2}{l_{11}}\right)$$

称为偏回归平方和，式中 b_1，b_2 为回归系数，l_{11}，l_{12}，l_{22} 如(2)所示. 若 $p_1>p_2$，则表明 x_1 是主要因素，x_2 是次要因素.

[t 值]

$$t_1=\frac{\sqrt{p_1}}{s},\qquad t_2=\frac{\sqrt{p_2}}{s}$$

分别称为 x_1，x_2 的 t 值，式中 s 为剩余标准差，p_1，p_2 为偏回归平方和. 若 t 值越大，则表明该因素越重要. 根据经验，当 $t_i>1$ 时，该因素 x_i 对 y 有一定的影响；当 $t_i>2$ 时，该因素 x_i 看作是重要因素；当 $t_i<1$ 时，则认为该因素 x_i 对 y 影响不大，可以忽略，不参加回归计算.

［二元线性回归计算表］ 表中 x_{ki} 为简化后的数据.

序号	x_{1i}	x_{2i}	y_i	x_{1i}^2	x_{2i}^2	y_i^2	$x_{1i}x_{2i}$	$x_{1i}y_i$	$x_{2i}y_i$
1	x_{11}	x_{21}	y_1	x_{11}^2	x_{21}^2	y_1^2	$x_{11}x_{21}$	$x_{11}y_1$	$x_{21}y_1$
2	x_{12}	x_{22}	y_2	x_{12}^2	x_{22}^2	y_2^2	$x_{12}x_{22}$	$x_{12}y_2$	$x_{22}y_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_{1n}	x_{2n}	y_n	x_{1n}^2	x_{2n}^2	y_n^2	$x_{1n}x_{2n}$	$x_{1n}y_n$	$x_{2n}y_n$
$\sum$	$x_1=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}$	$x_2=\sum_{i=1}^{n}x_{2i}$	$y=\sum_{i=1}^{n}y_i$	$\sum_{i=1}^{n}x_{1i}^2$	$\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2$	$\sum_{i=1}^{n}y_i^2$	$\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}$	$\sum_{i=1}^{n}x_{1i}y_i$	$\sum_{i=1}^{n}x_{2i}y_i$
			结果	$l_{11}=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}^2-\frac{x_1^2}{n}$	$l_{22}=\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2-\frac{x_2^2}{n}$	$l_{00}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{y^2}{n}$	$l_{12}=l_{21}=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}-\frac{x_1x_2}{n}$	$l_{10}=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}y_i-\frac{x_1y}{n}$	$l_{20}=\sum_{i=1}^{n}x_{2i}y_i-\frac{x_2y}{n}$

由 $l_{11}, l_{22}, l_{12}, l_{10}, l_{20}$，根据(2)，(3)分别计算出 b_1, b_2, a，得到回归方程

$$\hat{y}=a+b_1x_1+b_2x_2$$

并且继续计算复相关系数 R，标准回归系数 B_1 和 B_2，偏回归平方和 p_1, p_2，以及 t 值 t_1 和 t_2，根据这些数据进行二元线性回归的分析。

关于二元非线性回归问题，可作适当的变量替换，使新变量之间构成线性关系，再作回归分析。

6．多元线性回归

考虑自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 和因变量 y 的关系，做 n 次试验，观测值为 $(x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{mk}; y_k)(k=1, 2, \cdots, n)$，设

$$l_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}-\bar{x}_i)(x_{jk}-\bar{x}_j)\qquad(i, j=1, 2, \cdots, m)$$

$$l_{i0}=\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}-\bar{x}_i)(y_k-\bar{y})\qquad(i=1, 2, \cdots, m)$$

$$l_{00}=\sum_{k=1}^{n}(y_k-\bar{y})^2$$

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k$$

$$\bar{x}_i=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\qquad(i=1, 2, \cdots, m)$$

又设矩阵

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1m} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mm} \end{bmatrix}$$

其逆矩阵为

$$L^{-1}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

[回归方程]

$$\hat{y}=a+b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m$$

式中 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 为回归系数，用矢量表示为

$$\boldsymbol{b}=L^{-1}\boldsymbol{l}_0$$

其中

$$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T, l_0=(l_{10},l_{20},\cdots,l_{m0})^T$$

常数项

$$a=\bar{y}-\sum_{i=1}^{m}b_i\bar{x}_i$$

[复相关系数]

$$R=\sqrt{\frac{S_{回}}{l_{00}}}=\sqrt{\frac{1}{l_{00}}\sum_{i=1}^{m}l_{i0}b_i}$$

[剩余标准差]

$$s=\sqrt{\frac{S_{余}}{n-m-1}}$$

[多元线性回归的方差分析表]

方差来源	平方和	自由度	均　方	统计量	置信限	统计推断
回归	$S_{回}=\sum_{i=1}^{m}b_il_{i0}$	m	$s_{回}=\frac{S_{回}}{m}$	$F=\frac{s_{回}}{s_{余}}$	$F_\alpha(m,n-m-1)$	当$F>F_\alpha$时，认为回归显著，线性相关密切；当$F\leqslant F_\alpha$时，认为回归不显著，线性相关不密切
剩余	$S_{余}=l_{00}-S_{回}$	$n-m-1$	$s_{余}=\frac{S_{余}}{n-m-1}$			
总平方和	$S=\Sigma(y_i-\bar{y})^2$	$n-1$				

[标准回归系数与偏回归平方和]

标准回归系数　　$B_i=b_i\sqrt{\frac{l_{ii}}{l_{00}}}$

$$(i=1,2,\cdots,m)$$

偏回归平方和　　$p_i=\frac{b_i^2}{c_{ii}}$

[t 值]

$$t_i=\frac{\sqrt{p_i}}{s}\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

多元线性回归分析与二元的情况类似，但计算量较大，可借助电子计算机来完成。

五、正交试验设计

[正交表与正交试验]　正交表是根据组合理论，按照一定规律构造的表格，它在试验设计中有广泛的应用．以正交表为工具安排试验方案和进行结果分析的试验称为正交试验．它适用于多因素、多指标(试验需要考察的结果)、多因素间存在交互作用(因素之间联合起作用)、具有随机误差的试验．通过正交试验，可以分析各因素及其交互作用对试验指标的影响，按其重要程度找出主次关系，并确定对试验指标的最优工艺条件．在正交试验中要求每个所考虑的因素都是可控的．在整个试验中每个因素所取值的个数称为该因素的水平．

正交表的符号为 $L_a(b^c)$，其中 L 表示正交表；下标 a 是正交表的行数，表示试验次数；c 是正交表的列数，表示试验至多可以安排的因素个数；b 是表中不同数字的个数，表示每个因素的水平数．例如 $L_8(2^7)$．8 表示正交表中有 8 行，即安排试验的次数为 8 次；7 表示正交表中有 7 列，试验至多可安排 7 个因素（包括交互作用的因素）；2 表示每个因素只有两个水平．这种正交表称为 2 水平型的正交表．

$L_8(2^7)$

试验号 \ 水平 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

又如 $L_{12}(3\times 2^3)$，表示正交表中共有 12 行，4 列，其中有一列是 3 水平的，有 3 列是 2 水平的．它称为混合型的正交表，可用来安排因素水平不同的试验．

[正交表的交互列]　任意两列分别安排了两个因素之后，这两个因素的交互作用可用表的其他列表示出来，称为交互列．交互列在 2 水平型正交表中只有一列，在 3 水平型正交表中有两列，例如 $L_9(3^4)$，任意两列的交互列是另外两

列．通常低水平(水平数为2或3)的正交表有另外专表写出交互列，例如$L_8(2^7)$的交互列表，指出第3列与第5列的交互列即是第6列等等．有些正交表，例如$L_{12}(2^{11})$，任意两列的交互列都不在表内，对这样的正交表就不能考虑因素间的交互作用了．

手册后面备有常用正交表．

$L_8(2^7)$的交互列表

1	2	3	4	5	6	7	列号
(1)	3	2	5	4	7	6	1
	(2)	1	6	7	4	5	2
		(3)	7	6	5	4	3
			(4)	1	2	3	4
				(5)	3	2	5
					(6)	1	6
						(7)	7

[正交表的正交性] 正交表具有正交性：

1° 在任意一列中，每个水平的重复次数都相等，例如$L_8(2^7)$中每列的每个水平都重复4次．

2° 任意两列中，同行数字(水平)构成的数对，包含着所有可能(该水平下)的数对，而每个数对重复次数相等．例如在$L_9(3^4)$中任意两列构成的数对都包含着3水平下所有可能的数对：(1,1)，(1,2)，(1,3)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，而且每个数对重复次数都等于1．

由于正交性，使得所安排的正交试验，均衡分散，整齐可比．

[试验方案的制定步骤与安排方法]

1° 步骤

(1) 确定试验中变化因素的个数及每个因素变化的水平．

(2) 根据专业知识或经验，初步分析各因素之间的交互作用，确定哪些是必须考虑的，哪些是暂时可以忽略的．

(3) 根据试验的人力、设备、时间及费用，确定可能进行的大概试验次数．

(4) 选用合适的正交表，安排试验．

2° 安排方法

(1) 在不考虑交互作用时，把因素逐个安排在正交表的任意列上，那末每次

试验(对应于正交表的行)的试验条件(每个因素应取的水平)由安排因素的各列的水平确定.

例如,在试验用不发芽的大麦造啤酒的过程中,选了四个因素,每个因素三个水平,指标是粉状粒(%).

因 素 水 平 表

水平＼因素	底水(A)	浸氨时间(B)	920浓度(C)	氨水浓度(D)
1	A_1(140)	B_1(180)	C_1(2.5)	D_1(0.25)
2	A_2(136)	B_2(215)	C_2(3.0)	D_2(0.26)
3	A_3(138)	B_3(250)	C_3(3.5)	D_3(0.27)

如果不考虑交互作用,可选用正交表 $L_9(3^4)$,得试验方案如下:

用 $L_9(3^4)$安排一个四因素的试验方案

试验号＼列号(因素)	1(A)	2(B)	3(C)	4(D)
1	1(A_1)	1(B_1)	1(C_1)	1(D_1)
2	1(A_1)	2(B_2)	2(C_2)	2(D_2)
3	1(A_1)	3(B_3)	3(C_3)	3(D_3)
4	2(A_2)	1(B_1)	2(C_2)	3(D_3)
5	2(A_2)	2(B_2)	3(C_3)	1(D_1)
6	2(A_2)	3(B_3)	1(C_1)	2(D_2)
7	3(A_3)	1(B_1)	3(C_3)	2(D_2)
8	3(A_3)	2(B_2)	1(C_1)	3(D_3)
9	3(A_3)	3(B_3)	2(C_2)	1(D_1)

此表指出第1号试验的条件是 $A_1B_1C_1D_1$,第2号试验条件是 $A_1B_2C_2D_2$,…,第9号试验的条件是 $A_3B_3C_2D_1$.

(2) 需要考虑交互作用时,因素不能任意安排,应利用相应的表头设计安排试验. 此时要注意不能使不同的因素(包括所考虑的交互作用)同处一列(因为分析时无法将同处一列的不同作用分析出来),如果做不到这一点,就需要采用更大的正交表. 例如安排一个四因素 A,B,C,D 的试验,必须考虑交互作用 $A\times B$, $A\times C$,其他交互作用可忽略不计. 根据 $L_8(2^7)$的表头设计:

因素个数 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
3	A	B	$A\times B$	C	$A\times C$	$B\times C$	
4	A	B	$A\times B$ $C\times D$	C	$A\times C$ $B\times D$	$B\times C$ $A\times D$	D
4	A	B $C\times D$	$A\times B$	C $B\times D$	$A\times C$	D $B\times C$	$A\times D$
5	A $D\times E$	B $C\times D$	$A\times B$ $C\times E$	C $B\times D$	$A\times C$ $B\times E$	D $A\times E$ $B\times C$	E $A\times D$

因为是四因素试验，所以可将 A,B,C,D 分别安排在第 1, 2, 4, 7 列上，第 3, 5 列分别表示 $A\times B$ 及 $A\times C$，第 6 列空着．如果 A,B,C,D 四个因素所有的交互作用都要考虑，则不能用 $L_8(2^7)$，应选用更大的正交表，如 $L_{16}(2^{15})$．

［正交表的直观分析］ 1° 计算第 i 水平的水平和 K_i 与水平均值 k_i　例如用 $L_9(3^4)$ 安排的四因素 3 水平的试验方案，可列出直观分析表如下：

试验号 \ 列号(因素)	1(A)	2(B)	3(C)	4(D)	试验指标 y
1	1	1	1	1	y_1
2	1	2	2	2	y_2
3	1	3	3	3	y_3
4	2	1	2	3	y_4
5	2	2	3	1	y_5
6	2	3	1	2	y_6
7	3	1	3	2	y_7
8	3	2	1	3	y_8
9	3	3	2	1	y_9
K_1	$K_1^{(1)}$	$K_1^{(2)}$	$K_1^{(3)}$	$K_1^{(4)}$	
K_2	$K_2^{(1)}$	$K_2^{(2)}$	$K_2^{(3)}$	$K_2^{(4)}$	
K_3	$K_3^{(1)}$	$K_3^{(2)}$	$K_3^{(3)}$	$K_3^{(4)}$	
k_1	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(2)}$	$k_1^{(3)}$	$k_1^{(4)}$	
k_2	$k_2^{(1)}$	$k_2^{(2)}$	$k_2^{(3)}$	$k_2^{(4)}$	
k_3	$k_3^{(1)}$	$k_3^{(2)}$	$k_3^{(3)}$	$k_3^{(4)}$	
极差 R	$R^{(1)}$	$R^{(2)}$	$R^{(3)}$	$R^{(4)}$	

其中

$K_i^{(j)}$表示第 j 列的 i 水平的试验指标和(简称水平和)

$k_i^{(j)}$表示第 j 列的 i 水平的试验指标均值(简称水平均值)

$R^{(j)}$表示第 j 列的 k_1,k_2,k_3 的极差

例如

$$K_1^{(1)}=y_1+y_2+y_3,\qquad k_1^{(1)}=\frac{1}{3}K_1^{(1)}$$

$$K_2^{(1)}=y_4+y_5+y_6,\qquad k_2^{(1)}=\frac{1}{3}K_2^{(1)}$$

$$K_3^{(1)}=y_7+y_8+y_9,\qquad k_3^{(1)}=\frac{1}{3}K_3^{(1)}$$

$$K_3^{(2)}=y_3+y_6+y_9,\qquad k_3^{(2)}=\frac{1}{3}K_3^{(2)}$$

………………………………

$$R^{(1)}=\max\{k_1^{(1)},k_2^{(1)},k_3^{(1)}\}-\min\{k_1^{(1)},k_2^{(1)},k_3^{(1)}\}$$

………………………………

2° 评定因素重要性顺序 依照各因素指标均值的极差的大小排出重要性顺序,极差大的表示该因素重要.

3° 画出各因素与试验指标的关系图 求出 $k_i^{(j)}$后,对于每个 j 以水平值 i 为横坐标,以 k_i 为纵坐标描点并画出折线图,称为第 j 个因素与试验指标的关系图. 若 k_i 变化幅度大,则对应的因素的影响就愈大;若图上描出的点很分散,则说明该因素是主要的;若点比较集中,则说明该因素是次要的.

当需要考虑因素的交互作用时,对应某交互作用的列的 k_i 就表示由于该交互作用的影响而引起的. 同样可以画出因素之间的交互作用与试验指标的关系图.

对于既没有安排因素,也没有安排交互作用的"空列",可以用来安排试验误差的估计. 通过同样的计算得到 k_i,这可以看作是由于试验误差造成的,k_i 变化的大小反映了该试验误差的大小. 也可以画出试验误差与试验指标的关系图.

4° 选定最优工艺条件(最优搭配方案) 在不考虑交互作用时,只需根据该试验指标的要求(即该指标是高者为优,或是低者为优),从每个因素的关系图中找出最优点(最高点或最低点)的水平,将各因素的最优水平组合起来就是对

于该指标的最优工艺条件.

当需要考虑因素间的交互作用时，经过分析已知某两个因素的交互作用对试验指标影响很大，这时根据试验结果，把对应于该二因素所有不同水平组合的试验指标（若对于同一种组合有多次试验，则应求出其平均值）进行比较，选出该二因素的最优水平组合. 最后，结合其他因素或交互作用选出的最优条件综合考虑，以确定最优工艺条件.

对于多指标的试验，每个指标都可按上述方法进行分析. 最优工艺条件应根据各个指标的情况综合考虑才能确定.

［正交表的方差分析］ 设在正交表中因素 A 被安排在第 j 列，该列的水平数为 b_j（或 b_A），每个水平的重复数为 r_j，试验次数为 n（行数）（显然有 $r_jb_j=n$），则因素 A 的平方和 S_A（或称为第 j 列平方和 S_j）为

$$S_A=S_j=r_j\sum_{i=1}^{b_j}(k_i^{(j)}-k^{(j)})^2$$

$$=\frac{1}{r_j}\sum_{i=1}^{b_j}(K_i^{(j)})^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2$$

总平方和 $S_总$ 为

$$S_总=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2$$

不可忽略的交互作用的平方和 $S_交$ 也按其所在列的平方和计算（公式同因素 A 的平方和 S_A 的计算公式）.

误差平方和 $S_误$ 等于 $S_总$ 与所有安排有因素或交互作用的列的平方和之差，即

$$S_误=S_总-\sum_{\substack{(\text{安排因}\\ \text{素的列})}}S_j-\sum_{\substack{(\text{安排交}\\ \text{互作用}\\ \text{的列})}}S_交$$

正交表的方差分析表

离差来源	平方和	自由度	均方	统计量	置信限	统计推断
A	S_A	b_A-1	$s_A=\frac{S_A}{b_A-1}$	$F_A=\frac{s_A}{s_{误}}$	$F_\alpha(b_A-1, n_{误})$	当 $F>F_\alpha$ 时，认为相应的因素影响显著；当 $F<F_\alpha$ 时，认为相应的因素影响不显著
B	S_B	b_B-1	$s_B=\frac{S_B}{b_B-1}$	$F_B=\frac{s_B}{s_{误}}$	$F_\alpha(b_B-1, n_{误})$	
$A\times B$	$S_{A\times B}$	$(b_A-1)(b_B-1)$	$s_{A\times B}=\frac{S_{A\times B}}{(b_A-1)(b_B-1)}$	$F_{A\times B}=\frac{s_{A\times B}}{s_{误}}$	$F_\alpha((b_A-1)(b_B-1), n_{误})$	
⋮						
误差	$S_{误}$	$n_{误}$	$s_{误}=\frac{S_{误}}{n_{误}}$			
总平方和	$S_{总}$	$n-1$				

表中

$$n_{误}=n-1-\sum_{\substack{(安排因\\素的列)}}(b_j-1)-\sum_{\substack{(安排交互\\作用的列)}}(b_j-1)(b_i-1)$$

对正交表进行方差分析可以定量地给出因素的主次关系，可以判断哪些因素是重要因素，哪些因素是次要因素．此时最优工艺条件的确定只要考虑重要因素，至于那些次要因素的水平，可根据其他条件确定．

六、抽样检验方法

［抽样验收的第一类错误和第二类错误］　从整批产品中随意抽取 n 件样品进行质量检查，进而对整批产品作出"接收"或"拒收"的判断时可能出现两种错误：把可接收的整批产品错判为不合格而加以"拒收"，这种错误称为第一类错误，把质量不合要求的整批产品错判为合格而加以"接收"，这种错误称为第二类错误．

制定抽样检验方案的目的就是合理地确定尽可能小的样本容量 n 和作为判断的标准区间 (L,H)，使得犯第一类错误的概率 α 和犯第二类错误的概率 β 都尽量地小．以下只讨论样本容量 n 和整批产品的量 N（或称批量为 N）满足 $\frac{n}{N}<0.1$ 的情况．

［单式抽样检验］　单式抽样的验收方案是指只进行一次抽样，从而对整批产品作"接收"或"拒收"判断的方案．

1°　单式计件（对产品质量指标的检验只考虑"好品"与"次品"）的验收方案 (n,c)．

根据对产品质量的要求，收付双方协商定出两个小于1的正数 p_0 和 p_1 $(p_0\leqslant p_1)$，当次品率 $p\leqslant p_0$ 时，则接收这批产品；当 $p>p_1$ 时，则拒收这批产品．p_0 和 p_1 分别叫做"可接收"的质量水平和"批容许废品率"．

设样本容量为 n，其中次品个数为 k．k 可作为判断批量为 N 的产品质量的指标．现在是如何合理地选取 n 和小于 n 的正整数 c，使得按照"$k\leqslant c$"或"$k>c$"分别决定"接收"或"拒收"该批产品时，犯第一类或第二类错误的概率都不大于预先给定的 α 和 β．

对于方案 (n,c)，从次品率为 p 的总体（批量为 N）中抽取 $n\left(<\frac{N}{10}\right)$ 件产品，其次品数 $\leqslant c$ 的概率为

$$L(p,n,c)=\sum_{k=0}^{c}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$L(p,n,c)$称为方案(n,c)的示性函数.

给定 p_0,p_1,α和β后,n,c是下列方程的解:

$$\begin{cases}L(p_0,n,c)=1-\alpha\\L(p_1,n,c)=\beta\end{cases}$$

记u_r满足

$$\int_{-\infty}^{u_r}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=r$$

则当n比较大时,$c=[nH]$(即nH的整数部分)由下式决定:

$$\begin{cases}H=p_0+u_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}\\H=p_1-u_\beta\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n}}\end{cases}$$

2° 单式计量(对产品质量指标要测量出具体数据)验收方案(n,L,H).

假定衡量产品好坏的数量指标ξ是遵从正态分布,其方差σ^2为已知.当$\xi\geqslant a$(或相反)时,认为产品合格;当$\xi<a$(或相反)时,认为产品不合格.

设样本容量为n,样本均值为$\bar{x}$,$\bar{x}$可作为判断总体质量的指标.现在是如何合理地选取n和L,H,使得按照"$L<\bar{x}<H$"和"$\bar{x}<L$或$\bar{x}>H$"分别决定"接收"或"拒收"整批产品时,犯第一或第二类错误的概率都不大于预先给定的α和β.

记

$$\mu_0=a-\sigma\Phi^{-1}(p_0),\ \mu_1=a-\sigma\Phi^{-1}(p_1)$$

其中$\Phi^{-1}(x)$是正态概率积分

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

的反函数.

单式计量验收方案表

条　件	方案代号	方案参数满足的方程组	统　计　推　断
$\mu_0>\mu_1$	(n,L)	$\begin{cases}L=\mu_0-u_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\\ L=\mu_1+u_{1-\beta}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{cases}$	当 $\bar{x}\leqslant L$ 时，拒收 当 $\bar{x}>L$ 时，接收
$\mu_0<\mu_1$	(n,H)	$\begin{cases}H=\mu_0+u_{1-\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\\ H=\mu_1-u_\beta\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{cases}$	当 $\bar{x}\geqslant H$ 时，拒收 当 $\bar{x}<H$ 时，接收
$\mu_1<\mu_0<\mu_2$	(n,L,H)	$\begin{cases}L=\mu_1+u_{1-\beta}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\\ L=\mu_0-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\\ H=L+2u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{cases}$	当 $\bar{x}\leqslant L$ 或 $\bar{x}\geqslant H$ 时，拒收 当 $L<\bar{x}<H$ 时，接收

[复式计件抽样检验]　单式抽样验收方案为了确保两类错误的相应概率不超过 α,β，常常需要抽取容量很大的样本．对于同样的四个数据 p_0,p_1,α,β，复式抽样的平均抽样件数比单式抽样较小．

复式抽样验收方案的做法是：先抽容量为 n_0 的样本，设其中的次品数为 k_0，与事先确定的三个数 $c_0<c_1$ 及 c_2 相比较作判断：若 $k_0\leqslant c_0$，则整批接收；若 $k_0>c_1$，则整批拒收；若 $c_0<k_0\leqslant c_1$，则继续抽取容量为 n_1 的样本，记其中的次品数为 k_1，将两个样本合在一起，若 $k_0+k_1\leqslant c_2$，则整批接收；若 $k_0+k_1>c_2$，则整批拒收．其中 n_0,n_1,c_0,c_1,c_2 的决定与单式抽样方案类似，要保证抽样验收方案当整批产品的次品率 $p\leqslant p_0$ 时，拒收的概率不超过 α，当 $p\geqslant p_1$ 时，接收的概率不超过 β．

记方案 (n_0,n_1,c_0,c_1,c_2) 的示性函数 $L(p;\ n_0,n_1,c_0,c_1,c_2)$ 为

$$L(p;n_0,n_1,c_0,c_1,c_2)=\sum_{k=0}^{c_0}\binom{n_0}{k_0}p^{k_0}(1-p)^{n_0-k_0}$$

$$+\sum_{k_0=c_0+1}^{c_1}\left[\binom{n_0}{k_0}p^{k_0}(1-p)^{n_0-k_0}\sum_{k_1=0}^{c_2-k_0}\binom{n_1}{k_1}p^{k_1}(1-p)^{n_1-k_1}\right]$$

它事实上是抽取第二样本，经检验后，整批接收的概率，即概率 $P(k_0\leqslant c_0$，次品率为 $p)$ 与 $P(c_0<k_0\leqslant c_1, k_0+k_1\leqslant c_2$，次品率为 $p)$ 之和。

当 p_0, p_1, α, β 已知，n_0, n_1, c_0, c_1, c_2 满足下列方程

$$\begin{cases}L(p_0;\ n_0, n_1, c_0, c_1, c_2)=1-\alpha\\ L(p_1;\ n_0, n_1, c_0, c_1, c_2)=\beta\end{cases}$$

该方程的求解是困难的，且不是唯一的，必须根据实际部门的具体情况提出另外合理的限制（例如令 $n_1=2n_0$ 等等），并制定专门的统计表来确定 n_0，n_1，c_0，c_1, c_2.

[序贯计件抽样检验]　本方法比上面的抽样方案更经济，更能减少检验次数.

对于给定的 p_0, p_1, α, β，序贯抽样的方法是：

第一步　先抽取容量为 n_1 的样本，设其中次品数为 k_1，计算

$$c_{1,n_1}=\frac{\lg\dfrac{\beta}{1-\alpha}}{\lg\dfrac{p_1}{p_0}-\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}+n_1\left(\frac{\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}{\lg\dfrac{p_1}{p_0}-\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}\right)\overset{\text{记}}{=}h_1+sn_1$$

$$c_{2,n_1}=\frac{\lg\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\lg\dfrac{p_1}{p_0}-\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}+n_1\left(\frac{\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}{\lg\dfrac{p_1}{p_0}-\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}\right)\overset{\text{记}}{=}h_2+sn_1$$

若样本的次品数 $k_1\leqslant c_{1,n_1}$，则整批接收；若 $k_1>c_{2,n_1}$，则整批拒收；若 $c_{1,n_1}<k\leqslant c_{2,n_1}$，则不作决定，继续抽样.

第二步　再抽取容量为 n_2 的样本，设其中次品数为 k_2，计算

$$c_{1,n_1+n_2}=\frac{\lg\dfrac{\beta}{1-\alpha}}{\lg\dfrac{p_1}{p_0}-\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}+(n_1+n_2)\left(\frac{\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}{\lg\dfrac{p_1}{p_0}-\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}\right)\overset{\text{记}}{=}h_1+s(n_1+n_2)$$

$$c_{2,n_1+n_2}=\frac{\lg\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\lg\dfrac{p_1}{p_0}-\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}+(n_1+n_2)\left(\frac{\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}{\lg\dfrac{p_1}{p_0}-\lg\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}\right)\overset{\text{记}}{=}h_2+s(n_1+n_2)$$

若两次抽样的积累样本的次品数 $k_1+k_2\leqslant c_{1,n_1+n_2}$，则整批接收；若 $k_1+k_2>c_{2,n_1+n_2}$，则整批拒收；若 $c_{1,n_1+n_2}<k_1+k_2\leqslant c_{2,n_1+n_2}$，则不作决定，继续抽样.

照此法进行下去一直到作出判断为止. 应注意的是，若每次样本的容量为 n_i，其中次品数为 k_i，则在第 m 步时，积累样本的容量为 $\sum_{i=1}^{m} n_i$，积累次品数为 $\sum_{i=1}^{m} k_i$. 可以证明，经有限次抽样可以作出判断.

序贯抽样验收方案可以有两种直观的表示方法:

1° 序贯计件抽样的图解法　以积累样本的容量 $n=\sum_i n_i$ 为横坐标，以积累次品数 $k=\sum_i k_i$ 为纵坐标，两条平行线

$$k=h_1+sn \text{ 与 } k=h_2+sn$$

把整个平面划成三个区域：接收区，拒收区和继续抽查区（图 16.7）. 每检验一件产品后，看它是不是次品，然后在图上画一点 (n,k). 如果点落在接收区内，就接收这批产品；如果点落在拒收区内，就拒收这批产品；如果点落在继续抽查区，就继续抽检. 经有限次抽查，点 (n,k) 总会跑出继续抽查区，这时便可作出接收或拒收的判断.

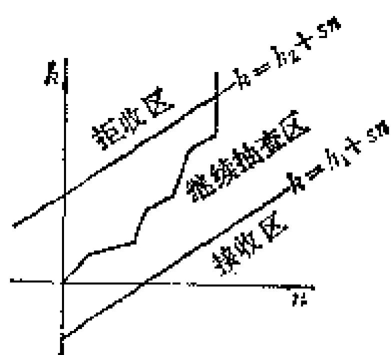


图　16.7

2° 序贯计件抽样的列表法　对给定的不同的 p_0, p_1, α 和 β，列出积累样本的个数 $n=\sum_i n_i$ 和所对应的判断标准 $c_{1,n}$ 和 $c_{2,n}$ 的表. 当积累次品数 $k=\sum_i k_i$ 超出区间 $(c_{1,n}, c_{2,n})$，就可作判断. 例如下表列出 $p_0=0.01$，$p_1=0.08$，$\alpha=5\%$，$\beta=10\%$ 的序贯抽样方案.

n	$c_{1,n}$	$c_{2,n}$	n	$c_{1,n}$	$c_{2,n}$	n	$c_{1,n}$	$c_{2,n}$	n	$c_{1,n}$	$c_{2,n}$
2	×	2	20	×	3	38	0	3	56	0	4
3	×	2	21	×	3	39	0	3	57	0	4
4	×	2	22	×	3	40	0	3	58	0	4
5	×	2	23	×	3	41	0	3	59	0	4
6	×	2	24	×	3	42	0	3	60	0	4
7	×	2	25	×	3	43	0	3	61	1	4
8	×	2	26	×	3	44	0	3	62	1	4
9	×	2	27	×	3	45	0	3	63	1	4
10	×	2	28	×	3	46	0	3	64	1	4
11	×	2	29	×	3	47	0	3	65	1	4
12	×	2	30	×	3	48	0	3	66	1	4
13	×	2	31	0	3	49	0	4	67	1	4
14	×	2	32	0	3	50	0	4	68	1	4
15	×	2	33	0	3	51	0	4	69	1	4
16	×	2	34	0	3	52	0	4	70	1	4
17	×	2	35	0	3	53	0	4			
18	×	2	36	0	3	54	0	4			
19	×	3	37	0	3	55	0	4			

表中 n：累积样本的个数.

$c_{1,n}$：可以作出"接收"的最高次品件数.

$c_{2,n}$：可以作出"拒收"的最低次品件数.

×表示不作决定.

七、质量评估(工序控制)方法

一件产品的制作往往要由好几个工序来完成．每个工序出了问题都会影响产品的质量，因此必须在生产过程的每个工序设有控制图，及时评估生产过程的质量.

［计量评估］ 被评估的产品质量是一物理量．设它在正常生产时遵从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$．用样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的均值 $\bar{x}$ 和极差 R 来评估总体的 μ 和 σ 是否发生异常，分别称为 $\bar{x}$ 评估图(图 16.8)和 R 评估图(图 16.9).

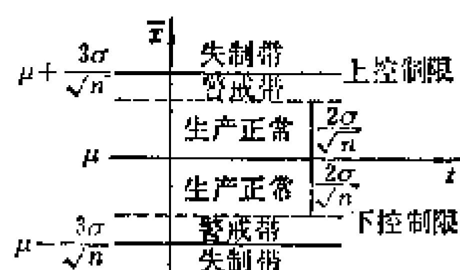


图　16.8

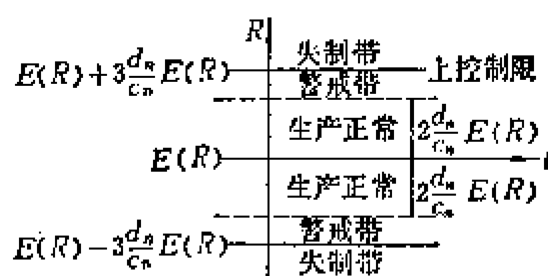


图　16.9

图中 $E(R)$表示极差R的数学期望，c_n, d_n是与n有关的经验常数.

经验常数 c_n, d_n 数值表

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
c_n	1.128	1.693	2.059	2.326	2.534	2.704	2.847	2.970	3.078	3.173	3.258
d_n	0.8525	0.8884	0.8798	0.8641	0.8480	0.8330	0.8200	0.808	0.797	0.787	0.778

如果产品指标规格未知，可从最近正常生产过程中抽取 20 多个容量为n ($n<10$，一般$n=5$或 6)的样本，由各样本的均值$\bar{x}$和极差R再作平均得$\bar{\bar{x}}$和$\bar{R}$，则$\bar{x}$的控制限为$\bar{\bar{x}}\pm 3\frac{\bar{R}}{c_n\sqrt{n}}$，$R$的控制限为$\left(1\pm 3\frac{d_n}{c_n}\right)\bar{R}$.

在连续生产的过程中于某时间间隔内抽取一个容量为n的样本，算出$\bar{x}$和R，然后在评估图上画点，如果在整个生产过程中每次抽样算得的$\bar{x}$和R都在控制限内，点的变化又是随机的(没有一定规划和趋势)，就表示生产正常.

[计件评估]　被评估的产品质量是次品率的大小，其方法与计量评估类似. 如果工厂里规定产品的次品率为p，在某时间间隔内，抽取容量为n(>50)的样本，作次品个数m的评估图(图 16.10).

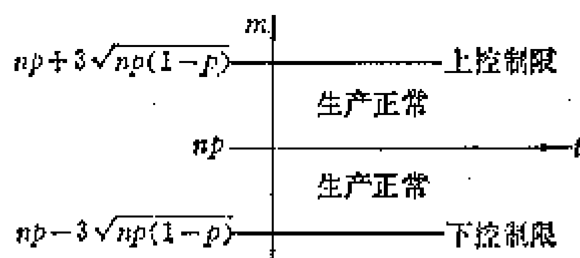


图　16.10

如果产品次品率没有规定，可从近期正常生产过程中抽取20个小样本，用各个样本的次品率的平均值 $\bar{p}$ 作为 p.

$$\bar{p}\pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}.$$

[计点评估] 被评估的产品质量是一件(或一组)产品的疵点的个数. 如果产品在正常生产时的平均疵点数为 $\bar{c}$(它可通过对20多批产品的抽查，在每批产品中抽查一件或一组，算出每批产品的平均疵点数 c_i，然后从20多个 c_i 中算出一个平均数 $\bar{c}$)，那末作疵点数 c 的评估图(图16.11). 其控制限为 $\bar{c}\pm 3\sqrt{\bar{c}}$.

在连续生产过程中的某个时间内任抽取一件产品，数出其疵点个数 c，并用点画在评估图上，当点在控制带内随机变动，则表示生产处在正常状态.

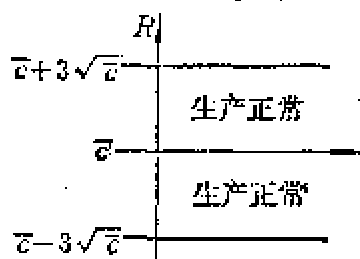


图 16.11

§3 随机过程

一、一般随机过程

[随机过程的定义] 对于每个 $t\in T$(T 是某个固定的实数集)，$\xi(t)$是个随机变量，就把这样的随机变量族$\{\xi(t),\ t\in T\}$称为随机过程. 随机过程一次实验的结果是定义在 T 上的函数，称为随机过程的一次实现. 当参数 t 的变化范围 T 是个整数集合，则称

$$\xi(t),\quad t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

为随机序列.

当 T 只包含一个或有限个元素，$\{\xi(t),\ t\in T\}$就是概率论中研究过的随机变量或随机矢量.

[随机过程的有穷维分布函数族] 设$\{\xi(t),t\in T\}$是个随机过程. 对任意的正整数 n 及任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，随机变量 $\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n)$的联合分布函数为

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(\xi(t_1)\leqslant x_1,\xi(t_2)\leqslant x_2,\cdots,\xi(t_n)\leqslant x_n)$$

称$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$为随机过程的有穷维分布函数族. 它不仅刻划了对应于每一个 t 的随机变量 $\xi(t)$的统计规律性，而且也刻划了各个随机变量 $\xi(t)$之间的关系，从而完整地描述了随机过程的统计规律性.

[随机过程的统计参数]　设$\{\xi(t),\ t\in T\}$是个复值随机过程(指它的实部和虚部都是实的随机过程)．主要的统计参数有:

1°　均值函数　对每个$t\in T$,随机变量$\xi(t)$的数学期望(均值)

$$m(t)=E\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,dF_t(x)$$

称为随机过程的均值函数,式中$F_t(x)$是$\xi(t)$的分布函数.

2°　协方差函数与方差函数　对任意的$s,t\in T$,

$$R(s,t)=E[\xi(s)-m(s)][\xi(t)-m(t)]$$

称为随机过程的协方差函数(或相关函数),式中$m(t)$是均值函数.

特别地,当$s=t$,则称

$$R(t,t)=E[\xi(t)-m(t)]^2$$

为随机过程的方差函数(或自相关函数).

3°　高阶矩　若对任意的正整数n,非负整数$m_1,m_2,\cdots,m_n$, $m=m_1+\cdots+m_n$及任意实数$t_1,t_2,\cdots,t_n$,随机变量$\xi(t_1)^{m_1}\xi(t_2)^{m_2}\cdots\cdots\xi(t_n)^{m_n}$的数学期望存在,则

$$\mu_{m_1,\cdots,m_n}(t_1,\cdots,t_n)=E[\xi(t_1)^{m_1}\cdots\xi(t_n)^{m_n}]$$
$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}dF_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$$

称它为$\xi(t)$在$t_1,t_2,\cdots,t_n$的一个m阶矩.

[随机过程的均方连续性]　设$\{\xi(t),t\in T\}$是一随机过程,$t_0\in T$,如果

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in T}}E|\xi(t)-\xi(t_0)|^2=0$$

即

$$\xi(t_0)=\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m.}}\ \xi(t)$$

则称$\xi(t)$在$t=t_0$是均方连续的,式中l.i.m.表示均方收敛．如果$\xi(t)$对于任意的$t\in T$都均方连续,就称$\xi(t)$在T上是均方连续的.

随机过程$\{\xi(t),t\in T\}$的如下三个命题是等价的:

1°　随机过程$\{\xi(t),t\in T\}$在T上均方连续;

2°　随机过程$\{\xi(t),t\in T\}$的协方差函数$R(s,t)(s,\ t\in T)$关于s, t是连续的;

3°　随机过程$\{\xi(t),t\in T\}$的协方差函数$R(s,t)(s,\ t\in T)$在对角线$s=t$上关于s, t是连续的.

下面介绍几种特殊类型的随机过程:

[独立随机过程]　若对任意的正整数n和任意的$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,随机变量

$\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n)$是相互独立的，即

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(\xi(t_1)\leqslant x_1,\ \xi(t_2)\leqslant x_2,\cdots,\xi(t_n)\leqslant x_n)$$
$$=P(\xi(t_1)\leqslant x_1)P(\xi(t_2)\leqslant x_2)\cdots P(\xi(t_n)\leqslant x_n)$$
$$=F_{t_1}(x_1)F_{t_2}(x_2)\cdots F_{t_n}(x_n)$$

则称$\{\xi(t),t\in T\}$是独立随机过程。

［正态过程］ 若对任意的正整数n和任意的$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，随机变量$\xi(t_1)$，$\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n)$的联合分布总是正态的，即

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$$
$$=\frac{[\det(R_{jk})]^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}R^{jk}[\xi(t_j)-m(t_j)][\xi(t_k)-m(t_k)]\right\}$$

则称$\{\xi(t),t\in T\}$是正态（或高斯）过程，式中$R_{jk}=R(j,k)$，(R_{jk})称为协方差矩阵；(R^{jk})是(R_{jk})的逆矩阵。

［马尔科夫过程］ 若对任意的$n=1,\ 2,\cdots$和任意的$t_0,\ t_1,\cdots,t_n\in T$（其中$t_0<t_1<\cdots<t_n$）以及任意的实数$x,y$，等式

$$P\{\xi(t_n)\leqslant y\,|\,\xi(t_{n-1})=x,\xi(t_{n-2})=x_{n-2},\cdots,\xi(t_0)=x_0\}$$
$$=P\{\xi(t_n)\leqslant y\,|\,\xi(t_{n-1})=x\}$$

对所有的$\xi(t_{n-1}),\cdots,\xi(t_0)$成立，则称$\{\xi(t),t\in T\}$是个马尔科夫过程，简称马氏过程。

［时齐马尔科夫过程］ 设$\{\xi(t),t\in T\}$是马尔科夫过程，若对任意的$t_1\in T$，$t_2\in T$ $(t_1<t_2)$，条件分布

$$F(t_1,x;\ t_2,y)=P\{\xi(t_2)\leqslant y\,|\,\xi(t_1)=x\}=F(t_2-t_1,x,y)$$

即条件分布$F(t_1,x;\ t_2,y)$只依赖于$t_2-t_1,\ x,y$，则称$\{\xi(t),\ t\in T\}$是一个时齐（对时间齐次的）的马尔科夫过程。

［具有独立增量的随机过程］ 若对$n=2,3,\cdots$及任意一组$t_m\in T(m=0,1,\cdots,n$，其中$t_0<t_1<\cdots<t_n)$，随机变量$\xi(t_1)-\xi(t_0)$，$\xi(t_2)-\xi(t_1),\cdots,\ \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$是相互独立的，则称$\{\xi(t),t\in T\}$是个具有独立增量的随机过程。

［具有平稳增量的随机过程］ 若对任意的$t_1,\ t_2\in T$和任意的$h(t_1+h,\ t_2+h\in T)$，随机变量

$$\xi(t_2+h)-\xi(t_1+h)与\xi(t_2)-\xi(t_1)$$

遵从相同的概率分布，则称$\{\xi(t),t\in T\}$是具有平稳增量的随机过程。

[泊松过程]　设$\{\xi(t), 0\leqslant t<\infty\}$是具有平稳独立增量，取非负整数值的随机过程．如果对于任意$t(0\leqslant t<\infty)$，关系式

$$P(\xi(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

成立(其中$\lambda>0$为常数)，则称$\{\xi(t), 0\leqslant t<\infty\}$为泊松过程．

[维纳过程]　若随机过程$\{\xi(t), 0\leqslant t<\infty\}$满足$P(\xi(0)=0)=1$，具有平稳独立增量，并且随机变量$\xi(t)$的分布密度函数是

$$P(t,x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t\sigma^2}}$$

则称$\{\xi(t), 0\leqslant t<\infty\}$是维纳过程或布朗运动过程．

[平稳过程]　若对于$n=1,2,\cdots$，任意$t_m\in T$ $(m=1, 2,\cdots, n)$及任意的$\tau(t_m+\tau\in T, m=1,2,\cdots,n)$，等式

$$\begin{aligned}F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)&=P\{\xi(t_1)\leqslant x_1,\cdots,\xi(t_n)\leqslant x_n\}\\&=P\{\xi(t_1+\tau)\leqslant x_1,\cdots,\xi(t_n+\tau)\leqslant x_n\}\\&=F_{t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau}(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

成立，则称$\{\xi(t), t\in T\}$是平稳过程(狭义的平稳过程)．

二、马尔科夫过程

1. 转移概率

[状态与状态转移概率]　考虑一系列随机试验，其中每次试验的结果如果出现可列个两两互斥事件E_1, E_2, …中的一个而且仅出现一个，则称这些事件$E_i(i=1,2,\cdots)$为状态．如果E_i出现，就称系统处在状态E_i．用$p_{ij}(t,\tau)$表示“已知在时刻t系统处在状态E_i的条件下，在时刻$\tau(\tau>t)$系统处在状态E_j”的条件概率，称$p_{ij}(t,\tau)$为转移概率．

[过程的无后效性与时齐性]　无后效性　若在已知时刻t_0系统所处状态的条件下，在时刻t_0以后系统将到达状态的情况与时刻t_0以前系统所处的状态无关．则称过程为无后效的．

时齐性　若转移概率$p_{ij}(t,\tau)$只与$i, j, \tau-t$有关，则称过程为时齐的．简记

$$p_{ij}(\tau)=p_{ij}(t,t+\tau)$$

2. 马尔科夫链

[马尔科夫链]　马尔科夫链是时间与状态都是离散的马尔科夫过程．

1° 设在一系列随机试验下，系统的可能离散状态为 $E_0, E_1, \cdots$，如果对于任意二正整数 k, m，任意整数 $0 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_l < m$，等式

$$P(E'_{m+k} | E'_m E'_{j_l} \cdots E'_{j_2} E'_{j_1}) = P(E'_{m+k} | E'_m)$$

都成立（E'_m 表示"第 m 次试验出现 E_m"的事件），那末称这一随机试验列为马尔科夫链，简称马氏链．

2° 随机变量序列 $\{\xi_n\}(n=0,1,\cdots)$ 为马尔科夫链的定义

设 $\{\xi_n\}(n=0,1,\cdots)$ 为一随机变量序列，它们中间的每一个都可能取值（相当于所处状态 E_i）$x_i(i=0,1,2,\cdots)$，如果对于任意正整数 k, m，任意整数 $0 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_l < m$，等式

$$P(\xi_{m+k} = x_{m+k} | \xi_m = x_m, \xi_{j_l} = x_{j_l}, \cdots, \xi_{j_2} = x_{j_2}, \xi_{j_1} = x_{j_1})$$
$$= P(\xi_{m+k} = x_{m+k} | \xi_m = x_m)$$

成立，就称 $\{\xi_n\}$ 为马尔科夫链，简称马氏链．

通常可取 $\{x_i\} = \{1, 2, \cdots\}$．

马氏链所刻划的随机试验序列，可以直观地理解为要验测"将来"所处的状态只要用"现在"已知的状态，而"过去"的状态不起任何作用，这就是无后效性．

马氏链，以至于马尔科夫过程都是具有无后效性的随机过程．

［马尔科夫链的转移概率矩阵］ 如果在时刻 m 系统由状态 E_i 经过一次转移到达状态 E_j 的概率和时刻 m 无关，那末就可用 p_{ij} 表示这个一次转移概率．显然

$$\sum_j p_{ij} = 1 \quad (p_{ij} \geqslant 0,\ i, j = 0, 1, 2, \cdots)$$

转移概率 p_{ij} 可排成一个转移概率矩阵

$$P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

这是一个每行元素和为1的非负元素的矩阵，称为马氏链的一步转移概率矩阵．

同样用 $p_{ij}^{(n)}$ 表示系统由状态 E_i 经过 n 次转移而到达状态 E_j 的转移概率，同样定义马氏链的 n 步转移概率矩阵：

$$P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$$

由无后效性，得

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_r p_{ir}^{(m)} p_{rj}^{(n-m)}$$

称为切普曼-柯尔莫哥洛夫方程.

由切普曼-柯尔莫哥洛夫方程可以推出

$$P^{(n)}=P^n$$

[闭集与状态的分类] 考虑时齐的马氏链. 设E为状态空间, $E=(E_0,E_1,E_2\cdots)$, 如果存在正整数n使得$p_{jk}^{(n)}>0$, 则称E_k可自E_j到达, 并记为$E_j\Rightarrow E_k$. 如$E_j\Rightarrow E_k$且$E_k\Rightarrow E_j$, 就说E_j, E_k互通, 记作$E_j\Leftrightarrow E_k$.

称E的子集C为闭集, 是指C外的任一状态都不能自C内任一状态到达. 设E是闭集, 若单点集$\{E_k\}$成一闭集, 就称E_k为吸引状态, 若E内不存在真子集是闭集, 称这个马氏链是不可分的.

记"系统处在状态E_i的条件下, 经n步转移初次到状态E_j"的条件概率为$f_{ij}^{(n)}$, 它可用转移概率表为

$$f_{ij}^{(n)}=\sum_{\substack{i_k\neq j\\(1<k<n)}}p_{ii_1}\cdot p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j}$$

于是

$$p_{ij}^{(n)}=f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)}+f_{ij}^{(2)}p_{jj}^{(n-2)}+\cdots+f_{ij}^{(n-1)}p_{jj}+f_{ij}^{(n)}$$

记

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$$

它是"系统在开始处于状态E_i的条件下, 经有穷次转移后终于到达状态E_j"的条件概率. 并令

$$\mu_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ij}^{(n)}$$

如$f_{ij}=1$, 则可视μ_{ij}为从状态E_i出发, 初次到达状态E_j转移次数的数学期望.

状态分类如下:

1° 如果$f_{jj}=1$, 则称E_j为常返的; 如果$f_{jj}<1$, 则称E_j为非常返的;

2° 设E_j是常返状态, 若$\mu_{jj}=\infty$, 则称E_j为消极常返的(或零状态); 若$\mu_{jj}<\infty$, 则称E_j为积极常返的(或正状态).

3° 如果正整数集$\{n|p_{jj}^{(n)}>0\}$有最大公约数t, 当$t>1$, 称E_j为周期的, 或具有周期t; 当$t=1$, 则称E_j为非周期的.

4° 如果E_j是常返, 非周期正状态, 则称E_j为遍历的.

状态分类的判别法

1° E_j 为非常返的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$.

2° 若 E_j 是有周期 t 的常返状态，则 $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(nt)} = \frac{t}{\mu_{jj}}$.

3° 若 E_j 是遍历的，则 $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}} > 0$.

4° 若 E_j 是常返的，则它为零状态的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$$

[马尔科夫链的分解定理]　任一系统的状态空间可以分解为下列不交子集 $D, C_1, C_2, \cdots$ 之和，其中

1° 任一 C_j 是由常返状态构成的不可分闭集．C_i 中的状态不能自 C_j $(i \neq j)$ 中的状态到达；

2° C_j 中的状态属同类：或者都是零的，或者都是遍历的，或者都是有周期的非零的状态(在任何一种情况下，C_j 中各状态都有相同的周期)，而且 $f_{ik} = 1(E_i \in C_j, E_k \in C_j)$；

3° D 由一切非常返状态构成(C_j 中的状态可能自 D 中的状态到达，反过来不行)．

[马尔科夫链的遍历性定理]　对于不同的状态类型，有如下遍历性定理：

1° 若 $E_k \in D$ 或 E_k 为零状态，则对任意的 j，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = 0$$

2° 若 E_k 是周期为 t 的正的常返状态，则对任意的 j，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(nt+r)} = f_{jk}(r)\frac{t}{\mu_{kk}} \quad (1 \leqslant r \leqslant t)$$

其中

$$f_{jk}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{jk}^{(mt+r)}$$

表示自 E_j 出发，在某 n 步($n \equiv r(\mathrm{mod}\, t)$)上初次到达 E_k 的概率．

3° 对于不可分非周期的马氏链，极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$$

存在，而且只能有下面两种情况：

(i) 所有 p_j(出现 E_j 的概率)都大于零，此时 $\{p_j\}$ 是唯一的平稳分布，即概率分布 $\{p_j\}$ 满足

$$p_j=\sum_i p_i p_{ij}\quad (j=0,1,\cdots)$$

(ii) 所有的 p_j 都等于零，此时不存在平稳分布。

3．时间连续、状态离散的马尔科夫过程

这里只考虑时齐的马尔科夫过程。

［切普曼-柯尔莫哥洛夫方程］　令 $p_{ij}(t)$ 表示在时间间隔为 t、系统从状态 E_i 转移到状态 E_j 的概率，那末

$$\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}(t)=1,\quad p_{ij}(t)\geqslant 0$$

对于 $t>0,\tau>0$，有切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

$$p_{ij}(t+\tau)=\sum_{r=1}^{\infty}p_{ir}(t)p_{rj}(\tau)$$

它是马尔科夫过程研究的基础。

［遍历性定理］　任何时间连续、状态有限 $(E_1,\cdots,E_n)$ 的马尔科夫过程，如果存在一个 t_1，使得对于任何的 i,r，$p_{ir}(t_0)>0$，那末极限

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=p_j\quad (0\leqslant j,\ i\leqslant n)$$

存在并且与 i 无关。

［柯尔莫哥洛夫的前进和后退方程］　如果只有有限个状态的马尔科夫过程满足

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

就称它是随机连续的马尔科夫过程。

对状态有限的随机连续的马尔科夫过程，有柯尔莫哥洛夫的前进和后退方程：

$$\frac{dp_{ik}(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(t)q_{jk}\quad (前进方程)$$

$$\frac{dp_{ik}(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}q_{ij}p_{jk}(t)\quad (后退方程)$$

其中

$$q_{ij}=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}<\infty$$

4. 扩散过程

[扩散过程的定义] 状态连续的马尔科夫过程$\{\xi(t), 0\leqslant t<\infty\}$,如果它的条件分布函数$F(t,x;\tau,y)$对任何的$\varepsilon>0$及$t_1<t<t_2$, $t_1\to t, t_2\to t$, 关于x一致地成立下列三个关系:

$$\text{(i)} \int_{|y-x|\geqslant\varepsilon} d_y F(t,x;\tau,y)=o(t_2-t_1)$$

$$\text{(ii)} \int_{|y-x|<\varepsilon} (y-x)d_y F(t,x;\tau,y)=a(t,x)(t_2-t_1)+o(t_2-t_1)$$

$$\text{(iii)} \int_{|y-x|<\varepsilon} (y-x)^2 d_y F(t,x;\tau,y)=b(t,x)(t_2-t_1)+o(t_2-t_1)$$

就称马尔科夫过程$\{\xi(t), 0\leqslant t<\infty\}$为扩散过程.

[柯尔莫哥洛夫第一方程] 如果扩散过程的条件分布函数$F(t,x;\tau,y)$的偏导数

$$\frac{\partial F(t,x;\tau,y)}{\partial x},\ \frac{\partial^2 F(t,x;\tau,y)}{\partial x^2}$$

存在,且对任何t,x,y和$\tau(\tau>t)$连续,那末函数$F(t,x;\tau,y)$满足柯尔莫哥洛夫第一方程

$$\frac{\partial F(t,x;\tau,y)}{\partial t}=-a(t,x)\frac{\partial F(t,x;\tau,y)}{\partial x}-\frac{b(t,x)}{2}\frac{\partial^2 F(t,x;\tau,y)}{\partial x^2}$$

[柯尔莫哥洛夫第二方程] 如果扩散过程的条件分布函数$F(t,x;\tau,y)$具有分布密度$f(t,x;\tau,y)$,并且下面的各个偏导数

$$\frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial\tau},\ \frac{\partial}{\partial y}[a(\tau,y)f(t,x;\tau,y)],\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau,y)f(t,x;\tau,y)]$$

存在且连续,那末$f(t,x;\tau,y)$满足柯尔莫哥洛夫第二方程

$$\frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial\tau}=-\frac{\partial}{\partial y}[a(\tau,y)f(t,x;\tau,y)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau,y)f(t,x;\tau,y)]$$

三、平稳随机过程

[弱平稳过程] 如果随机过程$\{\xi(t), t\in T\}$满足

$$\begin{cases} E\xi(t)=m & (m\text{为常数}) \\ E[\xi(t)-m][\xi(s)-m]=R(t-s) \end{cases}$$

就称它是弱平稳过程(或广义的平稳过程).

广义的平稳过程不一定是狭义的平稳过程;反过来,狭义的平稳过程也不一定是广义的平稳过程,但是如果狭义平稳过程的二阶矩存在,那末它必是广义

的平稳过程.

对于正态过程来说，广义平稳性和狭义平稳性是一致的.

在理论研究中，考虑复值随机过程常常更加方便. 所谓复值随机变量 ξ 是指 $\xi=\eta+i\zeta$，其中 η，ζ 都是随机变量；而复值随机过程就是 $\xi(t)=\eta(t)+i\zeta(t)$，其中 $\eta(t)$、$\zeta(t)$ 都是实值随机过程.

复值随机变量 $\xi=\eta+i\zeta$ 的均值(或数学期望)定义为

$$E\xi=E\eta+iE\zeta$$

两个复值随机变量 ξ_1,ξ_2 的相关矩定义为

$$E[(\xi_1-E\xi_1)\overline{(\xi_2-E\xi_2)}]$$

复值随机过程 $\{\xi(t),t\in T\}$ 的广义平稳性，是指它满足

$$\begin{cases}E\xi(t)=m & (m\text{为常数})\\ E[\xi(t)-m][\overline{\xi(s)-m}]=R(t-s)\end{cases}$$

下面考虑的都是复值的广义平稳过程.

[相关函数的谱分解]　如果函数 $R(\tau)$ 是某一均方连续平稳过程 $\{\xi(t),-\infty<t<\infty\}$ 的相关函数，那末

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau\lambda}dF(\lambda)$$

其中 $F(\lambda)$ 是有界不减函数，满足 $F(-\infty)=0,F(\infty)=R(0)$，称为平稳过程 $\{\xi(t),-\infty<t<\infty\}$ 的谱函数(工程上称为频谱).

如果 $F(\lambda)$ 绝对连续，记 $F'(\lambda)=f(\lambda)$，称 $f(\lambda)$ 为谱密度(工程上称为频谱密度)，这时

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau\lambda}f(\lambda)d\lambda$$

当 $\{\xi(t),-\infty<t<\infty\}$ 是实值平稳过程时，相关函数 $R(\tau)$ 可以表示成

$$R(\tau)=\int_0^{\infty}\cos\lambda\tau dF_1(\lambda)$$

或(当谱密度存在时)

$$R(\tau)=\int_0^{\infty}\cos\lambda\tau f_1(\lambda)d\lambda$$

其中 $F_1(\lambda)=2F(\lambda)+c$ (c 为常数)，$f_1(\lambda)=F_1'(\lambda)=2f(\lambda)$.

特别，对复值平稳序列 $\{\xi_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 有

$$R(k)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\lambda}dF(\lambda)\quad(k=0,\pm1,\cdots)$$

其中谱函数 $F(\lambda)$ 满足

$$F(-\pi)=0, \qquad F(\pi)=R(0)$$

[遍历性定理]

1° 如果$\{\xi(t), -\infty<t<\infty\}$是均方连续的平稳过程，那末

$$E\xi(t)=\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)dt$$

的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}R(\tau)d\tau=0$$

2° 如果$\{\xi_n, n=0,\pm1,\cdots\}$是平稳序列，那末

$$E\xi(t)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j$$

的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}R(j)=0$$

3° 如果$\{\xi(t), -\infty<t<\infty\}$是均值为零的均方连续的平稳过程，又对取定的常数$\tau>0$，$\{\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}, -\infty<t<\infty\}$也是均方连续的平稳过程，记其相关函数为$R_\tau(u)$，那末

$$E[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}]=\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}dt$$

的充分必要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}R_\tau(u)du=0$$

4° 如果$\{\xi_n, n=0, \pm1,\cdots\}$是均值为零的平稳序列，又对取定的整数$m$，$\{\xi_{n+m}\bar{\xi}_n, n=0,\pm1,\cdots\}$也是平稳序列，记其相关函数为$R_m(k)$，那末

$$E\xi_{n+m}\bar{\xi}_n=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\xi_{j+m}\bar{\xi}_j$$

的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}R_m(j)=0$$

遍历性定理表明，对于平稳过程，只要它满足定理的条件(在实际中它们是常常能够满足的)，那末对样本空间的平均(如均值、相关矩等)可以用对时间的平均来代替，更具体地说，只要用平稳过程在足够长时间的一次实现，就可以确

定过程的均值和相关函数．这正是遍历性定理在实用上重要的原因．

［平稳过程的谱展式］ 如果$\{\xi(t),\ -\infty<t<\infty\}$是均值为零的均方连续平稳过程，那末有

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}dZ(\lambda)$$

其中
$$Z(\lambda)=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-i\lambda t}-1}{-it}\xi(t)dt$$

满足 (i) $EZ(\lambda)=0$

(ii) 当区间$(\lambda_1,\lambda_1+\Delta\lambda_1)$与$(\lambda_2,\lambda_2+\Delta\lambda_2)$不相重迭时

$$E\{[Z(\lambda_1+\Delta\lambda_1)-Z(\lambda_1)]\overline{[Z(\lambda_2+\Delta\lambda_2)-Z(\lambda_2)]}\}=0$$

(即$Z(\lambda)$是具正交增量的过程)

(iii) $E|Z(\lambda_2)-Z(\lambda_1)|^2=F(\lambda_2)-F(\lambda_1)$ （$F(\lambda)$是谱函数）

$Z(\lambda)$称为$\xi(t)$的随机谱函数．$\xi(t)$的积分表示式称为$\xi(t)$的谱展式。

特别，如果$\xi(t)$是实值均方连续平稳过程，那末有

$$\xi(t)=\int_{0}^{+\infty}\cos\lambda t\,dZ_1(\lambda)+\int_{0}^{+\infty}\sin\lambda t\,dZ_2(\lambda)$$

其中
$$Z_1(\lambda)=2\mathrm{Re}Z(\lambda)=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\lambda t}{t}\xi(t)dt$$

$$Z_2(\lambda)=-2\mathrm{Im}Z(\lambda)=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos\lambda t}{t}\xi(t)dt$$

满足 (i) $EZ_1(\lambda)=EZ_2(\lambda)=0$,

(ii) 当区间$(\lambda_1,\lambda_1+\Delta\lambda_1)$与$(\lambda_2,\lambda_2+\Delta\lambda_2)$不相重迭时

$$E\{[Z_j(\lambda_1+\Delta\lambda_1)-Z_j(\lambda_1)]\overline{[Z_k(\lambda_2+\Delta\lambda_2)-Z_k(\lambda_2)]}\}=0\quad(j,k=1,2)$$

(iii) $E[Z_1(\lambda+\Delta\lambda)-Z_1(\lambda)]^2=E[Z_2(\lambda+\Delta\lambda)-Z_2(\lambda)]^2$

$$=F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda)$$

($F(\lambda)$是谱函数)

如果$\{\xi_n,\ n=0,\pm1,\cdots\}$是均值为零的平稳序列，那末有

$$\xi_n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}dZ(\lambda)$$

其中随机谱函数$Z(\lambda)$是

$$Z(\lambda)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\frac{e^{-i\lambda k}-1}{-ik}\xi(k)\quad(-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi)$$

它也满足类似于均方连续平稳过程的随机谱函数的性质(i)～(iii)．

第十七章　误差理论与实验数据处理

在科学实验和生产实际中，为了掌握事物发展的规律性，总是通过各种方法对我们所需要的量观测记录下许多数据．但是由于外界的随机干扰，这些数据实际上是带有随机误差的近似数据，对这些近似数据必须根据需要进行合适的处理．一方面必须估计观测数据的可靠程度，并给以合理的解释；另一方面，还必须将所得数据加以整理归纳，用一定的方式表示出各数值之间的相互关系，或者对带有误差(噪声)的数据(信号)进行分析处理，把干扰“过滤”掉，得出真正需要的量．前者需要误差理论的基础知识(如高斯误差定律、各种平均值的计算法、误差的表示法、误差传递定律和近似计算法则等)，后者则需要处理数据的基本技术(如插值法、曲线拟合的方法、实验曲线的光滑法和滤波方法等)．本章介绍了这些方法的主要内容．

§1　误差理论

一、观测误差

［真值与误差］　观测对象的量是客观存在的，称为真值．每次观测所得数值称为观测值．设观测对象的真值为 x，观测值为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，则差数

$$\alpha_i=x_i-x \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

称为观测误差，简称为误差．

［误差的分类与鉴别］

分类	误差的原因	误差的鉴别
系统误差	(i)仪器结构的不良 (ii)周围环境的改变	(i) 观测值总往一个方向偏差． (ii) 误差的大小和符号在重复多次观测中几乎相同． (iii) 经过校正和处理可以消除误差

分类	误差的原因	误差的鉴别
随机误差	某些难以控制的偶然因素造成的	观测值变化无常，但在等精度观测下有如下规律(即随机误差服从正态分布，参考本节，四)： (i) 误差绝对值不会超过一定界限. (ii) 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的个数要多，近于零的误差出现的个数最多. (iii) 绝对值相等的正误差与负误差出现的个数几乎相等. (iv) 误差的算术平均值，随着观测次数的增加而趋近于零
过失误差	粗枝大叶造成的观测误差或计算误差	(i) 观测结果与事实不符 (ii) 认真操作可以消除误差

［观测的准确度与精密度］ 如果观测的系统误差小，则称观测的准确度高，可以使用更精确的仪器来提高观测的准确度. 如果观测的随机误差小，则称观测的精密度高，可以增加观测次数取其平均值来提高观测的精密度.

本章所指的误差都是随机误差.

二、平均值及其精密度指标

［常用平均值的求法］ 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是某观测对象的一组观测数据.

名称	定义与符号	用途与说明
算术平均值	$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ $=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$	它在最小二乘法意义下是所求真值的最佳近似，是最常用的一种平均值

名称	定义与符号	用途与说明
简算平均值	$\bar{x}=\frac{1}{n}(\nu_1\tilde{x}_1+\cdots+\nu_m\tilde{x}_m)$ 设 $y_i=\frac{\tilde{x}_i-A}{c}$，则 $\bar{x}=A+\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{m}\nu_i y_i$ 式中 m 是组数，A 是常数，c 是组距，ν_i 是第 i 组的频数，且 $\sum_{i=1}^{m}\nu_i=n$， $\tilde{x}_i$ 是第 i 组的组中值（即该组上下限的平均值）	1° 数据较多时，算术平均值常用此法计算. 2° 组数和组距根据数据的级差 $(\max\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\}-\min\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\})$ 适当选取. 3° 采取等组距 c. 4° 变换 $y_i=\frac{\tilde{x}_i-A}{c}$ 中的 A 常取为处在中间组的组中值
几何平均值	$\bar{x}_g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 或 $\lg\bar{x}_g=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lg x_i$	当对一组观测值 (x_i) 取常用对数 $(\lg x_i)$ 所得图形的分布曲线更为对称（同 (x_i) 比较）时，常用此法
加权平均值	$\bar{x}_w=\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ 式中 w_i 是第 i 个观测值 x_i 的对应权	计算用不同方法或不同条件观测同一物理量的均值时，常对不同可靠程度的数据给予不同的“权”
中位数	观测值依大小顺序排列后处在中间位置的值．当 n 为偶数时，取为中间两数的算术平均	它是一种顺序统计量，能反映匀称观测值的取值中心

[算术平均值与离差] 观测对象的真值 x 可以用 n 次观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

近似代替，并用离差

$$v_i=x_i-\bar{x}$$

代替误差 $\alpha_i=x_i-x$．离差与误差有如下关系

$$v_i = a_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad（当 n 相当大）$$

［平均值的精密度指标］

	相同精密度的观测	不同精密度的观测
观测值	$x_i \ (i=1,2,\cdots,n)$	$x_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$
权	1	$w_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$
平均值	算术平均值 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$	加权平均值 $\bar{x}_w=\sum_{i=1}^{n}w_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n}w_i$
标准差	$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$	$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-\bar{x}_w)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}w_i}}$
真值 x 对算术平均值 $\bar{x}$ 的误差	$\delta=\lvert\bar{x}-x\rvert=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$	$\delta=\lvert\bar{x}_w-x\rvert=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-\bar{x}_w)^2}{n(n-1)\sum_{i=1}^{n}w_i}}$

σ 的值愈小，表明观测值的平均值 $\bar{x}$（或 $\bar{x}_w$）与真值 x 的偏差愈小，精密度愈高，即平均值可信赖的程度愈高.

三、误差的表示法

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是某观测对象的一组观测数据．其算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

误差 $\alpha_i=x_i-x(i=1,2,\cdots,n)$，离差 $v_i=x_i-\bar{x}(i=1,2,\cdots,n)$，真值对平均值的误差 $\delta=|\bar{x}-x|$.

名称与记号	定义与表示法	特　　点
[标准误差]（中误差或均方误差）σ	各个误差平方和的平均值的平方根，即 $\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}{n}}$ 当观测次数较大时 $\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$ 显然 $\sigma=\sqrt{n}\delta$	不取决于观测中个别误差的符号，对观测值中的较大误差或较小误差感觉比较灵敏，是表示精密度的较好方法
[平均误差] η	离差的绝对值的算术平均值 $\eta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lvert v_i\rvert}{n}$	优点是计算简单，缺点是无法表示出各次观测间彼此符合的情况．例如一组观测中偏差彼此接近，而另一组观测中偏差有大中小三种．但在这两组不同的观测中所得平均误差可能相同．所以只有当 n 很大时才较可靠
[概率误差] γ	它是这样一个数，绝对值比它大的误差和绝对值比它小的误差出现的可能性一样大，即 $P(\lvert\alpha\rvert\leqslant\gamma)=\frac{1}{2}$	将误差按绝对值的大小顺序排列后，序列的中位数就是概率误差．按排列方式来求概率误差，在工作上比较困难，同时只有当 n 的值很大时才较可靠

[标准误差、平均误差、概率误差三者关系]

$$\sigma=1.2533\eta=1.4826\gamma$$

$$\eta=0.7979\sigma=1.1829\gamma$$

$$\gamma=0.6745\sigma=0.8453\eta$$

$$\sigma > \eta > \gamma$$

四、高斯误差定律

［高斯误差方程］　随机误差的分布密度函数为正态分布密度函数

$$f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

它称为高斯误差方程，其图形称为误差曲线（图 17.1），式中

$$h=\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}\quad(\sigma\text{是标准误差})$$

称为精密度指数．

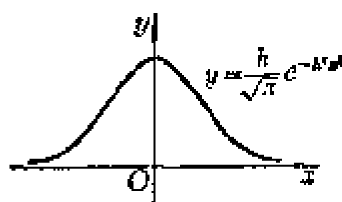


图　17.1

误差曲线是一条连续曲线，当 $|x|\to\infty$ 时，$|f(x)|$ 递降趋于零．

1°　根据实际情况选取 $|x|$ 的一个值 x_e 作为界限，x 超过这个界限的 $f(x)$ 值非常小，被认为等于零．x_e 就被认为是正负误差的极大值，而一般误差值就是介于 $-x_e$ 与 x_e 之间的任何值，它们的概率就是这个区间上的 $f(x)$ 值．

2°　绝对值相等的正负误差，出现的概率相等．

3°　绝对值小的误差比绝对值大的误差，概率较大．

［误差概率表及其用途］　令 α 表示误差，σ 表示标准误差．对于不同的 t，概率 $P(|\alpha|\leqslant t\sigma)$ 的取值如下表．

误差概率表

误差限	$\lvert\alpha\rvert=0$	$\lvert\alpha\rvert\leqslant 0.32\sigma$	$\lvert\alpha\rvert\leqslant 0.67\sigma$	$\lvert\alpha\rvert\leqslant 1.15\sigma$
概　率	0.00	25%	50%	75%
误差限	$\lvert\alpha\rvert\leqslant 1.96\sigma$	$\lvert\alpha\rvert\leqslant 2\sigma$	$\lvert\alpha\rvert\leqslant 2.58\sigma$	$\lvert\alpha\rvert\leqslant 3\sigma$
概　率	95%	95%	99%	99.7%

主要用途

(1) 决定某一给定误差介于某一范围内的概率的大小，从而判断误差属于系统误差或随机误差．例如当误差的绝对值大于 3σ 时(其可能性只有 0.3%)，则不能相信是随机误差．

(2) 用各种不同方法去观测同一物理量时，判断所得结果彼此是否符合。

五、误差与有效数字

[绝对误差与相对误差] x 为观测对象的真值，其近似值为 x^*。

误差名称	定义和计算公式
绝对误差 α	$\alpha=x-x^*$
最大绝对误差 Δ	使不等式 $\lvert\alpha\rvert=\lvert x-x^*\rvert\leqslant\Delta$ 成立的最小的量 Δ
相对误差 α'	$\alpha'=\frac{\alpha}{x^*}$
最大相对误差 δ	使不等式 $\lvert\alpha'\rvert=\frac{\lvert\alpha\rvert}{\lvert x^*\rvert}\leqslant\delta$ 成立的最小的量 δ

[误差传递的一般公式]

1° 设 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 表示 m 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的函数，若自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的最大绝对误差分别为 $\Delta_{x_1},\Delta_{x_2},\cdots,\Delta_{x_m}$，则函数 y 的最大绝对误差 Δ_y 和最大相对误差 δ_y 分别为

$$\Delta_y=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\Delta_{x_1}+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\Delta_{x_2}+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|\Delta_{x_m}$$

$$\delta_y=\frac{\Delta_y}{|y|}=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\frac{\Delta_{x_1}}{|y|}+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\frac{\Delta_{x_2}}{|y|}+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|\frac{\Delta_{x_m}}{|y|}$$

2° 近似值的简单运算的误差估计

$$\Delta_{(x\pm y)}\leqslant\Delta_x+\Delta_y$$

$$\delta_{xy}\left(\text{或 }\delta_{\frac{x}{y}}\right)\leqslant\delta_x+\delta_y$$

$$\delta_{x^p}=|p|\delta_x\quad(p\text{ 为任意实数})$$

$$\Delta_{\ln x}<0.5\delta_x,\quad \delta_x<2.5\Delta_{\ln x}$$

3° 设 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 看成随机变量的函数，并用 $\sigma,\sigma_{x_1},\sigma_{x_2},\cdots,\sigma_{x_m}$ 和 $\gamma,\gamma_{x_1},\gamma_{x_2},\cdots,\gamma_{x_m}$ 分别表示 $y,x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的标准误差和概率误差，则其误差传递公式为

$$\sigma=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2\sigma_{x_m}^2}$$

$$\gamma=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\gamma_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\gamma_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2\gamma_{x_m}^2}$$

[有效数字与可疑数字] 任何一个近似值 x^* 都可用十进小数表示成

$$x^*=\pm(x_1 10^{m-1}+x_2 10^{m-2}+\cdots+x_k 10^{m-k}+\cdots+x_n 10^{m-n})$$

式中 $x_1\neq0$, $0\leqslant x_i\leqslant 9$ $(2\leqslant i\leqslant n)$ 都是正整数，m 为近似值的整数部分的位数，或表示成

$$x^*=\pm x_1.x_2x_3\cdots x_n\times 10^{m-1}=\pm x^{*\prime}\times 10^{m-1}\quad (1\leqslant x^{*\prime}<10)$$

如果近似值的最大绝对误差不超过左起第 k 位(从左边第一个非零数字算起)的半个单位，即

$$\Delta\leqslant 0.5\times 10^{m-k}$$

则称 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 为有效数字．特别，当 $k=n$ 时，称 x^* 为具有 n 位有效数字的近似值.

如果近似值 x^* 的最大绝对误差不超过左起第 k 位的一个单位，即

$$\Delta\leqslant 10^{m-k}$$

则称 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 为可靠数字．特别，当 $k=n$ 时，称 x^* 为具有 n 位可靠数字的近似值.

由此看出，有效数字比可靠数字精确．一般都采用有效数字的概念.

如果近似值 x^* 有 k 位有效数字(或可靠数字)，则左起第 k 位数字称为可疑数字.

[记数法则]

1° 记录观测数据时，只保留一位可疑数字.

2° 除另有规定外，可疑数字表示末位上有±1 个单位(或±0.5 个单位)的误差.

3° 表示精确度时，大多数情况下只取一位有效数字，最多取两位有效数字.

4° 在数据计算中，当有效数字的位数确定之后，其余数字应一律舍去(按四舍五入法)：

(i) 被舍去的第一位小于或等于 4.

(ii) 被舍去的第一位大于 5，或被舍去的第一位等于 5 且第二位大于零，则被保留的末位上增加 1.

(iii) 被舍去的第一位等于 5 且第二位等于零，则有两种情况：被保留的末位是奇数时应增加 1；被保留的末位是偶数时不变.

[近似计算法则]

1° 不超过十个近似值相加减时，要把小数位数较多的数四舍五入，使比小数位数最少的数多一位小数；计算结果保留的小数位数要与原近似值中小数位

数最少者相同.

2° 近似值相乘除时。各因子保留的位数应比有效数字位数最少者的位数大 1，所得积(或商)的可靠数字的位数与原近似值中有效数字位数最少者的位数相等.

3° 近似值乘方或开方时，原近似值有几位有效数字，计算结果就可以保留几位数字.

4° 所取对数的位数应与真数有效数字的位数相等.

注意，1° 在进行计算的过程中，中间结果应比上述各法则所指示的位数多取一位；但在进入最后一次计算时，这一位"后备数字"仍要舍入.

2° 两个相差不多的数相减或用近似于零的数作除数，常常是使计算结果产生较大相对误差的原因. 所以如有可能，应把计算程序组织好，尽量避免它. 比如，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

当 $b>0$，且 $b^2\gg 4ac$ 时，用上式求 x_1 会得到错误的结果. 应将 x_1 的公式变形，改用公式

$$x_1=-\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

进行计算.

[预定精确度的计位法则]

1° 如果计算结果是由加减法求得的，那末原始数据的小数位数应比结果所要求的多一位.

2° 如果计算结果是由乘、除、乘方、开方求得的，那末原始数据的有效数字位数应比结果所要求的数字位数多一位.

3° 四个或四个以上的近似值的算术平均值的有效数字的位数可增加一位.

§2 插值公式

一、不等距节点插值公式(差商插值多项式)

已知单变量函数 $f(x)$ 的 $n+1$ 个节点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及其对应的函数值 $y_k=f(x_k)$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$，对于插值区间

$$[\min_{0\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}, \max_{0\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}]$$

上任一点 x，函数值 $f(x)$ 可按下面的差商插值多项式计算：

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=y_0+y_{0,1}(x-x_0)+y_{0,1,2}(x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+\cdots+y_{0,1,2,\cdots,n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})+R_n(x)$$

式中 $y_{0,1}$，$y_{0,1,2}$，…，$y_{0,1,2,\cdots,n}$ 分别为 $\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}$ 的一阶差商，二阶差商，…，n 阶差商．可按下列程序从左到右逐列进行计算：

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…	n 阶差商
x_0	y_0					
x_1	y_1	$y_{0,1}$				
x_2	y_2	$y_{1,2}$	$y_{0,1,2}$			
x_3	y_3	$y_{2,3}$	$y_{1,2,3}$	$y_{0,1,2,3}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	
x_{n-1}	y_{n-1}	$y_{n-2,n-1}$	$y_{n-3,n-2,n-1}$	$y_{n-4,n-3,n-2,n-1}$		
x_n	y_n	$y_{n-1,n}$	$y_{n-2,n-1,n}$	$y_{n-3,n-2,n-1,n}$		$y_{0,1,2,\cdots,n}$

表中一阶差商

$$y_{i,i+1}=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \qquad (i=0,1,\cdots,n-1)$$

二阶差商

$$y_{i,i+1,i+2}=\frac{y_{i+1,i+2}-y_{i,i+1}}{x_{i+2}-x_i} \qquad (i=0,1,\cdots,n-2)$$

三阶差商

$$y_{i,i+1,i+2,i+3}=\frac{y_{i+1,i+2,i+3}-y_{i,i+1,i+2}}{x_{i+3}-x_i} \qquad (i=0,1,\cdots,n-3)$$

………………………………………

n 阶差商

$$y_{0,1,2,\cdots,n}=\frac{y_{1,2,\cdots,n}-y_{0,1,2,\cdots,n-1}}{x_n-x_0}$$

差商插值多项式中的余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$\min_{0\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}\leqslant\xi\leqslant\max_{0\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$$

余项也可以写成

$$R_n(x)=y_{x,0,1,\cdots,n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

式中 $y_{x,0,1,\cdots,n}$ 表示 $\{y,y_0,y_1,\cdots,y_n\}$ 的 $n+1$ 阶差商. 对于由测量给出函数的某些值或分析式子比较复杂的函数用这种余项较为方便.

差商插值多项式显然满足

$$P(x_k)=f(x_k)=y_k \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

具体插值计算步骤如下:

首先由 $y_k=f(x_k)$, $k=0,1,2,\cdots,n$, 按差商表计算出各阶差商, 然后对给定的插值区间内一点 a, 算出 $(a-x_k)$, $k=1,2,\cdots,n-1$, 则

$$f(a)\approx P_n(a)=\{\cdots\{\{[y_{0,1,2,\cdots,n}(a-x_{n-1})+y_{0,1,2,\cdots,n-1}](a-x_{n-2})+$$
$$+y_{0,1,2,\cdots,n-2}\}(a-x_{n-3})+y_{0,1,2,\cdots,n-3}\}(a-x_{n-4})+\cdots+y_{0,1}\}\cdot$$
$$\cdot(a-x_0)+y_0$$

二、等距节点插值公式(差分公式)

[向前差分与向后差分] 已知函数 $f(x)$ 在等距节点

$$x_k=x_0+kh \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n)$$

的值为

$$y_k=f(x_k) \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n)$$

其差分按下式计算

一阶差分 $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i \qquad (i=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm(n-1))$

二阶差分 $\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i \quad (i=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm(n-2))$

………………………………………………

k 阶差分 $\Delta^k y_i=\Delta^{k-1}y_{i+1}-\Delta^{k-1}y_i=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}y_{i+k-j}$

$$(i=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm(n-k))$$

符号 Δy_i 称为向前差分. 此外还可引进符号 ∇y_i, 它们的定义是

$$\nabla y_i=y_i-y_{i-1}=\Delta y_{i-1}, \quad \nabla^r y_i=\nabla(\nabla^{r-1}y_i)$$

符号 ∇y_i 称为向后差分.

向前差分和向后差分之间的关系为

$$\nabla^r y_i=\Delta^r y_{i-r}$$

[差分表]

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	
⋮	⋮	Δy_{-3}				
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$	N_2
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$	S
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		B
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	N_1
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$			
⋮	⋮					

[牛顿第一插值公式(牛顿向前插值公式)]

节　　点　　$x_0, x_1=x_0+h, \cdots, x_n=x_0+nh$　　($h>0$为步长)

插 值 点　　$x=x_0+uh,\ u=\dfrac{x-x_0}{h}$　　($0<u<1$)

插值公式　　$f(x)=N_1(x)+R_n(x)$

$$N_1(x)=y_0+u\Delta y_0+\binom{u}{2}\Delta^2 y_0+\binom{u}{3}\Delta^3 y_0+\cdots+\binom{u}{n}\Delta^n y_0$$

余　　项　　$R_n(x)=\binom{u}{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$　　($x_0<\xi<x_n$)

式中$\binom{u}{n}$为二项系数。

适用范围　通常用于计算插值区间的始点 x_0 附近的函数值。

[牛顿第二插值公式(牛顿向后插值公式)]

节　　点　　$x_0, x_{-1}=x_0-h, \cdots, x_{-n}=x_0-nh$　　($h>0$)

插 值 点　　$x=x_0-uh,\ u=\dfrac{x_0-x}{h}$

插值公式　　$f(x)=N_2(x)+R_n(x)$

$$N_2(x)=y_0+u\Delta y_{-1}+\frac{(u)_2}{2!}\Delta^2 y_{-2}+\frac{(u)_3}{3!}\Delta^3 y_{-3}+\cdots+\frac{(u)_n}{n!}\Delta^n y_{-n}$$

余　　项　　$R_n(x)=\dfrac{(u)_{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$　　($x_0-nh<\xi<x_0$)

式中

$$(u)_k=u(u+1)\cdots(u+k-1)$$

用向后差分时

$$N_2(x)=y_0+u\nabla y_0+\frac{(u)_2}{2!}\nabla^2 y_0+\frac{(u)_3}{3!}\nabla^3 y_0+\cdots+\frac{(u)_n}{n!}\nabla^n y_0$$

适用范围　通常用于计算插值区间的终点 x_{-n} 附近的函数值.

[斯特林插值公式]

节　　点　$x_k=x_0+kh$　$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\ h>0)$

插 值 点　$x=x_0+uh,\qquad u=\frac{x-x_0}{h}$

插值公式　$f(x)=S(x)+R_{2n}(x)$

$$\begin{aligned}S(x)=&y_0+\frac{u}{1!}\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}+\frac{u^2}{2!}\Delta^2 y_{-1}\\&+\frac{u(u^2-1)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}+\frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\cdots\\&+\frac{u(u^2-1)(u^2-4)\cdots[u^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\frac{\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}+\Delta^{2n-1}y_{-n}}{2}\\&+\frac{u^2(u^2-1)(u^2-4)\cdots[u^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}\end{aligned}$$

余　　项　$R_{2n}(x)=u(u^2-1)(u^2-4)\cdots(u^2-n^2)h^{2n+1}\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}$

$$(x_0-nh<\xi<x_0+nh)$$

适用范围　通常用于计算插值区间中点附近的函数值. 一般当 $|x-x_0|\leqslant\frac{1}{4}h$ 时用这个公式.

注意事项　每次用的节点的个数都是奇数.

[贝塞耳插值公式]

节　　点　$x_k=x_0+kh$　$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n)$

插 值 点　$x=x_0+uh,\ u=\frac{x-x_0}{h}$

插值公式　$f(x)=B(x)+R_{2n-1}(x)$

$$\begin{aligned}B(x)=&\frac{1}{2}\{y_0+y_1\}+\frac{u-\frac{1}{2}}{1!}\Delta y_0+\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}\frac{\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_{-1}}{2}\\&+\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}{3!}\Delta^3 y_{-1}+\end{aligned}$$

$$+\frac{\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]}{4!}\frac{\Delta^4y_{-1}+\Delta^4y_{-2}}{2}+\cdots+$$

$$+\frac{\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]\cdots\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(2n-3)^2}{4}\right]}{(2n-2)!}$$

$$\cdot\frac{\Delta^{2n-2}y_{-(n-2)}+\Delta^{2n-2}y_{-(n-1)}}{2}$$

$$+\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]\cdots\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(2n-3)^2}{4}\right]}{(2n-1)!}$$

$$\cdot\Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}$$

余项

$$R_{2n-1}(x)=\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]\cdots\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(2n-1)^2}{4}\right]$$

$$\cdot h^{2n}\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\quad(x_0-nh<\xi<x_0+nh)$$

适用范围　通常用于计算两相邻节点之间的中点附近的函数值．这个公式一般在$\left|u-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{4}$时使用．

注意事项　每次用的节点的个数都是偶数．

当 $u=\frac{1}{2}$时，插值公式特别简单：

$$f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=\frac{y_0+y_1}{2}-\frac{1}{2!2^2}\frac{\Delta^2y_0+\Delta^2y_{-1}}{2}+\frac{1^2\cdot3^2}{4!2^4}\frac{\Delta^4y_{-1}+\Delta^4y_{-2}}{2}$$

$$+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{6!2^6}\frac{\Delta^6y_{-2}+\Delta^6y_{-3}}{2}+\cdots+R_{2n-1}\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$$

$$R_{2n-1}\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=(-1)^n[(2n-1)!!]^2 2^{-2n}[(2n)!]^{-1}h^{2n}f^{(2n)}(\xi)$$

说明　应用差分法插值时，并非项数愈多结果就愈精确，一般取二、三次就可以了．不难看出，线性插值法只是差分法的一个特例（取一阶差分）．

三、拉格朗日插值多项式

［拉格朗日插值公式］　已知单变量函数$y=f(x)$的$n+1$个节点$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$，及其对应的函数值$y_k=f(x_k)(k=0,1,2,\cdots,n)$，对于插值区间内任一点$x$，可用下面拉格朗日插值多项式$L_n(x)$计算函数值：

$$f(x)\approx L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)y_k$$

这里　　$L_n(x_k)=f(x_k)=y_k\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$

特别对于等距节点 $x_k=x_0+kh\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$，有

$$L_n(x)=\frac{\Pi_n(x)}{n!h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{y_k}{x-x_k}$$

式中　　$\Pi_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

[埃特金逐步计算法]　已知$f(x_k)=y_k(k=0,1,\cdots,n)$，求插值区间内任一点$a$的拉格朗日多项式的数值$L_n(a)$，可按下表从左到右逐列进行计算.

x_k	$a_k=a-x_k$	$I_k=y_k$	$I_{0,k}$	$I_{0,1,k}$	$I_{0,1,2,k}$	$\cdots$	$I_{0,1,\cdots,n-2,k}$	$L_n(a)$
x_0	$a_0=a-x_0$	y_0						
x_1	$a_1=a-x_1$	y_1	$I_{0,1}$					
x_2	$a_2=a-x_2$	y_2	$I_{0,2}$	$I_{0,1,2}$				
x_3	$a_3=a-x_3$	y_3	$I_{0,3}$	$I_{0,1,3}$	$I_{0,1,2,3}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{n-1}	$a_{n-1}=a-x_{n-1}$	y_{n-1}	$I_{0,n-1}$	$I_{0,1,n-1}$	$I_{0,1,2,n-1}$	$\cdots$	$I_{0,1,2,\cdots,n-2,n-1}$	
x_n	$a_n=a-x_n$	y_n	$I_{0,n}$	$I_{0,1,n}$	$I_{0,1,2,n}$		$I_{0,1,2,\cdots,n-2,n}$	$I_{0,1,2,\cdots,n}$

表中 $I_{0,1}(x)$表示用x_0,x_1作节点的一次插值多项式；$I_{0,2}(x)$ 表示节点为 x_0,x_2 的一次插值多项式；一般 $I_{0,1,\cdots,k}(x)$ 表示节点为 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的 k 次插值多项式. 表中左起第四列以后的各列都是对应的插值多项式在a点的数值，它们之间有下面的关系:

$$I_{0,k}=\frac{1}{a_0-a_k}\begin{vmatrix}a_0 & I_0\\ a_k & I_k\end{vmatrix}\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

$$I_{0,1,k}=\frac{1}{a_1-a_k}\begin{vmatrix}a_1 & I_{0,1}\\ a_k & I_{0,k}\end{vmatrix}\qquad(k=2,3,\cdots,n)$$

…………………………………………

$$I_{0,1,2,\cdots,n}=\frac{1}{a_{n-1}-a_n}\begin{vmatrix}a_{n-1} & I_{0,1,2,\cdots,n-2,n-1}\\ a_n & I_{0,1,2,\cdots,n-2,n}\end{vmatrix}$$

利用拉格朗日插值多项式计算某一点a的数值时每增加一个节点，必须按

公式重新计算，而埃特金逐步计算法避免了这个缺点.

四、三次样条(Spline)内插公式

样条函数是逼近函数的一种方法.

[三次样条函数] 已知平面上的 n 个点 (x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$，这些点称为型值点，其中 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 称为节点.

如果函数 $S(x)$ 满足以下三个条件：

(i) $S(x_i)=y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$；

(ii) $S(x)$ 在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 上是一个三次多项式；

(iii) $S(x)$ 在整个区间 $[x_1, x_n]$ 上有连续的一阶及二阶导数；

则称 $S(x)$ 为过 n 个点的三次样条函数.

如果函数 $S(x)$ 满足下面的任一边界条件（在 x_1, x_n 两端点处附加的条件），那末三次样条函数 $S(x)$ 存在而且唯一：

(a) 函数在区间 $[x_1, x_n]$ 两端点的一阶导数（单边导数）已知，即 $S'(x_1)=m_1, S'(x_n)=m_n$，m_1 和 m_n 为已知数.

(b) 函数在区间 $[x_1, x_n]$ 两端点的二阶导数为零，即 $S''(x_1)=S''(x_n)=0$.

(c) 函数为周期的，且满足 $S(x_1)=S(x_n)$，$S'(x_1)=S'(x_n)$，$S''(x_1)=S''(x_n)$.

[三次样条函数的表达形式]

1° 以二阶导数为参数的形式 $S(x)$ 在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上表为

$$S_i(x)=y_i+y_{i,i+1}(x-x_i)$$
$$+\frac{1}{6}(x-x_i)(x-x_{i+1})\left[2K_i+K_{i+1}+K_{i,i+1}(x-x_i)\right]\ (i=1,2,\cdots,n-1)$$

式中 $K_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为待定参数，而 $y_{i,i+1}$ 是 y_i 的一阶差商，$K_{i,i+1}$ 是 K_i 的一阶差商，即

$$y_{i,i+1}=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

$$K_{i,i+1}=\frac{K_{i+1}-K_i}{x_{i+1}-x_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

这样定义的函数 $S(x)$ 在区间 $[x_1, x_n]$ 上满足条件(i)，(ii). 如果选择 K_i 使得 $S(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上有一阶连续导数，那末 $S(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上就有二阶连续导数，而且

$$K_i=S''(x_i)\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

利用 $S(x)$ 一阶导数的连续性及边界条件可以给出确定 $K_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的代数方程组.

(1)边界条件为(a)的情况

在条件(a)下, $K_i(i=1,2,\cdots,n)$ 由下面方程组解出

$$\begin{cases} 2h_1K_1+h_1K_2=6(y_{1,2}-m_1) \\ h_{i-1}K_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)K_i+h_iK_{i+1}=6(y_{i,i+1}-y_{i-1,i}) \\ \qquad\qquad (i=2,3,\cdots,n-1) \\ h_{n-1}K_{n-1}+2h_{n-1}K_n=6(m_n-y_{n-1,n}) \end{cases}$$

式中 $h_i=\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $y_{i,i+1}$ 为一阶差商(同前), m_1 和 m_n 为给定的边界条件.

用矩阵表示就是

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 1 & a_{n-1} \\ & & & & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_{n-1} \\ K_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{2} \\ a_{i+1}=\dfrac{h_{i+1}}{2(h_i+h_{i+1})-h_ia_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1=\dfrac{3}{h_1}(y_{1,2}-m_1) \\ d_{i+1}=\dfrac{6(y_{i+1,i+2}-y_{i,i+1})-h_id_i}{2(h_i+h_{i+1})-h_ia_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n-2) \\ d_n=\dfrac{3}{h_{n-1}}(m_n-y_{n-1,n}) \end{cases}$$

当 $a_{n-1}\neq 2$, $a_i\neq 2\left(1+\dfrac{h_{i+1}}{h_i}\right)(i=1,2,\cdots,n-2)$ 时, 解出 $K_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为

$$\begin{cases} K_n=\dfrac{6(m_n-y_{n-1,n})-h_{n-1}d_{n-1}}{h_{n-1}(2-a_{n-1})} \\ K_{i-1}=d_{i-1}-a_{i-1}K_i \qquad (i=n,n-1,\cdots,3,2) \end{cases}$$

(2) 边界条件为(b)的情况

在条件(b)下，$K_1=0, K_n=0, K_i(i=2,3,\cdots,n-1)$由下面方程组解出：

$$h_{i-1}K_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)K_i+h_iK_{i+1}=6(y_{i,i+1}-y_{i-1,i})$$
$$(i=2,3,\cdots,n-1)$$

用矩阵表示就是

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{h_2}{2(h_1+h_2)} & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & a_{n-2} & \\ & & & & \frac{h_{n-2}}{2(h_{n-2}+h_{n-1})} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ \vdots \\ K_{n-2} \\ K_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{cases} a_2=\dfrac{h_2}{2(h_1+h_2)} \\ a_{i+1}=\dfrac{h_{i+1}}{2(h_i+h_{i+1})-h_ia_i} \qquad (i=2,3,\cdots,n-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_2=\dfrac{3}{h_1+h_2}(y_{2,3}-y_{1,2}) \\ d_{i+1}=\dfrac{6(y_{i+1,i+2}-y_{i,i+1})-h_id_i}{2(h_i+h_{i+1})-h_ia_i} \qquad (i=2,3,\cdots,n-3) \\ d_{n-1}=\dfrac{3}{h_{n-2}+h_{n-1}}(y_{n-1,n}-y_{n-2,n-1}) \end{cases}$$

当$a_i\neq 2\left(1+\dfrac{h_{i+1}}{h_i}\right)$ $(i=2,3,\cdots,n-2)$时，解出$K_i(i=2,3,\cdots,n-1)$为

$$\begin{cases} K_{n-1}=\dfrac{6(y_{n-1,n}-y_{n-2,n-1})-h_{n-2}d_{n-2}}{2(h_{n-2}+h_{n-1})-h_{n-2}a_{n-2}} \\ K_{i-1}=d_{i-1}-a_{i-1}K_i \qquad (i=n-1,n-2,\cdots,4,3) \end{cases}$$

2° 以一阶导数为参数的形式 $S(x)$在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$上表为

$$S_i(x)=\left[\frac{3}{h_i^2}(x_{i+1}-x)^2-\frac{2}{h_i^3}(x_{i+1}-x)^3\right]y_i$$
$$+\left[\frac{3}{h_i^2}(x-x_i)^2-\frac{2}{h_i^3}(x-x_i)^3\right]y_{i+1}$$
$$+h_i\left[\frac{1}{h_i^2}(x_{i+1}-x)^2-\frac{1}{h_i^3}(x_{i+1}-x)^3\right]m_i-$$

$$-h_i\left[\frac{1}{h_i^2}(x-x_i)^2-\frac{1}{h_i^3}(x-x_i)^3\right]m_{i+1}$$

式中 $h_i=\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $m_i(i=1,2,\cdots,n)$是待定参数．这样定义的函数 $S(x)$ 在区间$[x_1,x_n]$上满足三次样条函数的条件(i)和(ii)，而且 $S(x)$在$[x_1,x_n]$上有连续的一阶导数，同时

$$m_i=S'(x_i)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$S_i(x)$ 有时表成下式:

$$S_i(x)=y_i+m_i(x-x_i)+\frac{K_i}{2}(x-x_i)^2+\frac{K_{i,i+1}}{6}(x-x_i)^3$$

式中 $m_i=S'(x_i)$, $K_i=S''(x_i)=\frac{6}{h_i}y_{i,i+1}-\frac{2}{h_i}(2m_i+m_{i+1})$，而 $y_{i,i+1}$ 与 $K_{i,i+1}$ 定义同前．

根据 $S(x)$在$[x_1,x_n]$上有连续二阶导数及边界条件可以给出确定 m_i 的代数方程组．

(1)边界条件为(a)的情况

在条件(a)下，$m_i(i=1,2,\cdots,n)$满足下面方程组

$$\begin{cases} m_1 \text{ 已知} \\ \frac{1}{h_{i-1}}m_{i-1}+2\left(\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}\right)m_i+\frac{1}{h_i}m_{i+1}=3\left(\frac{y_{i-1,i}}{h_{i-1}}+\frac{y_{i,i+1}}{h_i}\right) \\ \qquad\qquad (i=2,3,\cdots,n-1) \\ m_n \text{ 已知} \end{cases}$$

记 $g_i=\frac{1}{h_i}(i=1,2,\cdots,n-1)$，得

$$\begin{cases} m_1 \text{ 已知} \\ g_{i-1}m_{i-1}+2(g_{i-1}+g_i)m_i+g_im_{i+1}=3(g_{i-1}y_{i-1,i}+g_iy_{i,i+1}) \\ \qquad\qquad (i=2,3,\cdots,n-1) \\ m_n \text{ 已知} \end{cases}$$

它可以改写为

$$\begin{cases} m_1 \text{ 已知} \\ m_i+a_im_{i+1}=d_i \quad (i=2,3,\cdots,n-1) \\ m_n \text{ 已知} \end{cases}$$

其中

$$a_2=\frac{g_2}{2(g_1+g_2)}$$

$$d_2=\frac{3(g_1y_{1,2}+g_2y_{2,3})-g_1m_1}{2(g_1+g_2)}$$

$$\left.\begin{aligned}a_i&=\frac{g_i}{2(g_{i-1}+g_i)-g_{i-1}a_{i-1}}\\d_i&=\frac{3(g_{i-1}y_{i-1,i}+g_iy_{i,i+1})-g_{i-1}d_{i-1}}{2(g_{i-1}+g_i)-g_{i-1}a_{i-1}}\end{aligned}\right\}\quad(i=3,4,\cdots,n-1)$$

由此得

$$\begin{cases}m_{n-1}=d_{n-1}-a_{n-1}m_n\\m_i=d_i-a_im_{i+1}\qquad(i=n-2,n-3,\cdots,2)\end{cases}$$

(2)边界条件为(b)的情况

在条件(b)下，$m_i(i=1,2,\cdots,n)$满足下面方程组

$$\begin{cases}2m_1+m_2=3y_{1,2}\\\frac{1}{h_{i-1}}m_{i-1}+2\left(\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i}\right)m_i+\frac{1}{h_i}m_{i+1}=3\left(\frac{y_{i-1,i}}{h_{i-1}}+\frac{y_{i,i+1}}{h_i}\right)\\\qquad\qquad(i=2,3,\cdots,n-1)\\m_{n-1}+2m_n=3y_{n-1,n}\end{cases}$$

式中 $y_{i,i+1}$ 为 y_i 的一阶差商.

当 $a_{n-1}\neq2$ 且 $a_i\neq2\left(1+\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)$ $(i=1,2,\cdots,n-2)$时，

$$\begin{cases}m_n=\frac{3y_{n-1,n}-g_{n-1}d_{n-1}}{g_{n-1}(2-a_{n-1})}\\m_i=d_i-a_im_{i+1}\qquad(i=n-1,n-2,\cdots,2,1)\end{cases}$$

其中 $g_i=\frac{1}{h_i}$，而 a_i,d_i 由下述公式递归求得

$$a_1=\frac{1}{2}$$

$$a_i=\frac{g_i}{2(g_{i-1}+g_i)-a_{i-1}g_{i-1}}\qquad(i=2,3,\cdots,n-1)$$

$$d_1=\frac{3}{2}y_{1,2}$$

$$d_i=\frac{3(g_{i-1}y_{i-1,i}+g_iy_{i,i+1})-g_{i-1}d_{i-1}}{2(g_{i-1}+g_i)-a_{i-1}g_{i-1}}\quad(i=2,3,\cdots,n-1)$$

(3)边界条件为(c)的情况

在条件(c)下，$m_i(i=1,2,\cdots,n)$满足下面方程组：

$$\begin{cases} m_1 - m_n = 0 \\ \dfrac{1}{h_{i-1}} m_{i-1} + 2\left(\dfrac{1}{h_{i-1}} + \dfrac{1}{h_i}\right) m_i + \dfrac{1}{h_i} m_{i+1} = 3\left(\dfrac{y_{i-1,i}}{h_{i-1}} + \dfrac{y_{i,i+1}}{h_i}\right) \\ \qquad\qquad (i = 2, 3, \cdots, n-2) \\ \dfrac{2}{h_1} m_1 + \dfrac{1}{h_1} m_2 + \dfrac{1}{h_{n-1}} m_{n-1} + \dfrac{2}{h_{n-1}} m_n = 3\left(\dfrac{y_{1,2}}{h_1} + \dfrac{y_{n-1,n}}{h_{n-1}}\right) \end{cases}$$

五、其他插值公式

[一元三点插值公式] 已知单变量函数 $y=f(x)$ 在 n 个节点 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 上的值 $y_k(k=1,2,\cdots,n)$，对于插值区间内任一点 x，可按下面公式近似计算函数值

$$f(x) \approx \sum_{i=k}^{k+2}\left(\prod_{\substack{j=k \\ j\neq i}}^{k+2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right) y_i = \frac{(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})}{(x_k-x_{k+1})(x_k-x_{k+2})} y_k$$

$$+ \frac{(x-x_k)(x-x_{k+2})}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k+2})} y_{k+1} + \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k+2}-x_k)(x_{k+2}-x_{k+1})} y_{k+2}$$

式中 x_k, x_{k+1}, x_{k+2} 为最靠近 x 的三个已知节点.

[二元插值公式] 已知双变量函数 $z(x,y)$ 的第一个自变量的节点为 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$，第二个自变量的节点为 $y_j(j=1,2,\cdots,n)$，其对应节点上的函数值为 $z_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$. 那末对于不是节点的变元值 (x,y)，可按下面公式近似计算函数值

$$z(x,y) \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} \left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right) \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \left(\frac{y-y_l}{y_j-y_l}\right) z_{ij} \tag{1}$$

$$z(x,y) \approx \sum_{j=q}^{q+2} \sum_{i=p}^{p+2} \prod_{\substack{k=p \\ k\neq i}}^{p+2} \left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right) \prod_{\substack{l=q \\ l\neq j}}^{q+2} \left(\frac{y-y_l}{y_j-y_l}\right) z_{ij} \tag{2}$$

(2)中 x_p, x_{p+1}, x_{p+2} 是第一个变元最靠近 x 的三个节点，y_q, y_{q+1}, y_{q+2} 是第二个变元最靠近 y 的三个节点.

[带导数的埃尔米特插值公式] 已知函数 $y=f(x)$ 及其导数 $f'(x)$ 在 n 个节点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 上的值为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ $(y_i=f(x_i))$ 及 $y_1', y_2', \cdots, y_n'$ $(y_i'=f'(x_i))$，那末对于插值区间内任一点 x，可按下式计算函数值

$$f(x) = H(x) + R(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i' g_i(x) + R(x)$$

式中

$$h_i(x)=\left[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}\right]\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2$$

$$g_i(x)=(x-x_i)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2$$

余项

$$R(x)=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2$$

其中 ξ 是包含全体节点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的某区间 $[a,b]$ 内的一点.

易知，式中的 $H(x)$ 是次数不超过 $2n-1$ 且满足 $H(x_i)=y_i$，$H'(x_i)=y_i'$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的多项式.

§3　曲线拟合的圆弧法与平均法

一、曲线拟合的圆弧法

圆弧拟合是一种描绘通过观测点(型值点) (x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ 的拟合曲线的几何方法. 它用分段圆弧代替曲线，并且使相邻两个圆弧有公共切线. 这个方法归结为下面三种情形:

1° 已知圆 O 和圆外两点 $A_1(a_1,b_1)$，$A_2(a_2,b_2)$，求圆 P，使它通过点 A_1，A_2，并且与圆 O 相切(外切或内切)(图 17.2).

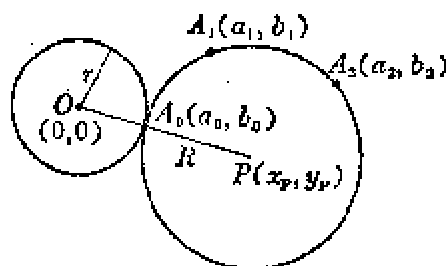


图 17.2

设圆 O 的半径为 r，O 点的坐标为(0,0). 记

$$\lambda_x=\varepsilon\frac{b_2-b_1}{\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}}$$

$$\lambda_y=\varepsilon\frac{a_1-a_2}{\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}}$$

$\varepsilon=\pm1$，符号视内切或外切而定. 又记

$$l=\frac{M\pm\sqrt{M^2-LN}}{L}$$

式中

$$M=\frac{a_1+a_2}{2}\lambda_x+\frac{b_1+b_2}{2}\lambda_y-\frac{(a_1\lambda_x+b_1\lambda_y)}{2r^2}(r^2+a_1a_2+b_1b_2)$$

$$L=\frac{(a_1\lambda_x+b_1\lambda_y)^2}{r^2}-1$$

$$N=\frac{(a_1a_2+b_1b_2+r^2)^2}{4r^2}-\frac{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}{4}$$

那末

(i) 圆P的圆心坐标(x_P,y_P)为

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{a_1+a_2}{2}+\lambda_x l \\ y_P=\dfrac{b_1+b_2}{2}+\lambda_y l \end{cases}$$

(ii) 圆P的半径R为

$$R=\sqrt{\left(\frac{a_2-a_1}{2}+\lambda_x l\right)^2+\left(\frac{b_2-b_1}{2}+\lambda_y l\right)^2}$$

(iii) 切点A_0的坐标(a_0,b_0)为

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{a_1+a_2}{2}+\lambda_x l+k_x R \\ b_0=\dfrac{b_1+b_2}{2}+\lambda_y l+k_y R \end{cases}$$

其中

$$k_x=-\frac{a_1+a_2+2\lambda_x l}{\sqrt{(a_1+a_2+2\lambda_x l)^2+(b_1+b_2+2\lambda_y l)^2}}$$

$$k_y=-\frac{b_1+b_2+2\lambda_y l}{\sqrt{(a_1+a_2+2\lambda_x l)^2+(b_1+b_2+2\lambda_y l)^2}}$$

2° 已知圆Q和圆外一点$A_2(a_2,b_2)$，求圆P，使它通过定点A_2，并且和圆Q切于定点$A_1(a_1,b_1)$（图 17.3）。

设圆Q的圆心坐标为(s,t)，那末

(i) 圆P的圆心坐标(x_P,y_P)为

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{\dfrac{b_2-b_1}{2}+\dfrac{b_1-t}{a_1-s}a_1+\dfrac{a_2-a_1}{b_2-b_1}\cdot\dfrac{a_1+a_2}{2}}{\dfrac{b_1-t}{a_1-s}+\dfrac{a_2-a_1}{b_2-b_1}} \\ y_P=b_1+\dfrac{b_1-t}{a_1-s}(x_P-a_1) \end{cases}$$

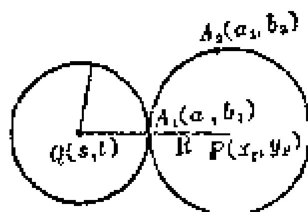


图 17.3

(ii) 圆P的半径R为

$$R=\sqrt{(x_P-a_1)^2+(y_P-b_1)^2}$$

3° 已知圆Q和圆Q'，求圆P，使它和圆Q'相切，且与圆Q切于定点$A(a,b)$(图 17.4)。

设圆Q的圆心坐标为(s,t)，半径为r；圆Q'的圆心坐标为(s',t')，半径为r'。又记

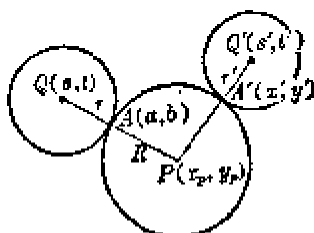


图　17.4

$$k=\frac{b-t}{a-s}$$

$$u=\frac{(a+s')\sqrt{1+k^2}-r'}{2\sqrt{1+k^2}}$$

$$v=\frac{(b+t')\sqrt{1+k^2}-kr'}{2\sqrt{1+k^2}}$$

$$k'=\frac{(a-s')\sqrt{1+k^2}-r'}{(t'-b)\sqrt{1+k^2}+kr'}$$

那末

(i) 圆P的圆心坐标(x_P,y_P)为

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{v-uk'+ak-b}{k-k'} \\ y_P=v+k'(x_P-u) \end{cases}$$

(ii) 圆P的半径R为

$$R=\sqrt{(x_P-a)^2+(y_P-b)^2}$$

(iii) 切点A'的坐标(x',y')为

$$\begin{cases} x'=x_P+\dfrac{R}{\sqrt{1+k''^2}} \\ y'=y_P+\dfrac{k''R}{\sqrt{1+k''^2}} \end{cases}$$

式中
$$k''=\frac{t'-y_P}{s'-x_P}$$

二、曲线拟合的平均法

[直线型]　如果已知两个变量(x,y)的一系列数据为

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

假设 x,y 满足线性关系

$$y=a+bx$$

那末 a 与 b 由下面方程组确定:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=a+b\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\\ \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}y_i=a+b\left(\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\right)\end{cases}$$

这种方法得到的直线与各点之间纵坐标的离差

$$v_i=y_i-(a+bx_i)$$

的代数和为零.

[抛物线型] 如果直线型不适合已知数据的变化趋势,那末可选多项式

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

来拟合. 例如取经验曲线为二次多项式

$$y=a+bx+cx^2$$

a,b,c 可由下面的三元一次方程组确定:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=a+b\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)+c\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\\ \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}y_i=a+b\left(\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\right)+c\left(\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2\right)\\ \dfrac{1}{n-2}\sum\limits_{i=1}^{n-2}y_i=a+b\left(\dfrac{1}{n-2}\sum\limits_{i=1}^{n-2}x_i\right)+c\left(\dfrac{1}{n-2}\sum\limits_{i=1}^{n-2}x_i^2\right)\end{cases}$$

§ 4 实验曲线的光滑法

一、实验曲线的光滑与观测值的修匀

实验数据在坐标平面上表现为一些离散的点. 直接用这些观测点依序连结的折线来反映函数的变化情势常常过于粗糙. 因此需要给出光滑的实验曲线. 通常要求这条实验曲线与观测数据的残差平方和为最小.

实验曲线光滑法就是对观测结果的修匀,把外界的干扰和影响消除,让修匀后的观测值落在一条光滑的曲线上.

二、直线的滑动平均法

对自变量 x 按等距 Δx 作实验观测得数据如下：

x	x_0	$x_1=x_0+\Delta x$	$\cdots$	$x_i=x_0+i\Delta x$	$\cdots$	$x_m=x_0+m\Delta x$
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_m

令 $t=\dfrac{x-x_i}{\Delta x}$，上述数据变为

t	$-i$	$-(i-1)$	$\cdots$	-1	0	1	$\cdots$	$(m-i-1)$	$m-i$
y_{i+t}	y_0	y_1	$\cdots$	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	$\cdots$	y_{m-1}	y_m

用下面的方法修正 y_i 的值：取定正整数 n，使 $i-n\geqslant 0$ 与 $i+n\leqslant m$ 至少有一个成立．当 $i-n\geqslant 0$ 及 $i+n\leqslant m$ 同时成立时，选取 a_i 与 b_i 使得

$$\sum_{t=-n}^{n}[(a_i+b_it)-y_{i+t}]^2=\text{最小值}$$

由此得

$$a_i=\frac{\sum\limits_{t=-n}^{n}y_{i+t}}{2n+1},\quad b_i=\frac{\sum\limits_{t=-n}^{n}ty_{i+t}}{\sum\limits_{t=-n}^{n}t^2}$$

于是得 $t=i-n,i-n+1,\cdots,i,i+1,\cdots,i+n$ 时的修正公式

$$y'_{i+t}=a_i+b_it$$

当 $i-n\geqslant 0$ 与 $i+n\leqslant m$ 不同时成立时，则选取 a_i 与 b_i，使得

$$\sum_{t}[(a_i+b_it)-y_{i+t}]^2=\text{最小值}$$

式中 t 取 $[0,\ m]$ 中最靠近 i 的 $2n+1$ 个整数值．对这 $2n+1$ 个 t 值，也得到修正公式

$$y'_{i+t}=a_i+b_it$$

特别在以上两种情况下，都令 $t=0$，得到 y_i 的修正值

$$y'_i=a_i$$

例如取 $n=1$．当 $i=1,2,\cdots,m-1$ 时

$$y'_i=a_i=\frac{1}{3}\sum_{t=-1}^{1}y_{i+t}=\frac{1}{3}(y_{i-1}+y_i+y_{i+1})$$

而当 $i=0$ 时，应取 a_0 与 b_0 满足

$$\sum_{t=0}^{2}[(a_0+b_0t)-y_t]^2=\text{最小值}$$

求出

$$y'_0=a_0=\frac{1}{6}(5y_0+2y_1-y_2)$$

当 $i=m$ 时，通过变换 $t\longleftrightarrow m-t$，可知应取

$$y'_m=\frac{1}{6}(5y_m+2y_{m-1}-y_{m-2})$$

[取三点滑动平均]　（即 $n=1$）

$$\begin{cases} y'_i=\dfrac{1}{3}(y_{i-1}+y_i+y_{i+1}) \quad (i=1,2,\cdots,m-1)\\ y'_0=\dfrac{1}{6}(5y_0+2y_1-y_2)\\ y'_m=\dfrac{1}{6}(-y_{m-2}+2y_{m-1}+5y_m)\end{cases}$$

[取五点滑动平均]　（即 $n=2$）

$$\begin{cases} y'_i=\dfrac{1}{5}(y_{i-2}+y_{i-1}+y_i+y_{i+1}+y_{i+2}) \quad (i=2,3,\cdots,m-2)\\ y'_0=\dfrac{1}{5}(3y_0+2y_1+y_2-y_4)\\ y'_1=\dfrac{1}{10}(4y_0+3y_1+2y_2+y_3)\\ y'_{m-1}=\dfrac{1}{10}(y_{m-3}+2y_{m-2}+3y_{m-1}+4y_m)\\ y'_m=\dfrac{1}{5}(-y_{m-4}+y_{m-2}+2y_{m-1}+3y_m)\end{cases}$$

[取七点滑动平均]　（即 $n=3$）

$$
\begin{cases}
y_i' = \dfrac{1}{7}(y_{i-3}+y_{i-2}+y_{i-1}+y_i+y_{i+1}+y_{i+2}+y_{i+3}) \quad (i=3,4,\cdots,m-3) \\[2mm]
y_0' = \dfrac{1}{28}(13y_0+10y_1+7y_2+4y_3+y_4-2y_5-5y_6) \\[2mm]
y_1' = \dfrac{1}{14}(5y_0+4y_1+3y_2+2y_3+y_4-y_6) \\[2mm]
y_2' = \dfrac{1}{28}(7y_0+6y_1+5y_2+4y_3+3y_4+2y_5+y_6) \\[2mm]
y_{m-2}' = \dfrac{1}{28}(y_{m-6}+2y_{m-5}+3y_{m-4}+4y_{m-3}+5y_{m-2}+6y_{m-1}+7y_m) \\[2mm]
y_{m-1}' = \dfrac{1}{14}(-y_{m-6}+y_{m-4}+2y_{m-3}+3y_{m-2}+4y_{m-1}+5y_m) \\[2mm]
y_m' = \dfrac{1}{28}(-5y_{m-6}-2y_{m-5}+y_{m-4}+4y_{m-3}+7y_{m-2}+10y_{m-1}+13y_m)
\end{cases}
$$

上述修正值也可用差分表示．先按本章§2的方法作差分表

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{i-3}	y_{i-3}	Δy_{i-3}	$\Delta^2 y_{i-3}$	$\Delta^3 y_{i-3}$	$\Delta^4 y_{i-3}$	$\Delta^5 y_{i-3}$	$\Delta^6 y_{i-3}$
x_{i-2}	y_{i-2}	Δy_{i-2}	$\Delta^2 y_{i-2}$	$\Delta^3 y_{i-2}$	$\Delta^4 y_{i-2}$	$\Delta^5 y_{i-2}$	⋮
x_{i-1}	y_{i-1}	Δy_{i-1}	$\Delta^2 y_{i-1}$	$\Delta^3 y_{i-1}$	$\Delta^4 y_{i-1}$	⋮	
x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	⋮		
x_{i+1}	y_{i+1}	Δy_{i+1}	$\Delta^2 y_{i+1}$	⋮			
x_{i+2}	y_{i+2}	Δy_{i+2}	⋮				
x_{i+3}	y_{i+3}	⋮					
⋮	⋮						

那末y_i的修正值y_i'用差分表示为

(i) 当$n=1$(即取三点滑动平均)时，

$$
\begin{cases}
y_i' = y_i + \dfrac{1}{3}\Delta^2 y_{i-1} \quad (i=1,2,\cdots,m-1) \\[2mm]
y_0' = y_0 - \dfrac{1}{6}\Delta^2 y_0 \\[2mm]
y_m' = y_m - \dfrac{1}{6}\Delta^2 y_{m-2}
\end{cases}
$$

(ii) 当 $n=2$(即取五点滑动平均)时，

$$\begin{cases} y_i'=y_i+\dfrac{1}{5}\Delta^4 y_{i-2}+\Delta^2 y_{i-1} \quad (i=2,3,\cdots,m-2)\\ y_0'=y_0-\dfrac{1}{5}\Delta^4 y_0-\dfrac{4}{5}\Delta^3 y_0-\Delta^2 y_0\\ y_1'=y_1+\dfrac{1}{10}\Delta^3 y_0+\dfrac{1}{2}\Delta^2 y_0\\ y_{m-1}'=y_{m-1}-\dfrac{1}{10}\Delta^3 y_{m-3}+\dfrac{1}{2}\Delta^2 y_{m-2}\\ y_m'=y_m-\dfrac{1}{5}\Delta^4 y_{m-4}+\dfrac{4}{5}\Delta^3 y_{m-3}-\Delta^2 y_{m-2} \end{cases}$$

(iii) 当 $n=3$(即取七点滑动平均)时，

$$\begin{cases} y_i'=y_i+\dfrac{1}{7}\Delta^6 y_{i-3}+\Delta^4 y_{i-2}+2\Delta^2 y_{i-1} \quad (i=3,4,\cdots,m-3)\\ y_0'=y_0-\dfrac{5}{28}\Delta^6 y_0-\dfrac{8}{7}\Delta^5 y_0-3\Delta^4 y_0-4\Delta^3 y_0-\dfrac{5}{2}\Delta^2 y_0\\ y_1'=y_1-\dfrac{1}{14}\Delta^6 y_0-\dfrac{3}{7}\Delta^5 y_0-\Delta^4 y_0-\Delta^3 y_0\\ y_2'=y_2+\dfrac{1}{28}\Delta^6 y_0+\dfrac{2}{7}\Delta^5 y_0+\Delta^4 y_0+2\Delta^3 y_0+\dfrac{3}{2}\Delta^2 y_0\\ y_{m-2}'=y_{m-2}+\dfrac{1}{28}\Delta^6 y_{m-6}-\dfrac{2}{7}\Delta^5 y_{m-5}+\Delta^4 y_{m-4}-2\Delta^3 y_{m-3}+\dfrac{3}{2}\Delta^2 y_{m-2}\\ y_{m-1}'=y_{m-1}-\dfrac{1}{14}\Delta^6 y_{m-6}+\dfrac{3}{7}\Delta^5 y_{m-5}-\Delta^4 y_{m-4}+\Delta^3 y_{m-3}\\ y_m'=y_m-\dfrac{5}{28}\Delta^6 y_{m-6}+\dfrac{8}{7}\Delta^5 y_{m-5}-3\Delta^4 y_{m-4}+4\Delta^3 y_{m-3}-\dfrac{5}{2}\Delta^2 y_{m-2} \end{cases}$$

三、二次抛物线的滑动平均法

沿用上一段的记号，y_{i+t} 的修正值 y_{i+t}' 取为二次抛物线方程

$$y_{i+t}'=a+bt+ct^2 \tag{1}$$

式中系数 a,b,c 应使

$$\sum_t[(a+bt+ct^2)-y_{i+t}]^2=\text{最小值}$$

式中 t 取$[0,m]$中最靠近 i 的 $2n+1$ 个整数值．当 $i-n\geqslant 0$ 与 $i+n\leqslant m$ 同时成立时，系数 a,b,c 满足下列方程组：

$$
\begin{cases}
(2n+1)a+2\left(\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6}\right)c=\displaystyle\sum_{t=-n}^{n}y_{i+t} \\
2\left(\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6}\right)b=\displaystyle\sum_{t=-n}^{n}ty_{i+t} \\
2\left(\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6}\right)a+2\left(\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^4}{2}+\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n}{30}\right)c=\displaystyle\sum_{t=-n}^{n}t^2y_{i+t}
\end{cases}
$$

从此解出 a,b,c，代入(1)式，即可得到 y_{i+t} 的修正值 y'_{i+t}。

［取五点滑动平均］（即 $n=2$）

$$
\begin{cases}
y'_i=\dfrac{1}{35}[-3(y_{i-2}+y_{i+2})+12(y_{i-1}+y_{i+1})+17y_i] \quad (i=2,3,\cdots,m-2) \\
y'_0=\dfrac{1}{35}(31y_0+9y_1-3y_2-5y_3+3y_4) \\
y'_1=\dfrac{1}{35}(9y_0+13y_1+12y_2+6y_3-5y_4) \\
y'_{m-1}=\dfrac{1}{35}(-5y_{m-4}+6y_{m-3}+12y_{m-2}+13y_{m-1}+9y_m) \\
y'_m=\dfrac{1}{35}(3y_{m-4}-5y_{m-3}-3y_{m-2}+9y_{m-1}+31y_m)
\end{cases}
$$

或用差分表示

$$
\begin{cases}
y'_i=y_i-\dfrac{3}{35}\Delta^4y_{i-2} \quad (i=2,3,\cdots,m-2) \\
y'_0=y_0+\dfrac{3}{35}\Delta^4y_0+\dfrac{1}{5}\Delta^3y_0 \\
y'_1=y_1-\dfrac{1}{7}\Delta^4y_0-\dfrac{2}{5}\Delta^3y_0 \\
y'_{m-1}=y_{m-1}-\dfrac{1}{7}\Delta^4y_{m-4}+\dfrac{2}{5}\Delta^3y_{m-3} \\
y'_m=y_m+\dfrac{3}{35}\Delta^4y_{m-4}-\dfrac{1}{5}\Delta^3y_{m-3}
\end{cases}
$$

［取七点滑动平均］（即 $n=3$）

$$
\begin{cases}
y_i' = \dfrac{1}{21}[-2(y_{i-3}+y_{i+3})+3(y_{i-2}+y_{i+2})+6(y_{i-1}+y_{i+1})+7y_i] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=3,4,\cdots,m-3) \\
y_0' = \dfrac{1}{42}(32y_0+15y_1+3y_2-4y_3-6y_4-3y_5-5y_6) \\
y_1' = \dfrac{1}{14}(5y_0+4y_1+3y_2+2y_3+y_4-y_6) \\
y_2' = \dfrac{1}{14}(y_0+3y_1+4y_2+4y_3+3y_4+y_5-2y_6) \\
y_{m-2}' = \dfrac{1}{14}(-2y_{m-6}+y_{m-5}+3y_{m-4}+4y_{m-3}+4y_{m-2}+3y_{m-1}+y_m) \\
y_{m-1}' = \dfrac{1}{14}(-y_{m-6}+y_{m-4}+2y_{m-3}+3y_{m-2}+4y_{m-1}+5y_m) \\
y_m' = \dfrac{1}{42}(5y_{m-6}-3y_{m-5}-6y_{m-4}-4y_{m-3}+2y_{m-2}+15y_{m-1}+32y_m)
\end{cases}
$$

或用差分表示

$$
\begin{cases}
y_i' = y_i - \dfrac{2}{21}\Delta^6 y_{i-3} - \dfrac{3}{7}\Delta^4 y_{i-2} \quad (i=3,4,\cdots,m-3) \\
y_0' = y_0 + \dfrac{5}{42}\Delta^6 y_0 + \dfrac{9}{14}\Delta^5 y_0 + \dfrac{9}{7}\Delta^4 y_0 + \Delta^3 y_0 \\
y_1' = y_1 - \dfrac{1}{14}\Delta^6 y_0 - \dfrac{3}{7}\Delta^5 y_0 - \Delta^4 y_0 - \Delta^3 y_0 \\
y_2' = y_2 - \dfrac{1}{7}\Delta^6 y_0 - \dfrac{11}{14}\Delta^5 y_0 - \dfrac{11}{7}\Delta^4 y_0 - \Delta^3 y_0 \\
y_{m-2}' = y_{m-2} - \dfrac{1}{7}\Delta^6 y_{m-6} + \dfrac{11}{14}\Delta^5 y_{m-5} - \dfrac{11}{7}\Delta^4 y_{m-4} + \Delta^3 y_{m-3} \\
y_{m-1}' = y_{m-1} - \dfrac{1}{14}\Delta^6 y_{m-6} + \dfrac{3}{7}\Delta^5 y_{m-5} - \Delta^4 y_{m-4} + \Delta^3 y_{m-3} \\
y_m' = y_m + \dfrac{5}{42}\Delta^6 y_{m-6} - \dfrac{9}{14}\Delta^5 y_{m-5} + \dfrac{9}{7}\Delta^4 y_{m-4} - \Delta^3 y_{m-3}
\end{cases}
$$

四、三次抛物线的滑动平均法

沿用第二段的记号，y_{i+t} 的修正值 y_{i+t}' 取为三次抛物线方程

$$y_{i+t}' = a + bt + ct^2 + dt^3 \tag{2}$$

式中系数 a, b, c, d 应使

$$\sum_t [(a+bt+ct^2+dt^3) - y_{i+t}]^2 = \text{最小值}$$

式中 t 取 $[0,\ m]$ 中最靠近 i 的 $2n+1$ 个整数值．当 $i-n\geqslant 0$ 与 $i+n\leqslant m$ 同时成立时，系数 a,b,c,d 满足下列方程组：

$$\begin{cases}(2n+1)a+2\left(\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6}\right)c=\sum\limits_{t=-n}^{n}y_{i+t}\\ 2\left(\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6}\right)b+2\left(\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^4}{2}+\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n}{30}\right)d=\sum\limits_{t=-n}^{n}ty_{i+t}\\ 2\left(\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6}\right)a+2\left(\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^4}{2}+\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n}{30}\right)c=\sum\limits_{t=-n}^{n}t^2y_{i+t}\\ 2\left(\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^4}{2}+\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n}{30}\right)b+2\left(\dfrac{n^7}{7}+\dfrac{n^6}{2}+\dfrac{n^5}{2}-\dfrac{n^3}{6}+\dfrac{n}{42}\right)d=\sum\limits_{t=-n}^{n}t^3y_{i+t}\end{cases}$$

从此解出 a,b,c,d，代入(2)式，即可得到 y_{i+t} 的修正值 y'_{i+t}．

[取五点滑动平均]　(即 $n=2$)

$$\begin{cases}y'_i=\dfrac{1}{35}[-3(y_{i-2}+y_{i+2})+12(y_{i-1}+y_{i+1})+17y_i]\quad(i=2,3,\cdots,m-2)\\ y'_0=\dfrac{1}{70}(69y_0+4y_1-6y_2+4y_3-y_4)\\ y'_1=\dfrac{1}{35}(2y_0+27y_1+12y_2-8y_3+2y_4)\\ y'_{m-1}=\dfrac{1}{35}(2y_{m-4}-8y_{m-3}+12y_{m-2}+27y_{m-1}+2y_m)\\ y'_m=\dfrac{1}{70}(-y_{m-4}+4y_{m-3}-6y_{m-2}+4y_{m-1}+69y_m)\end{cases}$$

或用差分表示

$$\begin{cases}y'_i=y_i-\dfrac{3}{35}\Delta^4y_{i-2}\quad(i=2,3,\cdots,m-2)\\ y'_0=y_0-\dfrac{1}{70}\Delta^4y_0\\ y'_1=y_1+\dfrac{2}{35}\Delta^4y_0\\ y'_{m-1}=y_{m-1}+\dfrac{2}{35}\Delta^4y_{m-4}\\ y'_m=y_m-\dfrac{1}{70}\Delta^4y_{m-4}\end{cases}$$

[取七点滑动平均]　(即 $n=3$)

$$\begin{cases} y'_i=\dfrac{1}{21}[-2(y_{i-3}+y_{i+3})+3(y_{i-2}+y_{i+2})+6(y_{i-1}+y_{i+1})+7y_i] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=3,4,\cdots,m-3) \\ y'_0=\dfrac{1}{42}(39y_0+8y_1-4y_2-4y_3+y_4+4y_5-2y_6) \\ y'_1=\dfrac{1}{42}(8y_0+19y_1+16y_2+6y_3-4y_4-7y_5+4y_6) \\ y'_2=\dfrac{1}{42}(-4y_0+16y_1+19y_2+12y_3+2y_4-4y_5+y_6) \\ y'_{m-2}=\dfrac{1}{42}(y_{m-6}-4y_{m-5}+2y_{m-4}+12y_{m-3}+19y_{m-2}+16y_{m-1}-4y_m) \\ y'_{m-1}=\dfrac{1}{42}(4y_{m-6}-7y_{m-5}-4y_{m-4}+6y_{m-3}+16y_{m-2}+19y_{m-1}+8y_m) \\ y'_m=\dfrac{1}{42}(-2y_{m-6}+4y_{m-5}+y_{m-4}-4y_{m-3}-4y_{m-2}+8y_{m-1}+39y_m) \end{cases}$$

或用差分表示

$$\begin{cases} y'_i=y_i-\dfrac{2}{21}\Delta^6y_{i-3}-\dfrac{3}{7}\Delta^4y_{i-2} \quad (i=3,4,\cdots,m-3) \\ y'_0=y_0-\dfrac{1}{21}\Delta^6y_0-\dfrac{4}{21}\Delta^5y_0-\dfrac{3}{14}\Delta^4y_0 \\ y'_1=y_1+\dfrac{2}{21}\Delta^6y_0+\dfrac{17}{42}\Delta^5y_0+\dfrac{1}{2}\Delta^4y_0 \\ y'_2=y_2+\dfrac{1}{42}\Delta^6y_0+\dfrac{1}{21}\Delta^5y_0-\dfrac{1}{14}\Delta^4y_0 \\ y'_{m-2}=y_{m-2}+\dfrac{1}{42}\Delta^6y_{m-6}-\dfrac{1}{21}\Delta^5y_{m-5}-\dfrac{1}{14}\Delta^4y_{m-4} \\ y'_{m-1}=y_{m-1}+\dfrac{2}{21}\Delta^6y_{m-6}-\dfrac{17}{42}\Delta^5y_{m-5}+\dfrac{1}{2}\Delta^4y_{m-4} \\ y'_m=y_m-\dfrac{1}{21}\Delta^6y_{m-6}+\dfrac{4}{21}\Delta^5y_{m-5}-\dfrac{3}{14}\Delta^4y_{m-4} \end{cases}$$

§5 滤　　波

从包含着误差(意味着干扰、噪声)的数据(或信号)中提取需要的信息，这种数据处理方法称为滤波．下面仅介绍几种最小二乘(或最小方差)滤波．

一、最小二乘滤波

[增长记忆的最小二乘滤波]

1° 滤波的最小二乘准则

给定离散观测系统

$$\boldsymbol{y}_n = B_n \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{w}_n$$

式中

$$\boldsymbol{y}_n = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\tau}$$

$$\boldsymbol{w}_n = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\tau}$$

$$\boldsymbol{x}_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)})^{\tau}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} b_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & \cdots & b_{1m}^{(n)} \\ b_{21}^{(n)} & b_{22}^{(n)} & \cdots & b_{2m}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}^{(n)} & b_{n2}^{(n)} & \cdots & b_{nm}^{(n)} \end{bmatrix}$$

式中 τ 表示转置，y_i 是在时刻 $t=t_i$ 的观测值，$\boldsymbol{y}_n$ 是由 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 形成的 n 维列矢量，称为观测矢量；B_n 是 $n\times m$ 的矩阵，其中 m 是常数；$\boldsymbol{w}_n$ 是 n 维列矢量，它的分量 w_i 是 $t=t_i$ 时的误差；$\boldsymbol{x}_n$ 是状态矢量（m 维）．假设状态满足方程

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \Phi \boldsymbol{x}_n$$

其中 Φ 为 m 阶方阵，其元素均为常数，又设 Φ 可逆，记 $\Phi^{-1}=B$．

如果当 $x_n = \hat{x}_n$ 时

$$(B_n \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n)^{\tau}(B_n \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n) = 最小值$$

则称 $\hat{x}_n$ 是 $\boldsymbol{x}_n$ 的在最小二乘意义下的最优估值．

假设 $B_n^{\tau} B_n$ 可逆，记 $P_n = (B_n^{\tau} B_n)^{-1}$，于是可以推出

$$\hat{x}_n = P_n B_n^{\tau} \boldsymbol{y}_n$$

2° 滤波的递推公式

上述求 $\boldsymbol{x}_n$ 的最优估值的公式在电子计算机上并不实用，通常在计算机上用递推公式．可以推出

$$\hat{x}_{n+1} = \Phi \hat{x}_n + P_{n+1} M_{n+1}^{\tau} (y_{n+1} - M_{n+1} \Phi \hat{x}_n) \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

其中

$$P_{n+1} = \Phi P_n \Phi^{\tau} - \Phi P_n \Phi^{\tau} M_{n+1}^{\tau} (1 + M_{n+1} \Phi P_n \Phi^{\tau} M_{n+1}^{\tau})^{-1} M_{n+1} \Phi P_n \Phi^{\tau}$$

M_{n+1} 是 m 维行矢量

$$M_{n+1} = (b_{(n+1)1}^{(n+1)}, b_{(n+1)2}^{(n+1)}, \cdots, b_{(n+1)m}^{(n+1)})$$

满足 $y_{n+1} = M_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1}$．

从以上公式来看，为求 $\hat{x}_{n+1}$，实际上用到了全部历史观测值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 及 y_{n+1}，随着 n 增大，用到的个数增多，故这种滤波递推公式称为增长记忆的．

[加权最小二乘滤波] 当 n 充分大时，较早的历史数据用在估计中往往起

不利的作用。通过加权处理，可以使"过老"数据的作用逐渐消失。下面举加"指数下降"权的例。

选取 $\beta>0$，引进对角线矩阵序列

$$F_n=\begin{bmatrix} e^{-(n-1)\beta} & & & & 0 \\ & e^{-(n-2)\beta} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & e^{-\beta} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

同前，设观测系统与状态方程分别为

$$y_n=B_n x_n+w_n$$

$$x_{n+1}=\Phi x_n$$

如果 $x_n=\hat{x}_n$ 时

$$(B_n x_n-y_n)^T F_n (B_n x_n-y_n)=\text{最小值}$$

则称 $\hat{x}_n$ 是 x_n 在加"指数下降"权最小二乘意义下的最优估值。

可以证明

$$\hat{x}_n=P_n B_n^T F_n y_n$$

其中

$$P_n=(B_n^T F_n B_n)^{-1}$$

并且有计算 $\hat{x}_n$ 的递推公式

$$\hat{x}_{n+1}=\Phi\hat{x}_n+P_{n+1}M_{n+1}^T(y_{n+1}-M_{n+1}\Phi\hat{x}_n)$$

其中

$$P_{n+1}=\Phi P_n\Phi^T e^{\beta}-\Phi P_n\Phi^T M_{n+1}^T(1+$$
$$+M_{n+1}\Phi P_n\Phi^T M_{n+1}^T e^{\beta})^{-1}M_{n+1}\Phi P_n\Phi^T e^{2\beta}$$

M_{n+1} 是 m 维行矢量，定义同前面一样。

二、维纳滤波

维纳滤波与卡尔曼滤波都是最小平方偏差滤波，但它们依据的已知条件、计算方法及适用范围等都有所不同。

［维纳滤波准则］　假设希望得到序列 $z(t)$（t 只取某些整数值），而实际得到的是序列 $x(t)$。于是设计一个脉冲响应为 $h(t)$ 的线性定常系统，使得它的输入量为 $x(t)$，而输出量

$$y(t)=h(t)*x(t)=\sum_{\tau}h(\tau)x(t-\tau)$$

与 $z(t)$的偏差在某种准则下尽可能地小.

所谓维纳滤波问题,就是适当地取 $h(t)$, 使得

$$Q=\text{最小值}$$

当 $x(t)$是确定序列时,

$$Q=\sum_t[y(t)-z(t)]^2$$

当 $x(t)$是随机序列时,

$$Q=E[y(t)-z(t)]^2$$

[单路最小平方滤波]　假设滤波因子 $h(t)$ 是由 $s+1$ 个等跨距的系数组成的序列, 如

$$h(t)=(h(0),h(1),\cdots,h(s))\quad(t=0,1,\cdots,s)$$

$s+1$ 称为滤波因子的长度,则最小平方滤波因子 $h(t)$满足

$$\sum_{\tau=0}^{s}h(\tau)r_{xx}(\lambda-\tau)=r_{zx}(\lambda)\quad(0\leqslant\lambda\leqslant s)$$

或用褶积表示为

$$h(t)*r_{xx}(t)=r_{zx}(t)\quad(t=0,1,\cdots,s)$$

其中

$$r_{xx}(\lambda-\tau)=\sum_t x(t-\tau)x(t-\lambda)$$

称为输入 $x(t)$的自相关函数(第十六章§3),

$$r_{zx}(\lambda)=\sum_t z(t)x(t-\lambda)$$

称为 $z(t)$与 $x(t)$的互相关函数.

滤波输出与希望输出的符合程度可用标准化均方误差:

$$\varepsilon=\frac{Q_{\min}}{r_{zz}(0)}=1-\frac{\sum_{\tau=0}^{s}h(\tau)r_{zx}(\tau)}{r_{zz}(0)}$$

来度量,其中

$$r_{zz}(0)=\sum_t z^2(t)$$

显然 $0\leqslant\varepsilon\leqslant1$. 当 $\varepsilon=0$ 时,滤波作用最好; 当 $\varepsilon=1$ 时,滤波作用最差.

当滤波因子的长度是无限的时候, 可以得到类似的结果. 用 $H(\omega)$,

$R_{xx}(\omega)$, $R_{zx}(\omega)$分别表示$h(t)$, $r_{xx}(t)$, $r_{zx}(t)$的频率谱*，则根据两个函数的褶积相当于其谱的乘积，可得到其频率特征

$$H(\omega)=\frac{R_{zx}(\omega)}{R_{xx}(\omega)}$$

它表明用互相关函数与自相关函数的频率谱可以决定滤波因子的频率谱.

［多路最小平方滤波］ 多路最小平方滤波方法是利用多路讯号的重复性，从而提供更多的有益讯息.

设$x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$为n路输入，$z_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$为m路希望输出，写成矩阵分别为

$$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\tau}$$

$$\boldsymbol{z}(t)=(z_1(t),z_2(t),\cdots,z_m(t))^{\tau}$$

$h_{ij}(t)(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$为多路滤波因子，写成矩阵为

$$H(t)=\begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1n}(t)\\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ h_{m1}(t) & h_{m2}(t) & \cdots & h_{mn}(t)\end{bmatrix}$$

$y_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$是m路滤波输出，写成矩阵为

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_m(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}h_{1j}(t)*x_j(t)\\ \sum_{j=1}^{n}h_{2j}(t)*x_j(t)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}h_{mj}(t)*x_j(t)\end{bmatrix}$$

若每路输入$x_j(t)(j=1,2,\cdots,n)$的长度为$k+1$，所有的滤波因子$h_{ij}(t)$的长度为$s+1$，则每路的滤波输出$y_i(t)$的长度为$k+s+1$.

---

* 离散时间序列$x(t)(t=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的频率谱定义为

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i\omega n}$$

其中 $\omega=2\pi f$

当离散时间序列$x(t)$只有有限项时，可把它补上许多0，成为无穷序列而用上述定义.

所谓多路最小平方滤波，就是适当选取多路滤波因子（矩阵）$H(t)$使总均方差

$$Q=\sum_{i=1}^{m}Q_i=\text{最小值}$$

当 $y_i(t)$是确定序列时，

$$Q_i=\sum_{t=0}^{k+s}[y_i(t)-z_i(t)]^2 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

当 $y_i(t)$是随机序列时，

$$Q_i=E[y_i(t)-z_i(t)]^2 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

多路最小平方滤波因子满足下列方程

$$[H(0)\ \ H(1)\ \cdots\ H(s)]\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \cdots & R_{xx}(s) \\ R_{xx}^{\prime}(1) & R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(s-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{xx}^{\prime}(s) & R_{xx}^{\prime}(s-1) & \cdots & R_{xx}(0) \end{bmatrix}$$
$$=[R_{zx}(0)\ \ R_{zx}(1)\ \cdots\ R_{zx}(s)] \tag{1}$$

其中

$$H(t)=\begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1n}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{m1}(t) & h_{m2}(t) & \cdots & h_{mn}(t) \end{bmatrix} \qquad (t=0,1,\cdots,s)$$

是多路最小平方滤波因子，是 $m\times n$ 矩阵，

$$R_{xx}(t)=\begin{bmatrix} r_{x_1x_1}(t) & r_{x_1x_2}(t) & \cdots & r_{x_1x_n}(t) \\ r_{x_2x_1}(t) & r_{x_2x_2}(t) & \cdots & r_{x_2x_n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_nx_1}(t) & r_{x_nx_2}(t) & \cdots & r_{x_nx_n}(t) \end{bmatrix}$$
$$(t=-s,-s+1,\cdots,0,1,\cdots,s)$$

为输入 $x_i(t)$ 的自相关函数 $r_{x_ix_j}(t)$的 $n\times n$ 方阵，称为多路自相关矩阵，$R_{xx}^{\prime}$ 表示 R_{xx} 的转置矩阵，

$$R_{zx}(t)=\begin{bmatrix} r_{z_1x_1}(t) & r_{z_1x_2}(t) & \cdots & r_{z_1x_n}(t) \\ r_{z_2x_1}(t) & r_{z_2x_2}(t) & \cdots & r_{z_2x_n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{z_mx_1}(t) & r_{z_mx_2}(t) & \cdots & r_{z_mx_n}(t) \end{bmatrix}$$
$$(t=0,1,\cdots,s)$$

为希望输出 $z_i(t)$ 和输入 $x_j(t)$ 的互相关函数 $r_{z_ix_j}(t)$ 的 $m\times n$ 矩阵.

方程(1)是以滤波因子 $h_{ij}(t)$, ($i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$; $t=0,1,\cdots,s$)为未知数的 $mn(s+1)$ 个线性联立方程. 它的解即所求的多路最小平方滤波因子.

滤波输出与希望输出之间的符合程度,可用标准化均方误差

$$\varepsilon=\frac{Q_{\min}}{\mathrm{tr}R_{zz}(0)}=1-\frac{\mathrm{tr}\sum_{t=0}^{s}R_{zx}(t)H^{-1}(t)}{\mathrm{tr}R_{zz}(0)}$$

来度量,显然,$0\leqslant\varepsilon\leqslant1$. 当 $\varepsilon=0$ 时, 多路最小平方滤波输出与希望输出符合得最好; 当 $\varepsilon=1$ 时,符合的程度最差.

当滤波因子的长度是无限时,最小平方滤波因子 $h_{ij}(t)$ 满足下列方程

$$\sum_{\nu=1}^{n}h_{i\nu}(t)*r_{x_\nu x_j}(t)=r_{z_ix_j}(t)\qquad(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$$

用频率谱表示,则有

$$\begin{bmatrix}H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \cdots & H_{1n}(\omega)\\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \cdots & H_{2n}(\omega)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ H_{m1}(\omega) & H_{m2}(\omega) & \cdots & H_{mn}(\omega)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_{x_1x_1}(\omega) & R_{x_1x_2}(\omega) & \cdots & R_{x_1x_n}(\omega)\\ R_{x_2x_1}(\omega) & R_{x_2x_2}(\omega) & \cdots & R_{x_2x_n}(\omega)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ R_{x_nx_1}(\omega) & R_{x_nx_2}(\omega) & \cdots & R_{x_nx_n}(\omega)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}R_{z_1x_1}(\omega) & R_{z_1x_2}(\omega) & \cdots & R_{z_1x_n}(\omega)\\ R_{z_2x_1}(\omega) & R_{z_2x_2}(\omega) & \cdots & R_{z_2x_n}(\omega)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ R_{z_mx_1}(\omega) & R_{z_mx_2}(\omega) & \cdots & R_{z_mx_n}(\omega)\end{bmatrix}$$

上述方程的解就是所求的多路最小平方滤波因子.

三、卡尔曼滤波

[线性离散系统的卡尔曼滤波]

1° 动态模型 设一 n 维线性动态系统与 p 维线性观测系统分别由下面的差分方程描述:

$$\boldsymbol{x}(t_k)=\Phi(t_k,t_{k-1})\boldsymbol{x}(t_{k-1})+\Gamma(t_{k-1})\boldsymbol{w}(t_{k-1})$$

$$\boldsymbol{z}(t_k)=H(t_k)\boldsymbol{x}(t_k)+\boldsymbol{v}(t_k)\quad(k\geqslant1)$$

或引入相应的符号简单地记作

$$\boldsymbol{x}_k=\Phi_{k,k-1}\boldsymbol{x}_{k-1}+\Gamma_{k-1}\boldsymbol{w}_{k-1}\tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}_k=H_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{v}_k\quad(k\geqslant1)\tag{2}$$

其中 t_k(k为整数)满足

$$-\infty<\cdots<t_{k-1}<t_k<t_{k+1}<\cdots<+\infty$$

$x(t)$是n维状态矢量，$w(t)$是m维动态噪声矢量，$z(t)$是p维($p\leqslant n$)观测矢量，$v(t)$是p维($p\leqslant n$)观测噪声矢量；$\Gamma(t)$是$n\times m$矩阵，称为动态噪声矩阵，$H(t)$是$p\times n$矩阵，称为观测矩阵，$\Phi(t,\tau)$是$n\times n$非奇异矩阵，称为系统的转移矩阵，具有下列性质：

(i)　$\Phi(t,t)=I$　(对于一切t，其中I为单位矩阵)

(ii)　$\Phi_{k,k-1}^{-1}=\Phi_{k-1,k}$　(对于任意的t_k)

(iii)　$\Phi_{k,k-2}=\Phi_{k,k-1}\Phi_{k-1,k-2}$　$(t_{k-2}\leqslant t_{k-1}\leqslant t_k)$

2°　线性最小方差估计　如果从动态模型确定在t_j时刻系统的状态的估值$\hat{x}_j$时，满足下述条件：

(i)　估值$\hat{x}_j$是观测值z的线性函数；

(ii)　$E[(x_j-\hat{x}_j)(x_j-\hat{x}_j)^T]=E[\tilde{x}_j\tilde{x}_j^T]=$最小值，其中$\tilde{x}_j=x_j-\hat{x}_j$是估计误差；那末这个估值称为线性最小方差估计。

设通过p维线性观测系统(2)，从第1时刻到第k时刻，对n维线性动态系统(1)的状态作了k次观测$z_1,z_2,\cdots,z_k$，根据这k个观测数据，对第j时刻的状态x_j进行的估计为$\hat{x}_{j|k}$，估计误差为$\tilde{x}_{j|k}\equiv x_j-\hat{x}_{j|k}$，把估计的均方误差记作$P_{j|k}\equiv E[\tilde{x}_{j|k}\tilde{x}_{j|k}^T]$。当$j>k$时，$\hat{x}_{j|k}$称为预报或外推，当$j<k$时，$\hat{x}_{j|k}$称为内插。特别当$j=k$时$\hat{x}_{j|k}$称为滤波，并简记$\hat{x}_{k|k}\equiv\hat{x}_k$，$\tilde{x}_{k|k}\equiv\tilde{x}_k$，$P_{k|k}\equiv P_k$。

3°　卡尔曼滤波公式　设在上述动态模型中，动态噪声$\{w_k\}$与观测噪声$\{v_k\}$是互不相关的零均值白噪声序列；即对所有k,j，

均值 $Ew_k=0$，协方差　$\mathrm{Cov}(w_k,w_j)=E[w_kw_j^T]=Q_k\delta_{kj}$

$Ev_k=0$，　　　　$\mathrm{Cov}(v_k,v_j)=E[v_kv_j^T]=R_k\delta_{kj}$，

$\mathrm{Cov}(w_k,v_j)=E[w_kv_j^T]=0$

又设初始状态x_0的统计特征为

$$Ex_0\equiv\mu_0,\text{方差}\quad \mathrm{Var}\,x_0\equiv P_0$$

且x_0与$\{w_k\}$，$\{v_k\}$都不相关，即

$$\mathrm{Cov}(x_0,w_k)=0,\quad \mathrm{Cov}(x_0,v_k)=0$$

那末x_k的最优线性滤波$\hat{x}_k$可由下式递推计算

$$\hat{x}_k=\Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1}+K_k(z_k-H_k\Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1})$$

其初值$\hat{x}_0=\mu_0$；又其中

$$K_k=P_{k|k-1}H_k^T(H_kP_{k|k-1}H_k^T+R_k)^{-1}$$

$$P_{k|k-1} \equiv E[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{x}_{k|k-1}^{\tau}] = \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^{\tau} + \Gamma_{k-1}Q_{k-1}\Gamma_{k-1}^{\tau},$$

(初值 $P_0 = \mathrm{Var}\,\mathbf{x}_0$)

$$P_k \equiv E[\tilde{x}_k\tilde{x}_k^{\tau}] = (I - K_kH_k)P_{k|k-1}(I - K_kH_k)^{\tau} + K_kR_kK_k^{\tau}$$

K_k称为加权矩阵或增益矩阵，$P_{k|k-1}$ 为最优估值误差 $\tilde{x}_{k|k-1}$ 的协方差矩阵，括号中的 I 表示单位矩阵，最后一个方程称为协方差更新方程.

这时最优线性预报(外推)估值为

$$\hat{x}_{j|k} = \Phi_{j,k}\hat{x}_k \qquad (j>k)$$

[连续时间系统的卡尔曼滤波]

1° 动态模型设状态方程是

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t) + G(t)\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

观测方程是

$$\mathbf{z}(t) = H(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

式中 $\mathbf{x}(t)$是 n 维矢量型的随机过程，$\mathbf{z}(t)$是 p 维($p\leqslant n$) 矢量型的随机过程. $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$分别是m维($m\leqslant n$)和 p 维矢量型的、均值为零的互不相关的白噪声过程，即

$$E[\mathbf{u}(t)] = 0 = E[\mathbf{v}(t)]$$

$$E[\mathbf{u}(t)\mathbf{v}^{\tau}(t)] = E[\mathbf{v}(t)\mathbf{u}^{\tau}(t)] = 0$$

$$E[\mathbf{u}(t)\mathbf{u}^{\tau}(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$$

$$E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^{\tau}(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau)$$

式中 $Q(t)$, $R(t)$都是对时间 t 连续可微的、对称和非负定矩阵；δ是狄拉克函数. 又 $F(t)$, $G(t)$与 $H(t)$分别是 $n\times n$, $n\times m$ 与 $p\times n$ 矩阵，其元素为 t 的非随机函数或常数.

2° 线性最小方差估计 设已知(由观测得到)$\mathbf{z}(\tau)$的值($t_0\leqslant\tau\leqslant t$)，求由公式

$$\hat{\mathbf{x}}(t_1|t) = \int_{t_0}^{t} A(t_1,\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau$$

所表示的 $\mathbf{x}(t_1)$的线性估值 $\hat{\mathbf{x}}(t_1|t)$，使得

$$E[(\mathbf{x}(t_1)-\hat{\mathbf{x}}(t_1|t))(\mathbf{x}(t_1)-\hat{\mathbf{x}}(t_1|t))^{\tau}] = E[\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t)\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t)^{\tau}] = \text{最小值}$$

这样的估值称为线性最小方差估计，其中滤波因子 $A(t_1,\tau)$是 $n\times p$ 矩阵，它的每个元素对两个自变量都是连续可微的.

3° 卡尔曼滤波方程 假设上述动态模型满足下列条件：

(i) 矩阵 $R(t)$对于一切 t 是正定的；

(ii) 在 $u(t)$ 的作用下，动态系统(1)达到稳定状态，即 $x(t)$ 是由

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\Phi(t,\tau)G(\tau)u(\tau)d\tau$$

确定的随机函数；

(iii)在某个确定的时刻 t_0，被测量 $z(t_0)$ 和在 t_0 时刻的方差 $E[x(t_0)x^T(t_0)]$ 是已知的；

那末动态模型的最优滤波方程是

$$\frac{d\hat{x}(t|t)}{dt}=F(t)\hat{x}(t|t)+A(t,t)[z(t)-H(t)\hat{x}(t|t)]$$

式中

$$A(t,t)=P(t)H^T(t)R^{-1}(t)\qquad \text{(加权矩阵方程)}$$

$$\frac{dP}{dt}=F(t)P+PF^T(t)-PH^T(t)R^{-1}(t)H(t)P+G(t)Q(t)G^T(t)\quad (2)$$

(黎卡提方程(见第十三章§1))

初始条件为

$$\hat{x}(t_0|t_0)=0$$

$$P(t_0)=E[\tilde{x}(t_0|t_0)\tilde{x}^T(t_0|t_0)]$$

上式中 $A(t,t)$ 称为加权矩阵，$P(t)=[\tilde{x}(t|t)\tilde{x}^T(t|t)]$ 为最优估值误差 $\tilde{x}(t|t)$ 的协方差矩阵.

特别，当 $x(t)$ 为矢量型的平稳随机过程时，可在 (2) 中令 $\frac{dP}{dt}=0$，解出 $P(t)$.

第十八章　最优化方法

实际问题中所提出的最优化问题大体有两类，一类是求函数的极值，另一类是求泛函的极值．如果目标函数（函数或泛函）有明显的表达式，一般可以用微分法、变分法、最大（小）值原理或动态规划方法等分析方法来求解（间接求优）；如果目标函数的表达式过于复杂甚至根本没有明显的表达式，则可用数值方法或"试验最优化"等直接方法来求解（直接求优）．第五章已经介绍了用微分法求函数极值的方法，本章介绍当目标函数无明显表达式时的单变量和多变量函数的直接方法或试验最优化方法，多变量函数的无条件和条件极值问题的数值方法，求泛函数极值的变分法，最大（小）值原理和动态规划（动态规划方法还可以用来求普通函数的极值）．

求函数极值的数值方法或试验最优化方法有时称为数学规划．数学规划除了线性规划外统称为非线性规划．数学规划所处理的一般是静态问题，变分法、最大（小）值原理和动态规划所处理的一般是动态问题，但两者并无截然的界限．

§1　单变量函数极值问题解法(直接法)

本节讨论求目标函数

$$y=f(x)$$

在区间$[a,b]$上的最优解的直接方法（或试验最优化方法），由于极小和极大只是目标函数相差一符号，因此这里只讨论求

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$$

的最优解，即在$[a,b]$上求一点x^*使得

$$f(x^*)=\min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$$

这时，x^*称为最优解（最优点）．

［单峰函数］　如果函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上只有一个极值点（因而就是最大点或最小点），那末称$y=f(x)$为单峰函数．单峰函数也可用分析方法定义如下：设x^*是区间$[a,b]$上函数$f(x)$的最小点，则有

$$f(x_1)>f(x_2)>f(x^*),\quad 当\ x_1<x_2<x^*$$

$$f(x^*)<f(x_1)<f(x_2), \quad 当\ x^*<x_1<x_2$$

同样可以定义当 x^* 是区间$[a,b]$上函数 $f(x)$的最大点的情形.

如果函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上有多个极值点,则称为多峰函数. 只要适当划分区间$[a,b]$,可以使函数 $y=f(x)$在每一个子区间上都是单峰的,所以本节限于讨论单峰函数.

[分数法] 由递推关系

$$\begin{cases}F_{n+2}=F_n+F_{n+1} & (n\geqslant 0)\\ F_0=1, \ F_1=1\end{cases}$$

定义的费波那奇序列$\{F_n\}$产生分数序列:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\frac{13}{21},\cdots$$

如果要在函数 $y=f(x)$的定义区间$[a,b]$上限定做 n 次试验找出最优点,可以将$[a,b]$区间 F_{n+1} 等分,第一个试验点取在$\frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a)+a$处,以后的试验点采用找对称点(关于区间$[a,b]$中点对称)的办法(图 18.1),共做 n 次试验,便可找到$[a,b]$中的 $F_{n+1}-1$ 个等分点中的最好点,其精密度(即这个最好点与实际极小点的最大可能距离)为$\frac{1}{F_{n+1}}(b-a)$.

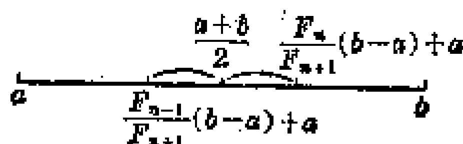


图 18.1

分数法的框图如下(图 18.2):

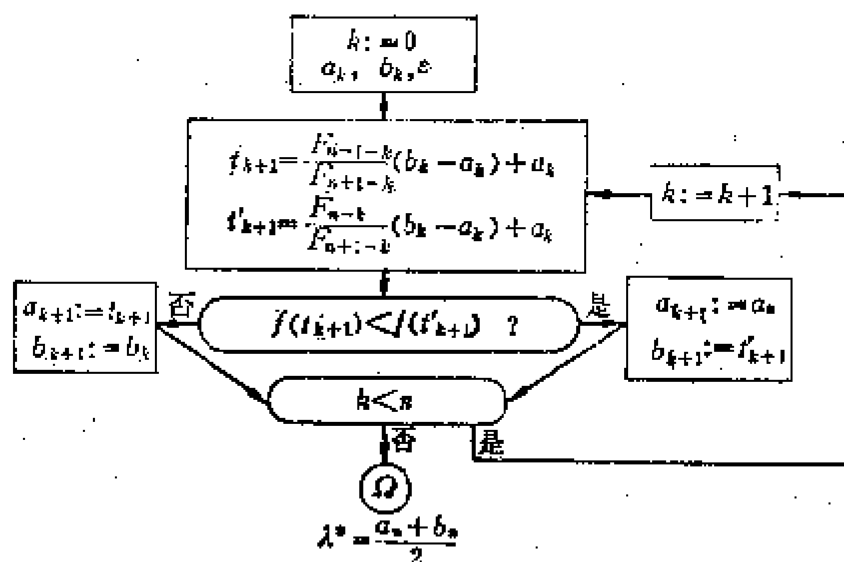


图 18.2

其中$[a_k, b_k]$为第 k 次搜索区间($a_0=a, b_0=b$)，n 最小的上界可以由下式估计

$$\frac{1}{F_{n+1}}(b-a)<\varepsilon$$

式中 ε 为预先给定的允许误差.

分数法是限定试验次数并且每次只做一个试验的最优方法.

[0.618 法] 在分数法中可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\approx 0.382$$

因此可以近似地取

$$t_{k+1}=0.382(b_k-a_k)+a_k$$

$$t'_{k+1}=0.618(b_k-a_k)+a_k$$

修改框图如下(图 18.3):

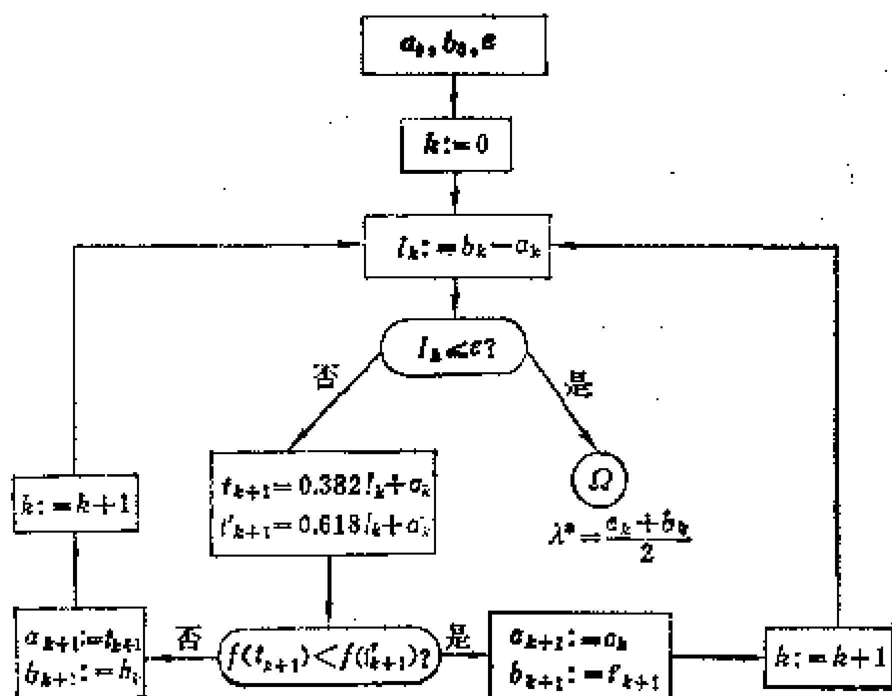


图 18.3

试验点的选取也可以用下列公式计算:

第一个试验点:	([大]−[小])×0.618+[小]
其余试验点:	[大]+[小]−[中]

注意,这里 [中] 是指中间已经做过的试验点,而不是中点,缩短搜索区间的办法和分数法一样.

0.618 法也称为黄金分割法,它是批数不限定,每批做一个试验的最优方法.

[抛物线法] 设在 $x_1, x_2, x_3(x_1<x_2<x_3)$ 三点的试验结果分别为 y_1, y_2, y_3. 通过 xy 平面上的三点 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) 作二次抛物线(图 18.4)

$$y=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

近似目标函数 $f(x)$,再用抛物线的最小点

$$x_0=\frac{1}{2}\frac{y_1(x_2^2-x_3^2)+y_2(x_3^2-x_1^2)+y_3(x_1^2-x_2^2)}{y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)}$$

近似目标函数的最优点,对预先给定的目标函数的允许误差 $\varepsilon>0$,若

$$\min\{|y_0-y_1|,\ |y_0-y_2|,\ |y_0-y_3|\}<\varepsilon$$

则取 x_0 为近似解,否则,再用 (x_0,y_0) 和与它相近的两点构造新的二次抛物线,以其最小点近似最优点.

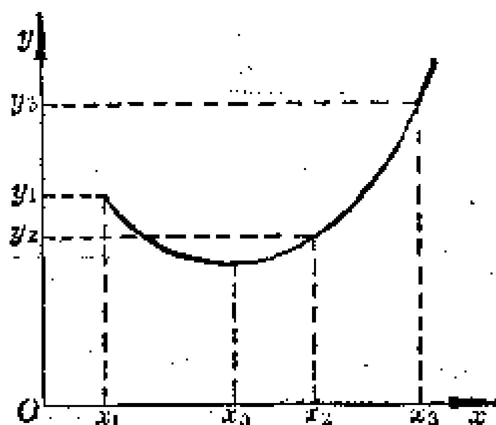


图 18.4

这个方法在中间低、两头高的情形,即当 $x_1<x_2<x_3$ 而 $y_2<y_1$, $y_2<y_3$ 时,效果较好.

若由上式算出的 x_4 与 x_2 相等，必须作些修改，例如当 $x_0=x_2$ 且 $x_2>\frac{1}{2}(x_1+x_3)$ 时，取 $x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，即取在较长一段的中点.

[分批试验法] 分批试验法根据要求有好几种方法，这里只介绍均分分批试验法.

例如一批做 n 次试验(n 为正整数)，先将试验范围均分为 $n+1$ 份，在 n 个分点 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i, \cdots, x_n$ 上做 n 次试验，将所得结果在同一条件下进行检验分析. 如果 x_i 最好(就是这点的函数值最小)，则保留 (x_{i-1}, x_{i+1}) 部分，丢去其余部分，然后仍将 (x_{i-1}, x_{i+1}) 均分为 $n+1$ 份，再按上述方法处理，这样继续做下去，就可以得到满意的结果.

§ 2 多变量函数极值问题解法(直接法)

本节讨论求目标函数

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=f(\boldsymbol{x})$$

在定义区域 D 上的最优解的直接方法(或试验最优化方法)，其中

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\tau} \quad (\tau \text{ 表示矢量的转置})$$

表示自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的列矢量. 由于极小和极大只是目标函数相差一符号，因此这里只讨论求 n 维列矢量 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^{\tau}$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}^*)=\min_{\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x})$$

这时，$\boldsymbol{x}^*$ 称为最优解(最优点).

[单峰函数] 如果函数 $y=f(\boldsymbol{x})$ 在所讨论的区域 D 上只有一个极值点(最大点或最小点)，那末称这个函数为多变量单峰函数.

多变量单峰函数也可用分析定义. 例如，设函数 $y=f(x_1, x_2)$ 定义在区域 D 上，由于区域 D 上的任一路线都可用一参数方程

$$\begin{cases} x_1=x_1(\lambda) \\ x_2=x_2(\lambda) \end{cases} \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 1)$$

表示，所以函数 $y=f(x_1, x_2)$ 沿这条路线也可用参数 λ 表示为

$$y=f(x_1(\lambda), x_2(\lambda))=y(\lambda)$$

设

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)=(x_1(0), x_2(0))$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)=(x_1(1), x_2(1))$$

又设
$$m=\min_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} y(\lambda),\quad y(\lambda^*)=m$$

如果
$$y(\lambda_1)>y(\lambda_2)>y(\lambda^*),\quad 当\quad \lambda_1<\lambda_2<\lambda^*$$
$$y(\lambda^*)<y(\lambda_1)<y(\lambda_2),\quad 当\quad \lambda^*<\lambda_1<\lambda_2$$

那末称函数 y 在区域 D 上从点 $\boldsymbol{a}$ 到点 $\boldsymbol{b}$ 的路线上是单峰的，式中 $\lambda_1, \lambda_2\in[0,1]$.

设
$$m^*=\min_{x\in D} f(\boldsymbol{x}),\quad f(\boldsymbol{x}^*)=m^*$$

如果对区域 D 上的任一对点 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，都存在一条从 $\boldsymbol{a}$ 经过 $\boldsymbol{x}^*$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的路线，在其上函数 y 是单峰的，那末称函数 y 在区域 D 上为单峰的.

[因素交替法]　这个方法是轮流按坐标轴方向探索最优点. 设 $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 个坐标轴的单位矢量，即
$$\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,\underset{i}{1},\cdots,0)^T\quad (i=1,2,\cdots,n)$$
并且预先给定允许误差 $\varepsilon>0$. 那末，迭代程序如下：

(1) 选取初始点 $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

(2) 由初始点 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 出发，先沿第一个坐标轴方向进行优选（用 § 1 的单因素方法），得到好点 $\boldsymbol{x}^{(1)}$，即
$$f(\boldsymbol{x}^{(1)})=\min_s f(\boldsymbol{x}^{(0)}+s\boldsymbol{e}_1)$$
式中 s 为实参数. 然后以 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 为起点沿第二个坐标轴方向进行优选，得到好点 $\boldsymbol{x}^{(2)}$，即
$$f(\boldsymbol{x}^{(2)})=\min_s f(\boldsymbol{x}^{(1)}+s\boldsymbol{e}_2)$$
如此等等，一直到 n 个方向全部优选完毕，得到 $\boldsymbol{x}^{(n)}$，它满足
$$f(\boldsymbol{x}^{(n)})=\min_s f(\boldsymbol{x}^{(n-1)}+s\boldsymbol{e}_n)$$

(3) 再以 $\boldsymbol{x}^{(n)}$ 为新的初始点，重复步骤(2).

(4) 以上步骤一直进行到从某一初始点出发，经过 n 个方向搜索后得不到新点，或与前 n 个初始点之间的距离都小于预先给定的允许误差 ε 为止. 这时 $\boldsymbol{x}^{(n)}$ 即为最优点 $\boldsymbol{x}^*$ 的近似解.

[平行线法]　如果处理的双因素问题中，有一个因素难于调整，而另一个因素却容易变动，这时用双因素交替法就不太方便，应改用下面的平行线法：

把难于调整的因素 x_2 放在纵轴上（图 18.5），设其可调范围为 $[0, l]$，把容易变动的因素 x_1 放在横轴上，设其可调范围为 $[0, m]$. 先把因素 x_2 固定在点 $0.618l$ 处，在过这点而平行于横轴的直线 L_1 上对因素 x_1 在 $[0, m]$ 上优选，好点为①；再把 x_2 固定在点 $0.382\,l$ 处，在过这点而平行于横轴的直线 L_2 上对因素

x_1 在[0, m]上优选，好点为②；比较①与②两点的好坏，如果②比①好，就去掉直线 L_1 的上半部(如果①比②好，就去掉直线 L_2 的下半部)，然后把因素 x_2 固定在可调范围的 0.236 l 处，在过这点而平行于横轴的直线 L_3 上对因素 x_1 在 [0, m]上优选，好点为③；比较②与③两点的好坏，如果②比③好，就去掉直线 L_3 的下半部，…，如此继续做下去把优选范围不断缩小，就可以找到最优点的近似解.

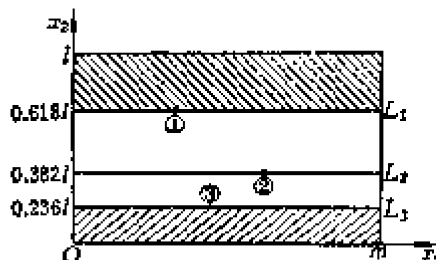


图　18.5

对因素 x_2 的选择也可采用分数法.

[瞎子爬山法]　迭代程序如下:

(1) 选取初始点(基点) $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和步长 h，命 $k:=0$.

(2) 进行第 k 阶段的第 l 次方向(即 x_l 轴方向)的局部探索

$$\boldsymbol{x}_l^{(k)}=\boldsymbol{x}_{l-1}^{(k)}\pm h\boldsymbol{e}_l\ *$$

其中 e_l 为第 l 个坐标轴的单位矢量，首先沿正方向探索

$$\boldsymbol{x}_l^{(k)}=\boldsymbol{x}_{l-1}^{(k)}+h\boldsymbol{e}_l$$

如果 $f(\boldsymbol{x}_l^{(k)})<f(\boldsymbol{x}_{l-1}^{(k)})$，则探索成功，就把这点作为下一次沿第 $l+1$ 个坐标轴方向探索的起点，并命 $l:=l+1$；否则就沿反方向探索

$$\boldsymbol{x}_l^{(k)}=\boldsymbol{x}_{l-1}^{(k)}-h\boldsymbol{e}_l$$

如果 $f(\boldsymbol{x}_l^{(k)})<f(\boldsymbol{x}_{l-1}^{(k)})$，则探索成功，就把这点作为下一次沿第 $l+1$ 个坐标轴方向探索的起点，并命 $l:=l+1$；如果正反方向探索都失败就退回原处，即命

$$\boldsymbol{x}_l^{(k)}=\boldsymbol{x}_{l-1}^{(k)}$$

并命 $l:=l+1$.

当沿各个坐标轴方向的局部探索都轮流进行后，这个阶段的局部探索也就完成了，这时得到第 k 阶段的最好点 $\boldsymbol{x}_n^{(k)}$.

(3) 命 $k:=k+1$，以 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}_n^{(k)}$ 为新基点，重复步骤(2)，如果不能得到更好的点，就缩小步长再进行局部探索，直到步长缩小到规定的精度为止，这时所

---

* 在此采用矢量记号

$$\boldsymbol{x}_l^{(k)}=(x_{1l}^{(k)},\ x_{2l}^{(k)},\ \cdots,\ x_{nl}^{(k)})^T$$

它代表 n 维空间中的一点. 上标 k 表示搜索的第 k 个阶段，下标 l 表示第 k 个阶段搜索中的第 l 次循环. 若 $\boldsymbol{x}_l^{(k)}$ 表示搜索中的基点序列，则当接近最优点 $\boldsymbol{x}^*$ 时，有

$$f(\boldsymbol{x}^*)\leqslant\cdots\leqslant f(\boldsymbol{x}_{l-1}^{(k)})\leqslant\cdots\leqslant f(\boldsymbol{x}_l^{(k)})\leqslant\cdots\leqslant f(\boldsymbol{x}_1^{(0)})$$

得最好点即为最优点 x^* 的近似解.

瞎子爬山法(也称探索爬山法)虽然没有前面几个方法快，但它特别适用于因素不能大幅度调动，或是在大生产中如果出一次废品就造成很大损失的情况.

[陡度法与对角线法]

1° 陡度和陡度法　设在 $A(x_1^{(1)},x_2^{(1)})$, $B(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$两点已经做试验，其目标函数值分别为 a, b (图 18.6)，而且 $b>a$，那末

$$\frac{b-a}{AB}=\frac{b-a}{\sqrt{(x_1^{(2)}-x_1^{(1)})^2+(x_2^{(2)}-x_2^{(1)})^2}}$$

称为从 A 上升到 B 的陡度. 对 n 维空间有类似的定义.

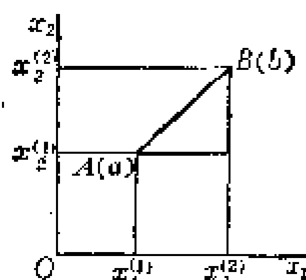


图　18.6

陡度大的方向目标函数显然上升得快一些. 所谓陡度法，就是利用已得的试验结果，算出各点间的陡度，然后沿陡度最大的方向(有利方向)再取点做试验.

2° 联合法(瞎子爬山法与陡度法联合使用)　例如用瞎子爬山法从 A 点出发，沿 x_2 轴方向调动因素 x_2 得到点 B，效果较好，仍沿 x_2 轴方向调动因素 x_2 得到点 C(图 18.7)，效果还是好的，然后沿 x_1 轴方向调动因素 x_1 得到点 D，效果也好，接下去就不一定从 D 出发再沿纵横方向去探索了. 这时可以分别算出目标函数由 A 上升到 D，由 B 上升到 D，由 C 上升到 D 的陡度，从中选出一个陡度最大的方向，例如 AD，那末下一次就可以沿 $\overrightarrow{AD}$ 的方向往上爬了，这时可以从 D 点出发沿线段 AD 的延长线 DE 用瞎子爬山法往上爬，也可以在 DE 上应用单因素的方法优选，一般总可以找出一个比 D 好的点.

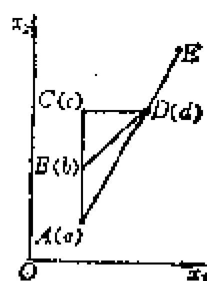


图　18.7

3° 对角线法　以上我们通过比较，从通过 D 点的三个方向 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ 的陡度挑出一个较陡的方向来，例如是 $\overrightarrow{AD}$，但 $\overrightarrow{AD}$ 并不一定是过 D 点的最陡方向，其实只要利用过 D 点的二个方向的陡度就可以找出过 D 点的更陡的方向来.

如图 18.8，在过 D 垂直于 BD 的方向上取一点 L，使 DL 的长等于 A 到 D 的陡度，且 L 和 A 分别在 BD 的两侧；再在过 D 垂直于 AD 的方向上取一点 M，使 DM 的长等于 B 到 D 的陡度，且 M 和 B 分别在 AD 的两侧，以 DL, DM 为边作平

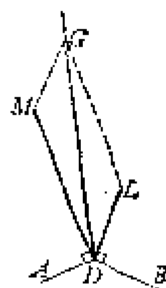


图 18.8

行四边形，其对角线 DG 的方向就是在 D 点的陡度更大的方向.

[步长加速法]　步长加速法实际上是瞎子爬山和沿有利方向加速相结合的方法. 其迭代程序如下:

(1) 选取初始点(基点)$x^{(0)}$和步长 h, 命 $k:=0$.

(2) 瞎子爬山(程序见瞎子爬山法).

当沿各个坐标轴方向的局部探索都轮流进行后，这个阶段的局部探索也就完成了，下一步就可沿有利方向进行加速.

(3) 加速爬山. 命 $x^{(k+1)}\equiv x_n^{(k)}$. 若 $x^{(k+1)}\neq x^{(k)}$，那末移到新的位置 $x_0^{(k+1)}$ 进行加速试探，在此

$$x_0^{(k+1)}=2x^{(k+1)}-x^{(k)}$$

有两种情形可能产生:

1° 如果 $f(x_0^{(k+1)})$的数值有改进，那末命 $k:=k+1$，应用步骤(2)的方法开始新的探索.

2° 如果 $f(x_0^{(k+1)})$ 的数值没有改进，那末取消这个加速，将基点放在上次发现的最好点，即 $x_n^{(k)}=x^{(k+1)}$. 命 $k:=0$，象步骤(2)一样开始一个新的局部探索.

如果经过一个阶段后发现 $x^{(k+1)}=x^{(k)}$不能加速移动，那末就缩小步长重复步骤(2). 如果逐次缩小步长都不能加速移动，这点便是最优点的近似解.

步长加速法在二维的情形如图 18.9 所示.

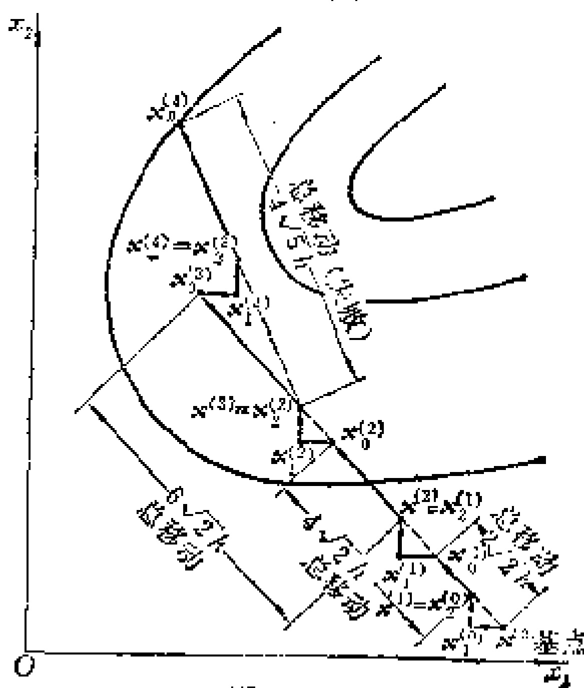


图　18.9

[方向加速法(共轭方向法)]　迭代程序如下:

(1) 从前面的最好数值位置 $x_0^{(k)}$ (可以是前一次迭代最后所确定的点或用其他方法所得的好点)和一组线性独立的探索方向 $\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)}$ (可以取坐标轴的方向)出发. 首先寻找过点 $x_0^{(k)}$ 平行于 $\xi_1^{(k)}$ 的直线上的最好点设为 $x_1^{(k)}$, 再找过点 $x_1^{(k)}$ 平行于 $\xi_2^{(k)}$ 的直线上的最好点设为 $x_2^{(k)}$,继续这个过程直到所有 n 个探索方向都已试探过,最后所得点为 $x_n^{(k)}$.

(2) 寻找特殊点 $x_m^{(k)}$, 这个点使目标函数的数值同前一点相比改进最大,即点 $x_m^{(k)}$ 给出 n 个移动的最大改变量 Δ, 其中 $\Delta=|f(x_m^{(k)})-f(x_{m-1}^{(k)})|$. 此外决定矢量 $\mu=x_n^{(k)}-x_0^{(k)}$.

(3) 计算 $f(2x_n^{(k)}-x_0^{(k)})=f_t^{(k)}$

(4) 记 $f_n^{(k)}=f(x_n^{(k)})$, 如果

$$f_t^{(k)}\geqslant f_n^{(k)} \tag{1}$$

或

$$(f_0^{(k)}-2f_n^{(k)}+f_t^{(k)})(f_0^{(k)}-f_n^{(k)}-\Delta)^2\geqslant\frac{\Delta(f_0^{(k)}-f_t^{(k)})^2}{2} \tag{2}$$

那末 μ 不是探索中的好方向,则应重新开始探索,从最后一点出发并用同样的方向,即 $x_0^{(k+1)}=x_n^{(k)}$ 和 $\xi_i^{(k+1)}=\xi_i^{(k)}, i=1,2,\cdots,n$, 重复步骤(1). 如果不等式(1),(2)都不满足,那末沿方向 μ 探索直到找到极小点. 将这个点定义为 $x_0^{(k+1)}$, 而 $k+1$ 阶段的新探索方向为 $\xi_i^{(k+1)}=\xi_i^{(k)}, i=1,2,\cdots,m-1$; $\xi_i^{(k+1)}=\xi_{i+1}^{(k)}, i=m,\cdots,n-1$; 又 $\xi_n^{(k+1)}=\mu$. 然后从步骤(1)出发重复整个过程,直到 $|x_{i+1}^{(k+1)}-x_i^{(k+1)}|<\varepsilon, i=1,2,\cdots,n$, 其中 ε 为预先给定的允许误差.

例　应用方向加速法找出目标函数

$$f(x_1,x_2)=10(x_1+x_2-5)^2+(x_1-x_2)^2$$

的极小点.

解　应用导数的方法容易求出目标函数的绝对极小点为 $(x_1,x_2)=(2.5,2.5)$. 下面用方向加速法来求出这个极小点.

从点 $x_0^{(0)}=(0,0)$开始探索,探索方向用 $\xi_1^{(0)}=(1,0)$和 $\xi_2^{(0)}=(0,1)$.

第一阶段　从基点出发,沿方向 $\xi_1^{(0)}$ 进行一维探索,移动距离由使

$$f(x_0^{(0)}+s\xi_1^{(0)})=10(s-5)^2+s^2$$

到达极小,得到 $s\approx4.545$, 因此 $x_1^{(0)}=(4.545, 0)$,而目标函数值由 $f(x_0^{(0)})=250$ 减少到 $f(x_1^{(0)})\approx22.727$. 再沿方向 $\xi_2^{(0)}$ 用同样的方法探索,得到 $x_2^{(0)}=(4.545,0.826)$,同时 $f_2^{(0)}=f(x_2^{(0)})\approx15.207$.

为决定下一阶段是否用方向 $\mu^{(0)}=x_2^{(0)}-x_0^{(0)}$，应检验不等式(1)．计算点 $x_l=2x_2^{(0)}-x_0^{(0)}=(2\times4.545-0,\ 2\times0.826-0)=(9.090,\ 1.652)$，而 $f_l^{(0)}\approx385.029$，由于 $f_l^{(0)}>f_2^{(0)}$ ($f_2^{(0)}\approx15.207$)，所以下一阶段不用方向 $\mu^{(0)}$．

第二阶段　本阶段的方向和前一阶段的一样(因为 $\mu^{(0)}$ 不采用)．相继探索得到 $x_1^{(1)}=(3.869,\ 0.826)$，而 $f_1^{(1)}\approx10.190$ 又 $x_2^{(1)}=(3.869, 1.380)$，而 $f_2^{(1)}\approx6.815$．再计算点 $x_l=(2\times3.869-4.545,\ 2\times1.380-0.826)=(3.193, 1.934)$．在此 $f_l^{(1)}\approx1.746$，由于 $f_l^{(1)}<f_2^{(1)}$，不等式(1)不满足．再检验不等式(2)，计算

$$
\begin{aligned}
&(f_0^{(1)}-2f_2^{(1)}+f_l^{(1)})(f_0^{(1)}-f_2^{(1)}-\Delta)^2\\
&\approx[15.207-2\times6.815+1.746][15.207-6.815-5.017]^2\\
&\approx37.851
\end{aligned}
$$

式中 Δ 是目标函数在给定方向的最大改变量，即 $\Delta=|f_0^{(1)}-f_1^{(1)}|\approx5.017$．不等式(2)的右端是

$$
\frac{\Delta}{2}(f_0^{(1)}-f_l^{(1)})^2\approx454.537
$$

因此不等式(2)不满足，即下一阶段可以采用方向 $\mu^{(1)}=(3.869-4.545,\ 1.380-0.826)=(-0.676,\ 0.554)$，沿方向 $\mu^{(1)}$ 探索得到第三阶段的基点为 $x_0^{(2)}=(2.500,\ 2.500)$，并且 $f_0^{(2)}=0$．

第三阶段　本阶段的探索方向为 $\xi_1^{(2)}=\xi_2^{(1)}=(0,1)$ 和 $\xi_2^{(2)}=\mu^{(1)}=(-0.676,\ 0.553)$．沿这两个方向探索将发现不能再前进，因为事实上前一阶段已经找到绝对极小点．当然，这是不足为奇的，因为目标函数是二次的．

〔方向步长双加速法〕　迭代程序如下：

考虑第 k 阶段．

(1) 选择一初始点(基点) $x_0^{(k)}$，一组步长 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 和一组方向 $\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)}$，其中 $\xi_l^{(k)}=(m_{1l}^{(k)},\ \cdots,\ m_{nl}^{(k)})$，上指标 k 表示第 k 个阶段，下指标 l 表示第 l 个方向．当 $k=1$ 时，一般选择探索方向平行于坐标轴方向．

(2) 依次平行于 n 个方向的每一个进行相继探索，若移动是成功的，则采用新点，若移动不成功则保留基点．若在一给定方向的移动是成功的，则下一次再在这个方向上探索时，步长将增大为 α 倍($\alpha>1$)；若失败，则缩小为 $-\beta$ 倍($0<\beta<1$)，负号表示在反方向探索．一般取 $\alpha=3,\ \beta=0.5$．

(3) 直到在每一个方向上都至少有一次成功，一次失败，这时沿该方向的探索就告结束．依次沿平行于 n 个方向的探索完毕后最后一次成功的点为新的基点 $x_0^{(k+1)}$．下一阶段(即第 $k+1$ 阶段)的探索方向 $\xi_l^{(k+1)}$，$l=1, 2, \cdots, n$，由下列

方程计算得到:

首先定义矢量

$$\boldsymbol{A}_l^{(k)}=\sum_{j=l}^{n} d_j \xi_j^{(k)} \quad (1\leqslant l\leqslant n)$$

其中 d_j 是在 $\xi_j^{(k)}$ 方向的所有成功移动的代数和,

$$\boldsymbol{A}_l^{(k)}=(A_{1l}^{(k)},\ \cdots,\ A_{nl}^{(k)})$$

$$A_{il}^{(k)}=\sum_{j=l}^{n} d_j m_{ij}^{(k)} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

然后方向 $\xi_j^{(k+1)}(j=1,2,\cdots,n)$由下式给出

$$\xi_j^{(k+1)}=\frac{\boldsymbol{D}_j^{(k)}}{|\boldsymbol{D}_j^{(k)}|} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

其中

$$\boldsymbol{D}_1^{(k)}=\boldsymbol{A}_1^{(k)}$$

$$\boldsymbol{D}_2^{(k)}=\boldsymbol{A}_2^{(k)}-(\boldsymbol{A}_2^{(k)}\cdot\xi_1^{(k+1)})\xi_1^{(k+1)}$$

$$\boldsymbol{D}_3^{(k)}=\boldsymbol{A}_3^{(k)}-(\boldsymbol{A}_3^{(k)}\cdot\xi_1^{(k+1)})\xi_1^{(k+1)}-(\boldsymbol{A}_3^{(k)}\cdot\xi_2^{(k+1)})\xi_2^{(k+1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{D}_n^{(k)}=\boldsymbol{A}_n^{(k)}-\sum_{i=1}^{n-1}(\boldsymbol{A}_n^{(k)}\cdot\xi_i^{(k+1)})\xi_i^{(k+1)}$$

特别,其中主要方向

$$\xi_1^{(k+1)}=\frac{\boldsymbol{D}_1^{(k)}}{|\boldsymbol{D}_1^{(k)}|}=\frac{\boldsymbol{A}_1^{(k)}}{|\boldsymbol{A}_1^{(k)}|}$$

它的各个分量为

$$m_{i1}^{(k+1)}=\frac{D_{i1}^{(k)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} D_{j1}^{(k)}D_{j1}^{(k)}}}$$

$$=\frac{A_{i1}^{(k)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} A_{j1}^{(k)}A_{j1}^{(k)}}} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

(4) 以上步骤一直进行到$\sum_{i=1}^{n} d_i^2<\varepsilon$($\varepsilon$ 为预先给定的允许误差)为止,所得最后的基点 $x_0^{(k+1)}=x_n^{(k)}$ 就近似于最优点.

方向步长双加速法在二维的情形如图 18.10 所示.

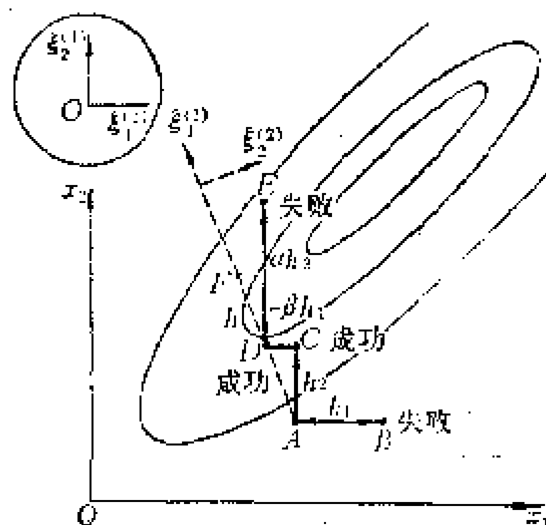


图　18.10

[单纯形调优法]　迭代程序如下:

(1) 命 n 维空间的单纯形的 $n+1$ 个顶点为 $x_{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$, 计算函数值 $f_i=f(x_{(i)})$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$, 比较大小, 并确定

$$f_R=f(x_{(R)})=\max_{1\leqslant i\leqslant n+1} f_i$$

$$f_G=f(x_{(G)})=\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1\\ i\neq R}} f_i$$

$$f_L=f(x_{(L)})=\min_{1\leqslant i\leqslant n+1} f_i$$

(2) 求出最坏点 $x_{(R)}$ 的对称点

$$x_N=2x_F-x_{(R)}$$

式中
$$x_F=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}(x_{(i)}-x_{(R)})$$

(3) 若 $f(x_N)\geqslant f_R$, 则将 x_N 缩小为 x_M, x_M 由下式定义:

$$x_M=(1-\lambda)x_{(R)}+\lambda x_N\qquad(0<\lambda<1,\ \lambda\neq0.5)$$

这里要求 $\lambda\neq0.5$, 是避免 $x_M=x_F$ 的情形发生.

如果 $f(x_M)<f_G$, 那末 $x_{(R)}:=x_M$, 并重复以上步骤.

如果 $f(x_M)\geqslant f_G$, 那末 $x_{(i)}:=\dfrac{x_{(i)}+x_{(L)}}{2}$, 并重新开始迭代.

(4) 若 $f(x_N)<f_R$, 则将 x_N 扩大为 x_E, x_E 由下式定义:

$$x_E=(1-\mu)x_{(R)}+\mu x_N\quad(\mu>1)$$

扩大的条件 $f(x_N)<f_R$ 也可以换成

$$f(x_N)<f_L$$

或 $$(1-\mu)f(\boldsymbol{x}_{(B)})+\mu f(\boldsymbol{x}_N)<f(\boldsymbol{x}_L) \qquad (\mu>1)$$

如果上述条件满足，并且

$$f(\boldsymbol{x}_E)<f(\boldsymbol{x}_N)$$

那末 $$\boldsymbol{x}_{(B)}:=\boldsymbol{x}_E$$

否则 $$\boldsymbol{x}_{(B)}:=\boldsymbol{x}_N$$

并重复以上步骤.

上述过程一直继续到

$$\sum_{i=1}^{n+1}(f_i-f_L)^2<\varepsilon$$

或 $$f_R-f_L<\varepsilon|f_L|$$

为止，其中 ε 是预先给定的正数.

§3 无条件极值问题解法

本节讨论目标函数

$$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的极小值问题. 设

$$f_x(\boldsymbol{x})=\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)^T$$

$$f_{xx}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

［最速下降法］ 迭代程序如下：

(1) 选取初始点 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 及判别收敛的正数 ε.

(2) 命 $k:=0$.

(3) 计算 $-f_x(\boldsymbol{x}^{(k)})$.

(4) 命 $\boldsymbol{z}^{(k)}=-f_x(\boldsymbol{x}^{(k)})$，若 $|\boldsymbol{z}^{(k)}|<\varepsilon$，则迭代停止，$\boldsymbol{x}^{(k)}$ 即为所求；否则进

行(5).

(5) 求 s_k，使

$$f(\boldsymbol{x}^{(k)}+s_k\boldsymbol{z}^{(k)})=\min_{s\geq 0} f(\boldsymbol{x}^{(k)}+s\boldsymbol{z}^{(k)})$$

(6) 命 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}+s_k\boldsymbol{z}^{(k)}$；命 $k:=k+1$，进行(3).

这个方法虽然很简单，但点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于最优解的速度较慢.

[牛顿法] 迭代程序如下：

(1) 选取初始点 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 及判别收敛的正数 ε.

(2) 命 $k:=0$.

(3) 计算 $-[f_{xx}(\boldsymbol{x}^{(k)})]^{-1}f_x(\boldsymbol{x}^{(k)})$.

(4) 命

$$\boldsymbol{z}^{(k)}=-[f_{xx}(\boldsymbol{x}^{(k)})]^{-1}f_x(\boldsymbol{x}^{(k)})$$

若 $|f_x(\boldsymbol{x}^{(k)})|\leqslant\varepsilon$，则迭代停止，$\boldsymbol{x}^{(k)}$ 即为所求；否则进行(5).

(5) 求 s_k 使

$$f(\boldsymbol{x}^{(k)}+s_k\boldsymbol{z}^{(k)})=\min_{s\geq 0} f(\boldsymbol{x}^{(k)}+s\boldsymbol{z}^{(k)})$$

(6) 命 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}+s_k\boldsymbol{z}^{(k)}$；命 $k:=k+1$，进行(3).

牛顿法虽然可以很快地收敛于最优解，但往往计算逆矩阵 $[f_{xx}(\boldsymbol{x})]^{-1}$ 很困难. 为了避免此困难，产生了收敛速度介于最速下降法与牛顿法之间的共轭梯度法.

[共轭梯度法]

1° 目标函数是二次函数

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{x}$$

的情形，其迭代程序如下：

(1) 选取初始点 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 及判别收敛的正数 ε. 若 $|f_x(\boldsymbol{x}^{(1)})|\leqslant\varepsilon$，则迭代停止；否则进行(2).

(2) 命 $k:=1$，$\boldsymbol{z}^{(1)}=-f_x(\boldsymbol{x}^{(1)})$.

(3) 算出

$$s_k=-\frac{(f_x(\boldsymbol{x}^{(k)}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^{(k)}}{2\boldsymbol{z}^{(k)\mathrm{T}}C\boldsymbol{z}^{(k)}}$$

(4) 命 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}+s_k\boldsymbol{z}^{(k)}$

(5) 若 $|f_x(\boldsymbol{x}^{(k+1)})|\leqslant\varepsilon$，则迭代停止；否则命

$$z^{(k+1)}=-f_x(x^{(k+1)})+\frac{|f_x(x^{(k+1)})|^2}{|f_x(x^{(k)})|^2}z^{(k)}$$

命 $k:=k+1$，进行(3)。

对二次函数只要有限步就可到达最优点.

2° 目标函数是一般函数的情形，其迭代程序如下：

(1) 选取初始点 $x^{(1)}$ 及判别收敛的正数 ε。若 $|f_x(x^{(1)})|\leqslant\varepsilon$，则迭代停止；否则进行(2).

(2) 命 $k:=1$，$z^{(1)}=-f_x(x^{(1)})$。

(3) 求 s_k 使 $f(x^{(k)}+s_kz^{(k)})=\min\limits_{s\geqslant0}f(x^{(k)}+sz^{(k)})$。

(4) 命 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+s_kz^{(k)}$。

(5) 若 $|f_x(x^{(k+1)})|\leqslant\varepsilon$，则迭代停止；否则，若 $k=n$，则 $x^{(1)}=x^{(n+1)}$，进行(1)，若 $k<n$，则算出

$$\nu_k=\frac{|f_x(x^{(k+1)})|^2-(f_x(x^{(k+1)}))^{\mathrm T}f_x(x^{(k)})}{|f_x(x^{(k)})|^2}$$

命
$$z^{(k+1)}=-f_x(x^{(k+1)})+\nu_kz^{(k)}$$

命 $k:=k+1$，进行(3)。

这个方法的程序较简单，存储量较小，但当 $|f_x(x^{(k)})|$ 较小时，计算 ν_k 可能引起因舍入误差较大而不稳定的情况.

对一般(非二次)函数，这个方法不一定是有限步到达最优解。

[变尺度方法]

1° 目标函数是二次正定函数

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}x_ix_j=x^{\mathrm T}Cx$$

的情形，其迭代程序如下：

(1) 选取初始点 $x^{(1)}$ 及判别收敛的正数 ε。若 $|f_x(x^{(1)})|\leqslant\varepsilon$，则迭代停止；否则进行(2).

(2) 命 $k:=1$，$H_1=I$(n 阶单位矩阵)，$g_1=f_x(x^{(1)})$。

(3) 命 $z^{(k)}=-H_kg_k$。

(4) 算出

$$s_k=-\frac{g_k^{\mathrm T}z^{(k)}}{z^{(k)\mathrm T}Cz^{(k)}}$$

(5) 命

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+s_k z^{(k)}$$

(6) 若$|f_x(x^{(k+1)})|\leqslant\varepsilon$,则迭代停止;否则,命

$$g_{k+1}=f_x(x^{(k+1)})$$

$$\Delta g_k=g_{k+1}-g_k$$

$$\Delta x_k=x^{(k+1)}-x^{(k)}$$

算出

$$H_{k+1}=H_k+\frac{\Delta x_k(\Delta x_k)^{\tau}}{(\Delta x_k)^{\tau}\Delta g_k}-\frac{(H_k\Delta g_k)[(\Delta g_k)^{\tau}H_k^{\tau}]}{(\Delta g_k)^{\tau}H_k\Delta g_k}$$

再进行(7).

(7) 命 $k:=k+1$ 进行(3).

对二次函数只要有限步就可到达最优点.

2° 目标函数是一般函数的情形,其迭代程序如下:

(1) 选取初始点 $x^{(1)}$ 及判别收敛的正数 ε. 若$|f_x(x^{(1)})|\leqslant\varepsilon$, 则迭代停止;否则进行(2).

(2) 命 $k:=1$, $g_1=f_x(x^{(1)})$, $H_1=I$ (n阶单位矩阵).

(3) 命 $z^{(k)}=-H_k g_k$.

(4) 求s_k,使 $f(x^{(k)}+s_k z^{(k)})=\min\limits_{s\geqslant 0} f(x^{(k)}+sz^{(k)})$.

(5) 命 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+s_k z^{(k)}$.

(6) 若$|f_x(x^{(k+1)})|\leqslant\varepsilon$,则迭代停止;否则,若 $k=n$, 则$x^{(1)}:=x^{(n+1)}$, 进行(1);若 $k<n$,则算出

$$g_{k+1}=f_x(x^{(k+1)}),\quad \Delta x_k=x^{(k+1)}-x^{(k)},\quad \Delta g_k=g_{k+1}-g_k$$

$$H_{k+1}=H_k+\frac{\Delta x_k(\Delta x_k)^{\tau}}{(\Delta x_k)^{\tau}\Delta g_k}-\frac{(H_k\Delta g_k)[(\Delta g_k)^{\tau}H_k]}{(\Delta g_k)^{\tau}H_k\Delta g_k}$$

命 $k:=k+1$,进行(3).

对一般(非二次)函数,这个方法不一定是有限步到达最优解.

变尺度法是共轭梯度法的改进,它的收敛速度较快.

[高斯-牛顿最小二乘法] 假设目标函数是平方和的形式

$$y=f(x)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^2(x)\quad (m\geqslant n)$$

式中 x 为n维列矢量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\tau}$.

这是数据处理中最常见的一种函数形式.

显然,如果$f(x)$的极小点 x^* 满足$|f(x^*)|<\varepsilon$ (ε是预先给定的精度),那

末可以认为 x^* 是方程组

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m, m \geqslant n)$$

的解．所以最小二乘法也可用来求非线性方程组的解．

函数 $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$一般是非线性的，假设有连续的一阶偏导数：

$$\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} = \varphi_{ij}(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

迭代程序如下：

(1) 选择一初始点 $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})^T$．

(2) 算出

$$\Delta x_0 = -(A_0^T A_0)^{-1} A_0^T \varphi(x_0)$$

式中

$$\Delta x_0 = x - x_0 = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n) = (x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}, \cdots, x_n - x_{n0})$$

称为对初始值 x_0的校正量；又

$$A_0 = (\varphi_{ij}(x_0))$$

$$\varphi(x_0) = (\varphi_1(x_0), \ \varphi_2(x_0), \cdots, \varphi_m(x_0))^T$$

假设矩阵 A_0的列矢量为线性独立的，因此逆矩阵$(A_0^T A_0)^{-1}$存在．

(3) 令

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0$$

则 x_1 为函数 $f(x)$的极小点的首次近似．

(4) 以 x_1 代替前面的 x_0，Δx_1 代替 Δx_0，重复上述计算过程，直到

$$|\Delta x_k| < \varepsilon'$$

或

$$|\mathrm{grad}\, f(x_k)| < \varepsilon''$$

为止，在此 ε'和 ε'' 为预先指定的表示对精确度要求的两个正数．

［改进的高斯-牛顿最小二乘法］ 上述高斯-牛顿最小二乘法利用了目标函数为平方和的特点，用 $A^T A$ 近似代替牛顿法中 $f(x)$的二阶导数矩阵，大大节省了计算量．但是它对初始点x_0的要求比较严格．如果初始点 x_0 与极小点x^* 相距太远，这个算法往往失败．其原因可以从两个方面来看，其一是上述算法基于线性逼近，但在 x_0 远离极小点时，这种线性逼近无效；其二是 $A_0^T A_0$的最大特征值与最小特征值的比很大，以致使解 Δx_0变得无意义．为此采取下述改进的办法．

在求出 x_k 的校正量 Δx_k 后，不把 $x_k + \Delta x_k$ 作为第 $k+1$ 次近似，而将 Δx_k

作为下一步的搜索方向，这时求 s_k 使

$$f(\boldsymbol{x}_k+s_k\Delta\boldsymbol{x}_k)=\text{极小值}$$

然后令

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+s_k\Delta\boldsymbol{x}_k$$

以 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 代替 $\boldsymbol{x}_k$ 重复上述过程，直到

$$|s_k\Delta\boldsymbol{x}_k|<\varepsilon$$

或

$$|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_{k+1})|<\varepsilon'$$

时为止，这时极小点和极小值分别为

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}_{k+1}^*,\quad f^*=f(\boldsymbol{x}^*)$$

称 s_k 为第 k 步的最优步长因子.

§ 4　条件极值问题解法

本节讨论目标函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(\boldsymbol{x})$$

在一组不等式

$$g_j=g_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0\quad(\text{或 } g_j=g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\ j=1,2,\cdots,m)$$

或等式

$$g_j=g_j(\boldsymbol{x})=0\quad(j=1,2,\cdots,m)$$

约束条件下的极值问题解法．这种问题称为条件极值问题．当目标函数和约束条件关于自变量都是线性时，称为线性规划问题，否则称为非线性规划问题.

条件极值问题就是要求在 n 维欧氏空间 E^n 的一个由不等式约束条件所限定的区域：

$$R=\{\boldsymbol{x}\,|\,g_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,m\}$$

上求一点 $\boldsymbol{x}^*\in R$，使得目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 达到极小值（或极大值）$f(\boldsymbol{x}^*)$，即

$$\min_{\boldsymbol{x}\in R} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}^*)\quad(\boldsymbol{x}^*\in R)$$

其中 $y=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$g_j(\boldsymbol{x})=g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)(j=1,2,\cdots m)$ 是定义在 E^n 的某一开集 $X\supset R$ 上的具有一阶连续偏导数的实值函数.

因为在同样的约束条件下，极小和极大只是目标函数相差一符号，以后限于讨论极小的情况.

若某一 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in R$，有

$$g_j(\boldsymbol{x}^{(0)})>0\quad(j=1,2,\cdots,m)$$

则称 $x^{(0)}$ 为 R 的内点，若 $x^{(0)}\in R$，存在一个 $j\ (1\leqslant j\leqslant m)$，使

$$g_j(x^{(0)})=0$$

则称 $x^{(0)}$ 为 R 的边界点。

［线性规划问题的可行解与极小可行解］　线性规划问题就是求目标函数

$$y=\sum_{j=1}^{N}c_jx_j \tag{1}$$

在约束条件

$$x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{2a}$$

$$\sum_{r=1}^{N}a_{ir}x_r\leqslant b_i \quad (i=1,\cdots,p) \tag{2b}$$

$$\sum_{r=1}^{N}a_{jr}x_r=b_j \quad (j=p+1,\cdots,p+q) \tag{2c}$$

$$\sum_{r=1}^{N}a_{kr}x_r\geqslant b_k \quad (k=p+q+1,\cdots,m) \tag{2d}$$

下的极小值，其中有 q 个等式约束条件，其余是不等式约束条件。假定 $b_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$。

对形如(2b)的约束条件，则引进松弛变量 $x_{n+i}\geqslant 0$，把它变为等式

$$\sum_{r=1}^{N}a_{ir}x_r+x_{N+i}=b_i \qquad (i=1,\cdots,p)$$

对形如(2d)的约束条件，则引进松弛变量 $x_{n+k}\geqslant 0$，把它变为等式

$$\sum_{r=1}^{N}a_{kr}x_r-x_{N+k}=b_k \qquad (k=p+q+1,\cdots,m)$$

松弛变量并不出现在目标函数(1)中，它的引进并不影响问题的最优解，它把所有约束条件(除了 $x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,N)$ 外)化成统一的等式形式

$$Ax=b \tag{3}$$

式中 x 是 $n=N+m-q$ 维矢量，它包含所有原来的变量和松弛变量，b 是 m 维常数矢量，而 A 是 $m\times n$ 矩阵。因此(3)表示 n 个未知量的 m 个方程的线性方程组。

所以线性规划问题可以表述为如下三种等价形式：

1°　求目标函数

$$y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4a}$$

在约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{5a}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{6a}$$

下的极小值，假定 $b_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$。

2° 求目标函数

$$y=\boldsymbol{cx} \tag{4b}$$

在约束条件

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{5b}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{6b}$$

下的极小值，其中 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是一行矢量，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是一列矢量，A 为 $m\times n$ 矩阵 (a_{ij})，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2,\cdots,b_m)^T$ 是一列矢量，假定 $b_i \geqslant 0\ (i=1, 2,\cdots,m)$。

3° 求目标函数

$$y=\boldsymbol{cx} \tag{4c}$$

在约束条件

$$x_1\boldsymbol{p}_1+x_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{p}_0 \tag{5c}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{6c}$$

下的极小值，其中 $\boldsymbol{p}_j (j=1,2,\cdots,n)$ 是矩阵 A 的第 j 列矢量

$$\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{b}，假定\ b_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

c_j 称为目标函数(4)的价格系数。

定义 1　满足条件(5)和(6)的矢量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 称为线性规划问题的可行解。

定义 2　若可行解 $\boldsymbol{x}$ 的分量中至多有 m 个 $x_i>0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为基本可行解。

定义 3　若一个基本可行解 $\boldsymbol{x}$ 恰有 m 个分量 $x_i>0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为非退化的基本可行解。

定义 4　使目标函数(4)达到极小值的可行解称为极小可行解（简称极小解）。

集合　　$R=\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}的分量非负\}$

是一凸集，它有有限个顶点，若线性规划中目标函数(4)有极小值，则必可在其凸

集R上某一顶点达到.

假设线性规划问题是可行的,每一基本可行解都是非退化的,并且给定一基本可行解$\boldsymbol{x}_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{m0})^T$和与它关联的一组线性无关矢量$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$. 则有

$$x_{10}\boldsymbol{p}_1+x_{20}\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_{m0}\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{p}_0$$

$$x_{10}c_1+x_{20}c_2+\cdots+x_{m0}c_m=y_0$$

式中所有$x_{i0}>0$, c_i为目标函数的价格系数,y_0为目标函数相应于给定解$\boldsymbol{x}_0$的数值. 由于$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$是线性无关的,存在$x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{mj}$满足

$$x_{1j}\boldsymbol{p}_1+x_{2j}\boldsymbol{p}_2+\cdots+x_{mj}\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{p}_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

并且定义

$$x_{1j}c_1+x_{2j}c_2+\cdots+x_{mj}c_m=y_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

式中c_i为相应于$\boldsymbol{p}_i$的价格系数.

定理1 如果对任一固定的j,条件$y_j-c_j>0$成立,那末可以构造一组可行解使得对组中任一可行解都有$y<y_0$,其中y的下限或者是有限的或者是无限的(y是目标函数相应于可行解组中某一可行解的数值).

定理2 如果对任一基本可行解$\boldsymbol{x}=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{m0})^T$,条件$y_j-c_j\leqslant 0$对所有$j=1,2,\cdots,n$成立,那末$\boldsymbol{x}=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{m0})$是一极小可行解.

[单纯形法] 根据以上两个定理解线性规划问题的单纯形法就是从已知的某一基本可行解(它是满足约束条件的一切点即可行解所组成的凸集R的一个顶点)出发,确定这点是否使目标函数达到极小值. 如果不是,依次构造新的基本可行解(它们是凸集R的相邻顶点),其相应的目标函数值小于或等于前面的数值.经过有限步(通常在m和$2m$之间)就可得到极小解. 所以单纯形法实际是凸集顶点的一个迭代方法. 下面分两种情形叙述.

1° 假设矩阵A的n个列矢量$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$包含$m$个单位矢量并集中在一起组成一个$m$阶单位矩阵. 不妨设这些列矢量为$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$,命

$$B=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m)=I_m\quad(I_m\text{为}m\text{阶单位矩阵})$$

称为容许基底. 由于$B^{-1}=I_m$,而且$\boldsymbol{p}_0$的所有元素都是非负的,因此有初始基本可行解

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{p}_0,\quad \boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{p}_j$$

式中
$$\boldsymbol{x}_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{m0})^T\quad(x_{i0}\geqslant 0)$$

$$\boldsymbol{x}_j=(x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{mj})^T$$

列表如下:

表　1

i	基底	c		c_1	c_2	$\cdots$	c_l	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
			p_0	p_1	p_2	$\cdots$	p_l	$\cdots$	p_m	p_{m+1}	$\cdots$	p_j	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n
1	p_1	c_1	x_{10}	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$x_{1,m+1}$	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1k}	$\cdots$	x_{1n}
2	p_2	c_2	x_{20}	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$x_{2,m+1}$	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2k}	$\cdots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	p_l	c_l	x_{l0}	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$x_{l,m+1}$	$\cdots$	x_{lj}	$\cdots$	x_{lk}	$\cdots$	x_{ln}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	p_m	c_m	x_{m0}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$x_{m,m+1}$	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	x_{mk}	$\cdots$	x_{mn}
$m+1$			y_0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$y_{m+1}-c_{m+1}$	$\cdots$	y_j-c_j	$\cdots$	y_k-c_k	$\cdots$	y_n-c_n

由于 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{p}_0$，$\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{p}_j$，因此表中 $x_{i0}=b_i$，$x_{ij}=a_{ij}$．表中

$$y_0=\sum_{i=1}^{m} c_i x_{i0}$$

$$y_j=\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

元素 y_0 和 y_j-c_j 在它们所在列的第 $m+1$ 行出现．对基底矢量 y_j-c_j 总是等于零．有了表 1 后就可对它进行如下的单纯形法迭代：

(1) 检验是否所有的 $y_j-c_j\leqslant 0$．如果所有 $y_j-c_j\leqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$，那末 $\boldsymbol{x}_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{m0})^T=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$ 是极小解，相应的目标函数值为 y_0．

(2) 如果某个 $y_j-c_j>0$，则选择对应于

$$\max_j(y_j-c_j)=y_k-c_k$$

的矢量 $\boldsymbol{p}_k$ 进入基底．

(3) 把对应于

$$\theta_0=\min_i\frac{x_{i0}}{x_{ik}}=\frac{x_{l0}}{x_{lk}} \quad (x_{ik}>0)$$

的矢量 $\boldsymbol{p}_l$ 从基底中消去．如果所有的 $x_{ik}\leqslant 0$，那末目标函数值无界．

(4) 为了得到新解 $\boldsymbol{x}_0'$，新矢量 $\boldsymbol{x}_j'$ 和相应的 $y_j'-c_j$，对表 1 中行 $i=1,\cdots,m+1$ 和列 $j=0,1,\cdots,n$ 的每一元素用下面的主元素(x_{lk})消去法公式进行变换

$$x_{ij}'=x_{ij}-\frac{x_{lj}}{x_{lk}}x_{ik} \quad (i\neq l,\ i=1,2,\cdots,m+1)$$

$$x_{lj}'=\frac{x_{lj}}{x_{lk}} \quad (j=0,1,2,\cdots,n)$$

其中

$$y_0'=x_{m+1,0}' \quad y_j'-c_j=x_{m+1,j}'$$

每迭代一次就得到一新的基本可行解，重复步骤(1)～(4)直到求得极小解或者确定一无界解．

对表 1 进行上述迭代一次后就得到下表：

表 2

i	基底	c		c_1	c_2	$\cdots$	c_l	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
			p_0	p_1	p_2	$\cdots$	p_l	$\cdots$	p_m	p_{m+1}	$\cdots$	p_j	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n
1	p_1	c_1	x'_{10}	1	0	$\cdots$	x'_{1l}	$\cdots$	0	$x'_{1,m+1}$	$\cdots$	x'_{1j}	$\cdots$	0	$\cdots$	x'_{1n}
2	p_2	c_2	x'_{20}	0	1	$\cdots$	x'_{2l}	$\cdots$	0	$x'_{2,m+1}$	$\cdots$	x'_{2j}	$\cdots$	0	$\cdots$	x'_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	p_k	c_k	x'_{k0}	0	0	$\cdots$	x'_{ll}	$\cdots$	0	$x'_{l,m+1}$	$\cdots$	x'_{lj}	$\cdots$	1	$\cdots$	x'_{ln}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	p_m	c_m	x'_{m0}	0	0	$\cdots$	x'_{ml}	$\cdots$	1	$x'_{m,m+1}$	$\cdots$	x'_{mj}	$\cdots$	0	$\cdots$	x'_{mn}
$m+1$			y'_0	0	0	$\cdots$	y'_l-c_l	$\cdots$	0	$y'_{m+1}-c_{m+1}$	$\cdots$	y'_j-c_j	$\cdots$	0	$\cdots$	y'_n-c_n

2° 假设矩阵A不包含一个m阶单位矩阵，这时可采用下面的人工基底法：

引进人工变量$x_{n+j}\geqslant 0$ $(j=1,2,\cdots,m)$将线性规划问题的系统扩大为：

极小化

$$y=c_1x_1+\cdots+c_nx_n+wx_{n+1}+wx_{n+2}+\cdots+wx_{n+m}$$

满足条件

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1} & & & =b_1\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n & +x_{n+2} & & =b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n & & +x_{n+m} & =b_m\end{cases}$$

和$x_j\geqslant 0$ $(j=1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+m)$，其中$w$为一未定的大的正数(不必指定$w$的数值)。矢量$p_{n+1},p_{n+2},\cdots,p_{n+m}$形成扩大系统的一个基底(人工基底)。

对扩大了的问题，第一个可行解为

$$\boldsymbol{x}_0=(x_{n+1,0},\ x_{n+2,0},\ \cdots,\ x_{n+m,0})^{\mathrm{T}}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m)^{\mathrm{T}}$$

相应的目标函数值为$y_0=w\sum\limits_{i=1}^{m}b_i$。由于基底组成一个单位矩阵，所以

$$\boldsymbol{x}_j=(x_{1j},\ x_{2j},\ \cdots,\ x_{mj})^{\mathrm{T}}=(a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots,\ a_{mj})^{\mathrm{T}}$$

$$y_j=w\sum_{i=1}^{m}x_{ij}$$

$$y_j-c_j=w\sum_{i=1}^{m}x_{ij}-c_j\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

列表如下：

表 3

i	基底	c		c_1	c_2	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n	w	$\cdots$	w	$\cdots$	w
			p_0	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	p_{n+1}	$\cdots$	p_{n+l}	$\cdots$	p_{n+m}
1	p_{n+1}	w	$x_{n+1,0}$	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1k}	$\cdots$	x_{1n}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0
2	p_{n+2}	w	$x_{n+2,0}$	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2k}	$\cdots$	x_{2n}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	p_{n+l}	w	$x_{n+l,0}$	x_{l1}	x_{l2}	$\cdots$	x_{lk}	$\cdots$	x_{ln}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	p_{n+m}	w	$x_{n+m,0}$	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mk}	$\cdots$	x_{mn}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$m+1$			0	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_k$		$-c_n$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$m+2$			$\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{m} x_{ik}$		$\sum_{i=1}^{m} x_{in}$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0

除了将和第 $m+2$ 行的最大正数相对应的矢量引进基底以外，表 3 和表 1 一样处理．第 $m+2$ 行的元素也用通常的主元素消去法公式加以变换．一旦将一人工矢量从基底消去，就不再进入基底，所以没有必要去变换表中最后的 m 列．继续进行上述迭代直到所有人工矢量都从基底消去，或者第 $m+2$ 行没有正的元素存在．

如果原来的问题包含一些单位矢量，那末这些矢量可以和必要的人工矢量一起作为初始基底，这样可以减少迭代次数．

例 1　极大化　　$Y=x_1+2x_2+3x_3-x_4$

满足条件

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 &=15 \\ 2x_1+x_2+5x_3 &=20 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4 &=10 \end{cases}$$

和　　$x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4)$

解　把上述问题改为极小化 $y=-x_1-2x_2-3x_3+x_4$.

由于给定系统包含一单位矢量 $\boldsymbol{p}_4$，因此只需要两个人工矢量 $\boldsymbol{p}_5$ 和 $\boldsymbol{p}_6$，与 $\boldsymbol{p}_4$ 一起作为初始基底．第一个解(表 4)为 $\boldsymbol{x}_0=(x_5,x_6,x_4)^T=(15,20,10)^T$，相应的目标函数值等于 $10+35w$. y_j 的计算可由 $\boldsymbol{p}_j$ 和矢量 $\boldsymbol{c}$ 的内积得到．例如

$$y_1-c_1=w+2w+1-(-1)=2+3w$$

因为$(m+2,j)$的极大元素为 5，所以将矢量 $\boldsymbol{p}_3$ 引进基底．相应的 $\theta_0=\frac{20}{5}$，故人工矢量 $\boldsymbol{p}_6$ 从基底消去．用主元素消去法公式变换表 4 第 1 步中的所有元素．新解是 $\boldsymbol{x}_0'=(x_5,x_3,x_4)^T=(3,4,6)^T$，相应的目标函数值为 $-6+3w$. $\boldsymbol{p}_2$引进基底，$\boldsymbol{p}_5$ 从基底消去．在第 3 步，由于所有的$(m+2,j)\leqslant 0$ 而且 $(m+2,0)=0$，得到原来问题的一个可行解

$$\boldsymbol{x}_0''=(x_2,x_3,x_4)^T=\left(\frac{15}{7},\ \frac{25}{7},\ \frac{15}{7}\right)^T$$

表　4

第　1　步

i	基底	c	p_0	-1	-2	-3	1	w	w
				p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1	p_5	w	15	1	2	3	0	1	0
2	p_6	w	20	2	1	[5]	0	0	1
3	p_4	1	10	1	2	1	1	0	0
4			10	2	4	4	0	0	0
5			35	3	3	8	0	0	0

第　2　步

p_5	w	3	$-\frac{1}{5}$	$\boxed{\frac{7}{5}}$	0	0	1
p_3	-3	4	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	0
p_4	1	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	1	0
		-6	$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$	0	0	0
		3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	0	0

第　3　步

p_2	-2	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0
p_3	-3	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0
p_4	1	$\frac{15}{7}$	$\boxed{\frac{6}{7}}$	0	0	1
		$-\frac{90}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0	0
		0	0	0	0	0

第　4　步

p_2	-2	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$
p_3	-3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{6}$
p_1	-1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$\frac{7}{6}$
		-15	0	0	0	-1

相应的目标函数值等于$-\frac{90}{7}$. 第 4 步得到一极小可行解

$$x_0^T=(x_2,x_3,x_1)^T=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)^T$$

而$x_4=0$, 且目标函数y的值等于-15. 所以所要求的目标函数Y的值为$+15$.

[改进的单纯形法]　单纯形法和改进的单纯形法的主要区别在于单纯形法

用消去公式变换单纯形表中的所有元素，而改进的单纯形法只要用同样的公式变换基底 B 的逆矩阵 B^{-1} 的元素，一般来说改进的单纯形法计算量比原单纯形法的计算量小。

为了便于使用改进的单纯形法，引进两个新变量（称为"多余"变量）x_{n+m+1} 和 x_{n+m+2} 如下：

将一般的线性规划问题(4)～(6)改为等价问题：极大化

$$x_{n+m+1} \tag{7}$$

满足条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+x_{n+m+1}=0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ \quad\ddots \quad \vdots \\ x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{9}$$

并且假设所有的 $b_i \geqslant 0$。

再定义"多余"方程：

$$a_{m+2,1}x_1+a_{m+2,2}x_2+\cdots+a_{m+2,n}x_n+x_{m+n+2}=b_{m+2}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{m+2,j}&=-\sum_{i=1}^{m}a_{ij} \quad (j=1,2,\cdots,n) \\ b_{m+2}&=-\sum_{i=1}^{m}b_i \end{aligned} \tag{10}$$

引进人工变量 $x_{n+i}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，命 $c_j=a_{m+1,j}$，那末可将改进的问题(7)～(9)改写为极大化

$$x_{n+m+1} \tag{11}$$

满足条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m \\ a_{m+1,1}x_1+a_{m+1,2}x_2+\cdots+a_{m+1,n}x_n+x_{n+m+1}=0 \\ a_{m+2,1}x_1+a_{m+2,2}x_2+\cdots+a_{m+2,n}x_n+x_{n+m+2}=b_{m+2} \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} x_1 & & & & & & \geqslant 0 \\ & x_2 & & & & & \geqslant 0 \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & x_n & & & \geqslant 0 \\ & & & & x_{n+1} & & \geqslant 0 \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & x_{n+m} & \geqslant 0 \end{cases} \tag{13}$$

由(10)和(12)有

$$x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+m}+x_{n+m+2}=0$$

由于 $x_{n+i}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$，显然 x_{n+m+2} 不能是正的.

改进的单纯形法就是通过解改进的线性规划问题(11)～(13)来得到一般的线性规划问题(4)～(6)的解.

从(12)中分离出所需要的系数并排成$(m+2)\times n$矩阵如下:

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,k} & \cdots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,1} & a_{m+2,2} & \cdots & a_{m+2,k} & \cdots & a_{m+2,n} \end{bmatrix}$$

将A'的诸列矢量记为$a'_j(j=1,2,\cdots,n)$.

命U为$(m+2)\times(m+2)$矩阵

$$U=\left[\begin{array}{cccccc|cc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

U的前m行和m列表示初始基底B的逆矩阵. 命$u_i=(u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{i,m+2})$表示$U$的第$i$个行矢量,$u'_i=(u'_{i1},u'_{i2},\cdots,u'_{i,m+2})$表示$U$的变换后的第$i$个行矢量.

将矩阵 U 和初始解 $x_{n+i}=b_i(i=1,2,\cdots,m)$, $x_{n+m+1}=0$, $x_{n+m+2}=b_{m+2}$ 排成如表 5 中初始表的形式. 计算步骤如下:

第一阶段　在解中有正值的人工变量时:

(1) 如果 $x_{m+n+2}<0$, 则计算

$$\delta_j = u_{m+2}\alpha'_j = u_{m+2,1}a_{1j}+u_{m+2,2}a_{2j}+\cdots+u_{m+2,m+2}a_{m+2,j}\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

并进行(2).

如果 $x_{m+n+2}=0$, 则进行第二阶段(1).

表　5

	i	解中变量的标号	变量的值	矩阵 U								x_{ik}
初始表	1	$n+1$	$x_{n+1}=b_1$	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	0	x_{1k}
	2	$n+2$	$x_{n+2}=b_2$	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	0	x_{2k}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	l	$n+l$	$x_{n+l}=b_l$	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	0	0	x_{lk}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	m	$n+m$	$x_{n+m}=b_m$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	0	0	x_{mk}
	$m+1$	$n+m+1$	$x_{n+m+1}=0$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	1	0	$x_{m+1,k}$
	$m+2$	$n+m+2$	$x_{n+m+2}=b_{m+2}$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	1	$x_{m+2,k}$
变换表	1	$n+1$	x'_{n+1}	u'_{11}	u'_{12}	$\cdots$	u'_{1l}	$\cdots$	u'_{1m}	0	0	
	2	$n+2$	x'_{n+2}	u'_{21}	u'_{22}	$\cdots$	u'_{2l}	$\cdots$	u'_{2m}	0	0	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	l	k	x'_k	u'_{l1}	u'_{l2}	$\cdots$	u'_{ll}	$\cdots$	u'_{lm}	0	0	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	m	$n+m$	x'_{n+m}	u'_{m1}	u'_{m2}	$\cdots$	u'_{ml}	$\cdots$	u'_{mm}	0	0	
	$m+1$	$n+m+1$	x'_{n+m+1}	$u'_{m+1,1}$	$u'_{m+1,2}$	$\cdots$	$u'_{m+1,l}$	$\cdots$	$u'_{m+1,m}$	1	0	
	$m+2$	$n+m+2$	x'_{n+m+2}	$u'_{m+2,1}$	$u'_{m+2,2}$	$\cdots$	$u'_{m+2,l}$	$\cdots$	$u'_{m+2,m}$	0	1	

(2) 如果所有的 $\delta_j\geqslant 0$, 那末 x_{n+m+2} 达到它的极大值, 因此问题(7)～(9)不存在可行解.

若至少有一 $\delta_j<0$, 则将对应于

$$\delta_k=\min_j \delta_j$$

的变量 x_k 引入解中．若有几个 δ_j 等于极小值，则选择标号 k 最小的 δ_k．

(3) 计算

$$x_{ik}=u_i a'_k$$

$$=u_{i1}a_{1k}+u_{i2}a_{2k}+\cdots+u_{i,\,m+2}a_{m+2,\,k}\quad (i=1,2,\cdots,m,m+1,m+2)$$

把对应于

$$\theta_0=\min_i\frac{x_i}{x_{ik}}=\frac{x_l}{x_{lk}},\ x_{ik}>0\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

的变量 x_l 从解中消去．若有几个 x_l 对应于极小值，则选择标号 l 最小的 x_l．

(4) 基本可行解中变量的新值由公式

$$x'_i=x_i-\frac{x_l}{x_{lk}}x_{ik}\quad (i\neq k)$$

$$x'_k=\frac{x_l}{x_{lk}}$$

得到．矩阵 U 的新元素由变换

$$u'_{ij}=u_{ij}-\frac{u_{lj}}{x_{lk}}x_{ik}\quad (i\neq l)$$

$$u'_{lj}=\frac{u_{lj}}{x_{lk}}$$

得到．在这个变换下 U 的第 $m+1$ 和 $m+2$ 列不变．

重复以上步骤，直到确定没有可行解存在或者 $x_{n+m+2}=0$．如果 $x_{n+m+2}=0$，则进行第二阶段．

第二阶段　　在解中无正值的人工变量时：

(1) 此时 $x_{m+n+2}=0$．计算

$$\gamma_j=u_{m+1}a'_j$$

$$=u_{m+1,\,1}a_{1j}+u_{m+1,\,1}a_{2j}+\cdots+u_{m+1,\,m+2}a_{m+2,\,j}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

(2) 如果所有的 $\gamma_j\geqslant 0$，那末 x_{n+m+1} 达到它的极大值，相应的基本可行解是最优解．$-x_{n+m+1}$ 是要极小化的目标函数的真值．

如果至少有一个 $\gamma_j<0$，则将对应于

$$\gamma_k=\min_j\gamma_j$$

的变量 x_k 引入解中．若有几个 x_k 对应于极小值，则选择标号 k 最小的 x_k．

(3) 计算

$$x_{ik}=u_i a'_k$$

$$=u_{i1}a_{ik}+u_{i2}a_{2k}+\cdots+u_{i,\,m+2}a_{m+2,\,k}\quad (i=1,2,\cdots,m,m+1,m+2)$$

把对应于

$$\theta_0=\min_i \frac{x_i}{x_{ik}}=\frac{x_l}{x_{lk}},\quad x_{ik}>0 \quad (i=1,2\cdots,m)$$

的变量 x_l 从解中消去．若有几个 x_l 对应于极小值，则选择标号 l 最小的 x_l．如果所有的 $x_{ik}<0$，那末得到一解其对应的目标函数值可以任意大．

(4) 变量的新值由公式

$$x_i'=x_i-\frac{x_l}{x_{lk}}x_{ik} \quad (i\neq k)$$

$$x_k'=\frac{x_l}{x_{lk}}$$

得到．矩阵U的新元素由变换

$$u_{ij}'=u_{ij}-\frac{u_{lj}}{x_{lk}}x_{ik} \quad (i\neq l)$$

$$u_{lj}'=\frac{u_{lj}}{x_{lk}}$$

得到．

重复以上步骤直到确定一个最优解其对应的目标函数值是有限的或者是无限的．

(11)～(13)的初始解和以上步骤可以按表 5 所安排的计算步骤实现．

注意，若矩阵 A 的某一列是单位矢量且其对应的价格系数为零(例如某些松弛矢量)，则该矢量可作为基底矢量，这样可以避免使用全人工基底减少迭代次数．

例 2 极大化

$$Y=x_1+2x_2+3x_3-x_4$$

满足条件

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 = 15 \\ 2x_1+x_2+5x_3 = 20 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=10 \end{cases}$$

和

$$x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4)$$

解 这里 $m=3,n=4$．相应的极小化问题的目标函数为

$$y=-x_1-2x_2-3x_3+x_4$$

上述问题的全人工基底的改进单纯形法为：极大化满足条件

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_5 = 15 \\ 2x_1+x_2+5x_3+x_6 = 20 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_7 = 10 \\ -x_1-2x_2-3x_3+x_4+x_8 = 0 \\ -4x_1-5x_2-9x_3-x_4+x_9 = -45 \end{cases}$$

第4行的前面四个变量的系数等于原来要极小化的目标函数 y 的表达式中的相应的 c_j，第5个方程的变量 x_1, x_2, x_3, x_4 的系数和方程的右端常数项由公式(10)得到.

矩阵 A' 和 U 分别为

$$A'=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

初始表和相继的迭代过程如表6所示.

表 6

	i	解中变量的标号	变量的值	矩阵 U					x_{ik}	第一阶段
初始表	1	5	15	1	0	0	0	0	3	$\delta_k=\delta_3=u_{m+2}a'_3=-9$
	2	6	20	0	1	0	0	0	$\boxed{5}$	$\theta_0=\frac{x_6}{x_{6k}}=\frac{20}{5}=4$
	3	7	10	0	0	1	0	0	1	
	4	8	0	0	0	0	1	0	-3	
	5	9	-45	0	0	0	0	1	-9	
第1次迭代	1	5	3	1	$-\frac{3}{5}$	0	0	0	$\boxed{\frac{7}{5}}$	
	2	3	4	0	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\delta_k=\delta_2=u_{m+2}a'_2=-\frac{16}{5}$
	3	7	6	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{9}{5}$	$\theta_0=\frac{x_5}{x_{5k}}=\frac{15}{7}$
	4	8	$+12$	0	$\frac{3}{5}$	0	1	0	$-\frac{7}{5}$	
	5	9	-9	0	$\frac{9}{5}$	0	0	1	$-\frac{16}{5}$	

	i	解中变量的标号	变量的值	矩阵 U					x_{ik}	第一阶段
第2次迭代	1	2	$\frac{15}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	0	0	0	$\delta_k=\delta_4=u_{m+1}\alpha_4'=-1$
	2	3	$\frac{25}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	0	0	0	$\theta_0=\frac{x_7}{x_{74}}=\frac{15}{7}$
	3	7	$\frac{15}{7}$	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	1	0	0	$\boxed{1}$	
	4	8	$+15$	1	0	0	1	0	11	
	5	9	$-\frac{15}{7}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0	1	-11	
第3次迭代	1	2	$\frac{15}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	$x_1=0$
	2	3	$\frac{25}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	0	0	$\frac{3}{7}$	$\gamma_k=\gamma_1=u_{m+1}\alpha_1'=-\frac{6}{7}$
	3	7	$\frac{15}{7}$	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	1	0	0	$\boxed{\frac{6}{7}}$	$\theta_1=\frac{x_4}{x_{41}}=\frac{5}{2}$
	4	8	$+\frac{90}{7}$	$\frac{16}{7}$	$-\frac{4}{7}$	-1	1	0	$\mp\frac{6}{7}$	
	5	9	0	1	1	1	0	1	0	
第4次迭代	1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{6}$	$-\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0		所有的 $\gamma_i\geqslant 0$
	2	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{6}$	0	$-\frac{3}{6}$	0	0		最优解
	3	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{7}{6}$	0	0		$x_1=x_2=x_3=\frac{5}{2}$, $x_4=0$
	4	8	$+15$	1	0	0	1	0		目标函数的值：$x_8=15$
	5	9	0	1	1	1	0	1		

[拉格朗日乘数法]（见第五章§3，十）将条件极值问题化为无条件极值问题后可以利用§2和§3无条件极值问题的解法求解。

[惩罚函数法(SUMT 方法)]

1° 外点法(SUMT 方法之一) 考虑一般形式的条件极值问题

$$\min_{x\in R} f(x) \tag{14}$$

其中

$$R=\{x \mid g_i(x)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\}\subset E^n$$

而$f(x)$，$g_i(x)$，$(i=1,2,\cdots,m)$为定义在E^n上的连续函数．其迭代程序如下：

(1) 选取$M_1>0$(例如取$M_1=1$)，预先给定的允许误差为$\varepsilon>0$，令$k:=1$.

(2) 求无条件极值问题的最优解$x^{(k)}=x(M_k)$：

$$\min_{x\in E^n} T(x;\ M_k)=T(x^{(k)};\ M_k)$$

其中

$$T(x;M_k)=f(x)+M_k\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(x))]^2$$

(3) 若存在某$i(1\leqslant i\leqslant m)$，满足

$$-g_i(x^{(k)})\geqslant\varepsilon$$

则取$M_{k+1}>M_k$(例如$M_{k+1}=KM_k$，$K=4$或5)，令$k:=k+1$，进行(2)；否则就得到条件极值问题(14)的最优解的近似解$x^{(k)}=x(M_k)$.

2° 内点法(SUMT方法之二)　考虑一般形式的条件极值问题

$$\min_{x\in R} f(x)\quad (x\in E^n) \tag{15}$$

其中

$$R=\{x \mid g_i(x)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\}\subset E^n$$

且

$$R^0=\{x \mid g_i(x)>0,\ i=1,2,\cdots,m\}\neq\varnothing$$

($\varnothing$表示空集)，而$f(x)$，$g_i(x)$　$(i=1,2,\cdots,m)$为定义在R上的具有一阶连续偏导数的函数．其迭代程序如下：

(1) 选取$r_1>0$(例如取$r_1=1$)，预先给定的允许误差为$\varepsilon>0$.

(2) 求R的内点$x^{(0)}\in R^0$，令$k:=1$.

(3) 以$x^{(k-1)}\in R^0$作为初始点，对$U(x;\ r_k)$在保持可行性的情况下，使用求解无条件极值问题的方法求解：

$$\min_{x\in R^0} U(x;r_k)=U(x^{(k)};\ r_k),\quad x^{(k)}\in R^0$$

其中

$$U(x;r_k)=f(x)+r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)}$$

或

$$U(x;r_k)=f(x)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln g_i(x)$$

(4) 当取 $U(x;r_k)=f(x)+r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)}$ 时，检验是否满足判别准则:

$$r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)}\leqslant\varepsilon$$

而当取 $U(x;r_k)=f(x)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln g_i(x)$ 时，检验是否满足判别准则:

$$r_k m\leqslant\varepsilon$$

若满足判别准则，则得到条件极值问题(15)的最优解的近似解 $x^{(k)}$；否则，取 $0<r_{k+1}<r_k\left(例如\ r_{k+1}=\frac{r_k}{K},\ K=4\ 或\ 5\right)$，令 $k:=k+1$，进行(3)。

附：内点求法

设

$$R=\{x|g_i(x)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\}$$
$$R^0=\{x|g_i(x)>0,\ i=1,2,\cdots,m\}$$

其中 $g_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 是定义在集合 R 上的连续函数。

所谓求内点就是求出一点 $\bar{x}\in R^0$。其迭代程序如下:

(1) 任取一点 $x^{(0)}\in E^n$，及数 $r_1>0$（例如 $r_1=1$），令 $k:=0$。

(2) 求出集合 S_k 及 T_k:

$$S_k=\{i|g_i(x^{(k)})\leqslant 0\}\subset\{1,2,\cdots,m\}$$
$$T_k=\{i|g_i(x^{(k)})>0\}\subset\{1,2,\cdots,m\}$$

(3) 若 $S_k=\varnothing$，则得到内点 $\bar{x}=x^{(k)}\in R^0$；否则，进行(4)。

(4) 在保持对集合 R_k 的可行性的情况下极小化 $V_{k+1}(x)$，即

$$\min_{x\in R_k^0}V_{k+1}(x)$$

其中

$$R_k=\{x|g_i(x)\geqslant 0,\ i\in T_k\}$$
$$R_k^0=\{x|g_i(x)>0,\ i\in T_k\}$$

$$V_{k+1}(x)=-\sum_{i\in S_k}g_i(x)+r_{k+1}\sum_{i\in T_k}\frac{1}{g_i(x)}\qquad(r_{k+1}>0)$$

设 $x^{(k+1)}=x(r_{k+1})$ 为上述问题的最优解的近似解。

(5) 取 $0<r_{k+2}<r_{k+1}$（例如 $r_{k+2}=\frac{r_{k+1}}{K}$，$K=4$ 或 5），令 $k:=k+1$，进行(2)。

§5 变分法

一、泛函的变分与泛函的极值

[C_n类函数与曲线的ε-邻域]　有连续导数的函数称为C_1类函数，有n阶连续导数的函数称为C_n类函数.

曲线$y=y(x)$的ε-邻域是指在整个区间$[x_0, x_1]$内满足不等式

$$|y_1(x)-y(x)|\leqslant\varepsilon$$

的一切可能的曲线$y_1(x)$，这时称曲线$y_1(x)$与曲线$y(x)$有零级ε-接近度. 如果此外还满足不等式：$|y_1'(x)-y'(x)|\leqslant\varepsilon$，则称曲线$y_1(x)$与曲线$y(x)$有一级$\varepsilon$-接近度，其中$y'(x)=\dfrac{dy}{dx}$.

[泛函]　如果对某一类函数$\{y(x)\}$中的每个函数$y(x)$，有一个v的值与之对应，那末变量v称为依赖于函数$y(x)$的泛函，记作$v=v[y(x)]$.

[函数的变分]　所谓泛函$v[y(x)]$的变量$y(x)$的变分δy是指两个函数间的差：$\delta y=y(x)-y_1(x)$，其中$y_1(x)$是与$y(x)$属于同一函数类的某一函数.

[泛函的变分]　如果泛函$v[y(x)]$的改变量

$$\Delta v=v[y(x)+\delta y]-v[y(x)]$$

可以表为如下的形式

$$\Delta v=L[y(x),\delta y]+\beta(y(x),\delta y)\cdot\max|\delta y|$$

其中$L[y(x),\delta y]$对δy来说是线性的，且当$\max|\delta y|\to0$时，$\beta(y(x), \delta y)\to0$，那末$L[y(x),\delta y]$称为泛函$v[y(x)]$的变分，记作$\delta v$. 并有

$$\delta v=\frac{\partial}{\partial\alpha}v[y(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$$

[泛函的极值]　若泛函$v[y(x)]$在与$y=y_0(x)$接近的任一曲线上的值不小于$v[y_0(x)]$，即$\Delta v=v[(y(x)]-v[y_0(x)]\geqslant0$时，则泛函$v[y(x)]$在曲线$y=y_0(x)$上达到极小值. 类似地可以定义极大值.

如果具有变分的泛函$v[y(x)]$在$y=y_0(x)$上达到极小(极大)值，则在$y=y_0(x)$上有

$$\delta v=0$$

泛函的极值问题就是寻求函数$y(x)$，使泛函$v[y(x)]$的值达到最小(或最大).

对于依赖于多个未知函数的泛函

$$v[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)]$$

和依赖于多变量的一个或多个函数的泛函

$$v[z(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$$

或　$v[z_1(x_1, x_2, \cdots x_n), z_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, z_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$

有类似的说法.

二、不动边界的泛函的极值 · 欧拉方程

欧拉方程是泛函极值的必要条件,但不是充分的. 在处理实际泛函极值问题时,一般不去考虑充分条件,而是从实际问题的性质出发,间接地判断泛函极值的存在性,直接利用欧拉方程来求出极值曲线.

$\left[\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \text{ 型的泛函}\right]$ 假设F是二阶可微分的,函数$y(x)$是属于C_2类的函数,并满足边界条件

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$$

极值曲线$y(x)$必须满足下面的微分方程(欧拉方程)

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

或

$$F_{y'y'}y''+F_{yy'}y'+F_{xy'}-F_y=0$$

这是二阶微分方程,它的通解含有两个任意常数,由两个边界条件来确定. 因此是一个两点边值问题.

1° 欧拉方程 $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ 的可积类型

被 积 函 数 F		欧 拉 方 程
F不依赖于y':	$F=F(x,y)$	$F_y(x,y)=0$
F关于y'是线性的: $F(x,y,y')=M(x,y)+N(x,y)y'$		$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$
F只依赖于y':	$F=F(y')$	$F_{y'y'}y''=0$
F依赖于x和y':	$F=F(x,y')$	$\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$
F只依赖于y和y':	$F=F(y,y')$	$F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0$

2° 极坐标系中的欧拉方程

泛　　函	欧 拉 方 程
$\int_{\rho_0}^{\rho_1} F(\rho,\varphi,\varphi')d\rho$	$\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi'}\right)=0$
$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} F(\varphi,\rho,\rho')d\varphi$	$\frac{\partial F}{\partial\rho}-\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial\rho'}\right)=0$

[$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')dx$ 型的泛函] 设函数

$$y_i(x)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

满足 $2n$ 个边界条件:

$$y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},\cdots,y_n(x_0)=y_{n0}$$
$$y_1(x_1)=y_{11},y_2(x_1)=y_{21},\cdots,y_n(x_1)=y_{n1}$$

欧拉方程为

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

假定其中出现的函数 y_i 都是连续的,函数 $y_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$属于 C_2 类. 这个二阶微分方程组在$(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$空间中确定一族含有 $2n$ 个参数的积分曲线,$2n$ 个参数应当由上面的 $2n$ 个边界条件确定.

[$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x))dx$ 型的泛函] 假定F是 $n+2$ 阶可微分的,函数 $y(x)$属于 C_{2n} 类. 边界条件为

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$
$$y(x_1)=y_1,y'(x_1)=y_1',\cdots,y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}$$

欧拉方程为

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0$$

这个方程的通解含有 $2n$ 个任意常数, 这些常数一般可以由上面的 $2n$ 个边界条件确定.

[多重积分的极值]

1° $v[z(x,y)]=\iint\limits_D F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$ 型的泛函

假定函数F是三阶可微的,函数 $z=z(x,y)$是二阶可微的, 函数 $z(x, y)$在

区域D的边界C上的值是给定的，欧拉方程为

$$F'_z-\frac{\partial}{\partial x}F'_{z_x}-\frac{\partial}{\partial y}F'_{z_y}=0$$

式中 $z_x=\frac{\partial z}{\partial x}$，$z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$. 这是一个二阶偏微分方程.

2° $v[z(x_1,\cdots,x_n)]=\int\cdots\int_D F\left(x_1,\cdots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)dx_1\cdots dx_n$

型的泛函

欧拉方程为

$$F'_z-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F'_{z_{x_i}}=0$$

式中

$$z_{x_i}=\frac{\partial z}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

3° $v[z(x,y)]=\iint_D F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy$ 型的泛函

欧拉方程为

$$F'_z-\frac{\partial}{\partial x}F'_{z_x}-\frac{\partial}{\partial y}F'_{z_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F'_{z_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F'_{z_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F'_{z_{yy}}=0$$

式中 $z_x=\frac{\partial z}{\partial x}$，$z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$，$z_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$z_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$z_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

［用参数表示的泛函的极值］ 考虑形如

$$v[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}F(x,y,\dot{x},\dot{y})dt$$

的泛函，其中积分号下的函数不明显地含有自变量 t，而且是对于 $\dot{x}$ 及 $\dot{y}$ 的一次齐次函数，即

$$F(x,y,k\dot{x},k\dot{y})=kF(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

那末不管对参数 t 作任何替换，积分的形式总不改变. 对于参数 t 的任何选择，函数 $x(t)$及$y(t)$应满足两个欧拉方程的方程组:

$$F'_x-\frac{d}{dt}F'_{\dot{x}}=0,\quad F'_y-\frac{d}{dt}F'_{\dot{y}}=0$$

这些方程不明显地含有参数本身. 但两个欧拉方程不是独立的，其中一个可由另一个推出. 要想找出极值曲线，只要从两个欧拉方程中拿出一个来，把它跟确

定参数的那个方程一起求积分．例如，若选择曲线弧长 s 作为参数，确定参数的方程为 $\dot{x}^2+\dot{y}^2=1$．

三、可动边界的泛函的极值

$\left[\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx\right.$ 型泛函的可动边界问题$\Big]$

1° 若 $A(x_0,y_0)$、$B(x_1,y_1)$ 两端点分别在曲线 $y=\varphi_0(x)$ 和 $y=\varphi_1(x)$ 上变动，则使泛函达到极值的函数 $y=y(x)$，除必须满足欧拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

外，其端点还必须满足所谓横截条件

$$[F+(\varphi_0'-y')F_{y'}]_{x=x_0}=0$$

$$[F+(\varphi_1'-y')F_{y'}]_{x=x_1}=0$$

2° 若 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$ 两点所在曲线以隐函数形式给出：

$$\varphi_0(x,y)=0$$

$$\varphi_1(x,y)=0$$

其中 φ_0，φ_1 有连续的偏导数，且

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2>0,\quad \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2>0$$

则横截条件为

$$\left[\frac{F-y'F_{y'}}{\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x}}\right]_{x=x_0}=\left[\frac{F_{y'}}{\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y}}\right]_{x=x_0}$$

$$\left[\frac{F-y'F_{y'}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}}\right]_{x=x_1}=\left[\frac{F_{y'}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}}\right]_{x=x_1}$$

$\left[\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx\right.$ 型泛函的可动边界问题$\Big]$

1° 若 $A(x_0,y_0,z_0)$，$B(x_1,y_1,z_1)$ 两端点分别在曲线

$$\begin{cases}y=\varphi_0(x)\\ z=\psi_0(x)\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}y=\varphi_1(x)\\ z=\psi_1(x)\end{cases}$$

上变动，则使泛函达到极值的函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$，除必须满足欧拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0,\quad F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0$$

外，其端点还必须满足横截条件

$$[F-(y'-\varphi_0')F_{y'}-(z'-\psi_0')F_{z'}]_{x=x_0}=0$$

$$[F-(y'-\varphi_1')F_{y'}-(z'-\psi_1')F_{z'}]_{x=x_1}=0$$

2° 若 $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ 分别在曲面

$$z=\varphi_0(x,y) \text{和} z=\varphi_1(x,y)$$

上变动，则横截条件为

$$\begin{cases}\left[F-y'F_{y'}-\left(z'-\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)F_{z'}\right]_{x=x_0}=0\\ \left[F_{y'}+\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y}F_{z'}\right]_{x=x_0}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[F-y'F_{y'}-\left(z'-\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)F_{z'}\right]_{x=x_1}=0\\ \left[F_{y'}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}F_{z'}\right]_{x=x_1}=0\end{cases}$$

$\left[\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')dx \text{ 型泛函的可动边界问题}\right]$

1° 若 x_0, y_0, y_0' 之间满足关系

$$y_0=\varphi_0(x_0),\quad y_0'=\psi_0(x_0)$$

x_1, y_1, y_1' 之间满足关系

$$y_1=\varphi_1(x_1),\quad y_1'=\psi_1(x_1)$$

则使泛函达到极值的函数 $y=y(x)$，除必须满足欧拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0$$

外，其端点还必须满足横截条件

$$\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+\left(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\right)\varphi_0'+F_{y''}\psi_0'\right]_{x=x_0}=0$$

$$\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+\left(F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\right)\varphi_1'+F_{y''}\psi_1'\right]_{x=x_1}=0$$

2° 如果 x_0, y_0, y_0' 满足关系式 $\varphi_0(x_0,\ y_0,\ y_0')=0$，$x_1,\ y_1,\ y_1'$ 满足关系式 $\varphi_1(x_1, y_1, y_1')=0$，则横截条件为

$$\begin{cases}\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}-F_{y''}\dfrac{\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y_0'}}\right]_{x=x_0}=0\\ \left[F_{y'}-\dfrac{d}{dx}F_{y''}-F_{y''}\dfrac{\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}}{\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y_0'}}\right]_{x=x_0}=0\end{cases}\quad\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0'}\neq 0\right)$$

$$\begin{cases}\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}-F_{y''}\dfrac{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1'}}\right]_{x=x_1}=0 \\ \left[F_{y'}-\dfrac{d}{dx}F_{y''}-F_{y''}\dfrac{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1'}}\right]_{x=x_1}=0\end{cases}\quad\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1'}\neq 0\right)$$

四、条件极值问题

[拉格朗日乘数法] 现考虑最简单的条件极值问题：求两个函数 $y(x)$ 及 $z(x)$，使泛函

$$v[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx$$

达到极值，且满足附加条件

$$G(x,y,z)=0$$

及固定端点的边界条件

$$y(x_0)=y_0,\quad z(x_0)=z_0$$

$$y(x_1)=y_1,\quad z(x_1)=z_1$$

(端点(x_0,y_0,z_0)及(x_1,y_1,z_1)显然应满足附加条件)。

这个问题的解法与第五章 §3 所介绍的关于多变量函数的条件极值的拉格朗日乘数法相仿。作辅助函数

$$F^*=F+\lambda(x)G$$

式中 $\lambda(x)$是 x 的一个待定函数，把上述条件极值问题化为以 F^* 为被积函数的泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}F^*(x,y,z,y',z')dx$$

的无条件极值问题，这样就得到欧拉方程

$$F_y^*-\frac{d}{dx}F_{y'}^*=0$$

$$F_z^*-\frac{d}{dx}F_{z'}^*=0$$

或

$$F_y+\lambda(x)G_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

$$F_z+\lambda(x)G_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0$$

将欧拉方程和约束方程一起消去 $\lambda(x)$ 及一个待求函数(例如 z)，于是得到含一个函数 $y(x)$ 的二阶微分方程，它积分的两个任意常数由两个边界条件确定.

[等周问题] 在使积分

$$\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')dx$$

等于已知常数 a 和满足边界条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1$$

的一切曲线 $y(x)$ 中，确定这样一条曲线，使泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

达到极值. 这个问题称为等周问题. 解法如下:

构造辅助函数

$$H=F+\lambda G$$

式中 λ 是一个待定常数，把上述条件极值问题化为以 H 为被积函数的泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,y')dx$$

的无条件极值问题，这样就得到欧拉方程

$$H_y-\frac{d}{dx}H_{y'}=0$$

这个方程的通积分含有三个任意常数，即两个积分常数及常数 λ. 这些常数由两个边界条件及等周条件确定. 但要注意只有当所得曲线 $y(x)$ 不是等周条件中的积分

$$\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')dx$$

的极值曲线时才是等周问题的解答.

[连续动态系统的最佳控制] 设控制系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m},t) \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 是一个 n 维的状态矢量，$\boldsymbol{m}$ 是 r 维的控制矢量，$\boldsymbol{f}$ 是一个可微分的 n 维矢函数，初始条件为

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^0 \tag{2}$$

系统的性能指标为

$$I(\boldsymbol{m})=\int_{t_0}^{t_f}F(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{m}(t);t)dt \tag{3}$$

最优控制的目的是要求确定控制矢量 $m(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_f)$ 在满足约束条件(1),(2)下,使性能指标(3)取极小值. 这是一个条件极值问题.

作辅助函数

$$\begin{aligned}&F^*(x(t),\dot{x}(t),\lambda(t),m(t),t)\\&=F(x(t),m(t),t)+\lambda^T(t)[f(x(t),m(t),t)-\dot{x}(t)]\end{aligned}$$

式中 λ 为拉格朗日乘数因子,是一个 n 维列矢量. 问题化为泛函

$$I_1(m(t))=\int_{t_0}^{t_f}F^*(x(t),\dot{x}(t),\lambda(t),m(t),t)dt$$

的无条件极值问题. 由此得到 $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $m(t)$ 和 $\lambda(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_f)$ 使泛函 $I_1(m)$ 取极值所要满足的必要条件:

(i) $F^*_m=0$ (控制方程)

(ii) $F^*_\lambda=0$ (状态方程)

(iii) $F^*_x-\dfrac{d}{dt}F^*_{\dot{x}}=0$ (欧拉方程)

(iv) $[\eta F^*_{\dot{x}}]_{t_0}^{t_f}=0$ (横截条件)

式中 $\eta(t)$ 是定义在区间 $[t_0,\ t_f]$ 上的任意矢函数. 这样就把问题归结为求解常微分方程组的两点边值问题,这种问题的解析解仅在特殊情形才存在,由于所得到的欧拉微分方程通常是非线性的,一般采用"试凑法"求解.

说明 利用变分法进行控制系统的最优设计时, 一般对控制矢量都不加限制, 即只考虑控制矢量 $m(t)$ 所属的控制域 $U=R^r$ 或者是开集, 但在实际问题中, U 常为有界集, 而且最佳控制的值会出现在 U 的边界上, 这是利用变分法进行控制系统的最优控制时除遇到两点边值问题外的另一个困难.

五、变分问题的直接方法

[欧拉有限差分法] 考虑泛函

$$v[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

的极值,边界条件为

$$y(a)=y_a,\quad y(b)=y_b$$

其步骤如下:

(1) 将积分区间 $[a,b]$ 分成 $n+1$ 等份(图 18.11),分点为

图 18.11

$$x_0=a, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}=b$$

又 $x_{i+1}-x_i=\Delta x=\frac{b-a}{n+1}$. 这时

$$v[y(x)]\approx\Phi(y_0, y_1, \cdots, y_{n+1})$$

$$=\sum_{i=0}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$$

式中

$$y_0=y_a=y(x_0), y_1=y(x_1), \cdots, y_n=y(x_n), y_{n+1}=y_b=y(x_{n+1})$$

(2) 选取 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 使函数 $\Phi(y_0, y_1, \cdots, y_{n+1})$ 达到极值，也就是由方程组

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}=0, \frac{\partial\Phi}{\partial y_2}=0, \cdots, \frac{\partial\Phi}{\partial y_n}=0$$

来确定 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 如果从这个方程组难于确定 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 时，也可用本章§2, §3 的方法. 于是可以用所得到的折线表示变分问题的近似解.

区间 $[a, b]$ 分得愈细所得近似解就愈精确.

[里兹法] 考虑泛函

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx$$

的极值，边界条件为

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1$$

其步骤如下：

(1) 选择一适当的函数序列(称为坐标函数)：

$$w_1(x), w_2(x), \cdots, w_n(x), \cdots$$

构造函数

$$\sum_{i=1}^{n}a_i w_i(x)\approx y(x)$$

式中 $a_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为待定常数. 将 $y(x)$ 的近似值 $\sum_{i=1}^{n}a_i w_i(x)$ 代入泛函 $v[y(x)]$ 的表达式，则

$$v[y(x)]\approx\Phi(a_1, a_2, \cdots, a_n)=\int_{x_0}^{x_1}F\left[x, \sum_{i=1}^{n}a_i w_i(x), \sum_{i=1}^{n}a_i w_i'(x)\right]dx$$

(2) 选取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使函数 $\Phi(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 达到极值，也就是由方

程组

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}=0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2}=0,\cdots,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n}=0$$

来确定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 如果从这个方程组难于确定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$时, 也可用本章 § 2, § 3 的方法. 于是可以得到变分问题的近似解.

当 n 越大时所得近似解就愈精确.

里兹方法也适用于泛函 $v[z(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$和依赖于多个函数的泛函.

例　求泛函

$$v[z(x,y)]=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}+x\right)^2\right]dxdy$$

的极值, 其中积分域 D 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解　只取一个坐标函数 xy, 则得

$$z_1=\alpha xy,\quad v[z_1]=\Phi(\alpha)=\frac{\pi ab}{4}[(\alpha+1)^2a^2+(\alpha-1)^2b^2]$$

这时从

$$\frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha}=(\alpha+1)a^2+(\alpha-1)b^2=0$$

得到

$$\alpha=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

而极值问题的近似解为

$$z_1=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}xy$$

[康特罗维奇法]　考虑泛函

$$v[z(x,y)]=\int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy \tag{1}$$

的极值, 它展布在由二曲线$y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$和二直线 $x=x_0$, $x=x_1$ 所围成的区域 D 上(图 18.12). 设在区域 D 的边界上函数的值 $z(x,y)$已经给出. 其步骤如下:

(1) 选取坐标函数序列:

$$w_1(x,y),w_2(x,y),\cdots,w_n(x,y),\cdots$$

构造函数

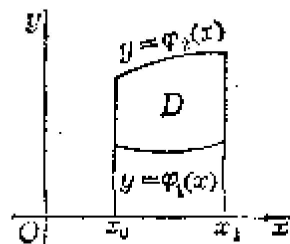


图　18.12

$$z_m=\sum_{i=1}^{m}u_i(x)w_i(x,y)\approx z(x,y)$$

式中 $u_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$是待定函数．将 $z(x,y)$的近似表达式

$$\sum_{i=1}^{m}u_i(x)w_i(x,y)$$

代入(1)式得

$$v[z_m(x,y)]=\int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}F\left(x,y,z_m(x,y),\frac{\partial z_m}{\partial x},\ \frac{\partial z_m}{\partial y}\right)dxdy$$

即

$$v[z_m(x,y)]=\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x,u_1(x),\cdots,u_m(x),u_1'(x),\cdots,u_m'(x))dx$$

(2) 选取函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_m(x)$使泛函 $v[z_m(x,y)]$达到极值，也就是由欧拉方程

$$\Phi_{u_i}-\frac{d}{dx}\Phi_{u_i'}=0\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

来确定 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_m(x)$．而任意常数的选取是使 $z_m(x,y)$ 在直线 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 上满足所给的边界条件．于是可以得到变分问题的近似解．

康特罗维奇法也适用于其他形式的泛函．

说明　一般说来，用同样的坐标函数以及相同的项数 m，康特罗维奇法比里兹法精确．因为以变量 $u_i(x)$为系数的函数类

$$z_m=\sum_{i=1}^{m}u_i(x)w_i(x,y)$$

较之以常数 u_i 为系数的函数类

$$z_m=\sum_{i=1}^{m}u_iw_i(x,y)$$

更为广阔．

§6　最小(大)值原理

[连续系统的最小(大)值原理]　考虑一控制系统其状态方程为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m},t)\tag{1}$$

并满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^0\tag{2}$$

至于终止状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$则或者是自由的，或者是满足目标集

$$R[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]=0 \tag{3}$$

性能指标为

$$I(\boldsymbol{m})=G[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}F[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{m}(t),t]dt \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 分别是状态矢量和控制矢量:

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

$$\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_r)^T$$

$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T$是 n 维矢函数，$\boldsymbol{R}$ 是m维矢函数.

假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m},t)$, $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m},t)$, $G(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},t)$ 都是其变元的连续函数，对 $\boldsymbol{x}$ 连续可微，并且 $\boldsymbol{f}$, $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}$, $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}$有界.

假设控制矢量 $\boldsymbol{m}(t)$是容许控制，即满足下列条件:

(i) $\boldsymbol{m}(t)$是在闭区间 $[t_0,t_f]$上的分段连续函数(即只有有限个第一类间断点，在间断点处，假定是左连续的);

(ii) $\boldsymbol{m}(t)$在端点 t_0, t_f 处是连续的;

(iii) $\boldsymbol{m}(t)\in U$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_f)$，这里$U$是 R^r 中的有界闭集.

问题的提法 假设上面的 (1), (2), (3), (4)式均已给定，要求从容许控制中求出一个控制 $\boldsymbol{m}^*(t)$，它使系统(1)满足初始条件(2)的轨线，在终止时刻 t_f 时达到目标集(3)，并使性能指标(4)取极小值(或极大值).

为此引进协态变量(相对于状态变量 $\boldsymbol{x}(t)$而言)

$$\boldsymbol{\psi}(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t))^T$$

它满足微分方程组

$$\frac{d\psi_i}{dt}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m},t)}{\partial x_i}\psi_j-\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m},t)}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

作辅助函数

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{m},t)=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m},t)+\boldsymbol{\psi}^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m},t) \tag{6}$$

称为系统(1)的哈密顿函数. 这时可把方程组(1)和(5)表示为下面的形式:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{m},t)}{\partial \psi_i}\\ \frac{d\psi_i}{dt}&=-\frac{\partial H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{m},t)}{\partial x_i}\end{aligned}\right.\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

称为哈密顿方程组或正则方程组. 则有

最小值原理 如果 $m^*(t)$ 是上面所提问题的最优控制，$x^*(t)$，$\psi^*(t)$ 是正则方程组(7)对应于 $m^*(t)$ 的最优轨线和最优协态变量，则有

$$H[x^*(t),\psi^*(t),m^*(t),t]=\min_{m\in U} H[x^*(t),\psi^*(t),m(t),t]$$

于是可按下列步骤求解：

(1) 写出哈密顿函数和正则方程组.

(2) 对 m 求哈密顿函数的最小值，找出关系式：

$$m^*(t)=m(x^*,\psi^*) \tag{8}$$

(3) 把关系式(8)代入正则方程组，根据下述边界条件，对正则方程组求解两点边值问题，即可求出最优轨线 $x^*(t)$ 和最优协态变量 $\psi^*(t)$：

(i) 假设方程组(1)已给初始条件 $x(t_0)=x^0$ 和终止条件(目标集) $x(t_f)=x^*$，则正则方程组(7)的边界条件仍为

$$x(t_0)=x^0,\quad x(t_f)=x^*$$

(ii) 假设 $x(t_0)=x^0$ 是给定的，没有给定目标集(3)，即 $x(t_f)$ 是自由的，则正则方程组(7)的边界条件为

$$x(t_0)=x^0,\quad \psi(t_f)=\frac{\partial G[x(t_f),t_f]}{\partial x}$$

其中 G 是性能指标(4)中的第一项. 若 $G\equiv 0$，这时边界条件变为

$$x(t_0)=x^0;\quad \psi(t_f)=0$$

(iii) 假设 $x(t_0)=x^0$ 是给定的，而终止状态满足目标集

$$R(x(t_f),t_f)=0$$

并假定 R 是 m 维的，其中 $0<m<n$，则正则方程组(7)的边界条件为

$$x(t_0)=x^0$$

$$\psi(t_f)=\frac{\partial G[x(t_f),t_f]}{\partial x}+\frac{\partial R[x(t_f),t_f]}{\partial x}\mu$$

$$R[x(t_f),t_f]=0$$

其中 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)^T$ 是一个 m 维待定的常值列矢量. 以上共有 $2n$ 个边界条件.

其次，假定 t_f 不固定，而是自由的. 这时相当于边界条件中多了一个独立参数，因此要补充一个关系式. 对于边界条件为(i)，(ii)的情形，补充的关系式为

$$H[x(t_f),\psi(t_f),m(t_f),t_f]+\frac{\partial G[x(t_f),t_f]}{\partial t}=0$$

对于边界条件为(iii)的情形，则补充的关系式为

$$H[\boldsymbol{x}(t_f),\boldsymbol{\psi}(t_f),\boldsymbol{m}(t_f),t_f]+\frac{\partial G[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]}{\partial t}+\boldsymbol{\mu}^{\tau}\frac{\partial \boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]}{\partial t}=0$$

(4) 将求出的 $\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{\psi}^*(t)$ 代入关系式(8),就可求得最优控制 $\boldsymbol{m}^*(t)$.

以上步骤也可根据问题的性质,灵活应用.

对最大值原理有类似的说法.

说明 最小(大)值原理描述控制系统最佳性的必要条件，它给出一个确定最优控制 $\boldsymbol{m}^*(t)$ 的方法. 这一原理是由古典变分法引伸出来的，它可以推出变分法中熟知的一切必要条件，但是,它与古典变分法相比较，这一原理的主要优越性在于,它适用于任何集合 $U\subset R^r$, 特别它包含U是有界闭集的情形,而古典变分法只适用于U为开集或 $U=R^r$ 的情形，因此这可以说是控制域类U的扩充. 但它和变分法一样都遇到两点边值问题的困难.

[离散系统的最小(大)值原理] 考虑一离散型控制系统(图 18.13) 其状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{m}(k),k]\quad(k=0,1,\cdots,N-1)\tag{1}$$

并满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^0\tag{2}$$

终止状态 $\boldsymbol{x}(N)$是自由的,性能指标为

$$I=G[\boldsymbol{x}(N),N]+\sum_{k=0}^{N-1}F[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{m}(k),k]\tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{x}(t_k)$, $\boldsymbol{m}(k)=\boldsymbol{m}(t_k)$ 分别为系统对应于时刻 $t_k(k=0,1,\cdots,N;$ $t_0<t_1<\cdots<t_N)$ 的状态矢量和控制矢量. 它们分别是 n 维和 r 维矢量.

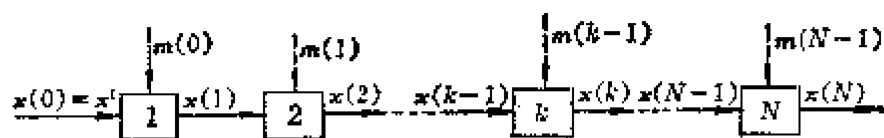


图 18.13

问题的提法 寻求N个控制矢量 $\boldsymbol{m}(0),\boldsymbol{m}(1),\cdots,\boldsymbol{m}(N-1)$ 满足初始条件(2),使性能指标 I 取极小(大)值.

处理方法和连续情形相仿. 引进 $\boldsymbol{x}(k)$ 的协态变量 $\boldsymbol{\psi}(k)(k=1,2,\cdots,N)$, 它是$n$ 维列矢量. 构造哈密顿函数

$$\begin{aligned}H(k)&=H^{(k)}[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{\psi}(k+1),\boldsymbol{m}(k),k]\\&=F[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{m}(k),k]+\boldsymbol{\psi}^{\tau}(k+1)\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{m}(k),k]\end{aligned}\tag{4}$$

这时有正则方程组

$$x(k+1)=\frac{\partial H(k)}{\partial \psi(k+1)},\ \text{即}\ x(k+1)=f[x(k),m(k),k] \tag{5}$$

$$\psi(k)=\frac{\partial H(k)}{\partial x(k)},\ \text{即}\ \psi(k+1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x(k)}\right)^{-1}\left(\psi(k)-\frac{\partial F}{\partial x(k)}\right) \tag{6}$$

离散型的最小值原理 设 $m^*(k)$为最优控制，$x^*(k)$ 为相应的最优轨线，$\psi^*(k)$为相应的最优协态变量，则它们将满足正则方程(5)，(6)，并且满足下列条件之一：

(i) $\frac{\partial H(k)}{\partial m(k)}=0$，即$\frac{\partial F}{\partial m(k)}+\frac{\partial f}{\partial m(k)}\psi(k+1)=0$

(ii) $H^*(k)=H^{(k)}[x^*(k),\ \psi^*(k+1),m^*(k),k]$

$$=\min_{m(k)}H^{(k)}[x^*(k),\psi^*(k+1),m(k),k]$$

同时，满足边界条件(若 $x(N)$是预先给定的，则不要这条件)

$$\psi(N)=\frac{\partial G}{\partial x(N)}\quad (\text{当}\ G=0\ \text{时},\psi(N)=0)$$

于是可按下列步骤求解：

(1) 写出哈密顿函数(4)和正则方程(5)，(6)．

(2) 固定 $x(k),\psi(k+1)$，对哈密顿函数 $H(k)$ 应用最小值原理的条件(i)或(ii)，求出关系式

$$m^*(k)=m^{(k)}[x^*(k),\psi^*(k+1)]\quad (k=0,1,\cdots,N-1) \tag{7}$$

(3) 将关系式(7)代入正则方程组(5)，(6)中，并利用条件

$$x(0)=x^0,\ \psi(N)=\frac{\partial G}{\partial x(N)}$$

把问题化为解方程组的两点边值问题．由此可以求出 $x^*(k)$和$\psi^*(k+1)$．

(4) 将求出的 $x^*(k),\psi^*(k+1)$代入(7)，就得到最优控制 $m^*(k)$．

§7 动态规划

[最优化原则] 一个过程的最优策略具有以下性质，即无论其初始状态和初始决策如何，其今后各决策对以第一个决策所形成的状态作为初始状态的过程而言，必须构成最优策略．

[多阶段决策过程] 命 x 为状态矢量，描述物理系统在任何时刻的状态，设状态向量 x 是 n 维列矢量．对N阶段决策过程：系统的状态先由变换 $x^2=g(x^1,m_1)$从 x^1 变到 x^2，得到一个输出或效益 $r(x^1,m_1)$，然后由变换 $x^3=g(x^2,m_2)$从 x^2 变到 x^3，得到一个输出或效益 $r(x^2,m_2)$，…，最后由变换 $x^N=$

$g(x^{N-1}, m_{N-1})$从x^{N-1}变到x^N，得到一个输出或效益$r(x^{N-1}, m_{N-1})$，问题是选择一个N阶段策略

$$\{m_1, m_2, m_3, \cdots, m_N\} \in U$$

使总效益

$$R_N = \sum_{j=1}^{N} r(x^j, m_j)$$

为最大．N阶段过程的最大总效益显然只是初始状态x^1与阶段长度N的函数，用$f_N(x^1)$表示

$$f_N(x^1) = \max_{\{m_j\} \in U} \left\{ \sum_{j=1}^{N} r(x^j, m_j) \right\}$$

决定$f_N(x^1)$的策略$\{m_j\}$称为最优策略或最优控制策略．

最优化原则描述了最优控制策略的基本性质，它是建立在不变嵌入原则的基本概念上的．这个概念表示解一个特殊的最优决策问题时，可以把原来的问题嵌入一类较容易解的类似问题之中．对多阶段决策过程就可以将原来的多阶段最优化问题以解一单个阶段决策序列的问题来代替，这无疑是比较容易处理的．

根据最优化原则，N阶段决策过程的总效益可以写成

$$R_N = r(x^1, m_1) + f_{N-1}[g(x^1, m_1)]$$

上式右端的第一项是初始效益，而第二项则代表最后$N-1$个阶段的最大效益．那末最大总效益为

$$f_N(x^1) = \max_{m_1 \in U} \{ r(x^1, m_1) + f_{N-1}[g(x^1, m_1)] \}$$

这个方程对$N \geqslant 2$都成立．但当$N=1$时最大效益为

$$f_1(x^1) = \max_{m_1 \in U} \{ r(x^1, m_1) \}$$

显然，应用基本原则，那末N阶段决策过程就变为一个N个单阶段决策过程的序列，因此使这个最优化问题可以在系统的迭代方式下得到解决．

［离散动态系统的最优控制］ 设有一离散动态系统，其状态差分方程为

$$x(i+1) = f[x(i), m(i)] \quad (i=0, 1, \cdots, N-1)$$

初始条件为

$$x(0) = x^0$$

其中$x(i)$为n维状态矢量，$m(i)$为r维控制矢量，f为n维矢函数．假定x和m满足约束条件C：m维矢函数$g(x, m)$的每个分量小于或等于零．系统的性

能指标(或目标函数)为

$$I_N = G[\boldsymbol{x}(N)] + \sum_{i=0}^{N-1} F[\boldsymbol{x}(i), \boldsymbol{m}(i)]$$

问题是要决定一个控制序列 $\boldsymbol{m}(0), \boldsymbol{m}(1), \cdots, \boldsymbol{m}(N-1)$，当将 $\{\boldsymbol{m}(i)\}$ 及相应的 $\{\boldsymbol{x}(i)\}$ 代入目标函数时使 I_N 达到最小(或最大)值。

这是一个N阶段决策过程（图 18.14），目标函数的最小值必为初始状态

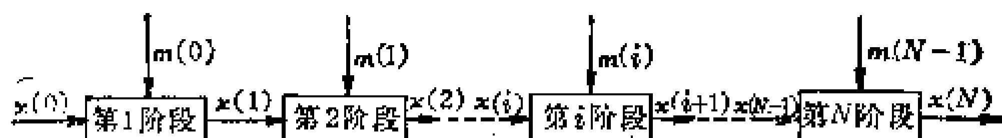


图 18.14

$\boldsymbol{x}(0)$和阶段长度N的函数，如果把它记作 $V_N[\boldsymbol{x}(0)]$，则

$$V_N[\boldsymbol{x}(0)] = \min_{m(0),\cdots,m(N-1)\in C} \left\{ G[\boldsymbol{x}(N)] + \sum_{i=0}^{N-1} F[\boldsymbol{x}(i),\ \boldsymbol{m}(i)] \right\}$$

根据最优化原则可将上式写成

$$V_N[\boldsymbol{x}(0)] = \min_{m(0)\in C} \{ F[\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{m}(0)] + V_{N-1}[\boldsymbol{x}(1)] \}$$

式中

$$V_{N-1}[\boldsymbol{x}(1)] = \min_{m(1),\cdots,m(N-1)\in C} \left\{ G[\boldsymbol{x}(N)] + \sum_{i=1}^{N-1} F[\boldsymbol{x}(i), \boldsymbol{m}(i)] \right\}$$

这是一个函数方程，可以递推求解，每次都是求一个 $\boldsymbol{m}(N-k)$的最优解，其求解步骤如下：

(1) 令 $V_0[\boldsymbol{x}(N)] = G[\boldsymbol{x}(N)]$

(2) 对任一个 $\boldsymbol{x}(N-1)$，由

$$V_1[\boldsymbol{x}(N-1)] = \min_{m(N-1)\in C} \{ F[\boldsymbol{x}(N-1),\ \boldsymbol{m}(N-1)] + V_0[\boldsymbol{x}(N)] \}$$

式中 $\boldsymbol{x}(N) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(N-1), \boldsymbol{m}(N-1)]$，求出使 $V_1[\boldsymbol{x}(N-1)]$ 的右端取最小值的 $\boldsymbol{m}^*(N-1)$，则

$$V_1[\boldsymbol{x}(N-1)] = F[\boldsymbol{x}(N), \boldsymbol{m}^*(N-1)] + V_0\{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(N-1), \boldsymbol{m}^*(N-1)]\}$$

(3) 对任一个 $\boldsymbol{x}(N-2)$，由

$$V_2[\boldsymbol{x}(N-2)] = \min_{m(N-2)\in C} \{ F[\boldsymbol{x}(N-2), \boldsymbol{m}(N-2)] + V_1[\boldsymbol{x}(N-1)] \}$$

式中 $\qquad \boldsymbol{x}(N-1) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(N-2), \boldsymbol{m}(N-2)]$

求出使上式右端取最小值的$\boldsymbol{m}^*(N-2)$，则

$$V_2[\boldsymbol{x}(N-2)]=F[\boldsymbol{x}(N-2),\boldsymbol{m}^*(N-2)]+V_1\{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(N-2),\boldsymbol{m}^*(N-2)]\}$$

(4) 一般地，如果已经算出 $V_{N-(k+1)}[\boldsymbol{x}(k+1)]$，则对任一 $\boldsymbol{x}(k)$，由

$$V_{N-k}[\boldsymbol{x}(k)]=\min_{\boldsymbol{m}(k)\in U}\{F[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{m}(k)]+V_{N-(k+1)}[\boldsymbol{x}(k+1)]\}$$

式中 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{m}(k)]$，可求出使上式右端为极小的 $\boldsymbol{m}^*(k)$，由此得

$$V_{N-k}[\boldsymbol{x}(k)]=F[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{m}^*(k)]+V_{N-(k+1)}\{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{m}^*(k)]\}$$

(5) 重复(4)，由 $k=N-2$ 算到 $k=0$ 为止. 这样，便可算出最优策略 $\boldsymbol{m}^*(0)$，$\boldsymbol{m}^*(1)$，…，$\boldsymbol{m}^*(N-1)$ 和目标函数的最优值 $V_N[\boldsymbol{x}(0)]$.

[分配问题] 设有一定数量的某种资源 x_0 可用于 n 种生产，如以数量 x_i 应用于第 i 种生产，则相应的收入为 $g_i(x_i)$，问应如何分配此资源于这 n 种生产使总收入最大？

问题的数学模型是

求 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=x_0,\quad x_i\geqslant 0\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

且使

$$g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_n(x_n)$$

取最大值.

这是一个规划问题，当 $g_i(x_i)$ 都是线性函数时，它是个线性规划问题，否则它是一个非线性规划问题. 当 n 比较大时，具体求解是比较麻烦的.

对问题进行动态处理. 令 $f_k(x)$ 表示以数量 x 分配于前 k 种生产所得到的最大总收入，利用最优化原则，得

$$f_1(x)=g_1(x)$$

$$f_k(x)=\max_{0\leqslant x_k\leqslant x}\{g_k(x_k)+f_{k-1}(x-x_k)\}\quad (k=2,3,\cdots,n)$$

当函数 $g_i(x)$ 有某些特性时，例如 $g_i(x)$ 都是线性函数或凸函数，则可不太困难地求出 $f_k(x)$ 的表达式，但当 $g_i(x)$ 比较复杂时，则需从上面的递推公式利用计算机对不同的 x 值与 k 值将 $f_k(x)$ 逐步算出. 由于当 x 在$[0,x_0]$连续变动时不可能对所有的 x 求出 $f_k(x)$，可以令 $x=0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ \cdots,\ m\Delta=x_0$，然后对每个 k $(k=1,2,\cdots,n)$ 在所有这些点上算出 $f_k(x)$ 的值，并且在计算时上式中的 x_k 也只取这些值. 因此便成为

$$f_1(x)=g_1(x)$$

$$f_k(x)=\max_{0\leqslant p\leqslant q}\{g_k(p\Delta)+f_{k-1}(x-p\Delta)\}$$

其中 $x=q\Delta$. 在具体问题中 Δ 的大小应根据最优解所要求的精确度、计算机的容量、容许计算的时间与各方面的经验而定.

由上面的递推关系式, 先求出 $f_1(x)$, $x=0, \Delta, \cdots, m\Delta$. 然后递推出 $f_2(x)$, $f_3(x)$, …直至 $f_n(x)$. 从 $f_n(x_0)(x_0=m\Delta)$ 中决定最优决策 $\bar{x}_n$; 从 $f_{n-1}(x_0-\bar{x}_n)$ 决定出 $\bar{x}_{n-1}$, …, 从 $f_k(x_0-\bar{x}_n-\bar{x}_{n-1}-\cdots-\bar{x}_{k+1})$ 决定 $\bar{x}_k$, …直至 $\bar{x}_1$, 则 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n$ 即为所求的最优分配量. $f_n(x_0)$ 是相应的最大总收入.

这种做法可以看作是将一个连续模型用离散模型代替.

[连续型的动态规划方法]　以下考虑连续动态系统的最优控制.

设有一由矢量微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}, t)$$

描述的 n 阶控制过程, 其中 $\boldsymbol{x}$ 是一个 n 维状态矢量, $\boldsymbol{m}$ 是 r 维控制矢量, $\boldsymbol{f}$ 是一个可微 n 维矢函数. 初始条件为

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^0$$

目标函数为

$$I=G[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]+\int_{t_0}^{t_f}F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}, t)dt$$

其中 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}, t)$ 是一个可微数量函数.

这里的问题是: 寻求控制矢量 $\boldsymbol{m}(t)$ 和对应的状态矢量 $\boldsymbol{x}(t)$ 使目标函数取最小值(或最大值).

令
$$V[\boldsymbol{x}(t), t]=\min_{m}\left\{G[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]+\int_{t_0}^{t_f}F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}, t)\,dt\right\}$$

其中 t 在区间 $[t_0, t_f]$ 上变化, 极小是对所有 $\boldsymbol{m}$ 取的. 应用最优化原则得到函数方程

$$V(\boldsymbol{x}, t)=\min_{m}\left\{\int_{t}^{t+\Delta}F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}, t)dt+V[\boldsymbol{x}(t+\Delta), t+\Delta]\right\}$$

当 $\Delta\to 0$ 时, 函数方程变为

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=\min_{m}\left\{F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}, t)+\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\tau}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}, t)\right\}$$

从此得出下列两个微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{m}}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{m}}\;\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}=0$$

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}, t)+\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\tau}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}, t)+\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

由此可以决定最优控制矢量 $\boldsymbol{m}^*(t)$.

例 考虑由

$$\dot{x}=-ax+\gamma m$$

描述的一阶控制过程，其中a和γ为正常数，控制信号m受条件

$$|m|\leqslant M$$

约束，决定使目标函数

$$I(m)=\int_0^{t_1}x^2dt$$

为极小的最优控制信号m。

解 命

$$V[x(t),t]=\min_{|m|\leqslant M}\int_t^{t_1}x^2dt$$

那末函数方程为

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=\min_{|m|\leqslant M}\left\{x^2+\frac{\partial V}{\partial x}(-ax+\gamma m)\right\}$$

如果

$$m(t)=-M\operatorname{sgn}\frac{\partial V}{\partial x}$$

即最优控制$m^*(t)$按$\frac{\partial V}{\partial x}$的符号切换于$-M$和$+M$之间，则从函数方程可知花括号中的函数是极小的．因为

$$\gamma m^*\frac{\partial V}{\partial x}=-\gamma M\operatorname{sgn}\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}=-\gamma M\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|$$

所以$\frac{\partial V}{\partial x}$由下面的偏微分方程的解来决定：

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=x^2-ax\frac{\partial V}{\partial x}-\gamma M\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|$$

这可用数值方法求解．

说明 动态规划的函数方程方法提供了一个获得最优化问题的解的计算方法，它不依赖于偏微分方程的解，因此克服了两点边值问题的困难，但对高维多阶段决策过程，计算中需要很大的存贮量，因此在各种情况下，还需要利用各种不同的最优化技巧（如§1～§4的直接方法和数值方法）以及各种不同的计算方法（如降维法），甚至有时需要用观察或猜测来得到函数方程的解。

第十九章 有限元法

有限元法是一套求解微分方程的系统化数值计算方法，它比传统解法具有理论完整可靠，物理意义直观明确，解题效能强等优点．特别是由于这种方法适应性强，形式单纯、规范，所以近年来在电子计算机的配合下，已推广应用到很多工程技术部门和某些科学领域．

本章是从应用的角度来介绍有限元法的基本知识，首先通过典型的位移法阐述有限元法的一般原理与解算过程，然后叙述了剖分单元的技巧，最后介绍与有限元法有关的弹性力学问题．

本章常用符号规定如下(括号内为力学术语或释例)：

Ω, Ω' 表示区域及其边界．

Ω_e, Ω'_e 表示区域Ω的单元及其边界．

P_i 表示单元 Ω_e 的第 i 个顶点，简记作节点 i．

$K=(K_{ij})$表示系数(刚度)矩阵．

$(K_{ij}^{(e)})$表示单元 Ω_e 的系数(刚度)矩阵．

(x,y,z)表示总体的直角坐标．

(ξ,η,ζ)表示单元的局部坐标．

$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$等表示单元的自然坐标．

(x_i,y_i,z_i)表示节点 i 的直角坐标．

(u,v,w) 表示一组待定函数(分别为沿 x,y,z 方向的位移分量)，其列矢量表示为 $\boldsymbol{u}$．

(u_e,v_e,w_e)表示(u,v,w)在单元 Ω_e 上的插值函数，其列矢量表示为 $\boldsymbol{u}_e$．

(u_i,v_i,w_i)表示节点 i 的函数(位移)值．

$\{u,v,w\}_i$ 表示节点 i 的一组参数值，即函数直到某阶导数在节点 i 上的值按一定次序排成的列矢量$\{\boldsymbol{u}\}_i$．例如

$$\{\boldsymbol{u}\}_i=\{u,v,w\}_i=(u_i,u_{xi},u_{yi},u_{xyi},v_i,v_{xi},v_{yi},v_{xyi},w_i,w_{xi},w_{yi},w_{xyi})^{\tau}$$

式中 τ 表示转置．

$\{u,v,w\}_e$ 表示$\{u,v,w\}_i$ 按单元 Ω_e 的节点序号排成的列矢量，表示为$\{\boldsymbol{u}\}_e$．

$\varphi_i(P)$，$\overline{\varphi}(P)$等表示单元的型函数．

$\{R^{(n)}\}$表示 n 次多项式中含变量 x,y,z 各项按一定次序排成的列矢量，并

以 $R_k^{(n)}$ 表示其中第 k 个分量. 例如二元二次多项式

$$\{R^{(2)}\}=(1,x,y,x^2,y^2,xy)^T$$

$$R_3^{(2)}=y$$

$\{a^{(n)}\}$表示 n 次多项式中各项相应的系数排成的列矢量,并以 $a_k^{(n)}$ 表示其中第 k 个分量. 例如对于$\{R^{(2)}\}$,

$$\{a^{(2)}\}=(a_1^{(2)},a_2^{(2)}\ a_3^{(2)},\ a_4^{(2)},\ a_5^{(2)},\ a_6^{(2)})^T$$

$\{f,g,h\}_i$ 表示与节点参数相对应的一组已知函数及其导数在节点 i 上的值排成的列矢量.

$\{f,g,h\}$表示$\{f,g,h\}_i$ 按单元 Ω_e 的节点序号排成的列矢量.

$\overset{u}{\underset{w\quad v}{\circlearrowright}}$, $\overset{x}{\underset{z\quad y}{\circlearrowright}}$ 或 $\overset{i}{\underset{k\quad j}{\circlearrowright}}$ 放在定义或公式之后表示其中函数 u,v,w,变量 x,y,z 或下标 i,j,k 作循环替换后,该定义或公式仍然成立.

$x_{ij}=x_i-x_j$, $\overset{i}{\underset{k\quad j}{\circlearrowright}}$, $\overset{x}{\underset{z\quad y}{\circlearrowright}}$

$\int_\Omega[\quad]d\Omega$ 表示积分(一维、二维或三维).

$\text{diag}\,\Phi$ 表示对角线分块矩阵

$$\begin{bmatrix}\Phi & & & 0\\ & \Phi & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Phi\end{bmatrix}$$ (Φ为矩阵,0 表示其余元素为零)

§1 一般原理与解算步骤

一、变分原理与有限元法

许多物理、力学问题既可以化为微分方程的定解问题,也可以归结为变分问题,即某物理量的极值问题.相应的变分原理(如能量原理)指出两种问题是等价的. 对于前者可采用差分法近似求解;对于后者可采用一种直接解法(能量法). 两种方法各有利弊. 有限元法正是吸取它们的特点而发展起来的一种新解法.

在变分问题中,物理量一般可表示为待定函数(如位移函数,温度分布)及其导数的积分式. 对其积分区域Ω,可仿照差分法的离散化办法(依一定方式划分网格并取节点)把它划分为有限个子区域Ω_e.(在这里正由于积分表达式代替了定解问题的微分表达式,其区域的划分比差分法中网格的划分要灵活得多)如可

取单元为三角形、四边形、四面体,甚至是曲边的). 待定函数及其导数在子区域的某些节点上的数值,称为节点参数值,显然它是待定的. 这些节点的选取也比差分法自由. 另一方面,再参考直接解法的逼近方式(一般取一类解析函数的线性组合作为近似解,其系数是待定的),而采用在各个 Ω_e 内解析的 插值函数(一般取多项式, 其次数视计算的精度而定, 其系数基本上由节点参数值来确定)来逼近. 只要适当扩大节点参数值的范围, 一般就能满足对插值函数的光滑性与精度的要求. 这一点又比直接解法中选取满足一定边界条件的解析函数类来得自由而易于实现.

总之, 有限元法是以变分原理为基础吸取差分格式的思想而发展起来的一种有效的数值解法, 它把求解无限自由度的待定函数归结为求解有限个自由度(Ω 中待定的节点参数值的总个数)的待定值问题. 具有按一定分布形式的节点及其一定类型的节点参数值的子区域 Ω_e 称为单元.

二、在弹性力学问题上的应用(位移法)

弹性体Ω在荷载 f (作用于Ω内的体力), q(作用于边界 Ω' 上的面力)等作用下引起小变形,其变形能可表示为

$$V=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\{\varepsilon\}^{\tau}\{\sigma\}d\Omega=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\{\sigma\}^{\tau}\{\varepsilon\}d\Omega$$

式中$\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$分别表示应变、应力各分量排成的列矢量(§5),它们与位移 u 的线性关系形式上可写成

$$\{\varepsilon\}=Bu \qquad \{\sigma\}=D\{\varepsilon\}=DBu$$

B 是微分算子矩阵, D 是与弹性系数 E, ν 有关的对称矩阵, 视问题的性质而定, 于是,弹性体的总势能即变形能与外力势能之和, 为 u 的二次泛函:

$$\begin{aligned}P(u)=V-F&=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\{\sigma\}^{\tau}\{\varepsilon\}\,d\Omega-\int_{\Omega}u^{\tau}f\,d\Omega-\int_{\Omega'}u^{\tau}q\,d\Omega'\\&=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(Bu)^{\tau}DBu\,d\Omega-\int_{\Omega}u^{\tau}f\,d\Omega-\int_{\Omega'}u^{\tau}q\,d\Omega'\end{aligned}$$

最小势能原理指出,对满足边界上一定约束条件的所有位移中,以保持力的平衡状态的位移所造成的总势能达到最小值. 利用矩阵D的对称性, 可知位移函数 u 就是变分方程

$$\delta P(u)=\int_{\Omega}(B\delta u)^{\tau}DBu\,d\Omega-\int_{\Omega}(\delta u)^{\tau}f\,d\Omega-\int_{\Omega'}(\delta u)^{\tau}q\,d\Omega'=0$$

的解. 把Ω划分为有限个单元Ω_e,其节点i的参数值为$\{u\}_i$,并假定在Ω_e上u(各分量)的插值函数可表为同类型的多项式:

$$u_e=\sum_{i_e}\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^T\{u\}_i \tag{1}$$

它称为位移模式,式中$\sum\limits_{i_e}$表示对单元Ω_e的各节点求和,φ为坐标变量的多项式,随单元的形状与插值的方式而定(即§2~§4中所列的各种型函数),而对角线分块矩阵$\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^T$的行、列数与$u$的分量个数有关,例如,对空间问题

$$\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^T=\begin{bmatrix}\{\varphi\}_i^T & 0 & 0\\ 0 & \{\varphi\}_i^T & 0\\ 0 & 0 & \{\varphi\}_i^T\end{bmatrix}$$

为$3\times 3r$(r表示每个分量的节点参数值的个数)矩阵.

把(1)代入$\delta P(u)=0$,得

$$\sum_e\int_{\Omega_e}\Big[\sum_{i_e}\{\delta u\}_i^T(B\,\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^T)^T\Big]D\Big(\sum_{j_e}B\,\mathrm{diag}\{\varphi\}_j^T\{u\}_j\Big)d\Omega$$
$$-\sum_e\int_{\Omega_e}\Big[\sum_{i_e}\{\delta u\}_i^T\,\mathrm{diag}\{\varphi\}_i f\Big]d\Omega$$
$$-\sum_e\int_{\Omega_e\cap\Omega'}\Big[\sum_{i_e}\{\delta u\}_i^T\,\mathrm{diag}\{\varphi\}_i q\Big]d\Omega'=0 \tag{2}$$

设

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega_e}(B\,\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^T)^T D(B\,\mathrm{diag}\{\varphi\}_j^T)d\Omega \tag{3}$$

$$K_{ij}=\sum_{e_{ij}}K_{ij}^{(e)} \tag{4}$$

$$\{f\}_i=\sum_{e_i}\{f^{(e)}\}_i=\sum_{e_i}\int_{\Omega_e}\mathrm{diag}\{\varphi\}_i f\,d\Omega \tag{5}$$

$$\{q\}_i=\sum_{e_i}\{q^{(e)}\}_i=\sum_{e_i}\int_{\Omega_e\cap\Omega'}\mathrm{diag}\{\varphi\}_i\,q\,d\Omega' \tag{6}$$

式中 $\sum\limits_{e_i}$表示对所有含节点i的单元求和,$\sum\limits_{e_{ij}}$表示对所有含i,j两个节点的单元求和,当i,j两个节点不在同一个单元时,$K_{ij}=0$;j也可取i,这时$\sum\limits_{e_{ij}}=\sum\limits_{e_i}$;其余情况,可能对一个或几个单元求和,视区域划分方式而定.

这些系数的力学意义是很明显的:$-K_{ij}^{(e)}\{u\}_j$表示在位移模式(1)的假定

下，由于节点 j（包括 i 节点本身）具有位移、转动等等变形值 $\{u\}_j$ 通过弹性体单元 Ω_e 的作用而在节点 i 产生的反力*. $(K_{ij}^{(e)})$ 就是通常所谓单元的刚度矩阵；虽然包含 i，j 两个节点的单元个数有各种可能，但依定义(4)可知 $-K_{ij}\{u\}_j$，就是由于节点 j 的变形值而引起节点 i 上的反力．对于整个区域的节点 j（实际上只有与节点 i 邻近的几个节点）求和，就得出由于变形而产生节点 i 上的总反力．同样，(5)(6)右端的积分分别表示体力、面力等外荷载按位移模式(1)通过单元 Ω_e 而分配给第 i 节点的相应的外力*，简称为在单元 Ω_e 上荷载的等价节点力，而其和 $\{f\}_i$，$\{q\}_i$ 则是整个区域荷载分配给节点 i 的总外力．从(2)提出 $\{\delta u\}_i^T$ 得到

$$\sum_i \{\delta u\}_i^T\Big(-\sum_j K_{ij}\{u\}_j+\{f\}_i+\{q\}_i\Big)=0 \tag{7}$$

除了在给定位移的部分边界（在这部分就不给定面力 q）上有关的节点参数值（其变分已等于零）外，由于各个变分 $\{\delta u\}_i$ 的相互独立性，圆括号内各分量（变分为零的部分除外）都应等于零．这正反映出处于平衡状态时，任一非约束节点的反力与外力之和等于零，亦即力在各节点应取得平衡这一客观事实．

最后，按整个区域的节点编号，依序排列待定的节点参数值，除去已加约束的那一部分，从而构成一个总的节点参数值列矢量 $\{u\}$，对 K_{ij}，$\{f\}_i$，$\{q\}_i$ 也划掉相应的行、列，从而构成总的系数矩阵，即所谓总刚度矩阵 $K=(K_{ij})'$（撇号表示已做划行、划列的处理）与右端列矢量 $\{f\}$，$\{q\}$，于是(7)可写成

$$K\{u\}=\{f\}+\{q\}$$

由于定义(3)与 D 的对称性，单元的 $K_{ij}^{(e)}=K_{ji}^{(e)}$，而依(4)，$K_{ij}=\sum\limits_{e_{ij}} K_{ij}^{(e)}=\sum\limits_{e_{ji}} K_{ji}^{(e)}=K_{ji}$，即 $(K_{ij})^T=(K_{ji})$，把其中第 m 行、第 m 列划掉后也是对称的，因此，经过划行、划列处理的 K 是对称的；当区域细分后，大量的第 j 节点与第 i 节点不在同一个单元上，则大量的 $K_{ij}=K_{ji}=0$，这表明 K 是稀疏的．这种对称性与稀疏性正是改进计算方法与提高解题速度的主要根据．

三、有限元解法的主要步骤

(1) 确立变分方程或虚功泛函方程　§5 介绍了弹性力学问题位移法中常

---

* 反力与外力在这里都是指广义的，即包括弯矩、扭矩等，与节点参数值中的转角、扭角等广义位移相对应．

用的虚功泛函方程的表达式．应用时要明确哪些是待定的位移函数．例如空间问题有三个位移分量是待定函数，平面问题有二个，薄板弯曲或柱体扭转问题只有一个等等．如果不取位移而取内力分布为待定函数，则应根据最小势能原理建立相应的变分方程．对于其他的微分方程定解问题（例如特征值问题、热导问题），则应参照§5末的论述，乘上待定解的变分并利用格林公式把方程改造成为正定的泛函形式，从而把问题归结为等价的变分问题，作为应用有限元解法的出发点．

在虚功泛函方程中，主要是确定微分算子矩阵 B、弹性系数矩阵 D 以及各种荷载分布（包括体力、面力、线力与集中点力），以便列出有关的积分表达式．

(2) 选择单元并划分区域　首先要根据区域形状与计算精度选定单元的形态，并用网格把区域划分为大小不一的单元组合．对于应力集中或变化大的部分，网格要划得密些，变化小的部分可疏些，此外还可以利用问题的对称性把定解区域缩小或退化为低维的情况，以减少节点数与计算量．另一方面，对于不均匀的介质，在系数间断或断裂的地方要放置网格，使在每单元内介质系数保持光滑性；而对集中线力、点力以及检测的地方，则要放置节点，以突出其作用．

其次，要按问题对解的光滑性要求，安排单元的节点与节点参数值．一般地说，对空间或平面问题用基本单元较简便，也可用等参数单元，使其边界能适当接近区域的弯曲边界，以减少边界的扰动误差；对薄板弯曲问题一般应取§4所介绍的拟协调单元．总之，要妥善处理好减少总自由度（即节点参数值总个数）与提高计算精度这一对矛盾，做到既减少计算量，又保证解的收敛性．

对单元形状除了§2，§3提出的要求外，还要注意其顶点不能作为相邻单元边上的内点，而且网格要尽量规则些，以减少计算量．

最后，参考§2～§4，确定同节点参数值对应的型函数与位移模式．对复杂的单元还可以利用待定系数法直接把多项式的系数作为广义节点参数进行单元分析．

(3) 单元分析　以插值多项式 u_e 代替原待定函数，每个单元的总势能二次泛函就离散化为节点参数值 $\{u\}_e$ 的二次函数，也就是把原变分方程离散化为 $\{u\}_e$ 的代数方程组，其系数矩阵就是单元的刚度矩阵 (K_{ij}^e)．这工作是问题离散化的关键，因为整个区域的总势能可以近似地看作各单元总势能之和，显然它也随着离散化为总节点参数值 $\{u\}_e$ 的二次函数．因此，单元分析的主要内容就是根据单元的几何与力学信息计算其系数（刚度）矩阵 (K_{ij}^e) 与等价函数

值（节点力）$\{f^{(e)}\}_i$，$\{q^{(e)}\}_i$ 等．为了程序标准化，其节点序号应统一取局部的．

刚度矩阵的元素 $K_{ij}^{(e)}$ 依(2)，(3)式的定义实际上是 $r_i\times r_j$ 的系数块．其中 r_i 就是第 i 节点参数值的个数．例如对于空间问题，可取等参数单元，这时 B 为 6×3 的一阶偏微分算子矩阵（见(29′)式），$\{\varphi\}_i=\varphi_i$，$\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^e$ 为 3×3 的对角线分块矩阵．于是

$$(B\,\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^e)^T=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y}\\ 0 & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x}\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x} & 0\end{bmatrix}$$

为 3×6 矩阵，而 D 为 6×6 的弹性系数矩阵（见(31)式）．代入(3)式不难得出 3×3 的系数块

$$K_{ij}^{(e)}=\iiint\limits_{\Omega_e}(r_{km}^{(i,j)})dxdydz\qquad(k,m=1,2,3)$$

其中

$$r_{11}^{(i,j)}=(\lambda+2G)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}+G\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}+G\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}$$

$$r_{12}^{(i,j)}=\lambda\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}+G\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}$$

只要把(1,2,3)与(x,y,z)同时作循环代换就可得出其他的 $r_{km}^{(i,j)}$．显然单元刚度矩阵$(K_{ij}^{(e)})$是对称的，因为 $r_{km}^{(i,j)}=r_{km}^{(j,i)}$．注意，对薄板弯曲问题，由于取拟协调单元，各节点参数值个数 r_i 不一定等同（见 §4）．对此情况待定函数只有一个挠度，$\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^e=\{\varphi\}_i^e$ 为 $1\times r_i$ 矩阵，而 B 改为 3×1 二阶偏微分算子矩阵，于是 $(B\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^e)^T$ 是 $r_i\times 3$ 的矩阵．以节点 i，j 的型函数代入(3)式也可得系数块 $K_{ij}^{(e)}$ 的积分公式．例如，节点 i，j 的型函数为$\{\varphi\}_i=(\varphi_i,\ \overline{\varphi}_i,\ \widetilde{\varphi}_i)^T$，$\{\varphi\}_j=\varphi_0$ 这时 $r_i=3$，$r_j=1$，而按相应的 B，D 公式则有

$$(B\,\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^e)^T=-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\overline{\varphi}_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\widetilde{\varphi}_i}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2\overline{\varphi}_i}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2\widetilde{\varphi}_i}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y} & 2\dfrac{\partial^2\overline{\varphi}_i}{\partial x\partial y} & 2\dfrac{\partial^2\widetilde{\varphi}_i}{\partial x\partial y}\end{bmatrix},\quad B\mathrm{diag}\{\varphi\}_j=-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y}\end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^{(e)}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\iint_{\Omega_e}\Phi dxdy$$

式中 $\Phi=$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2\overline{\varphi}_i}{\partial x^2}\quad\left(\nu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right)+(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_i}{\partial x^2}\;\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2\overline{\varphi}_i}{\partial y^2}\quad\left(\nu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right)+(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_i}{\partial y^2}\;\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y}\right) \\ 2\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2\overline{\varphi}_i}{\partial x\partial y}\left(\nu\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right)+2(1-\nu)\;\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_i}{\partial x\partial y}\;\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}$$

这是 3×1 的系数块．型函数一经确定就可以代入而求出积分值．如果以插值多项式系数为广义节点参数，则单元的各个型函数要全部改为多项式的各项 $R_k^{(n)}$ 求出的积分值不是系数块而是整个单元的广义系数矩阵 $\tilde{K}^{(e)}$ 与等价节点力 $\tilde{f}^{(e)},\tilde{q}^{(e)}$ 等，对此，还得按 § 4 所述，经过变换转到上述的形式才能依(4)，(5)，(6)式求和．

对体力 f，面力 q 同样可按(5)，(6) 式求出它们的等价节点力 $\{f^{(e)}\}_i$，$\{q^{(e)}\}_i$．如果在某线段 S 或某点 P 上作用有线力分布 $p(s)$ 或集中力 Q，则要补上相应的等价节点力：

$$\{p^{(e)}\}_i=\int_{\Omega'_e\cap S}\mathrm{diag}\{\varphi\}_i\,pds$$

$$\{Q^{(e)}\}_i=\mathrm{diag}\{\varphi(P)\}_iQ$$

以上的这些数值积分都可以通过标准化程序来计算(参看附录)．但要注意，其中型函数多取局部坐标，而微分运算又是对整体坐标系(x,y,z)，因此在求积前必须通过坐标变换把它们化为局部坐标系的统一表达式(参看 § 2～§ 4) 此外，在求单元的各项积分值时，节点序号一般可取局部的；但在参加总体合成时，各单元节点的局部序号都必须改成总体的统一标号，因为在(4)，(5)，(6)的和式中，i，j 只能是各节点的总体标号．

(4) 边界条件的处理与总体合成　前一段只考虑纯荷载支承的情况，如果在部分边界给定弹性支承与几何约束，在参加总体合成之前还要进行必要的处理．实际上，正是这些条件才保证系数矩阵的正定性与解的唯一性．

假定在空间问题中Ω的部分边界 Ω'_3 取弹性支承，其弹性耦合系数为 3×3 的正定矩阵 $C=(c_{ij})$，而对另一部分边界 Ω'_1 给定位移值$(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$．这样，在变分方程(2)中多出一式

$$\sum_{e}\int_{\Omega_e\cap\Omega_3'}\sum_{i,e}\{\delta u\}_i^T \operatorname{diag}\{\varphi\}_i C\operatorname{diag}\{\varphi\}_j^T\{u\}_j d\Omega'$$

而少了面为 q 沿 Ω_1' 的积分项，因为在 Ω_1' 上 q 对总势能已无贡献. 由于空间问题中，$\{\varphi\}_i=\varphi_i$，因此对弹性支承部分应把系数块 $K_{ij}^{(e)}$ 改为 $K_{ij}^{(e)}+C_{ij}^{(e)}$，其中

$$C_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega_e\cap\Omega_3'}\operatorname{diag}\varphi_i C\operatorname{diag}\varphi_j d\Omega'$$

$$=\Big(\int_{\Omega_e\cap\Omega_3'}\varphi_i\varphi_j d\Omega'\Big)C$$

至于约束条件则应对系数矩阵 (K_{ij}) 作划行划列的处理，其原则如下：

假定区域剖分后落在 Ω_1' 上的节点的总体标号为 $i_1,i_2,\cdots,i_{N_0}$，依约束条件，$\{u\}_{i_n}=\{\bar{u}\}_{i_n}$，$\{\delta u\}_{i_n}=0$ $(n=1,2,\cdots,N_0)$. 从(2)式可以看出，关于这 N_0 个节点的变分方程已自然满足，不必列出. 这样就把(7)式的系数矩阵 (K_{ij}) 划去第 $i_1,i_2,\cdots,i_{N_0}$ 行的系数块 K_{i_nj} $(n=1,2,\cdots,N_0)$ 或相应的 $3N_0$ 行；再把已知的位移值 $\{\bar{u}\}_{i_n}$ 代入(7)式中 $\{u\}_j$ 的部分而移到方程的右边，这样又划去 (K_{ij}) 第 $i_1,i_2,\cdots,i_{N_0}$ 列的系数块或相应的 $3N_0$ 列. 经过补块与划行划列处理后的系数矩阵 $K=(K_{ij})'$ 仍然对称，而方程组(7)即可具体列式为

$$\sum_{j\neq i_n}K_{ij}\{u\}_j=\{f\}_i+\{q\}_i-\sum_{n=1}^{N_0}K_{i,i_n}\{\bar{u}\}_{i_n}\quad (i\neq i_n,\ i_n=i_1,i_2,\cdots,i_{N_0})$$

其中 $\{f\}_i$ 仍按(5)式计算，而(6)式应改为

$$\{q\}_i=\sum_{e_i}\{q^{(e)}\}_i=\sum_{e_i}\int_{\Omega_e\cap\Omega'\setminus\Omega_1'}\operatorname{diag}\varphi_i\, q\,d\Omega'$$

对薄板弯曲问题，边界条件处理较为复杂，但原理一样.

如果还有热效应，则可根据问题的性质把热当量荷载作为体力的一部分加到单元的等价节点力 $\{f^{(e)}\}_i$ 中去.

经过这些处理，再按(4)，(5)，(6)等式求和就可得出关于全部节点参数值的线性方程组，总体合成就算结束. 它同单元分析一样，也可以用标准化程序来实现.

(5) 方程组的数值求解　方程组的系数矩阵一般是正定的，这就保证了解的唯一性. 此外，它还有对称性与稀疏性，只要适当调整节点标号可以使非零的系数集中在矩阵主对角线的附近形成"带状矩阵"，利用这些性质可以大大节省求解的计算量与存储量. 对这类型线性方程组的数值解法主要有两类，即迭代法与直接法.

最后，还要对计算成果进行综合与分析，例如根据解出的参数位移值求出单元或节点的应力分布，画图列表进行分析等等。

§2 基本单元与线性插值

一、基本单元与型函数

基本单元就是指边界平直的子区域，仅取其顶点作节点，并且只用待定函数值作为节点参数值。常用的几何形状是

一维的直线段（二节点）。

二维的三边形（三节点），四边形（四节点）。

三维的四面体（四节点），六面体（八节点）。

在这类单元上，插值函数是线性、双线性或三线性的多项式，即对各个坐标变量 x, y 或 z 来说都是一次的。

为明确起见，本节以 P 表示坐标为 (x, y, z) 的变点，而以 P_i 表示节点。设单元有 p 个节点，其局部序号为 $i=1, 2, \cdots, p$，局部坐标为 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(i=1, 2, \cdots, p)$，而相应的整体直角坐标取作 $(x_i, y_i, z_i)(i=1, 2, \cdots, p)$。这些坐标系都取右手系。

如果在基本单元内同样有 p 个多项式 $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \cdots, \varphi_p(P)$ 满足条件：

(i) p 个多项式 φ_i 之和恒等于 1，即

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(P) = 1 \tag{8}$$

(ii) 任一 $\varphi_i(P)$ 在节点 P_i 取值 1，在其余 $p-1$ 个节点取值 0，即

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, p) \tag{9}$$

则称 $\varphi_i(P)$ 为该单元的型函数。$\varphi_i(P)$ 可以写成 x, y, z 或 ξ, η, ζ 的函数。

基本单元的型函数存在而且是线性（包括双线性、三线性）的。因此对于线性的插值函数 u_e、v_e、w_e，包括 x, y, z（看作坐标本身的线性函数）可表示为

$$u_e(P) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(P) u_i \qquad \left(\begin{smallmatrix} & u & \\ w & & v \end{smallmatrix}\right) \tag{10}$$

$$x = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(P) x_i \qquad \left(\begin{smallmatrix} & x & \\ z & & y \end{smallmatrix}\right) \tag{11}$$

二、直线段单元

［距离坐标］ 设直线段二端点为 P_1，P_2，则线段上任一点 P 的距离坐标 (λ_1, λ_2) 定义为

$$\lambda_1 = \frac{PP_2}{P_1P_2} = \frac{s_2}{s}, \quad \lambda_2 = \frac{P_1P}{P_1P_2} = \frac{s_1}{s}$$

显然端点 P_1, P_2 的距离坐标 (λ_1, λ_2) 分别为 $(1, 0)$, $(0, 1)$，且有

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

［型函数］ 距离坐标 $\lambda_i (i=1, 2)$ 本身可取作型函数 $\varphi_i(P)$，它们与直角坐标之间的关系依(11)为

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

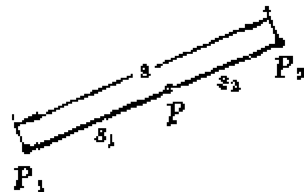


图 19.1

［坐标变换］ 由于 P 在直线段 P_1P_2 上，所以坐标变量只有一个独立，假定取 x；同样其距离坐标也只有一个独立，假定取 λ_2。从上二式得

$$\lambda_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

［线性插值函数］

$$u_e = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right) u_1 + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) u_2$$

三、三边形单元

［面积坐标］ 设三边形的顶点为 P_1, P_2, P_3，则三边形的任一点 P 的面积坐标 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 定义为

$$\lambda_i = \frac{A_i}{A} = \frac{h_i}{H_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

式中 A_i 表示 P 与 P_i 的对边 P_jP_k 构成的 $\triangle PP_jP_k$ 的面积，A 为 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积，而 h_i, H_i 分别表示 P, P_i 到 P_jP_k 的距离。显然 P_1, P_2, P_3 的面积坐标分别为 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$，且有

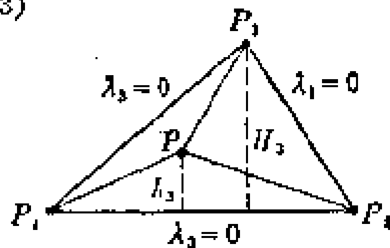


图 19.2

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

［型函数］ $\varphi_i(P)$ 就是面积坐标 λ_i，它们与直角坐标之间的线性关系式为

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3 \qquad \text{(循环: } x \to y \to z\text{)}$$

[坐标变换及其雅可比式]　由于P在$P_1P_2P_3$平面上，所以只有两个坐标变量独立，假定取x,y；同样，面积坐标只有两个独立，假定取λ_1,λ_2。从上二式可得

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2\bar{A}}\begin{bmatrix}y_{23} & x_{32}\\ y_{31} & x_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x_3\\ y-y_3\end{bmatrix}$$

式中$x_{ij}=x_i-x_j$，$y_{ij}=y_i-y_j$，

$$\bar{A}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_{13} & x_{23}\\ y_{13} & y_{23}\end{vmatrix}$$

其绝对值等于单元面积A即$|\bar{A}|=A$。

雅可比式(即变换矩阵的行列式)为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda_1} & \dfrac{\partial x}{\partial\lambda_2}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\lambda_1} & \dfrac{\partial y}{\partial\lambda_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_{13} & x_{23}\\ y_{13} & y_{23}\end{vmatrix}=2\bar{A}$$

逆变换矩阵为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}\end{bmatrix}=\frac{1}{2\bar{A}}\begin{bmatrix}y_{23} & x_{32}\\ y_{31} & x_{13}\end{bmatrix}$$

[线性插值函数]

$$u_e=\sum_{i=1}^{3}\varphi_iu_i=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3 \qquad \text{(循环: } u \to v \to w\text{)}$$

利用$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的循环性，以$x,y$为变量的型函数可写成

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\frac{1}{2\bar{A}}\begin{bmatrix}x_2y_3-x_3y_2 & y_{23} & x_{32}\\ x_3y_1-x_1y_3 & y_{31} & x_{13}\\ x_1y_2-x_2y_1 & y_{12} & x_{21}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\end{bmatrix}$$

四、四边形单元

[双向距离坐标]　从四边形一顶点P_1开始各在二邻边P_1P_2，P_1P_4定义距离坐标；然后再在其对边沿同方向即P_4P_3，P_2P_3同样定义距离坐标。把P_1P_2

与 P_4P_3，以及 P_1P_4 与 P_2P_3 具相同的距离坐标的变点联成直线段，构成一个局部坐标网。于是四边形的任意一点 P 是坐标网的一个结点，其局部坐标 (ξ, η) 可分别取 P_1P_2，P_1P_4 二线段的第二距离坐标(即 λ_2)。这样，直角坐标系中的四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 与局部坐标系中的单位正方形 $(0\leqslant\xi\leqslant1,\ 0\leqslant\eta\leqslant1)$ 之间就建立一一对应(图 19.3)。

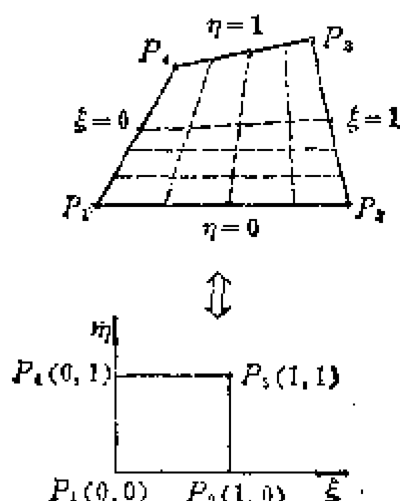


图　19.3

［型函数］　对于单位正方形的 $\varphi_i(P)$ 显然可取 $\varphi_1=(1-\xi)(1-\eta)$，$\varphi_2=\xi(1-\eta)$，$\varphi_3=\xi\eta$，$\varphi_4=(1-\xi)\eta$ 它是双线性的，即对 ξ 或 η 都是线性的。由于顶点 P_i 的局部坐标 (ξ_i, η_i) 取值为 1 或 0，型函数还可以统一写成

$$\varphi_i=(-1)^{\xi_i+\eta_i}(\xi+\xi_i-1)(\eta+\eta_i-1)\quad(i=1,2,3,4)$$

［坐标变换及其雅可比式］

$$x=\sum_{i=1}^{4}\varphi_i x_i=(1-\xi)(1-\eta)x_1+\xi(1-\eta)x_2+\xi\eta x_3+(1-\xi)\eta x_4$$

雅可比式(即变换矩阵的行列式)为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial x}{\partial\eta}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_{21}+\eta(x_{12}+x_{34}) & x_{41}+\xi(x_{12}+x_{34})\\ y_{21}+\eta(y_{12}+y_{34}) & y_{41}+\xi(y_{12}+y_{34})\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_{21} & x_{41}\\ y_{21} & y_{41}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_{21} & x_{34}\\ y_{21} & y_{34}\end{vmatrix}\xi+\begin{vmatrix}x_{32} & x_{41}\\ y_{32} & y_{41}\end{vmatrix}\eta$$

逆变换矩阵为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{bmatrix}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}y_{41}+\xi(y_{12}+y_{34}) & x_{14}-\xi(x_{12}+x_{34})\\ y_{12}-\eta(y_{12}+y_{34}) & x_{21}+\eta(x_{12}+x_{34})\end{bmatrix}$$

它的元素是 ξ，η 的分式线性函数。

［双线性插值函数］

$$u_e=\sum_{i=1}^{4}\varphi_i u_i=\sum_{i=1}^{4}(-1)^{\xi_i+\eta_i}(\xi+\xi_i-1)(\eta+\eta_i-1)u_i$$

五、四面体单元

[体积坐标] 设四面体顶点为 $P_i(i=1,2,3,4)$，则四面体的任一点 P 的体积坐标 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ 定义为

$$\lambda_i=\frac{V_i}{V}=\frac{h_i}{H_i}\qquad(i=1,2,3,4)$$

式中 V_i 表示 P 与 P_i 所对的底面三角形构成四面体的体积，V 为四面体单元的体积，而 h_i, H_i 分别表示 P, P_i 到底面的距离．显然，P_i 的体积坐标除 $\lambda_i=1$ 外，其余 $\lambda_j=0$，且有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1\tag{12}$$

图 19.4

[型函数] $\varphi_i(P)$ 就是体积坐标 $\lambda_i\ (i=1,2,3,4)$，它们与直角坐标之间的线性关系式为

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3+\lambda_4x_4\tag{13}$$

[坐标变换及其雅可比式] 假定 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为独立变量，则由上(12)，(13)得

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\frac{1}{6\overline{V}}\begin{bmatrix}X_{14}&Y_{14}&Z_{14}\\ X_{24}&Y_{24}&Z_{24}\\ X_{34}&Y_{34}&Z_{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x_4\\ y-y_4\\ z-z_4\end{bmatrix}$$

式中

$$X_{i4}=\begin{vmatrix}y_{j4}&y_{k4}\\ z_{j4}&z_{k4}\end{vmatrix},\quad Y_{i4}=\begin{vmatrix}z_{j4}&z_{k4}\\ x_{j4}&x_{k4}\end{vmatrix},\quad Z_{i4}=\begin{vmatrix}x_{j4}&x_{k4}\\ y_{j4}&y_{k4}\end{vmatrix}$$

$$\overline{V}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_{14}&x_{24}&x_{34}\\ y_{14}&y_{24}&y_{34}\\ z_{14}&z_{24}&z_{34}\end{vmatrix}=\frac{-1}{6}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\ x_1&x_2&x_3&x_4\\ y_1&y_2&y_3&y_4\\ z_1&z_2&z_3&z_4\end{vmatrix}$$

其绝对值等于单元体积 V 即 $|\overline{V}|=V$．

雅可比式(即变换矩阵的行列式)为

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}=\begin{vmatrix}x_{14}&x_{24}&x_{34}\\ y_{14}&y_{24}&y_{34}\\ z_{14}&z_{24}&z_{34}\end{vmatrix}=6\overline{V}$$

逆变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial\lambda_1}{\partial y} & \frac{\partial\lambda_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial y} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial z} \\ \frac{\partial\lambda_3}{\partial x} & \frac{\partial\lambda_3}{\partial y} & \frac{\partial\lambda_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} X_{14} & Y_{14} & Z_{14} \\ X_{24} & Y_{24} & Z_{24} \\ X_{34} & Y_{34} & Z_{34} \end{bmatrix}$$

[线性插值函数]

$$u_e = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 \qquad \left(\begin{smallmatrix} & u & \\ w & & v \end{smallmatrix}\right)$$

由(12),(13)可直接求得

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} -V_{234} & X_1 & Y_1 & Z_1 \\ V_{341} & -X_2 & -Y_2 & -Z_2 \\ -V_{412} & X_3 & Y_3 & Z_3 \\ V_{123} & -X_4 & -Y_4 & -Z_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

等式右端系数矩阵各元素可循环定义如下:

$$V_{ijk} = \begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix}, \quad X_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}, \quad Z_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}, \quad \cdots\cdots$$

实际上不难看出$V_{234} = x_4X_{14} + y_4Y_{14} + z_4Z_{14}$, $X_1 = X_{14}$, $Y_1 = Y_{14}$, $Z_1 = Z_{14}$, …,只不过这里用三阶行列式代替 X_{i4} 等二阶行列式,便于循环定义,结果还是一致的.

六、六面体单元

[三向距离坐标]　设六面体的顶点为 $P_i(i=1,2,\cdots,8)$(图 19.5). 利用双向距离坐标,先把四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 变换到局部坐标系(ξ,η,ζ)的坐标面$\zeta=0$上的单位正方形$(0\leqslant\xi\leqslant1,\ 0\leqslant\eta\leqslant1)$; 再在 P_1P_5 线段上定义距离坐标, 并取作 $(1-\zeta,\zeta)$, P_1,P_5 的 ζ 分别为 0 与 1. 现在又对四边形 $P_5P_6P_7P_8$ 利用双向距离坐标,把它变换到坐标面 $\zeta=1$ 上的单位正方形$(0\leqslant\xi\leqslant1,\ 0\leqslant\eta\leqslant1)$. 这就在四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 与 $P_5P_6P_7P_8$ 分别同 $\zeta=0$ 与 $\zeta=1$ 上的单位正方形各点间

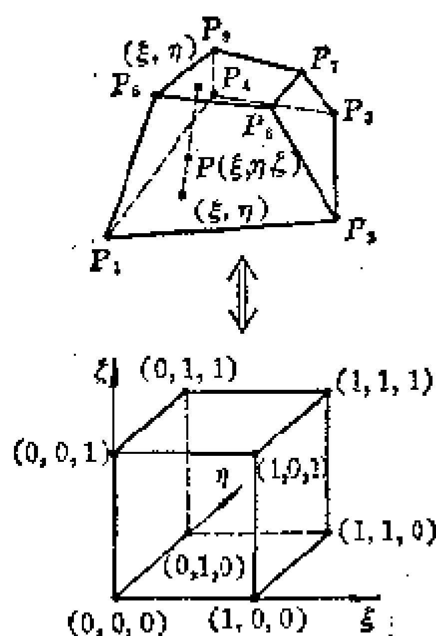


图 19.5

建立一一对应．最后把上下四边形具同样局部坐标$(\xi,\ \eta)$的点联成线段，并沿P_1P_5方向(由下而上)定义距离坐标$(1-\zeta,\ \zeta)$．于是该线段上任意一点P的局部坐标可取为(ξ,η,ζ)．这样，直角坐标系中的任意六面体单元与局部坐标系中的单位立方体$(0\leqslant\xi\leqslant1,0\leqslant\eta\leqslant1,0\leqslant\zeta\leqslant1)$之间就建立了一一对应．

［型函数］ 对于单位立方体，利用节点的对称性得出型函数为

$$\varphi_1=(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\qquad \varphi_5=(1-\xi)(1-\eta)\zeta$$
$$\varphi_2=\xi(1-\eta)(1-\zeta)\qquad \varphi_6=\xi(1-\eta)\zeta$$
$$\varphi_3=\xi\eta(1-\zeta)\qquad \varphi_7=\xi\eta\zeta$$
$$\varphi_4=(1-\xi)\eta(1-\zeta)\qquad \varphi_8=(1-\xi)\eta\zeta$$

由于顶点P_i的局部坐标(ξ_i,η_i,ζ_i)取值为1或0，φ_i可统一写成

$$\varphi_i(\xi,\eta,\zeta)=(-1)^{1+\xi_i+\eta_i+\zeta_i}(\xi+\xi_i-1)(\eta+\eta_i-1)(\zeta+\zeta_i-1)$$
$$(i=1,2,\cdots,8)$$

它是三线性的，即对ξ或η或ζ都是线性的．

［坐标变换及其雅可比式］

$$x=\sum_{i=1}^{8}\varphi_i x_i=\sum_{i=1}^{8}(-1)^{1+\xi_i+\eta_i+\zeta_i}(\xi+\xi_i-1)(\eta+\eta_i-1)(\zeta+\zeta_i-1)x_i\quad \begin{pmatrix} x \\ z \quad y\end{pmatrix}$$

同φ_i一样，它是三线性的．这表明六面体的棱边应是直线段．

雅可比式(即变换矩阵的行列式)为

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{8}\alpha_i x_i & \sum_{i=1}^{8}\beta_i x_i & \sum_{i=1}^{8}\gamma_i x_i\\ \sum_{i=1}^{8}\alpha_i y_i & \sum_{i=1}^{8}\beta_i y_i & \sum_{i=1}^{8}\gamma_i y_i\\ \sum_{i=1}^{8}\alpha_i z_i & \sum_{i=1}^{8}\beta_i z_i & \sum_{i=1}^{8}\gamma_i z_i\end{vmatrix}$$

式中

$$\alpha_i=(-1)^{1+\xi_i+\eta_i+\zeta_i}(\eta+\eta_i-1)(\zeta+\zeta_i-1)$$

$$\beta_i=(-1)^{1+\xi_i+\eta_i+\zeta_i}(\zeta+\zeta_i-1)(\xi+\xi_i-1)$$

$$\gamma_i=(-1)^{1+\xi_i+\eta_i+\zeta_i}(\xi+\xi_i-1)(\eta+\eta_i-1)$$

变换矩阵也可写成

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_8\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_8\\ z_1 & z_2 & \cdots & z_8\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}-(1-\eta)(1-\zeta) & -(1-\zeta)(1-\xi) & -(1-\xi)(1-\eta)\\ (1-\eta)(1-\zeta) & -(1-\zeta)\xi & -\xi(1-\eta)\\ \eta(1-\zeta) & (1-\zeta)\xi & -\xi\eta\\ -\eta(1-\zeta) & (1-\zeta)(1-\xi) & -(1-\xi)\eta\\ -(1-\eta)\zeta & -\zeta(1-\xi) & (1-\xi)(1-\eta)\\ (1-\eta)\zeta & -\zeta\xi & \xi(1-\eta)\\ \eta\zeta & \zeta\xi & \xi\eta\\ -\eta\zeta & \zeta(1-\xi) & (1-\xi)\eta\end{bmatrix}$$

从上式看出变换矩阵各行关于 ξ,η,ζ 的二次项系数是相同的，记

$$X_0=\sum_{i=1}^{8}(-1)^{1+\xi_i+\eta_i+\zeta_i}x_i=-x_1+x_2-x_3+x_4+x_5-x_6+x_7-x_8$$

$$X_1=x_1-x_2+x_3-x_4=x_{12}+x_{34}=x_{14}+x_{32}$$

$$X_2=x_1-x_2-x_5+x_6=x_{12}+x_{65}=x_{15}+x_{62}$$

$$X_3=x_1-x_4-x_5+x_8=x_{14}+x_{85}=x_{15}+x_{84}$$

对 y_i,z_i 也有相应的记号 $Y_0,Y_1,Y_2,Y_3,Z_0,Z_1,Z_2,Z_3$，则变换矩阵可写成

$$\begin{bmatrix} X_0\eta\zeta+X_1\eta+X_2\zeta+x_{21} & X_0\zeta\xi+X_3\zeta+X_1\xi+x_{41} & X_0\xi\eta+X_2\xi+X_3\eta+x_{61} \\ Y_0\eta\zeta+Y_1\eta+Y_2\zeta+y_{21} & Y_0\zeta\xi+Y_3\zeta+Y_1\xi+y_{41} & Y_0\xi\eta+Y_2\xi+Y_3\eta+y_{61} \\ Z_0\eta\zeta+Z_1\eta+Z_2\zeta+z_{21} & Z_0\zeta\xi+Z_3\zeta+Z_1\xi+z_{41} & Z_0\xi\eta+Z_2\xi+Z_3\eta+z_{61} \end{bmatrix}$$

其行列式是 ξ,η,ζ 的四次多项式，而且 $\xi^2\eta^2,\eta^2\zeta^2,\zeta^2\xi^2$ 各项的系数为零.

[三线性插值函数]

$$u_i=\sum_{i=1}^{8}\varphi_i(\xi,\eta,\zeta)u_i$$

$$=\sum_{i=1}^{8}(-1)^{1+\xi_i+\eta_i+\zeta_i}(\xi+\xi_i-1)(\eta+\eta_i-1)(\zeta+\zeta_i-1)u_i$$

七、三棱柱单元

[局部坐标]　上、下底三角形可利用面积坐标，而沿高度方向则利用距离坐标来构成局部坐标. 设 ξ,η 取其第二、三面积坐标，而 ζ 取第二距离坐标，于是直角坐标系中的三棱柱与局部坐标系中的单位三棱柱（上下底是腰为 1 的等腰直角三角形，高为 1，见图 19.6）之间建立一一对应.

[型函数]

$$\varphi_1=(1-\xi-\eta)(1-\zeta) \qquad \varphi_4=(1-\xi-\eta)\zeta$$

$$\varphi_2=(1-\zeta)\xi \qquad \varphi_5=\zeta\xi$$

$$\varphi_3=\eta(1-\zeta) \qquad \varphi_6=\eta\zeta$$

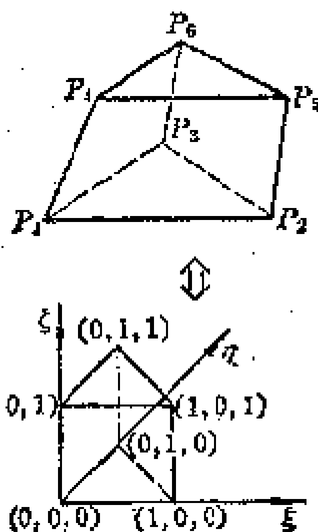


图 19.6

由于顶点 P_i 的局部坐标 (ξ_i,η_i,ζ_i) 取值为 1 或 0，φ_i 可统一写成

$$\varphi_i=[(1-\zeta_i)+(2\zeta_i-1)\zeta][(1-\xi_i-\eta_i)+(2\xi_i+\eta_i-1)\xi+(\xi_i+2\eta_i-1)\eta]$$

$$(i=1,2,\cdots,6)$$

[坐标变换及其雅可比式]

$$x=\sum_{i=1}^{6}\varphi_i x_i=(1-\xi-\eta)(1-\zeta)x_1+(1-\zeta)\xi x_2+\eta(1-\zeta)x_3$$

$$+(1-\xi-\eta)\zeta x_4+\zeta\xi x_5+\eta\zeta x_6$$

变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_6 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_6 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta-1 & \zeta-1 & \xi+\eta-1 \\ 1-\zeta & 0 & -\xi \\ 0 & 1-\zeta & -\eta \\ -\zeta & -\zeta & 1-\xi-\eta \\ \zeta & 0 & \xi \\ 0 & \zeta & \eta \end{bmatrix}$$

雅可比式为

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}=\begin{vmatrix} X_1\zeta+x_{21} & X_2\zeta+x_{31} & X_1\xi+X_2\eta+x_{41} \\ Y_1\zeta+y_{21} & Y_2\zeta+y_{31} & Y_1\xi+Y_2\eta+y_{41} \\ Z_1\zeta+z_{21} & Z_2\zeta+z_{31} & Z_1\xi+Z_2\eta+z_{41} \end{vmatrix}$$

式中 $X_1=x_1-x_2-x_4+x_5,\quad X_2=x_1-x_3-x_4+x_6$

其余的 Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 可类似定义.

八、基本单元的特点

综合上述,可知基本单元具有以下特点:

1° 基本单元形态简洁,因而得到广泛的应用. 坐标变换与插值的表达式都是线性(包括双线性、三线性)的,并具有同样的模式. 两个相邻的基本单元在公共边界上是相容的,即保持连续性.

2° 在单元分析中通常是把对 (x, y, z) 所作的微分与积分运算改用局部坐标来进行,这就需要用到变换矩阵及雅可比式 J. 除六面体单元外,其表达式比较简单. 如果六面体的形状单纯,例如常用一系列平行于直角坐标的正六面体为单元,则其坐标变换退化为线性的,变换矩阵也很简单.

3° 在选取单元的形状时,为了减少插值误差,三边形或四面体单元不能取得太尖或太扁; 四边形或六面体单元应当取凸的,而且不能太尖或太扁.

4° 基本单元的局部坐标系是通过内在的度量比坐标来构成的,与直角坐标系之间的对应关系是借助型函数直接表示出来. 由于在局部坐标系中单元是规则的,型函数容易构成,因此这种方法不但对基本单元行之有效,还可以推广到其他类型的单元(参看后两节).

§3 等参数单元与高次插值

一、等参数单元

如果单元具有如下特性:

(i) 每个待定函数(例如u)在节点P_i上只有一个参数值(即u_i)；当把节点P_i的坐标值(例如x_i)看作坐标变量(例如x)在节点P_i的参数值时，单元上每个待定函数与坐标变量的节点参数值具有相同的个数，即节点个数p.

(ii) 单元上变点P的坐标与插值函数的各分量同节点参数值之间的线性关系，具有统一的模式：

$$(*)=\sum_{i=1}^{p}\varphi_i(P)(*)_i \tag{14}$$

则称它为等参数单元．式中$\varphi_i(P)$是以局部坐标为变量的型函数，$(*)$表示变点P的坐标或插值函数的各分量，$(*)_i$表示对应的节点参数值．基本单元是等参数单元中最简单的一类(只有顶点是节点)．

如果节点不只取在顶点处，从型函数的定义与构成可知$\varphi_i(P)$的次数就会增加，插值函数的次数也相应增加．反过来，为了提高精度要对待定函数作高次插值，单元的节点也不能只取在顶点．总之，等参数单元适用于高次插值，其关键仍然是型函数的构成，单元转化为规则形状也不一定通过度量比坐标来实现，其节点的局部坐标只要选得使型函数表达式简洁就好了．至于局部坐标与直角坐标间的对应关系则可利用上述模式得出．等参数单元常用类型有六节点三边形，九、十节点三边形，八、九节点四边形，十节点四面体，二十节点四面体，十五节点五面体，二十节点六面体等单元．

为了使公式统一，对三边形、四面体，需要简化节点记号：首先同基本单元一样，只在单元顶点局部编号$i=1,2,\cdots,p$，并直接以i表示单元的顶点P_i，以$\overline{jk}$表示端点为P_j, P_k的线段中点，$\overline{j'k}$与$\overline{jk'}$则分别表示线段P_jP_k上靠近P_j与P_k的三分点，以$\overline{ijk}$表示$\triangle P_iP_jP_k$的形心(重心)，而以O表示单元的形心．在单元分析时，它们都不另外编号．此外，为缩短篇幅，对等参数单元，只列出型函数φ_i的表达式，其余部分可仿照§2计算．

二、多节点线元上的插值

[三节点线元] 在直线段P_1P_2上取其中点为另一节点P_3，它的距离坐标为$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$．相应的型函数是二次的：

$$\varphi_1=2\lambda_1\left(\lambda_1-\frac{1}{2}\right)\qquad \varphi_2=2\lambda_2\left(\lambda_2-\frac{1}{2}\right)\qquad \varphi_3=4\lambda_1\lambda_2$$

插值函数为

$$u_e(P)=\varphi_1u_1+\varphi_2u_2+\varphi_3u_3=2\lambda_1\left(\lambda_1-\frac{1}{2}\right)u_1+2\lambda_2\left(\lambda_2-\frac{1}{2}\right)u_2+4\lambda_1\lambda_2u_3$$

用原直角坐标，插值函数又可写成

$$u_e=\frac{2(x_2-x)(x_3-x)}{(x_2-x_1)^2}u_1+\frac{2(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)^2}u_2+\frac{4(x-x_1)(x_2-x)}{(x_2-x_1)^2}u_3$$

它就是 $u(x)$ 的二次拉格朗日插值多项式，式中 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$。

[四节点线元]　在直线段 P_1P_2 上取三分点为另二节点 P_3，P_4，其距离坐标分别为 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，相应的型函数是三次的：

$$\varphi_1=\frac{9\lambda_1}{2}\left(\lambda_1-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda_1-\frac{2}{3}\right)\qquad\varphi_3=\frac{27}{2}\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1-\frac{1}{3}\right)$$

$$\varphi_2=\frac{9\lambda_2}{2}\left(\lambda_2-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda_2-\frac{2}{3}\right)\qquad\varphi_4=\frac{27}{2}\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_2-\frac{1}{3}\right)$$

用原直角坐标可得三次拉格朗日插值多项式 $u(x)$：

$$u_e=\frac{9}{2(x_2-x_1)^3}[(x_2-x)(x_3-x)(x_4-x)u_1+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)u_2$$
$$+3(x_2-x)(x-x_1)(x_4-x)u_3+3(x_2-x)(x-x_1)(x-x_3)u_4]$$

式中
$$x_3=\frac{x_2+2x_1}{3},\qquad x_4=\frac{2x_2+x_1}{3}$$

三、平面等参数单元的型函数

[六节点三边形]　六节点包括三边形的三个顶点和三个边的中点（图 19.7）。选取面积坐标 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，其型函数是二次的：

$$\varphi_i=2\lambda_i\left(\lambda_i-\frac{1}{2}\right)\qquad(i=1,2,3)$$

$$\varphi_{\overline{ij}}=4\lambda_i\lambda_j\qquad(j\neq i)$$

[九、十节点三边形]　九节点包括三边形的三个顶点和三个边的三分点；十节点应补加单元的形心 O（图 19.8），其面积坐标为 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$。

十节点三边形的型函数是三次的：

$$\varphi_i=\frac{9\lambda_i}{2}\left(\lambda_i-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda_i-\frac{2}{3}\right)\qquad(i=1,2,3)$$

$$\varphi_{\overline{ij}}=\frac{27}{2}\lambda_i\lambda_j\left(\lambda_j-\frac{1}{3}\right)\qquad(i\neq j)$$

$$\varphi_0=27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

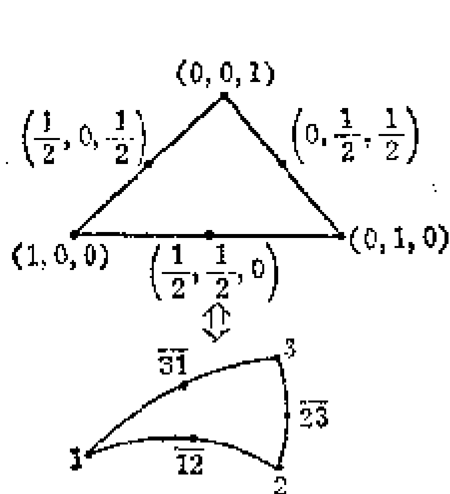


图　19.7

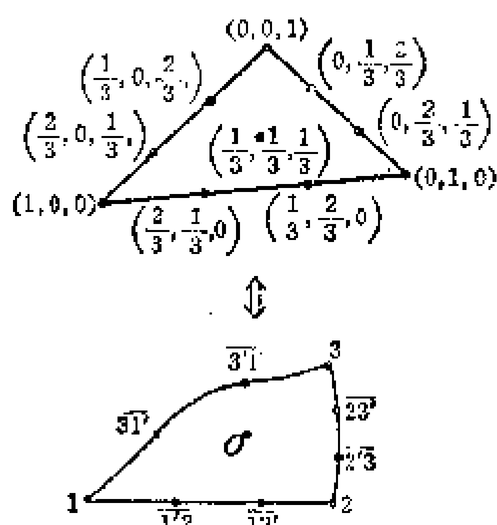


图　19.8

对九节点三边形，每个待定函数只有 9 个自由度的节点参数值，不可能确定 $\{\lambda_i\}$ 的三次齐次式中 10 个系数，型函数虽可构成但不唯一．例如参考上式取

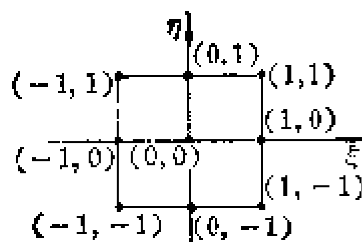
$$\varphi_i=\frac{9}{2}\lambda_i\left(\lambda_i-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda_i-\frac{2}{3}\right)+\alpha\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (i=1,2,3)$$

$$\varphi_{\overline{ij}}=\frac{27}{2}\lambda_i\lambda_j\left(\lambda_j-\frac{1}{3}\right)+\beta\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \qquad (i\neq j)$$

只要 $3\alpha+6\beta=27$ 显然它们都可以作为型函数，但所得到的三次插值是不完全的．为此需要对型函数或插值函数加以限制．可以证明，当 $\alpha=-\frac{9}{2}, \beta=\frac{27}{4}$ 时相应的插值包含完全的二次多项式（参看 § 4）．因此九节点三边形的型函数可写成

$$\varphi_i=\frac{9}{2}\lambda_i\left(\lambda_i-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda_i-\frac{2}{3}\right)-\frac{9}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (i=1,2,3)$$

$$\varphi_{\overline{ij}}=\frac{27}{2}\lambda_i\lambda_j\left(\lambda_j-\frac{1}{3}\right)+\frac{27}{4}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (i\neq j)$$



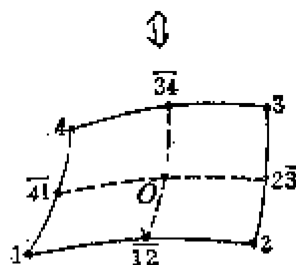


图　19.9

［八、九节点四边形］　八节点包括四边形的四个顶点与四个边的中点，九节点应补加单元的形心．先考虑局部坐标 (ξ, η) 中的正方形，中心在原点，其顶点坐标 $(\xi_i, \eta_i)=(\pm1, \pm1)$，等等（图 19.9）．

九节点四边形的型函数为

$$\varphi_i=\frac{1}{4}(\xi_i\xi)(\eta_i\eta)(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\quad (i=1,2,3,4)$$

$$\varphi_{\overline{ij}}=\frac{1}{2}(\xi_{\overline{ij}}\xi+\eta_{\overline{ij}}\eta)(1+\xi_{\overline{ij}}\xi+\eta_{\overline{ij}}\eta)(1-\xi^2_{\overline{ij}}\eta^2-\eta^2_{\overline{ij}}\xi^2)\quad (i\neq j)$$

$$\varphi_0=(1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

八节点四边形的型函数为

$$\varphi_i=-\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1-\xi_i\xi-\eta_i\eta)\quad (i=1,2,3,4)$$

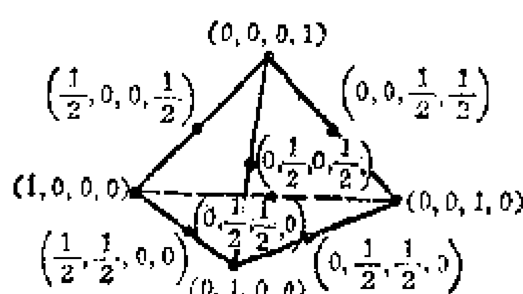
$$\varphi_{\overline{ij}}=\frac{1}{2}(1+\xi_i\xi+\eta_i\eta)(1-\xi_i^2\eta^2-\eta_i^2\xi^2)\quad (i\neq j)$$

四、空间等参数单元的型函数

［十节点四面体］　十节点包括四面体的四个顶点和六个棱边的中点（图19.10）。选取体积坐标，其型函数为

$$\varphi_i=2\lambda_i\left(\lambda_i-\frac{1}{2}\right)\quad (i=1,2,3,4)$$

$$\varphi_{\overline{ij}}=4\lambda_i\lambda_j\qquad (i\neq j)$$



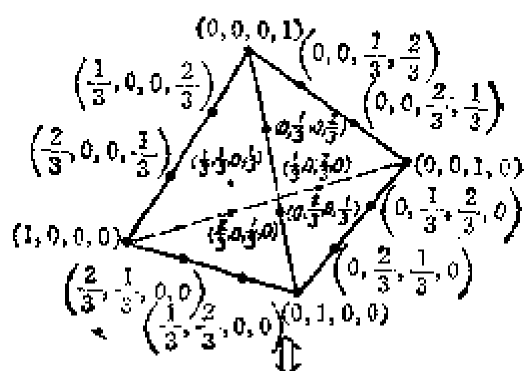


图　19.10　　　　　　　　　图　19.11

［二十节点四面体］　二十节点包括四面体的四个顶点，六个棱边的三分点（$\overline{1'2}$, $\overline{12'}$等共12个），以及四个边界面的形心（如$\overline{124}$等共4个）（图19.11）。其

型函数为:

$$\varphi_i=\frac{9}{2}\lambda_i\left(\lambda_i-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda_i-\frac{2}{3}\right)\quad (i=1,2,3,4)$$

$$\varphi_{\overline{ij}}=\frac{27}{2}\lambda_i\lambda_j\left(\lambda_j-\frac{1}{3}\right)\qquad (i\neq j)$$

$$\varphi_{\overline{ijk}}=27\lambda_i\lambda_j\lambda_k\qquad (i\neq j\neq k)$$

[十五节点五面体]　十五节点包括五面体的六个顶点，三个棱的中点以及上、下底六个边的中点(图 19.12)。

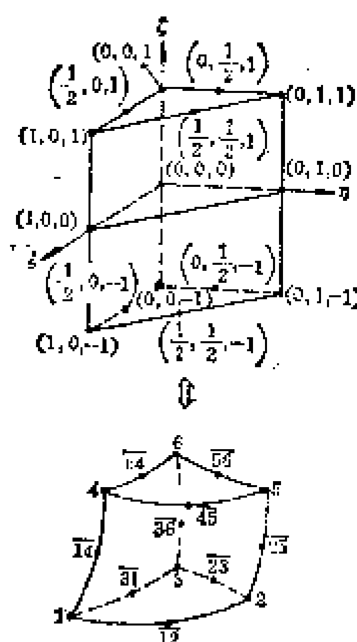


图　19.12

其型函数为

$$\varphi_i=\frac{1}{2}(1+\xi_i+\eta_i)\Big[(2-\xi_i-2\eta_i)\xi+(2-2\xi_i-\eta_i)\eta+\left(\frac{3}{2}\xi_i+\frac{3}{2}\eta_i-1\right)\zeta_i\zeta-(\xi_i+\eta_i)\Big]\big[(1-\eta_i)\xi+(1-\xi_i)\eta+\xi_i+\eta_i-1\big]\cdot(1+\zeta_i\zeta)\qquad (i=1,2,\cdots,6)$$

$$\varphi_j=(1-2\xi_j-2\eta_j)\big[(\eta_j-1)\xi+(\xi_j-1)\eta+1-\xi_j-\eta_j\big](1-\zeta^2)$$

(j 表示三棱中点)

$$\varphi_k=2(4\xi_k+4\eta_k-3)\big[2\xi_k\xi+2(1-\xi_k-\eta_k)\eta-1+2\eta_k\big]\big[2(1-\xi_k-\eta_k)\xi+2\eta_k\eta-1+2\xi_k\big](1+\zeta_k\zeta)$$

(k 表示上下底六边中点)

[二十节点六面体]　二十节点包括六面体的八个顶点和十二个棱边的中点(图 19.13)。其型函数为

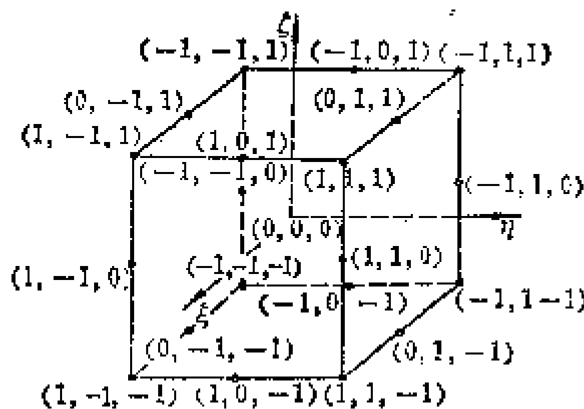


图 19.13

$$\varphi_i=\frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta-2)\quad(i=1,2,\cdots,8)$$

$$\varphi_{\overline{ij}}=\frac{1}{4}(1+\xi_{\overline{ij}}\xi)(1+\eta_{\overline{ij}}\eta)(1+\zeta_{\overline{ij}}\zeta)[1+(\xi^2_{\overline{ij}}-1)\xi^2$$

$$+(\eta^2_{\overline{ij}}-1)\eta^2+(\zeta^2_{\overline{ij}}-1)\zeta^2]\quad(i\neq j)$$

五、等参数单元的特点

综合上述，可知等参数单元具有以下特点：

1° 采用等参数单元较之基本单元效果更好：它不但可以增加插值的次数，以提高计算精度，而且还使得单元形状能够适应边界 Ω' 弯曲的特性。因为在构造型函数时，我们把局部坐标系中有规则的几何单元作为模型，再给定二者节点之间的对应关系，求出型函数后，才通过模式(14)得到二坐标系之间的关系。在整个过程都不考虑单元的边界形状，但从这些关系式看出单元的边界一般可取代数曲线或曲面。

例如，十节点三边形的边界(某 $\lambda_i=0$)可以是三次曲线。十节点四面体、十五节点五面体或二十节点六面体的棱边(某二局部坐标已定)都是二次曲线。其侧面则是由两族二次代数曲线织成的曲面。其形状完全由节点的位置或坐标 (x_i,y_i,z_i) 来确定。如果节点选成共线或共面，从模式(14)不难证明这些曲线退化为直线或平面曲线。因此在划分等参数单元时，Ω 的弯曲边界邻近的某些节点可以适当布置使单元与 Ω 的边界较好地拟合，以减少边界扰动误差。但在区域内部，节点还是选得使侧面较平直为好(甚至尽可能与直角坐标方向一致)，这样可简化坐标变换及其雅可比式，以减少计算量与误差积累。

2° 完全的 m 元 n 次多项式或 $m+1$ 元 n 次齐次多项式的项数为 $\frac{(n+m)!}{n!m!}$，

这公式对于判定相容条件是否满足，n 次插值是否完全，以及边界上节点的合理分布都很有用．例如，上述平面等参数单元坐标变换在边界上都是相容的；十节点、二十节点四面体的二、三次插值是完全的，单元之间沿边界侧面也是相容的．至于其他单元，在对插值函数形式加些限制(例如要求双二次)后也是相容的．

3° 由模式(14)可知，等参数单元之间的坐标变换的相容性与插值函数的连续性是等价的．如果边界上节点参数值的个数与插值多项式的项数相等，那末两相邻单元的插值函数在公共边界上的值通常可由其公共的节点参数值所唯一确定，连续性就得到保证．同理，公共边界上坐标的参数表达式也完全由其节点的坐标值所确定，从而使它们的坐标变换在边界上保持相容．例如，从二十节点六面体的型函数可以看出其插值多项式包括 ξ,η,ζ 三次多项式的 17 项(即 20 项中不出现 ξ^3,η^3,ζ^3 等三项)再补上三个四次项 $\xi^2\eta\zeta,\eta^2\xi\zeta,\zeta^2\xi\eta$，对于任一侧面(例如 $\zeta=1$)，插值函数(对 ξ,η)是双二次的共 8 项，与该侧面的节点(参数值)数相等．因此，只要相邻单元取同样的插值模式，相容性条件就得到满足．注意，增加节点(参数值)个数只能在一定程度上使插值多项式的次数提高，而无法解决其导数沿公共边界保持连续的问题．对这类问题就不宜采用等参数单元，而应改用协调单元．

4° 从九、十节点三边形单元的型函数的构成可以看出，如不对插值函数加以限制，它并不是唯一的．例如，对于十五节点五面体或二十节点六面体，三个平行的平面 $\zeta=\zeta+1=\zeta-1=0$ 可通过所有的节点．这表示对原型函数$\{\varphi_i\}$加上 ζ 的三次项 $a_i\zeta(\zeta^2-1)$，只要 $\sum a_i=0$ 它还是一组型函数．二十节点六面体单元对插值多项式的限制已如 3° 所述(即除去三次多项式中的 ξ^3,η^3,ζ^3 三项，而在十五个四次项中只补上三项：$\xi^2\eta\zeta,\eta^2\xi\zeta,\zeta^2\xi\eta$)，在这样限制(即对每个坐标变量都是二次的)下，型函数才是唯一的(例如，由于 ζ 的三次项不出现，a_i 只能取零)．同样，在十五节点五面体单元的型函数表达式中，$\xi^3,\eta^3,\zeta^3,\xi^2\eta,\xi\eta^2$ 等五个三次项并不出现，在这样条件下，型函数也是唯一的．

5° 不完全的高次插值对解的收敛性一般是不利的．但是，同九节点三边形一样，上述的二十节点六面体与十五节点五面体单元的插值对二次多项式是准确的(因为它们只在三次以上各项作调整)．

§4 拟协调单元

一、协调问题与拟协调单元

等参数单元有一个缺点，就是节点与插值次数无论如何增加、各单元之间都只能保证插值函数本身的连续性，这对于积分式仅含待定函数及其一阶导数的变分问题(例如空间弹性力学问题，其变形能中应变是位移的一阶偏导数)来说是适用的，但是对于包含高阶导数的变分问题(例如杆、板的弯曲问题，其变形能积分就含有待定的挠度函数的二阶偏导数)，对插值函数往往要求在整个区域有一阶的连续性．而这类所谓协调问题，等参数单元是无法解决的．这种光滑性的要求当然要首先在节点上反映出来，也就是说，单元的节点参数值应当包含待定函数的有关导数值．这一类单元可统称为拟协调单元．

[型函数] 假定在某个单元 Ω_e 上有 p 个节点，其局部编号为 $i=1,2,\cdots,p$．先考虑待定函数 $u=u(x,y,z)$ 及其一阶偏导数在节点 i 的参数值

$$\{u\}_i=(u_i,u_{xi},u_{yi},u_{zi})^T$$

每一节点参数值个数 $r=4$．于是每个单元共有 $4p$ 个节点参数值．如果插值函数 u_e 为三元 n 次多项式 $\{a^{(n)}\}^T\{R^{(n)}\}$，则其项数或各项系数一般有 $\frac{1}{6}(n+3)\cdot(n+2)(n+1)$ 个，显然次数 n 必须满足

$$N=\frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1)\geqslant rp=4p^*$$

这时对应于各节点参数值 $\{u\}_i$，可定义型函数为如下的 $4p$ 个 n 次多项式 $\{\varphi\}_i=(\varphi_i,\overline{\varphi}_i,\widetilde{\varphi}_i,\hat{\varphi}_i)^T\quad(i=1,2,\cdots,p)$:

(i) 在节点 i

$$\begin{array}{llll}\varphi_i=1, & \varphi_{ix}=0, & \varphi_{iy}=0, & \varphi_{iz}=0\\ \overline{\varphi}_i=0, & \overline{\varphi}_{ix}=1, & \overline{\varphi}_{iy}=0, & \overline{\varphi}_{iz}=0\\ \widetilde{\varphi}_i=0, & \widetilde{\varphi}_{ix}=0, & \widetilde{\varphi}_{iy}=1, & \widetilde{\varphi}_{iz}=0\\ \hat{\varphi}_i=0, & \hat{\varphi}_{ix}=0, & \hat{\varphi}_{iy}=0, & \hat{\varphi}_{iz}=1\end{array}$$

(ii) 在其余 $p-1$ 个节点 $j\neq i$，上述十六个函数即 $\varphi_i,\overline{\varphi}_i,\widetilde{\varphi}_i,\hat{\varphi}_i$ 及其一阶偏导数都等于零．

(iii)
$$\sum_{i=1}^{p}\varphi_i=1$$

---

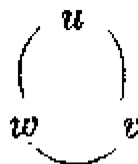
* 对一或二维的情况应改为 $(n+1)\geqslant rp$ 或 $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)\geqslant rp$．如果 u_e 规定为双 n 次多项式，则取 $(n+1)^2\geqslant rp$ 等等．

如果能把这些型函数构造出来，那末 u 的插值多项式 u_e 就可以表示为

$$u_e=\sum_{i=1}^{p}\{\varphi\}_i^T\{u\}_i=\sum_{i=1}^{p}(\varphi_i u_i+\overline{\varphi}_i u_{xi}+\tilde{\varphi}_i u_{yi}+\hat{\varphi}_i u_{zi})$$

如果待定函数是 (u,v,w)，其他条件同前，则其插值函数 (u_e,v_e,w_e) 可表示为

$$u_e=\sum_{i=1}^{p}\{\varphi\}_i^T\{u\}_i$$



或用矢量表示

$$\boldsymbol{u}_e=\sum_{i=1}^{p}\mathrm{diag}\{\varphi\}_i^T\{\boldsymbol{u}\}_i$$

［待定系数法］ 待定系数法是从 $4p$ 个节点参数值直接解出插值多项式的各项系数. 一般地说，完全的 n 次多项式系数 $\{a^{(n)}\}$ 的个数 $N=\frac{1}{6}(n+3)(n+2)\cdot(n+1)$ 会大于 $4p$，需要对多项式补加 $N-4p$ 个条件才能唯一地确定这些系数. 最简单的方式是象§3中那样，限制多项式的形式（例如限制多项式为三 k 次多项式，即对 x,y 或 z 都是 k 次的，系数的个数就减为 $(k+1)^3$）或除去某些高次项（即令相应的系数 a_i 为零）使得系数个数为 $4p$. 假定经过限制后的插值多项式改写为

$$u_e=\{a\}^T\{R\}=\{R\}^T\{a\},\quad \{a\}^T=(a_1,a_2,\cdots,a_{4p})$$

从 $4p$ 个节点参数值可得 $4p$ 个方程

$$\begin{bmatrix}u_i\\u_{xi}\\u_{yi}\\u_{zi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(u_e)_i\\(u_e)_{xi}\\(u_e)_{yi}\\(u_e)_{zi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\{R\}_i^T\\\{R_x\}_i^T\\\{R_y\}_i^T\\\{R_z\}_i^T\end{bmatrix}\{a\}\quad (i=1,2,\cdots,p)$$

式中 $\{R\}_i$，$\{R_x\}_i$ 等分别表示由多项式各项（项数为 $4p$）及其偏导数在节点 i 的数值所构成的列矢量. 把这单元的全部节点参数值排成列矢量 $\{u\}_e$，并以 U 表示上式右端 p 个 $4\times 4p$ 的系数矩阵依序排列所构成的 $4p\times 4p$ 的系数矩阵，则 $4p$ 个方程可简写为

$$\{u\}_e=U\{a\}$$

从此可解出各项的系数

$$\{a\}=U^{-1}\{u\}_e=A\{u\}_e \tag{15}$$

可以看出，在同样的限制下，型函数的各项系数实际上就是 $\{u\}_e$ 中一个分量取1，其余分量取零的解.

另一种方式是对插值函数一般表达式

$$u_e=\{R^{(n)}\}^T\{a^{(n)}\}=\sum_{k=1}^{N}a_k^{(n)}R_k^{(n)}$$

按光滑性要求或物理条件附加一定的约束，并假定这些约束可表示为 $N-4p$ 个关于 $\{a^{(n)}\}$ 的线性方程

$$Q\{a^{(n)}\}=\{b\} \tag{16}$$

式中 Q 为 $(N-4p)\times N$ 的系数矩阵．对于这完全的 n 次插值多项式，同样可从 $4p$ 个节点参数值得出如下 $4p$ 个方程

$$U^{(n)}\{a^{(n)}\}=\{u\}_e \tag{17}$$

式中 $U^{(n)}$ 表示 $4p\times N$ 的系数矩阵，只要选取约束条件适当*，一般解联立方程组(16)，(17)可得

$$\{a^{(n)}\}=G\begin{bmatrix}\{u\}_e\\ \{b\}\end{bmatrix},\qquad G=\begin{bmatrix}U^{(n)}\\ Q\end{bmatrix}^{-1}$$

把 $N\times N$ 矩阵 G 分成前 $4p$ 列与后 $(N-4p)$ 列二子矩阵：$G=[A^{(n)},A']$，则

$$\{a^{(n)}\}=A^{(n)}\{u\}_e+A'\{b\}$$

(15)或(17)表示 u 的节点参数值与插值多项式的系数之间的对应关系，对待定函数 v,w 也有类似的关系式．如果写成矢量形式，则插值多项式为

$$\boldsymbol{u}_e=\mathrm{diag}\{R\}^T\{a\}=\{a\}^T\mathrm{diag}\{R\} \tag{18}$$

［广义节点参数］ 如果直接用插值多项式(18)代替(1)式作单元分析，则变分方程(2)应改为

$$\sum_e\int_{\Omega_e}\{\delta a\}^T(B\mathrm{diag}\{R\}^T)^TD(B\mathrm{diag}\{R\}^T)\{a\}d\Omega$$

$$-\sum_e\int_{\Omega_e}\{\delta a\}^T\mathrm{diag}\{R\}f\,d\Omega-\sum_e\int_{\Omega_e\cap\Omega'}\{\delta a\}^T\mathrm{diag}\{R\}q\,d\Omega'=0 \tag{19}$$

式中各项 $\{R\}$ 相当于型函数，而系数 $\{a\}$ 起着节点参数值 $\{u\}_e$ 的作用，称为单元的广义节点参数．在上式和号后的单元系数矩阵与等价外力也是广义的，分别

---

* 注意，附加的约束应当结合单元的剖分来选定：有的约束对某种单元并不适用．例如，对三边形板元作三次插值，如果在三个顶点取函数 u 及其一阶偏导数为节点参数值，则 $r=3$，于是 $N-rp=10-9=1$，即需加一个条件．为了收敛性，要包含完全的二次多项式．而由于对称性，一般可令 x^2y 与 xy^2 二系数相等，但这种约束对于平行坐标轴的等腰直角三角形单元，可以论证相应的矩阵 $\begin{bmatrix}U^{(3)}\\ Q\end{bmatrix}$ 是奇异的．

记作

$$\widetilde{K}^{(e)}=\int_{\Omega_e}(B\text{diag}\{R\}^T)^T D(B\text{diag}\{R\}^T)d\Omega$$

$$\widetilde{f}^{(e)}=\int_{\Omega_e}\text{diag}\{R\}f d\Omega$$

$$\widetilde{q}^{(e)}=\int_{\Omega_e\cap\Omega'}\text{diag}\{R\}q d\Omega'$$

于是有

$$[K_{ij}^{(e)}]=A^T\widetilde{K}^{(e)}A$$

$$\{f^{(e)}\}=A^T\widetilde{f}^{(e)},\quad \{q^{(e)}\}=A^T\widetilde{q}^{(e)}$$

式中A为(15)中的矩阵．对于插值多项式$u_e=\text{diag}\{R^{(n)}\}^T\{\alpha^{(n)}\}$也有类似结果．

［节点参数值的变换］　节点参数值$\{u\}_i$中含有偏导数，它们在直角坐标系和局部坐标系中的数值是不同的．例如，直角坐标系中的节点参数值

$$\{u\}_i=(u_i,u_{xi},u_{yi},u_{zi})^T$$

在局部坐标系中为

$$\{u^*\}_i=\begin{bmatrix}u_i\\u_{\xi i}\\u_{\eta i}\\u_{\zeta i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{\partial x}{\partial\xi}&\frac{\partial y}{\partial\xi}&\frac{\partial z}{\partial\xi}\\0&\frac{\partial x}{\partial\eta}&\frac{\partial y}{\partial\eta}&\frac{\partial z}{\partial\eta}\\0&\frac{\partial x}{\partial\zeta}&\frac{\partial y}{\partial\zeta}&\frac{\partial z}{\partial\zeta}\end{bmatrix}_i\{u\}_i \tag{20}$$

式中四阶矩阵右下标i表示在节点i的值．反之

$$\{u\}_i=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{\partial\xi}{\partial x}&\frac{\partial\eta}{\partial x}&\frac{\partial\zeta}{\partial x}\\0&\frac{\partial\xi}{\partial y}&\frac{\partial\eta}{\partial y}&\frac{\partial\zeta}{\partial y}\\0&\frac{\partial\xi}{\partial z}&\frac{\partial\eta}{\partial z}&\frac{\partial\zeta}{\partial z}\end{bmatrix}_i\{u^*\}_i$$

记局部坐标系中的型函数为$\{\varphi^*\}_i$，直角坐标系中的型函数为$\{\varphi\}_i$，从表达式

$$u_e=\sum_{i_e}\{\varphi\}_i^T\{u\}_i=\sum_{i_e}\{\varphi^*\}_i^T\{u^*\}_i$$

可知它们具有如下的线性关系

$$\begin{bmatrix}\varphi_i\\ \bar{\varphi}_i\\ \tilde{\varphi}_i\\ \hat{\varphi}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial x}{\partial\zeta}\\ 0 & \dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\zeta}\\ 0 & \dfrac{\partial z}{\partial\xi} & \dfrac{\partial z}{\partial\eta} & \dfrac{\partial z}{\partial\zeta}\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}\varphi_i^*\\ \bar{\varphi}_i^*\\ \tilde{\varphi}_i^*\\ \hat{\varphi}_i^*\end{bmatrix} \tag{21}$$

实际上，凡是包含微分运算的部分，例如在$K_{ij}^{(e)}$的积分式中包含微分运算的矩阵B，边界的方向导数等等，在坐标变换下都要作相应的变换.

二、一维单元的高次插值

[三次插值]　一元三次多项式有四项，其系数一般可由四个节点参数值来确定. 现在取线段二端点为节点1，2，待定函数及其导数的节点值为节点参数值共四个，即

$$\{u\}_i=(u_i,u_{xi})^T\quad(i=1,2)$$

取距离坐标(λ_1,λ_2)的λ_2为局部坐标ξ，这样线元二端点的坐标分别为$\xi=0,\xi=1$，定义满足如下条件的三次多项式$\varphi_i^*(\xi)$，$\bar{\varphi}_i^*(\xi)(i=1,2)$为型函数:

(i) 在节点i上　　$\varphi_i^*=1,\varphi_{i\xi}^*=0,\bar{\varphi}_i^*=0,\bar{\varphi}_{i\xi}^*=1$

(ii) 在节点$j(\neq i)$上　$\varphi_i^*=0,\varphi_{i\xi}^*=0,\bar{\varphi}_i^*=0,\bar{\varphi}_{i\xi}^*=0$

(iii) $\sum\limits_{i=1}^{2}\varphi_i^*=\varphi_1^*+\varphi_2^*=1$

利用距离坐标的对称性从这些条件可分别定出

$$\varphi_1^*=2\lambda_1^2\left(\lambda_2+\frac{1}{2}\right)=2(1-\xi)^2\left(\xi+\frac{1}{2}\right),\qquad \bar{\varphi}_1^*=\lambda_1^2\lambda_2=(1-\xi)^2\xi$$

$$\varphi_2^*=2\lambda_2^2\left(\lambda_1+\frac{1}{2}\right)=2\xi^2\left(\frac{3}{2}-\xi\right),\qquad \bar{\varphi}_2^*=-\lambda_1\lambda_2^2=(\xi-1)\xi^2$$

于是在局部坐标系中，插值多项式可表示为

$$u_e=\sum_{i=1}^{2}\{\varphi^*\}_i^T\{u^*\}_i=\sum_{i=1}^{2}(\varphi_i^*u_i+\bar{\varphi}_i^*u_{\xi i})$$

如果要在直角坐标系中表示u_e，可用坐标变换

$$\lambda_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1},\quad \xi=\lambda_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{22}$$

$$\frac{dx}{d\xi}=x_2-x_1=x_{21}$$

代入上式并展开就得如下的埃尔米特三次插值多项式

$$u_e=\frac{1}{x_{21}^3}\Big[2(x_2-x)^2\Big(x-x_1+\frac{x_{21}}{2}\Big)u_1+(x_2-x)^2(x-x_1)x_{21}u_{x1}$$

$$+2(x-x_1)^2\Big(x_2+\frac{x_{21}}{2}-x\Big)u_2+(x-x_2)(x-x_1)^2x_{21}u_{x2}\Big]$$

〔五次插值〕 一元五次多项式有六项，其系数一般可由六个节点参数值来确定，现在取待定函数及其一、二阶导数的节点值为节点参数值，即

$$\{u\}_i=(u_i,u_{xi},u_{xxi})^T\quad(i=1,2)$$

同样取距离坐标 (λ_1,λ_2) 的 λ_2 为局部坐标 ξ，并定义满足如下条件的五次多项式 $\varphi_i^*(\xi),\bar{\varphi}_i^*(\xi),\bar{\bar{\varphi}}_i^*(\xi)\,(i=1,2)$ 为型函数：

(i) 在节点 i 上 $\varphi_i^*=1,\ \varphi_{i\xi}^*=0,\ \varphi_{i\xi\xi}^*=0$

$\bar{\varphi}_i^*=0,\ \bar{\varphi}_{i\xi}^*=1,\ \bar{\varphi}_{i\xi\xi}^*=0$

$\bar{\bar{\varphi}}_i^*=0,\ \bar{\bar{\varphi}}_{i\xi}^*=0,\ \bar{\bar{\varphi}}_{i\xi\xi}^*=1$

(ii) 在节点 $j(\neq i)$ 上 $\varphi_i^*,\ \bar{\varphi}_i^*,\ \bar{\bar{\varphi}}_i^*$ 及其一、二阶导数都等于零。

(iii) $\sum_{i=1}^{2}\varphi_i^*=\varphi_1^*+\varphi_2^*=1$

从这些条件并利用距离坐标的对称性可分别定出

$$\varphi_1^*=\lambda_1^3(1+3\lambda_2+6\lambda_2^2)=(1-\xi)^3(1+3\xi+6\xi^2)$$

$$\varphi_2^*=\lambda_2^3(1+3\lambda_1+6\lambda_1^2)=\xi^3(10-15\xi+6\xi^2)$$

$$\bar{\varphi}_1^*=\lambda_1^3\lambda_2(1+3\lambda_2)=(1-\xi)^3\xi(1+3\xi)$$

$$\bar{\varphi}_2^*=-\lambda_1\lambda_2^3(1+3\lambda_1)=-\xi^3(1-\xi)(4-3\xi)$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_1^*=\frac{1}{2}\lambda_1^3\lambda_2^2=\frac{1}{2}(1-\xi)^3\xi^2$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_2^*=\frac{1}{2}\lambda_1^2\lambda_2^3=\frac{1}{2}\xi^3(1-\xi)^2$$

于是在局部坐标系中，插值多项式可表示为

$$u_e=\sum_{i=1}^{2}\{\varphi^*\}_i^T\{u^*\}_i=\sum_{i=1}^{2}(\varphi_i^*u_i+\bar{\varphi}_i^*u_{\xi i}+\bar{\bar{\varphi}}_i^*u_{\xi\xi i})$$

如果要在直角坐标系中表示 u_e，同样可用坐标变换(22)代入并展开就得出如下埃尔米特五次多项式

$$u_e=\frac{(x_2-x)^3}{x_{21}^5}\Big\{[6(x-x_1)^2+3(x-x_1)x_{21}+x_{21}^2]u_1+$$

$$+(x-x_1)[3(x-x_1)+x_{21}]x_{21}u_{x1}+\frac{1}{2}(x-x_1)^2x_{21}^2u_{xx1}\Big\}$$

$$+\frac{(x-x_1)^3}{x_{21}^5}\Big\{[6(x_2-x)^2+3(x_2-x)x_{21}+x_{21}^2]u_2$$

$$+(x_2-x)[3(x_2-x)+x_{21}]x_{21}u_{x2}+\frac{1}{2}(x_2-x)^2x_{21}^2u_{xx2}\Big\}$$

式中在 u_{xxi} 前出现因子 x_{21}^2 就是由于导数在不同的坐标系中具有如下的关系:

$$u_\xi=\frac{dx}{d\xi}u_x=x_{21}u_x,\qquad u_{\xi\xi}=\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2u_{xx}+\frac{d^2x}{d\xi^2}u_x=x_{21}^2u_{xx}$$

[型函数与待定系数法] 以上述五次插值多项式为例, 写出五次插值函数的一般形式

$$u_e=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4+a_6x^5$$

式中六个待定系数 $a_1,\cdots,a_6$ 可由六个边界条件

$$u_e(x_i)=u_i\qquad\frac{du_e(x_i)}{dx}=u_{xi},\qquad\frac{d^2u_e(x_i)}{dx^2}=u_{xxi}\qquad(i=1,2)$$

来确定,它可归结为一组关于 a_i 的线性方程,其常数项就是这些节点参数值.

型函数不过是 $\{u^*\}_e$ 取单位矢量的特殊插值函数. 例如在局部坐标系中, 取

$$u_1=1,\quad u_2=u_{\xi1}=u_{\xi2}=u_{\xi\xi1}=u_{\xi\xi2}=0$$

则六个边界条件可表示为

$$u_e(0)=a_1=1\qquad u_e(1)=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$$

$$\frac{du_e(0)}{d\xi}=a_2=0\qquad\frac{du_e(1)}{d\xi}=a_2+2a_3+3a_4+4a_5+5a_6=0$$

$$\frac{d^2u_e(0)}{d\xi^2}=2a_3=0\qquad\frac{d^2u_e(1)}{d\xi^2}=2a_3+6a_4+12a_5+20a_6=0$$

由此解得

$$a_1=1,\quad a_2=a_3=0,\quad a_4=-10,\quad a_5=15,\quad a_6=-6$$

于是这个特殊的插值函数可写成

$$u_e=1-10\xi^3+15\xi^4-6\xi^5=(1-\xi)^3(1+3\xi+6\xi^2)$$

即上一小段的型函数 φ_1^*. 在局部坐标系中的其余型函数也可同样求出.

对一维的情况,用待定系数法求型函数是比较容易的. 但对二维的情况,特别是对于不完全的高次插值, 常常因为限制条件的补充使得型函数的定义与构成不那末简单. 为了避免型函数的直接构成,可采用广义节点参数的办法.

三、三边形单元的高次插值

局部坐标系取面积坐标,并令 $(\xi,\eta)=(\lambda_1,\lambda_2)$,型函数的定义与构成只在局

部坐标系中进行．

［二次插值］　二元(ξ,η)二次多项式或三元$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$二次齐次式共六项．因此需要六个节点参数值才能做到完全的二次插值．除了在三角形的顶点给函数值u_i外，可以在三个边中点$\overline{jk}$给定其法向导数值$\left[\dfrac{\partial u}{\partial n_i}\right]_{\overline{jk}}$，这里$n_i$表示在边$\lambda_i=0$上的外法向(图 19.14)．

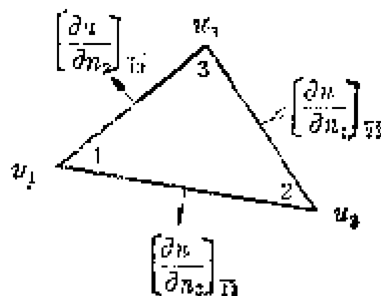


图　19.14

这是最简单的拟协调板元，在六个节点各取一参数值，其型函数在局部坐标系中可定义如下：

设有六个函数φ_i^*与$\bar{\varphi}_i^*$满足条件：

(i) 在顶点i上 $\varphi_i^*=1$，　$\bar{\varphi}_i^*=0$　　$(i=1,2,3)$

在边$\lambda_i=0$的中点$\overline{jk}$上 $\dfrac{\partial\varphi_i^*}{\partial n_i}=0$，$\dfrac{\partial\bar{\varphi}_i^*}{\partial n_i}=1$

(ii) 在其余五个节点上，φ_i^*，$\bar{\varphi}_i^*$及其外法向导数都等于零．

(iii) $\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i^*=1$

现在先来求在各边外法向导数的表达式．由于取$(\xi,\eta)=(\lambda_1,\lambda_2)$，而

$$\frac{\partial x}{\partial n_i}=\left[\frac{\partial x}{\partial n}\right]_{\lambda_i=0}=-\frac{y_{jk}}{l_i},\qquad \frac{\partial y}{\partial n_i}=\frac{x_{jk}}{l_i}$$

式中l_i表示边$\lambda_i=0$的线段长，即二顶点j,k的距离

$$l_i=\sqrt{x_{jk}^2+y_{jk}^2}$$

从§2三边形单元的逆变换矩阵可得λ_1,λ_2在各边的外法向导数值

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial n}\right]_{\lambda_i=0}=\dfrac{-1}{2Al_i}(y_{23}y_{jk}+x_{23}x_{jk})\\[2ex]\left[\dfrac{\partial\lambda_2}{\partial n}\right]_{\lambda_i=0}=\dfrac{-1}{2Al_i}(y_{31}y_{jk}+x_{31}x_{jk})\end{cases}$$

(轮换 $i\to j\to k$)

式中A为三角形面积．例如，在$\lambda_3=0$边上

$$\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial n}\right]_{\lambda_3=0}=\frac{1}{2Al_3}(y_{32}y_{12}+x_{32}x_{12})=\frac{\cos\angle 2}{H_1}$$

$$\left[\frac{\partial\lambda_2}{\partial n}\right]_{\lambda_3=0}=\frac{1}{2Al_3}(y_{31}y_{21}+x_{31}x_{21})=\frac{\cos\angle 1}{H_2}$$

同理

$$\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial n}\right]_{\lambda_1=0}=-\frac{1}{H_1},\qquad \left[\frac{\partial\lambda_2}{\partial n}\right]_{\lambda_1=0}=\frac{\cos\angle 3}{H_2}$$

$$\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial n}\right]_{\lambda_2=0}=\frac{\cos\angle 3}{H_1},\qquad \left[\frac{\partial\lambda_2}{\partial n}\right]_{\lambda_2=0}=-\frac{1}{H_2}$$

其中 H_i 表示 P_i 到底边的高度. 结果可统一写成

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\partial\lambda_i}{\partial n}\right]_{\lambda_i=0}=-\dfrac{1}{H_i} & (i=1,2)\\ \left[\dfrac{\partial\lambda_i}{\partial n}\right]_{\lambda_j=0}=\dfrac{\cos\angle k}{H_i} & (i\neq j\neq k)\end{cases}\tag{23}$$

有了(23)就不难导出这几个型函数. 例如, 对 φ_1^* 由条件(i)、(ii)可写成

$$\varphi_1^*=\lambda_1^2+c_1\lambda_2\lambda_3+c_2\lambda_1\lambda_3+c_3\lambda_1\lambda_2$$

式中 c_i 是待定系数. 令 $\lambda_3=1-\lambda_1-\lambda_2$, 再由于 $\left[\dfrac{\partial\varphi_1^*}{\partial n}\right]_{\lambda_i=0}$ 在三边的中点都等于零, 可得

$$c_1-c_2-c_3=0$$

$$\frac{1}{2H_2}(c_1-c_2+c_3)=\frac{\cos\angle 3}{H_1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\angle 1}{H_2}+\frac{\cos\angle 2}{H_1}\right)(c_1+c_2-c_3)=\frac{\cos\angle 2}{H_1}$$

从而可联立解出

$$c_1=c_2+c_3,\quad c_2=\frac{l_1\cos\angle 2}{l_3},\quad c_3=\frac{l_1\cos\angle 3}{l_2}$$

利用面积坐标的循环性可得 φ_2^*,φ_3^*. 对于 $\overline{\varphi}_1^*$ 同样很容易得出其表达式, 结果型函数及插值函数可统一写成

$$\begin{cases}\varphi_i^*=\lambda_i^2+\left(\dfrac{l_i}{l_k}\cos\angle j\right)\lambda_i\lambda_k+\left(\dfrac{l_i}{l_j}\cos\angle k\right)\lambda_i\lambda_j\\ \qquad\qquad+\left(\dfrac{l_i}{l_k}\cos\angle j+\dfrac{l_i}{l_j}\cos\angle k\right)\lambda_j\lambda_k\\ \overline{\varphi}_i^*=\dfrac{1}{H_i}(\lambda_i^2-\lambda_i)=\dfrac{2A}{l_i}(\lambda_i^2-\lambda_i) \qquad (i=1,2,3)\end{cases}$$

$$u_e=\sum_{i=1}^{3}\varphi_i^*u_i+\sum_{i=1}^{3}\overline{\varphi}_i^*\left(\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)_{\overline{jk}}$$

显然, 这种插值函数的导数沿单元的公共边界的连续性是无法保证的, 但由于它

能通过所谓分片检验的收敛准则*，因而可以作为非协调板元的位移（挠度）模式.

注意，由于这些节点参数值的定义与坐标系无关，因此上述的型函数在局部的面积坐标和整体的直角坐标中是一致的，即$\varphi_i=\varphi_i^*$，$\bar{\varphi}_i=\bar{\varphi}_i^*$　$(i=1,2,3)$.

〔三次插值〕　三次的二元(ξ,η)多项式或三元$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$的齐次式共十项，因此需要十个节点参数值，才能做到完全的三次插值，对每个顶点$i(i=1,2,3)$，取节点参数值为$\{u^*\}_i=(u_i,u_{\xi i},u_{\eta i})^T=(u_i,u_{\lambda_1 i},u_{\lambda_2 i})^T$，共九个，其余一个或取在形心$O\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$的函数值$u_0$，或改为一个限制条件. 对后一情况，可采用同九节点等参数单元一样的限制(§3)，即要求对于三元二次齐次多项式是完全的，对于$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$的齐次式

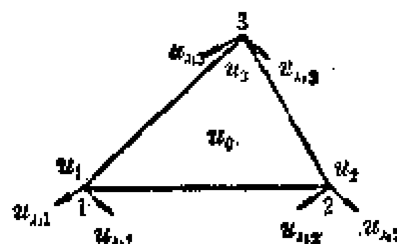


图　19.15

$$u_*=a_1\lambda_1^3+a_2\lambda_2^3+a_3\lambda_3^3+a_4\lambda_1^2\lambda_2+a_5\lambda_1^2\lambda_3+a_6\lambda_2^2\lambda_1$$
$$+a_7\lambda_2^2\lambda_3+a_8\lambda_3^2\lambda_1+a_9\lambda_3^2\lambda_2+a_{10}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

这条件可表示为系数$\{a^{(3)}\}$的线性方程

$$2\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\right)-\sum_{i=4}^{9}a_i+2a_{10}=0 \tag{24}$$

对十节点参数值的情况，可定义型函数$\varphi_0^*,\varphi_i^*,\bar{\varphi}_i^*,\tilde{\varphi}_i^*(i=1,2,3)$如下：

(i) 在形心O上　$\varphi_0^*=1$，　$\varphi_i^*=\bar{\varphi}_i^*=\tilde{\varphi}_i^*=0$　$(i=1,2,3)$

(ii) 在节点i上

$$\begin{aligned}
&\varphi_0^*=0, && \varphi_{0\xi}^*=0, && \varphi_{0\eta}^*=0\\
&\varphi_i^*=1, && \varphi_{i\xi}^*=0, && \varphi_{i\eta}^*=0\\
&\bar{\varphi}_i^*=0, && \bar{\varphi}_{i\xi}^*=1, && \bar{\varphi}_{i\eta}^*=0\\
&\tilde{\varphi}_i^*=0, && \tilde{\varphi}_{i\xi}^*=0, && \tilde{\varphi}_{i\eta}^*=1
\end{aligned}$$

(iii) 在其余节点$j(\neq i)$上，φ_0^*，φ_i^*，$\bar{\varphi}_i^*$，$\tilde{\varphi}_i^*$及其一阶偏导数都等于零.

*　如果在任何单元片（由若干相邻单元所组成）上，用某种插值函数进行有限元解法能得出常“应变”状态的解，则称这种插值函数能通过分片检验，而收敛性得到保证. 对薄板弯曲问题，如果在任一单元片的边界上给定对应于完全二次多项式$\{a^{(2)}\}^T\{R^{(2)}\}$的边界条件，而用某种插值函数求解的结果，得出挠度$w\equiv\{a^{(2)}\}^T\{R^{(2)}\}$，则称它能通过分片检验.

(iv) $\sum_{i=0}^{3}\varphi_i^*=\varphi_0^*+\varphi_1^*+\varphi_2^*+\varphi_3^*=1$

利用待定系数法可得局部坐标的型函数

$$\begin{cases}\varphi_0^*=27\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ \varphi_1^*=\lambda_1^2(3-2\lambda_1)-7\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ \varphi_2^*=\lambda_2^2(3-2\lambda_2)-7\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ \varphi_3^*=\lambda_3^2(3-2\lambda_3)-7\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{\varphi}_1^*=\lambda_1(2\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3)\\ \overline{\varphi}_2^*=\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_3)\\ \overline{\varphi}_3^*=\lambda_1\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2)\end{cases}\qquad \begin{cases}\widetilde{\varphi}_1^*=\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3)\\ \widetilde{\varphi}_2^*=\lambda_2(2\lambda_1\lambda_3-\lambda_1\lambda_2-\lambda_2\lambda_3)\\ \widetilde{\varphi}_3^*=\lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)\end{cases}$$

u的插值多项式可写成

$$u_e=\{\varphi^*\}_e^T\{u^*\}_e=\varphi_0^*u_0+\sum_{i=1}^{3}\{\varphi^*\}_i^T\{u^*\}_i$$

$$=\varphi_0^*u_0+\sum_{i=1}^{3}(\varphi_i^*u_i+\overline{\varphi}_i^*u_{\xi i}+\widetilde{\varphi}_i^*u_{\eta i})$$

转到直角坐标系，由于节点参数值u_0不变，再按(21)式(二维情况)可得其型函数

$\varphi_0=\varphi_0^*$

$$\begin{bmatrix}\varphi_i\\ \overline{\varphi}_i\\ \widetilde{\varphi}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&\dfrac{\partial x}{\partial\xi}&\dfrac{\partial x}{\partial\eta}\\ 0&\dfrac{\partial y}{\partial\xi}&\dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}\varphi_i^*\\ \overline{\varphi}_i^*\\ \widetilde{\varphi}_i^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&x_{13}&x_{23}\\ 0&y_{13}&y_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_i^*\\ \overline{\varphi}_i^*\\ \widetilde{\varphi}_i^*\end{bmatrix}\qquad(i=1,2,3)$$

对九节点参数值加限制的情况，把形心节点与φ_0^*去掉，型函数定义可照搬，至于其构成则可仿照九节点等参数单元那样办法，对上述每个型函数补加一项$\alpha\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，再要求满足限制条件(24)，从而定出$\alpha$. 结果，可得出九个型函数

$$\begin{cases}\varphi_1^*=\lambda_1^2(3-2\lambda_1)+2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ \varphi_2^*=\lambda_2^2(3-2\lambda_2)+2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ \varphi_3^*=\lambda_3^2(3-2\lambda_3)+2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{cases}\qquad \begin{cases}\overline{\varphi}_1^*=\lambda_1^2(\lambda_1-1)-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ \overline{\varphi}_2^*=\lambda_1\lambda_2^2+\dfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ \overline{\varphi}_3^*=\lambda_1\lambda_3^2+\dfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{\varphi}_1^* = \lambda_1^2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ \tilde{\varphi}_2^* = \lambda_2^2(\lambda_2 - 1) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ \tilde{\varphi}_3^* = \lambda_2\lambda_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{cases}$$

它们与直角坐标的型函数之间的关系以及插值多项式的表达式同前一情况一样，只要去掉 φ_0^* 就行了。

注意，这两种单元都不是协调的，虽然它们适用于平面弹性问题，但要作为板元还需要满足分片检验收敛的准则．因此，对九节点的三边形单元还要加上所谓平行三角剖分（即区域内各单元的三边都平行于三个固定的方向）的限制，才能作为板元．当然这种限制还可以放松到只要在 Ω 的各子区域作平行三角剖分就行了．

［五次插值］ 完全的二元五次多项式或三元五次齐次式共有 $\frac{(5+2)(5+1)}{2}=21$ 个系数，因此需要对单元给出 21 个插值条件．首先在每个顶点给定直到二阶导数的节点参数值：

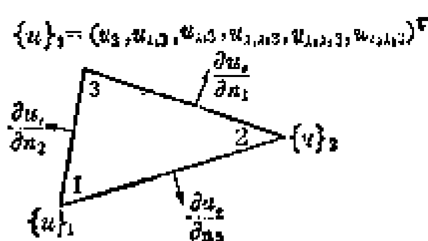


图 19.16

$$\{u\}_i = (u_i,\ u_{xi},\ u_{yi},\ u_{xxi},\ u_{xyi},\ u_{yyi})^T \quad (i=1,2,3)$$

共 18 个，其余三个条件可分别在三边上给定，使得插值函数的导数在单元之间保持连续．在边界上插值多项式 u_e 的外法向导数 $\frac{\partial u_e}{\partial n}$ 一般是四次多项式，应由五个独立的条件来唯一确定，而节点参数值对它仅提供 $\frac{\partial u_e}{\partial n}$ 与 $\frac{\partial^2 u_e}{\partial n^2}$ 在两端的数值，即只有四个独立的条件．为了 $\frac{\partial u_e}{\partial n}$ 在单元之间保持连续性，可对各边的 $\frac{\partial u_e}{\partial n}$ 加以限制．一般限制的方式有二种：

(i) 要求 $\frac{\partial u_e}{\partial n}$ 在边界为三次多项式，即其四次项的系数等于零．

(ii) $\frac{\partial u_e}{\partial n}$ 在边界中点的值为一节点参数值（图 19.16）．

这样就在三边上得出三个方程，连同原 18 个方程就可以唯一确定插值多项式．下面介绍在面积坐标系中的广义节点参数法．

设 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 的五次齐次项排列如下：

$\{R^{(5)}\} = (\lambda_1^5,\ \lambda_1^4\lambda_2,\ \lambda_1^4\lambda_3,\ \lambda_1^3\lambda_2^2,\ \lambda_1^3\lambda_2\lambda_3,\ \lambda_1^3\lambda_3^2,\ \lambda_2^5,\ \lambda_2^4\lambda_3,$

$$\lambda_2^4\lambda_1,\ \lambda_2^3\lambda_3^2,\ \lambda_2^3\lambda_3\lambda_1,\ \lambda_2^3\lambda_1^2,\ \lambda_3^5,\ \lambda_3^4\lambda_1,\ \lambda_3^4\lambda_2,$$

$$\lambda_3^3\lambda_1^2,\ \lambda_3^3\lambda_1\lambda_2,\ \lambda_3^3\lambda_2^2,\ \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2,\ \lambda_2\lambda_3^2\lambda_1^2,\ \lambda_3\lambda_1^2\lambda_2^2)^T$$

相应的系数为

$$\{a^{(5)}\}=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{18},a_{19},a_{20},a_{21})^T$$

而插值多项式为

$$u_e(x,y)=u_e(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\{R^{(5)}\}^T\{a^{(5)}\}$$

利用公式(23)对 u_e 求边 $\lambda_3=0$ 的外法向导数，可得

$$\left[\frac{\partial u_e}{\partial n}\right]_{\lambda_3=0}=\left(\frac{\partial u_e}{\partial\lambda_1}\right)_{\lambda_3=0}\frac{\cos\angle 2}{H_1}+\left(\frac{\partial u_e}{\partial\lambda_2}\right)_{\lambda_3=0}\frac{\cos\angle 1}{H_2}$$

$$=[5a_1\lambda_1^4+4a_2\lambda_1^3\lambda_2-a_3\lambda_1^4+3a_4\lambda_1^2\lambda_2^2-a_5\lambda_1^3\lambda_2-a_8\lambda_2^4$$

$$+a_9\lambda_2^4-a_{11}\lambda_1\lambda_2^3+2a_{12}\lambda_1\lambda_2^3-a_{21}\lambda_1^2\lambda_2^2]\frac{\cos\angle 2}{H_1}$$

$$+[a_2\lambda_1^4-a_3\lambda_1^4+2a_4\lambda_1^3\lambda_2-a_5\lambda_1^3\lambda_2+5a_7\lambda_2^4-a_8\lambda_2^4$$

$$+4a_9\lambda_2^3\lambda_1-a_{11}\lambda_1\lambda_2^3+3a_{12}\lambda_2^2\lambda_1^2-a_{21}\lambda_1^2\lambda_2^2]\frac{\cos\angle 1}{H_2}$$

依方式(i)，以 $\lambda_2=1-\lambda_1$ 代入上式并要 λ_1^4 项的系数为零，则得

$$5\nu_{12}a_1+(1-4\nu_{12})a_2-(1+\nu_{12})a_3-(2-3\nu_{12})a_4+(1+\nu_{12})a_5$$

$$+5a_7-(1+\nu_{12})a_8-(4-\nu_{12})a_9+(1+\nu_{12})a_{11}+(3-2\nu_{12})a_{12}-(1+\nu_{12})a_{21}=0$$

式中

$$\nu_{12}=\frac{H_2\cos\angle 2}{H_1\cos\angle 1}$$

考虑其余二边 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=0$ 的限制，同理可得另二方程．经过简化，三个方程可写成如下形式

$$5\beta_1a_7-(1+5\beta_1)a_8+a_9+(2+5\beta_1)a_{10}-a_{11}-5(1+\beta_1)a_{15}+a_{14}$$

$$+(4+5\beta_1)a_{16}-a_{17}-(3+5\beta_1)a_{18}+a_{19}=0$$

$$5\beta_2a_1+a_2-(1+5\beta_2)a_3-a_5+(2+5\beta_2)a_6-5(1+\beta_2)a_{13}$$

$$+(4+5\beta_2)a_{14}+a_{15}-(3+5\beta_2)a_{16}-a_{17}+a_{20}=0$$

$$5\beta_3a_1-(1+5\beta_3)a_2+a_3+(2+5\beta_3)a_4-a_5-5(1+\beta_3)a_7+a_8$$

$$+(4+5\beta_3)a_9-a_{11}-(3+5\beta_3)a_{12}+a_{21}=0$$

式中

$$\beta_1=-\frac{H_1\cos\angle 3}{H_2},\quad \beta_2=-\frac{H_2\cos\angle 3}{H_1}$$

$$\beta_3=-\frac{\nu_{12}}{1+\nu_{12}}=\frac{-H_2\cos\angle 2}{H_1\cos\angle 1+H_2\cos\angle 2}$$

对于方式(ii)，则可令 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$，代入上述 $\left[\frac{\partial u_e}{\partial n}\right]_{\lambda_3=0}$ 的表达式可得它在中点 $\overline{12}$ 的值；在其他二边界中点的值可同样得到．结果三个中点节点的参数值与系数之间的关系可写成

$$\begin{cases}5\beta_1\alpha_7+(3\beta_1-1)\alpha_8+\alpha_9-(\beta_1-2)\alpha_{10}+\alpha_{11}-5(\beta_1+1)\alpha_{13}+\alpha_{14}\\ \qquad -(3\beta_1+4)\alpha_{15}+\alpha_{17}-(\beta_1+3)\alpha_{18}+\alpha_{19}=-16H_1\left[\frac{\partial u_e}{\partial n}\right]_{\overline{23}}\\ 5\beta_2\alpha_1+\alpha_2+(3\beta_2-1)\alpha_3+\alpha_5-(\beta_2-2)\alpha_6-5(\beta_2+1)\alpha_{13}-(3\beta_2+4)\alpha_{14}\\ \qquad +\alpha_{15}-(\beta_2+3)\alpha_{16}+\alpha_{17}+\alpha_{20}=-16H_2\left[\frac{\partial u_e}{\partial n}\right]_{\overline{31}}\\ 5\beta_3\alpha_1+(1-3\beta_3)\alpha_2+\alpha_3+(2-5\beta_3)\alpha_4+\alpha_5-5(1+\beta_3)\alpha_7+\alpha_8\\ \qquad -(4+5\beta_2)\alpha_9+\alpha_{11}-(3+\beta_3)\alpha_{12}+\alpha_{21}=\frac{16H_1H_2}{H_1\cos\angle 1+H_2\cos\angle 2}\left[\frac{\partial u_e}{\partial n}\right]_{\overline{12}}\end{cases} \tag{25}$$

按(16)，(17)的记号不难列出相应的 3×21 矩阵 Q，而与 18 节点参数值相应的 18×21 矩阵 $U^{(e)}$ 则可写成

$$U^{(e)}=\begin{bmatrix}C_1 & O & O & O\\ O & C_2 & O & O\\ O & O & C_3 & O\end{bmatrix}$$

式中 C_i 为 6×6 矩阵：

$$C_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 20 & 0 & -8 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 4 & -4 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2\end{bmatrix}\qquad C_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2\\ 0 & -4 & 4 & 2 & -1 & 0\\ 20 & -8 & 0 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$C_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 20 & -8 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 20 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0\\ 20 & 0 & -8 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

由于其逆矩阵

$$C_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\5&-1&1&0&0&0\\5&-1&0&0&0&0\\10&-4&4&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\20&-8&4&1&-1&0\\10&-4&0&\frac{1}{2}&0&0\end{bmatrix}\qquad C_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\5&0&-1&0&0&0\\5&1&-1&0&0&0\\10&0&-4&0&0&\frac{1}{2}\\20&4&-8&0&-1&1\\10&4&-4&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$C_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\5&1&0&0&0&0\\5&0&1&0&0&0\\10&4&0&\frac{1}{2}&0&0\\20&4&4&0&1&0\\10&0&4&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$G=\begin{bmatrix}U^{(5)}\\Q\end{bmatrix}^{-1}$的后三行对任一方式都容易得到：先解出$\alpha_1\sim\alpha_{18}$再代入后三式就可解出$\alpha_{19}\sim\alpha_{21}$. 于是得到完全五次多项式系数与$\{u\}_i$, $\{b\}$等的线性关系:

$$\{\alpha^{(5)}\}=G\begin{bmatrix}\{u\}_i\\\{b\}\end{bmatrix}$$

左端就是广义节点参数，但对方式(ii)右端的$\{b\}$还不是节点参数值，它们要改为$\left[\dfrac{\partial u_e}{\partial n}\right]$在三边中点的值. 从(25)可知对$G$后三列还得分别乘上因子

$$-16H_1,\quad -16\,H_2,\quad \frac{16H_1H_2}{H_1\cos\angle 1+H_2\cos\angle 2}$$

注意，这时两种坐标系的节点参数值的变换已不是(20)，而要改为

$$\{u^*\}_i=\begin{bmatrix}1&0&0&&&\\0&\dfrac{\partial x}{\partial\lambda_1}&\dfrac{\partial y}{\partial\lambda_1}&&\mathbf{0}&\\0&\dfrac{\partial x}{\partial\lambda_2}&\dfrac{\partial y}{\partial\lambda_2}&&&\\&&&x_{13}^2&2x_{13}y_{13}&y_{13}^2\\&\mathbf{0}&&x_{13}x_{23}&x_{13}y_{23}+x_{23}y_{13}&y_{13}y_{23}\\&&&x_{23}^2&2x_{23}y_{23}&y_{23}^2\end{bmatrix}\{u\}_i$$

中点的外法向导数与坐标系无关.

四、四边形单元

[双三次插值(协调板元)] 二元双三次插值多项式共有$(3+1)^2=16$个系数，其一般形式可写成

$$\begin{aligned}\{a\}^T\{R\}=&a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2+a_7x^3+a_8x^2y\\&+a_9xy^2+a_{10}y^3+a_{11}x^3y+a_{12}xy^3+a_{13}x^2y^2\\&+a_{14}x^3y^2+a_{15}x^2y^3+a_{16}x^3y^3\end{aligned}$$

只要在每个顶点给定节点参数值$\{u\}_i=(u_i,u_{xi},u_{yi},u_{xyi})^T$就可以唯一确定这些系数.

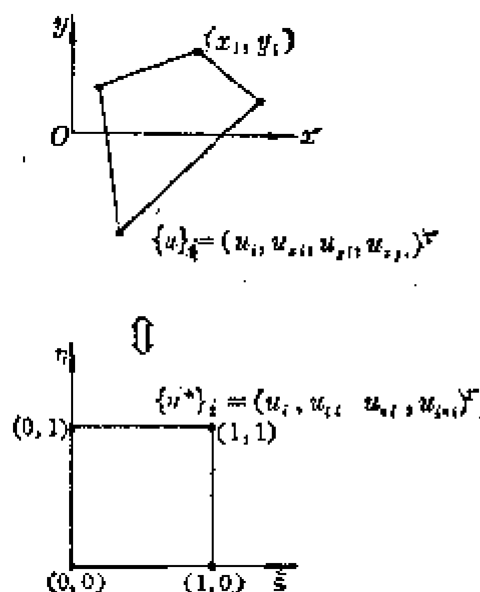


图 19.17

考虑局部坐标(ξ,η)中的单位矩形，对一维单元的三次插值的型函数表达式作适当的组合，不难看出其型函数依序可写成

$$\{\varphi_i^*(\xi,\eta)\}=\begin{bmatrix}4(1-\xi)^2\left(\xi+\frac{1}{2}\right)(1-\eta)^2\left(\eta+\frac{1}{2}\right)\\4\xi^2\left(\frac{3}{2}-\xi\right)(1-\eta)^2\left(\eta+\frac{1}{2}\right)\\4\xi^2\left(\frac{3}{2}-\xi\right)\eta^2\left(\frac{3}{2}-\eta\right)\\4(1-\xi)^2\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\eta^2\left(\frac{3}{2}-\eta\right)\end{bmatrix}$$

$$\{\overline{\varphi}_i^*(\xi,\eta)\}=\begin{bmatrix} 2(1-\xi)^2\xi(1-\eta)^2\left(\eta+\frac{1}{2}\right) \\ -2(1-\xi)\xi^2(1-\eta)^2\left(\eta+\frac{1}{2}\right) \\ -2(1-\xi)\xi^2\eta^2\left(\frac{3}{2}-\eta\right) \\ 2(1-\xi)^2\xi\eta^2\left(\frac{3}{2}-\eta\right) \end{bmatrix}$$

$$\{\widetilde{\varphi}_i^*(\xi,\eta)\}=\begin{bmatrix} 2(1-\xi)^2\left(\xi+\frac{1}{2}\right)(1-\eta)^2\eta \\ 2\xi^2\left(\frac{3}{2}-\xi\right)(1-\eta)^2\eta \\ -2\xi^2\left(\frac{3}{2}-\xi\right)(1-\eta)\eta^2 \\ -2(1-\xi)^2\left(\xi+\frac{1}{2}\right)(1-\eta)\eta^2 \end{bmatrix}$$

$$\{\overline{\overline{\varphi}}_i^*(\xi,\eta)\}=\begin{bmatrix} (1-\xi)^2\xi(1-\eta)^2\eta \\ -(1-\xi)\xi^2(1-\eta)^2\eta \\ (1-\xi)\xi^2(1-\eta)\eta^2 \\ -(1-\xi)^2\xi(1-\eta)\eta^2 \end{bmatrix}$$

容易证明，它们满足如下的条件：

(i) φ_i^*, $\dfrac{\partial\overline{\varphi}_i^*}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial\widetilde{\varphi}_i^*}{\partial\eta}$, $\dfrac{\partial^2\overline{\overline{\varphi}}_i^*}{\partial\xi\partial\eta}$ 在顶点 i 上等于1.

(ii) 其余函数及其一阶与混合二阶导数在各节点上都等于零.

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\varphi_i^*=\varphi_1^*+\varphi_2^*+\varphi_3^*+\varphi_4^*=1$

于是在局部坐标系中，插值多项式可写成

$$u_e=\sum_{i=1}^{4}\{\varphi^*\}_i^T\{u^*\}_i=\sum_{i=1}^{4}(\varphi_i^*u_i+\overline{\varphi}_i^*u_{\xi i}+\widetilde{\varphi}_i^*u_{\eta i}+\overline{\overline{\varphi}}_i^*u_{\xi\eta i})$$

注意，在两坐标系中，节点参数值之间的变换应取

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_{\xi i} \\ u_{\eta i} \\ u_{\xi\eta i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}y_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xyi} \end{bmatrix}$$

而型函数相应地有如下关系

$$\begin{bmatrix} \varphi_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \tilde{\varphi}_i \\ \bar{\bar{\varphi}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}y_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i^* \\ \bar{\varphi}_i^* \\ \tilde{\varphi}_i^* \\ \bar{\bar{\varphi}}_i^* \end{bmatrix} \qquad (i=1,2,3,4)$$

这种单元是协调单元.

[不完全的双三次插值] 节点参数值取$\{u\}_i=(u_i,u_{xi},u_{yi})^T$, 共有十二个插值条件,因此要唯一确定插值多项式,必须对它加以限制. 一般是从上述的完全双三次多项式中去掉后面高次项,即x^2y^2, x^3y^2, x^2y^3, x^3y^3等四项,而仍保持对称性. 注意,这种插值函数虽然少了四个高次项,但仍然包含完全的三次多项式,只是由于混合导数u_{xy}不取作节点值,在两单元之间u_e沿边界法向导数就无法保证其连续性. 尽管如此,它还满足分片检验的收敛准则,因此可以作为板元的挠度模式.

利用待定系数法,可以求出与局部坐标(ξ,η)相应的型函数为

$$\{\varphi_i^*\}=\begin{bmatrix} (1+\xi)(1+\eta)[(1+\xi)(1+\eta)-\xi\eta-2\xi(1+\xi)-2\eta(1+\eta)] \\ \xi(1+\eta)[\xi(1+\eta)-(1+\xi)\eta+2\xi(1+\xi)+2\eta(1+\eta)] \\ \xi\eta[\xi\eta-(1+\xi)(1+\eta)-2\xi(1+\xi)-2\eta(1+\eta)] \\ (1+\xi)\eta[(1+\xi)\eta-\xi(1+\eta)+2\xi(1+\xi)+2\eta(1+\eta)] \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{\varphi}_i^*\}=\begin{bmatrix} 2\xi(1+\xi)^2(1+\eta) \\ 2\xi^2(1+\xi)(1+\eta) \\ -2\xi^2(1+\xi)\eta \\ -2\xi(1+\xi)^2\eta \end{bmatrix}$$

$$\{\tilde{\varphi}_i^*\}=\begin{bmatrix} 2(1+\xi)\eta(1+\eta)^2 \\ -2\xi\eta(1+\eta)^2 \\ -2\xi\eta^2(1+\eta) \\ 2(1+\xi)\eta^2(1+\eta) \end{bmatrix}$$

在局部坐标系中,插值多项式可写成

$$u_e=\sum_{i=1}^{4}\{\varphi^*\}_i^T\{u^*\}_i=\sum_{i=1}^{4}(\varphi_i^*u_i+\bar{\varphi}_i^*u_{\xi i}+\tilde{\varphi}_i^*u_{\eta i})$$

§5　弹性理论与有限元解法

有限元法用来解弹性体的小变形问题是很有效的．这是由于变形能与外力势能或总势能可以表示为形式划一的二次泛函．由于弹性力学问题提法，特别是边界条件的复杂性，要使有限元解法灵活运用，还需要对各种问题作些分析与讨论．因此本节除了介绍各类问题与§1中B, D等有关的基本关系式外，还着重分析边界条件在有关变分问题中所起的作用，并讨论各类变分问题与微分方程定解问题的等价性．

一、三维的弹性问题

本节在直角坐标系(x, y, z)中讨论弹性体内部受力与形变的情况．为了简化论述，假设弹性体是单连通、均匀并各向同性的，必要时还用通常的矢量记号以突出其力学意义．

［应力与平衡方程］　弹性体在外力、温差等作用下，各部分之间将产生内力，表示内力的大小是作用面上受力的强度或单位面积所受的力，即所谓应力．对弹性体内的一点P，可在其邻近作一微元六面体，其棱边平行于坐标轴．六面体的六个面中有三个面其外法线方向分别与x轴，y轴，z轴同向（其余三个则与坐标轴反向），可分别称为x, y, z坐标面（或第1, 2, 3坐标面）．设σ_1, σ_2, σ_3分别表示作用于x, y, z坐标面的应力，并记σ_i的三个分量为σ_{i1}, σ_{i2}, σ_{i3}（对其余三个面的应力取号相反．例如，图19.18上所示的分量全是正的），这九个分量$\sigma_{ij}(i, j=1, 2, 3)$构成一个张量，称为应力张量．

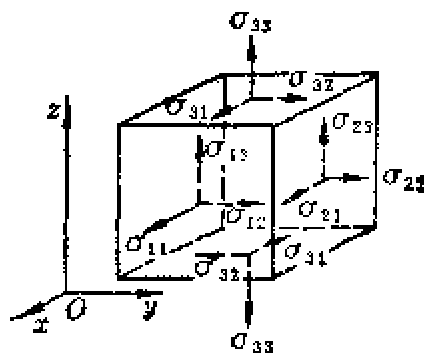


图　19.18

从图可看出，分量σ_{ii}表示第i坐标面上的正应力（受拉取正，受压为负）；而分量$\sigma_{ij}(i\neq j)$则表示沿第i坐标面剪应力的二分量（使扭角变成锐角的为正）．由微元六面体力矩的平衡可得剪应力互等定律，即

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\quad (i\neq j)$$

因此应力张量是对称的，其分量只有六个是独立的．在有限元解法中，一般是把这六个分量按如下次序排成列矢量，并记作

$$\{\sigma\}=(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12})^T$$

设过点 P 作一任意的斜面，其法线 n 的方向余弦为(n_1, n_2, n_3)，则利用与三坐标面围成的四面体的平衡条件可得作用于该斜面的应力 σ_n 的三个分量：

$$\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}n_i=\sigma_{1j}n_1+\sigma_{2j}n_2+\sigma_{3j}n_3 \quad (j=1,2,3)$$

于是 σ_n 在方向余弦为(m_1, m_2, m_3)的直线上的投影，即其分量为

$$\sigma_{nm}=\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}n_im_j$$

这表明，一个点的应力状态完全由该点的六个应力分量$\{\sigma\}$所决定．例如，作用于上述斜面的正应力为

$$\sigma_{nn}=\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}n_in_j$$

而沿该斜面的剪应力方向取 $n\times\sigma_n\times n$，大小等于

$$\tau_n=\sqrt{|\sigma_n|^2-\sigma_{nn}^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}n_i\right)^2-\left(\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}n_in_j\right)^2}$$

反过来，对于 $\tau_n=0$ 的斜面称为 P 点的应力主面，相应的法线称为 P 点的应力主轴，而其正应力 σ_{nn} 称为 P 点的主应力．可以证明，在弹性体内任意一点，一定存在三个互相正交的主应力，而且其中最大(小)的一个就是该点的极大(小)正应力．三个正应力之和

$$\Theta=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$$

称为体积应力，它在坐标变换下是个不变量，因而等于三个主应力之和．

设 $f=\{f\}=(f_1, f_2, f_3)^T$，表示作用于 P 点的体力(单位体积的外力)，对体积元素作积分或均值分析都可以推出力的平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_{1i}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{2i}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial z}+f_i=0 \quad (i=1,2,3) \tag{26}$$

［应变与几何方程］ 弹性体内任一点 $P(x, y, z)$在小变形后移到 $P'(x', y', z')$其位移函数为

$$u=(u, v, w)^T$$

式中 $$u=x'-x, \quad v=y'-y, \quad w=z'-z$$

它们是(x, y, z)的微量函数，假定有一微小线段 $PN=dr$ 其方向余弦为 (n_1, n_2, n_3)，经过小变形变为线段 $P'N'=dr'$，则沿该方向的正应变 ε_n 定义为单位伸长，即

$$\varepsilon_n=\frac{dr'-dr}{dr}$$

从变形前后的dr'与dr关于位移的表达式不难得出

$$\varepsilon_n=\{[n_1(1+u_x)+n_2u_y+n_3u_z]^2+[n_1v_x+(1+v_y)n_2+n_3v_z]^2+[n_1w_x+n_2w_y+(1+w_z)n_3]^2\}^{\frac{1}{2}}-1$$

展开右端的根式并略去高阶无穷小量(即位移导数的高次项),就得到

$$\varepsilon_n=n_1^2u_x+n_2^2v_y+n_3^2w_z+n_2n_3(w_y+v_z)+n_3n_1(u_z+w_x)+n_1n_2(v_x+u_y)$$

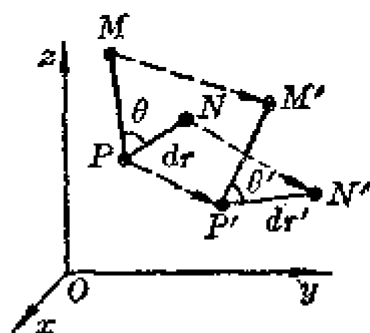


图　19.19

设另一线段PM的方向余弦为(m_1, m_2, m_3),变形前的夹角$\angle MPN=\theta$,则

$$\cos\theta=\sum_{i=1}^{3}n_im_i=n_1m_1+n_2m_2+n_3m_3 \tag{27}$$

设变形后的夹角　$\angle M'P'N'=\theta'$(图 19.19),则

$$\cos\theta'=\sum_{i=1}^{3}n_i'm_i'$$

根据变形前后两线段大小、方向的变化,不难得出

$$\begin{aligned}\cos\theta'=&(1-\varepsilon_n-\varepsilon_m)\cos\theta+2(n_1m_1u_x+n_2m_2v_y+n_3m_3w_z)\\&+(n_2m_3+n_3m_2)(w_y+v_z)+(n_3m_1+n_1m_3)(u_z+w_x)\\&+(n_1m_2+n_2m_1)(v_x+u_y)\end{aligned} \tag{28}$$

对照(27),(28)可知,只要在P点给定如下六个导数值:

$$\begin{cases}\varepsilon_{11}=u_x & \varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}=w_y+v_z\\ \varepsilon_{22}=v_y & \varepsilon_{31}=\varepsilon_{13}=u_z+w_x\\ \varepsilon_{33}=w_z & \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=v_x+u_y\end{cases} \tag{29}$$

就可以完全确定P点邻近的变形状态. ε_{ii}表示沿第i坐标轴的正应变, ε_{ij}表示经过小变形第i, j坐标方向之间的直角改变量即所谓剪应变(ε_{12}如图 19.20所示,变形后成锐角为正,成钝角

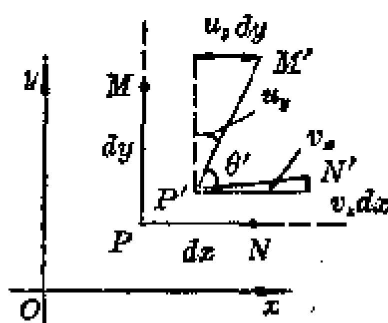


图　19.20

为负)．这六个量称为应变分量，记作

$$\{\varepsilon\}=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{23},\varepsilon_{31},\varepsilon_{12})^T$$

同样可以证明：在弹性体内任意一点，一定存在互相正交的应变主轴，变形后三轴交角仍然保持直角，即剪应变为零；三主轴的正应变称为主应变，而且其中最大(小)的一个就是该点的极大(小)的正应变．三个正应变之和

$$e=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$$

称为体积应变，也是个不变量，而且表示微元中每单位体积的改变量．对于各向同性体来说，应力主轴与应变主轴的方向还是一致的．§1中所述的变形能密度

$$dV=\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}=\frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}$$

正是把坐标系变换到共同的主轴方向并应用虎克定律而推导出来的．

关系式(29)称为几何方程，其矩阵形式为

$$\{\varepsilon\}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}\equiv Bu \tag{29'}$$

［物理方程与弹性系数］　对杆件作简单拉、压的小变形实验证明，单独的轴向(取为 x 轴)力不会引起剪应变，其正压力 σ_x 与正应变 ε_x 之间具有如下的线性关系

$$\sigma_x=E\varepsilon_x\quad 或\quad \sigma_{11}=E\varepsilon_{11}$$

如果考虑到沿 x 方向的伸长还伴有侧向收缩，则产生沿 y, z 方向的正应变

$$\varepsilon_y=\varepsilon_z=-\nu\varepsilon_x,\quad 或\quad \varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-\nu\varepsilon_{11}$$

这就是虎克定律，式中系数 E, ν 分别称为弹性模数和泊松比．从虎克定律就可以推导出应变与应力之间的一般关系式，即所谓物理方程

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{11}=\dfrac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})] & \varepsilon_{23}=\dfrac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{23}=\dfrac{1}{G}\sigma_{23} \\
\varepsilon_{22}=\dfrac{1}{E}[\sigma_{22}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{33})] & \varepsilon_{31}=\dfrac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{31}=\dfrac{1}{G}\sigma_{31} \\
\varepsilon_{33}=\dfrac{1}{E}[\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})] & \varepsilon_{12}=\dfrac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}=\dfrac{1}{G}\sigma_{12}
\end{cases} \tag{30}
$$

式中$G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$称为剪切弹性模数.

从(30)求逆得出应力与应变之间的关系式

$$\sigma_{ii}=\lambda e+2G\varepsilon_{ii}\ (i=1,2,3),\quad \sigma_{ij}=G\varepsilon_{ij}\ (i\neq j)$$

或写成矩阵形式:

$$
\{\sigma\}=\begin{bmatrix}
\lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G
\end{bmatrix}\{\varepsilon\}\equiv D\{\varepsilon\} \tag{31}
$$

式中$\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$与$G$称为拉梅系数，$e$就是体积应变，它与体积应力$\Theta$成正比:

$$e=\frac{1-2\nu}{E}\Theta \qquad 或 \qquad \Theta=\frac{E}{1-2\nu}e$$

式中比例常数$\dfrac{E}{1-2\nu}$称为体积弹性模数.

[边界条件] 弹性体Ω的边界Ω'承受面力

$$q=\{q\}=(q_1,\ q_2,\ q_3)^T$$

有三种方式: 固定支承，荷载支承和弹性支承. 假定Ω'接受这三种支承的部分分别记作Ω'_1，Ω'_2和Ω'_3，则其边界条件可表示为

1° 几何约束条件: 在Ω'_1上给定位移，即

$$\Omega'_1 \qquad u=\bar{u},\ v=\bar{v},\ w=\bar{w}$$

2° 面力平衡条件: 在Ω'_2上给定荷载即面力q，(n_1,n_2,n_3)表示Ω'_2上任一面积元素的外法线方向余弦. 由于应力要与面力平衡，从(27)可得其条件为

$$\Omega'_2 \qquad \sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}n_i=q_j \quad (j=1,2,3)$$

3° 耦合平衡条件：在 Ω_3' 上弹性体与另一弹性结构耦合，这些耦合边界上的位移既不受约束也不完全自由，而是接受与其位移偏差（相对于某一给定的位移值 $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$）成正比的弹性反力．每单位面积上它的三个分量可表示为

$$\begin{aligned}&-[c_{j1}(u-\bar{u})+c_{j2}(v-\bar{v})+c_{j3}(w-\bar{w})]\\&=-[c_{j1}u+c_{j2}v+c_{j3}w]+q_j\qquad(j=1,2,3)\end{aligned}$$

这里弹性支承系数矩阵 $C=(c_{ji})$ 是正定的，而 $q_j=c_{j1}\bar{u}+c_{j2}\bar{v}+c_{j3}\bar{w}$ 可看作给定的面力．同样，这反力应由 Ω_3' 上的应力来平衡．于是其条件可写成

$$\Omega_3'\qquad\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}n_i=-(c_{j1}u+c_{j2}v+c_{j3}w)+q_j\quad(j=1,2,3)$$

［外力势能及其计算公式］ 弹性体内及其边界上，凡给定的外力因变形而作功的部分都要累加起来，再补上负号可看作弹性体相对于外力系统的势能，即所谓外力势能 $-F(\boldsymbol{u})$．例如在弹性体内部除体力 $\boldsymbol{f}$ 外，也可能有部分施加集中的面力、线力或点力，这些力与该部分的位移的内积就是它们所作的功，因此都要算进去．在边界上，除几何约束的部分外，施加在其余部分的外力，包括面力、线力或点力对外力势能都有贡献，也要引入公式．为了简化计算公式，同式(1)～(7)只列出体力 $\boldsymbol{f}$ 与面力 $\boldsymbol{q}$ 一样，这里也不考虑集中力的情况．

假定在弹性体 Ω 的边界 Ω' 的部分 Ω_1',Ω_2' 和 Ω_3' 上分别施加几何约束、面力与弹性反力，则外力由于变形而作的功等于

$$W(\boldsymbol{u})=\int_{\Omega}\boldsymbol{u}^{\tau}\boldsymbol{f}\,d\Omega+\int_{\Omega_2'}\boldsymbol{u}^{\tau}\boldsymbol{q}\,d\Omega'+\int_{\Omega_3'}\boldsymbol{u}^{\tau}\left(\boldsymbol{q}-\frac{1}{2}C\boldsymbol{u}\right)d\Omega'$$

取内积记号

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u})_{\Omega}=\int_{\Omega}\boldsymbol{u}^{\tau}\boldsymbol{f}\,d\Omega\qquad(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})_{\Omega'}=\int_{\Omega'}\boldsymbol{u}^{\tau}\boldsymbol{q}\,d\Omega'$$

$$(C\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\Omega_3'}=\int_{\Omega_3'}\boldsymbol{u}^{\tau}C\boldsymbol{u}\,d\Omega'=(\boldsymbol{u},C\boldsymbol{u})_{\Omega_3'}$$

式中 $C=(c_{ij})$ 表示正定的弹性耦合系数矩阵，而 $-C\boldsymbol{u}$ 就是因位移 $\boldsymbol{u}$ 而产生的弹性反力．于是，外力所作的功 W 可简写为

$$W(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u})_{\Omega}+(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})_{\Omega_2'\cup\Omega_3'}-\frac{1}{2}(C\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\Omega_3'}$$

上式右边第三个积分是由于边界变形而产生的外功，它是 $\boldsymbol{u}$ 的二次泛函，因此改号后可看作弹性体变形能的一部分．于是总势能可写成

$$P(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}]-F(\boldsymbol{u})\tag{32}$$

式中$\frac{1}{2}[u,u]$表示变形能，$-F(u)$表示外力势能，即

$$[u,u]=\int_{\Omega}(Bu)^{T}D(Bu)\,d\Omega+\int_{\Omega_3'}u^{T}Cu\,d\Omega'$$

$$F(u)=(f,u)_{\Omega}+(q,u)_{\Omega_2'\cup\Omega_3'}$$

二、二维的弹性问题

本段只在直角坐标系中讨论平面应力、平面应变以及薄板弯曲等三个常见的问题. 对于抗拉薄板，可以认为沿板厚方向的正应力与剪应力都等于零. 一般以薄板的中面为xy平面，可假定

$$\sigma_{33}=0,\quad \sigma_{32}=\sigma_{31}=\sigma_{23}=\sigma_{13}=0$$

只有沿xy平面的三个应力分量：σ_{11}，σ_{22}和$\sigma_{12}=\sigma_{21}$，而且它们与坐标z无关. 这就是平面应力问题. 反过来，分析相当长棱柱体（例如重力坝）在受到沿长度不变的外力作用下的变形，可以认为各点只有平行其横截面（取为xy平面）的位移（即$w=0$），而且其位移沿长度不变（即u，v与z无关），从几何方程可知

$$\varepsilon_{33}=0,\quad \varepsilon_{31}=\varepsilon_{32}=\varepsilon_{23}=\varepsilon_{13}=0$$

只有沿xy平面的ε_{11}，ε_{22}和$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}$，而且与$z$无关，这就是平面应变问题.

分析薄板受横向荷载而引起的弯曲的情况，可以认为中面各点不作纵向位移，即当$z=0$时$u=v=0$，而板的横向位移w不沿厚度变化，即$w=w(x,y)$与z无关. 此外，由于沿板厚方向的正应力与剪应力虽不等于零，但远小于其他应力分量，对变形的影响可忽略不计，因此又有同平面应力问题一样的物理方程.

[平面应力问题] 作用于法线的方向余弦为(n_1,n_2)的截面上的应力分量为

$$\sum_{i=1}^{2}\sigma_{i1}n_i=\sigma_{11}n_1+\sigma_{21}n_2,\qquad \sum_{i=1}^{2}\sigma_{i2}n_i=\sigma_{12}n_1+\sigma_{22}n_2$$

1° 力的平衡方程

$$\Omega\qquad \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y}+f_1=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}+f_2=0$$

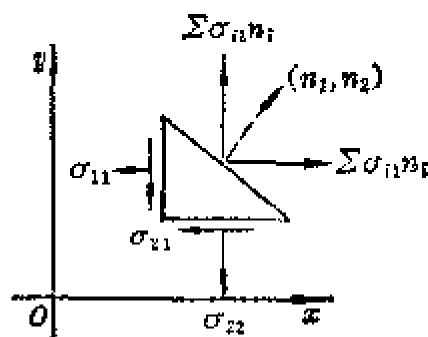


图 19.21

2° 边界条件 假定边界Ω'接受固定支承、荷载支承和弹性支承的部分分别记作Ω_1'，Ω_2'，Ω_3'，则其边界条件可表示为

$$\Omega_1'\qquad u=\bar{u},\quad v=\bar{v}$$

Ω_2' $\sigma_{1j}n_1+\sigma_{2j}n_2=q_j \quad (j=1,2)$

Ω_3' $\sigma_{1j}n_1+\sigma_{2j}n_2+c_{j1}u+c_{j2}v=q_j \quad (j=1,2)$

3° 几何方程

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

4° 物理方程

$$\begin{cases}\varepsilon_{11}=\dfrac{1}{E}(\sigma_{11}-\nu\sigma_{22})\\[2mm] \varepsilon_{22}=\dfrac{1}{E}(\sigma_{22}-\nu\sigma_{11})\\[2mm] \varepsilon_{12}=\dfrac{2}{E}(1+\nu)\sigma_{12}\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}\sigma_{11}=\dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22})\\[2mm] \sigma_{22}=\dfrac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\\[2mm] \sigma_{12}=\dfrac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}\end{cases}$$

5° 矩阵B与D

$$\{\varepsilon\}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\equiv B\boldsymbol{u}$$

$$\{\sigma\}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix}\equiv D\{\varepsilon\}$$

注意,从物理方程(30)还推导出

$$\varepsilon_{33}=-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22})=-\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})$$

它是单位板厚的改变量.

6° 总势能表达式形式上与(32)完全一样,只须注意这里是二维情况.

[平面应变问题] 力的平衡方程、边界条件、几何方程(因而矩阵B)以及总势能的表达式同平面应力问题一样. 从$\varepsilon_{33}=0$和(30)可推出其物理方程

$$\begin{cases}\varepsilon_{11}=\dfrac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{11}-\dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_{22}\right)\\[2mm] \varepsilon_{22}=\dfrac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{22}-\dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_{11}\right)\\[2mm] \varepsilon_{12}=\dfrac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}\sigma_{11}=\dfrac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\varepsilon_{11}+\dfrac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{22}\right)\\[2mm] \sigma_{22}=\dfrac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\dfrac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\\[2mm] \sigma_{12}=\dfrac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}\end{cases}$$

对照平面应力问题的物理方程看出，只要把其中的E，ν分别改成$\frac{E}{1-\nu^2}$，$\frac{\nu}{1-\nu}$，就得到平面应变问题的物理方程．这表示弹性系数为$E^*=\frac{E}{1-\nu^2}$，$\nu^*=\frac{\nu}{1-\nu}$的材料的平面应力问题同弹性系数为　$E=\frac{E^*(1+2\nu^*)}{(1+\nu^*)^2}$，　$\nu=\frac{\nu^*}{1+\nu^*}$的材料的平面应变问题是一致的．相应的矩阵$D$可写成

$$D=\frac{E}{1-2\nu}\begin{bmatrix}\frac{1-\nu}{1+\nu} & \frac{\nu}{1+\nu} & 0\\ \frac{\nu}{1+\nu} & \frac{1-\nu}{1+\nu} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}\end{bmatrix}$$

注意，从物理方程(30)还得出纵向的正压力

$$\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})=\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})$$

它是使棱柱体纵向无应变所应加于其两端的面力．

［薄板弯曲问题］　薄板的小变形可完全由中面（取作xy坐标平面）的挠度（即沿z方向的位移）$w=w(x,y)$来表示，也就是要得出板中面$z=0$变形后的弹性曲面$z=w(x,y)$，这时板中面点$(x,y,0)$的法向线段，依假定只作刚性位移变到该曲面的法向线段（图 19.22 右），其方向数为$(-w_x,-w_y,1)$．

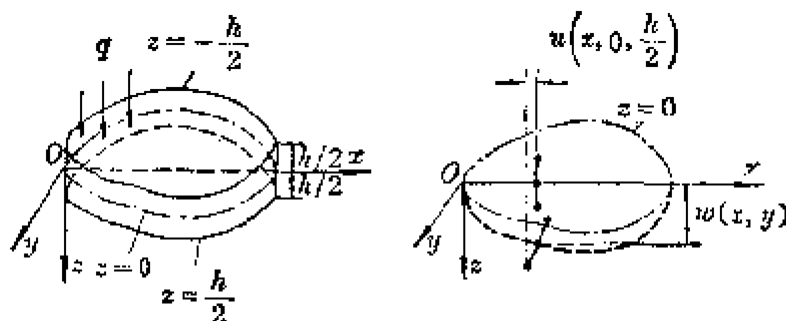


图　19.22

因此，薄板中任一点$(x,y,z)\left(-\frac{h}{2}\leqslant z\leqslant\frac{h}{2},\ h\text{为板的厚度}\right)$的位移分量可写成

$$u=\frac{z(-w_x)}{\sqrt{1+w_x^2+w_y^2}}\approx -zw_x$$

$$v=\frac{z(-w_y)}{\sqrt{1+w_x^2+w_y^2}}\approx -zw_y$$

$$w=w(x,y)$$

这里略去了微量 w_x, w_y 的高阶项．同样，我们可记变形后曲面的三个曲率分量的一阶近似为

$$k_{11}=-w_{xx},\qquad k_{22}=-w_{yy},\qquad k_{12}=k_{21}=-2w_{xy}$$

而把几何方程写成

$$\varepsilon_{11}=u_x=-zw_{xx}=zk_{11}$$
$$\varepsilon_{22}=v_y=-zw_{yy}=zk_{22}$$
$$\varepsilon_{12}=v_x+u_y=-2zw_{xy}=zk_{12}$$

物理方程中主要的应力分量则可写成

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22})=\frac{Ez}{1-\nu^2}(k_{11}+\nu k_{22})$$

$$\sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11})=\frac{Ez}{1-\nu^2}(k_{22}+\nu k_{11})$$

$$\sigma_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}=\frac{Ez}{2(1+\nu)}k_{12}$$

这些分量与上述的应变分量成对地出现于变形能的积分式中，并含有 z^2 的公因子．现在把 ε_{ij} 中的 z 移到 σ_{ij} 上并考虑如下积分

$$\begin{cases} M_{11}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{11}dz=d(k_{11}+\nu k_{22}) \\ M_{22}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{22}dz=d(k_{22}+\nu k_{11}) \\ M_{12}=M_{21}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{12}dz=\frac{1}{2}d(1-\nu)k_{12} \end{cases}\tag{33}$$

式中　$d=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

称为板的抗弯刚度，而 M_{11}, M_{22} 与 $M_{12}=M_{21}$ 就是同 x, y 轴正交的单宽截面上所受的弯矩与扭矩．

这些内力与应力之间显然有如下关系：

$$\sigma_{ij}=\frac{12M_{ij}z}{h^3}\qquad (i,j=1,2)$$

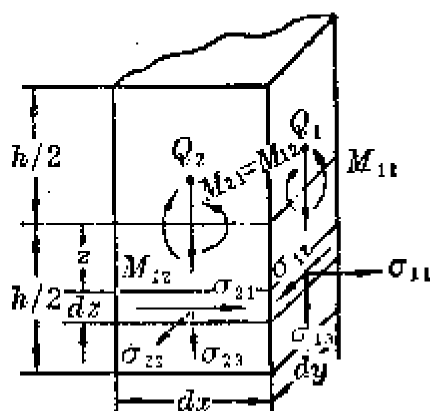


图　19.23

因此把 M_{ij} 称为广义应力，k_{ij} 称为广义应变，而(33)就称为广义的虎克定律．如果记

$$\{M\}=(M_{11},\ M_{22},\ M_{12})^{T}$$

$$\{k\}=(k_{11},\ k_{22},\ k_{12})^{T}$$

则变形能可写成

$$V=\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\iint_{\Omega_0}\{\sigma\}^{T}\{\varepsilon\}dxdy\right)dz$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{\Omega_0}\{M\}^{T}\{k\}dxdy \tag{34}$$

式中 Ω_0 表示薄板中面的区域. 由于待定函数只有位移分量 $w(x,y)$, 于是可令

$$B=\begin{bmatrix}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\end{bmatrix}\qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&\dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}$$

并把 $\{k\}=Bw$, $\{M\}=D\{k\}$ 代入(34), 得到

$$V(w)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega_0}(Bw)^{T}D^{T}(Bw)dxdy=\frac{1}{2}\iint_{\Omega_0}(Bw)^{T}D(Bw)dxdy$$

积分式中出现位移函数 w 的二阶偏导数, 与平面问题仅出现位移函数 u, v 的一阶偏导数有本质上的不同.

[弹性曲面与板的总势能]

1° 弹性曲面的微分方程　在应力分量中, σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} 不但对变形影响较大, 而且由它们所产生的弯矩、扭矩在把荷载传递到边界的作用中是基本的内力. 但直接同外力平衡的内力却是其余的分量. 因此, 为了得出弹性曲面的形状, 还要考虑到各应力分量 $\sigma_{3j}(j=1,2,3)$ 与 w 之间的关系.

由于薄板的体力 f_j 可忽略不计, 根据应力平衡方程(26)与上下板面的边界条件, 通过对 z 的积分可得

$$\sigma_{31}=\sigma_{13}=-\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)(w_{xxx}+w_{xyy})$$

$$\sigma_{32}=\sigma_{23}=-\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)(w_{xxy}+w_{yyy})$$

再代入(26)第三方程就能求出 σ_{33}. 一般地说, 下板面悬空即无面力, 于是依其边界条件: $[\sigma_{33}]_{z=\frac{h}{2}}=0$ 通过对 z 的积分可得

$$\sigma_{33}=-\frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right)^2\left(1+\frac{z}{h}\right)(w_{xxxx}+2w_{xxyy}+w_{yyyy})$$

最后根据施加于上板面的荷载强度 q(向下为正)的边界条件，并利用拉普拉斯算子 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 的记号可得

$$\Delta^2 w=\frac{q}{d}\qquad (x,y)\in\Omega_0$$

这就是弹性曲面的四阶微分方程，式中 d 为板的抗弯刚度．为了求解 w，还需要考虑沿薄板边缘(截面)的边界条件．

2° 板的边界条件　为了统一表达式，设 Q_1, Q_2 分别表示垂直于 x, y 轴的单宽截面上由 $\sigma_{31}=\sigma_{13}$, $\sigma_{32}=\sigma_{23}$ 所产生的切力

$$Q_1=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{31}\,dz=-d\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)$$

$$Q_2=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{32}\,dz=-d\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w)\qquad(35)$$

其次在中面区域 Ω_0 的边界 Ω_0' 上作切线方向 $\boldsymbol{s}$ 与外法线方向 $\boldsymbol{n}$，使 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{s}$ 与 z 轴构成右手的局部坐标系(参考图 19.24)，并设 $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦分别为 $(s_1,s_2,0)$, $(n_1,n_2,0)=(s_2,-s_1,0)$.

对比(33)，(35)显然有平衡方程：

$$Q_j=\frac{\partial M_{1j}}{\partial x}+\frac{\partial M_{2j}}{\partial y}\qquad(j=1,2)$$

如果以 Q_n 表示作用于外法向为 $\boldsymbol{n}$ 的单宽边缘截面的切力，则得平衡方程：

$$\Omega_0\qquad Q_n=\sum_{i=1}^{2}Q_i n_i=\frac{\partial M_{nn}}{\partial n}+\frac{\partial M_{sn}}{\partial s}$$

式中

$$M_{nn}=\sum_{i,j=1}^{2}M_{ij}n_i n_j,\quad M_{ns}=\sum_{i,j=1}^{2}M_{ij}n_i s_j=M_{sn}$$

它们分别表示作用于边缘截面的正应力 $\sigma_{nn}=\Sigma\sigma_{ij}n_i n_j$ 与剪应力 $\sigma_{ns}=\Sigma\sigma_{ij}n_i s_j$ 所产生的单宽弯矩与扭矩．

薄板的各种边界条件基本上可分为以下三类：

(i) 几何约束

(a) 给定某部分边界的挠度：$w=\bar{w}$．例如固定边、简支边都要给定 $w=0$.

(b) 给定边缘截面绕切向 s 的转角 ω_s: $\frac{\partial w}{\partial n}=-\omega_s$. 例如固定边除 $w=0$ 外，还要给定 $\frac{\partial w}{\partial n}=0$.

(ii) 荷载支承

(a) 在单宽边界上给定横向的线力荷载 p, 它是由边缘截面上的切力 Q_n 和扭矩的切向变化率所产生的切力来平衡，即

$$Q_n+\frac{\partial M_{sn}}{\partial s}=p \qquad (p\text{ 朝 } z \text{ 方向为正})$$

例如在自由边部分 $p=0$. 依上述公式左端包含 w 的三阶偏导数.

(b) 对单宽边缘截面给定绕切向 s 的力矩荷载 m_s, 即 $M_{nn}=m_s$. 例如在自由边部分同 p 一样，$m_s=0$.

(iii) 弹性支承

(a) 除横向的线力荷载外还承受与挠度成正比的弹性反力 $-cw$, 其中 $c>0$ 为弹性耦合系数，其条件可写成

$$Q_n+\frac{\partial M_{sn}}{\partial s}=p-cw$$

(b) 除了力矩荷载外还承受与截面绕切向的转角成正比的弹性反力矩 $c_0\frac{\partial w}{\partial n}$, 其中 $c_0>0$ 也是弹性耦合系数，其条件可写成

$$M_{nn}=m_s-c_0\omega_s=m_s+c_0\frac{\partial w}{\partial n}$$

注意，在同一边界上给定的二条件不能同样是(a)型或(b)型的.

3° 总势能的表达式 给定的二条件假定在中面区域 Ω_0 的边界 Ω_0' 上都是弹性支承，其平衡条件为

$$Q_n+\frac{\partial M_{sn}}{\partial s}=p-cw, \qquad M_{nn}=m_s-c_0\frac{\partial w}{\partial n} \quad (c,\ c_0>0)$$

变形能与外力势能的表达式可分别写成

$$V(w)=\frac{1}{2}[w,w]=\int\limits_{\Omega_0}(Bw)^TD(Bw)d\Omega_0+\int\limits_{\Omega_0'}cw^2ds+\int\limits_{\Omega_0'}c_0\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2ds$$

$$-F(w)=-\int\limits_{\Omega_0}qwd\Omega_0-\int\limits_{\Omega_0'}pwds+\int\limits_{\Omega_0'}m_s\frac{\partial w}{\partial n}ds$$

如果在部分边界 Ω_1', Ω_2' 上分别给定挠度 $w=\overline{w}$ 和绕切向 s 的转角 ω_s, 则在表达式的后面二线积分中应分别去掉与这些几何约束有关的积分线段. 于是总势能可写成

$$F(w)=\int_{\Omega_0}(Bw)^T D(Bw)d\Omega_0+\int_{\Omega_0'\setminus\Omega_1'}cw^2ds+\int_{\Omega_0'\setminus\Omega_2'}c_1\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2ds-\int_{\Omega_0}qwd\Omega_0$$
$$-\int_{\Omega_0'\setminus\Omega_1'}pwds+\int_{\Omega_0'\setminus\Omega_2'}m_s\frac{\partial w}{\partial n}ds$$

当其他部分改为荷载支承时，只要把该部分的 c 或 c_0 取零，表达式照旧.

三、一维的弹性问题

本段只讨论柱体的扭转问题，因为它是用扭转率作为广义应变的. 其他问题如杆的伸缩、梁的弯曲等可看作二维问题的简化而且与有限元法关系不大，从略.

〔圆柱的扭转〕 圆柱的半径为 R，圆柱的中心轴取作 z 轴，两端为 $z=0, z=l$，体力不计. 首先考虑只在两端截面受相反的力偶矩 M（图 19.24）而产生的扭转变形. 一般可假定只有沿各横截面产生抗扭的剪应力而其余的分量

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=0,\quad \sigma_{ii}=0\quad (i=1,2,3)$$

从物理方程可知它也是一种纯剪切变形. 在圆截面上取极坐标 (r,θ)，(r,θ,z) 也构成右手坐标系（图 19.24）. 对圆柱的扭转，还进一步假定

(i) $w=0$，即各圆截面无轴向位移；

(ii) 任一圆截面将绕圆心作微小的转动.

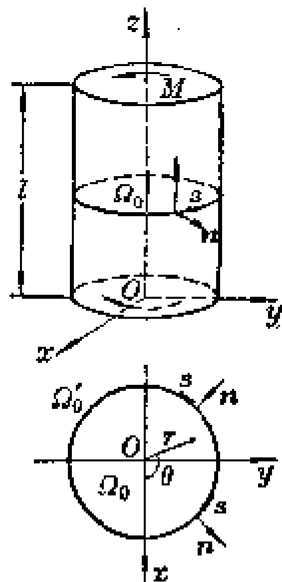


图 19.24

设转动角为 $\omega(z)$，则 $\omega(z)-\omega(0)$ 表示 z 截面相对于端面 $z=0$ 的扭转角，而 $\omega(l)-\omega(0)$ 就是柱体的总扭转角. 一般可令 $\omega(0)=0$，即一端固定.

考虑半径为 r 在 z 与 $z+dz$ 截面之间的环面，不难看出，由于相对扭转角 $d\omega$ 而产生的直角改变量即剪应变

$$\varepsilon_{z\theta}=r\frac{d\omega}{dz}$$

它是由环面上沿 θ 方向（或垂直于半径 r）的剪应力 $\sigma_{z\theta}=\tau$ 作用的结果，依虎克定律

$$\sigma_{z\theta}=\tau=G\varepsilon_{z\theta}=Gr\frac{d\omega}{dz}$$

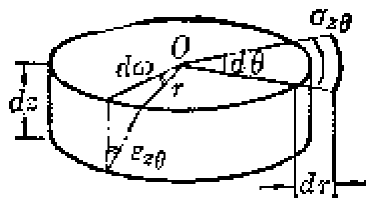


图 19.25

根据剪应力的对称性可得沿 z 截面的扭矩

$$M_z=\int_0^R\int_0^{2\pi}r\sigma_{z\theta}rdrd\theta=G\frac{\pi R^4}{2}\frac{d\omega}{dz}=GI_0\frac{d\omega}{dz}$$

式中 $I_0=\frac{\pi R^4}{2}$就是截面对中心轴的惯矩．于是变形能可写成

$$V(\omega)=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\sigma_{z\theta}\varepsilon_{z\theta}r dr d\theta dz=\frac{1}{2}\int_0^l M_z\frac{d\omega}{dz}dz=\frac{1}{2}\int_0^l GI_0\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 dz$$

因此，圆柱扭转问题的扭矩 M_z 与扭转率 $\alpha=\frac{d\omega}{dz}$ 可分别看作广义的剪应力与剪应变．系数 GI_0 称为柱体的抗扭刚度．对这问题，§1 中 B 是微分算子$\frac{d}{dz}$，D 是 GI_0．待定函数就是广义的位移即扭转角 $\omega(z)$．

推广到一般情况．如果沿柱体每单位长度施加分布荷载即扭矩 m_z，则平衡方程可写成

$$-\frac{d}{dz}\left(GI_0\frac{d\omega}{dz}\right)=m_z$$

而其边界条件同样有三种支承形式：

(i) 几何约束 对柱端截面给定扭转角 ω．例如$[\omega]_{z=0}=\bar{\omega}$

(ii) 荷载支承 对柱端截面施加一定的扭矩．例如

$$\left[GI_0\frac{d\omega}{dz}\right]_{z=l}=M_l \quad 或 \quad \left[\frac{d\omega}{dz}\right]_{z=l}=\frac{M_l}{GI_0}$$

(iii) 弹性支承 在柱端截面给定与扭角偏差成正比的弹性反矩．例如

$$\left[GI_0\frac{d\omega}{dz}+\bar{c}\,\omega\right]_{z=0}=M_0 \quad 或 \quad \left[\frac{d\omega}{dz}+\frac{\bar{c}}{GI_0}\omega\right]_{z=0}=\frac{M_0}{GI_0}$$

式中 $\bar{c}>0$ 为弹性耦合系数．

总势能的表达式．由于体力不计，对弹性支承的情况，变形能与外力势能可分别表示为 $\omega(z)$ 的泛函形式：

$$\frac{1}{2}[\omega,\omega]=\frac{1}{2}GI_0\int_0^l\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 dz+[\bar{c}\omega^2]_{z=l}+[\bar{c}\omega^2]_{z=0}$$

$$-F(\omega)=-[M_z\omega]_{z=l}-[M_z\omega]_{z=0}$$

若某端为荷载支承，可取该端 $\bar{c}=0$，则表达式照旧；若某端(例如 $z=0$)给定扭转角$[\omega]_{z=0}=\bar{\omega}$，则在上二式中含端点 $z=0$ 的项都要去掉，而总势能的表达式可写成

$$P(\omega)=\frac{1}{2}GI_0\int_0^l\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 dz+[\bar{c}\omega^2]_{z=l}-[M_z\omega]_{z=l}$$

［柱体的扭转］ 同圆柱扭转一样，假定$\sigma_{12}=0$，$\sigma_{ii}=0(i=1,2,3)$，体力与侧面的面力不计，只在两端施加力偶矩M，其扭转的位移分量可写成

$$u=-\alpha zy,\qquad v=-\alpha zx,\qquad w=\alpha\Psi(x,y)$$

其中 $\alpha=\frac{d\omega}{dz}$为扭转率，$\Psi(x,y)$称为翘曲函数。

几何方程 $\varepsilon_{ii}=0 \quad (i=1,2,3)$

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=0$$

$$\varepsilon_{31}=\varepsilon_{13}=\alpha(\Psi_x-y)$$

$$\varepsilon_{32}=\varepsilon_{23}=\alpha(\Psi_y+x)$$

物理方程 $\sigma_{31}=\sigma_{13}=G\alpha(\Psi_x-y)$

$$\sigma_{32}=\sigma_{23}=G\alpha(\Psi_y+x)$$

平衡方程 从$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y}=0$ 可得

Ω_0 $\qquad \Delta\Psi=\Psi_{xx}+\Psi_{yy}=0$

其中 Ω_0为柱体截面。

边界条件 设 Ω_0 的边界 Ω_0' 的外法线的方向余弦为(n_1,n_2)，由于柱侧面不受面力，从物理方程可得边界条件

Ω_0' $\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n}=yn_1-xn_2$

根据$\int_{\Omega_0'}\left(y\frac{\partial x}{\partial n}-x\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds=0$，从平衡方程与边界条件可知其一般解的形式为$\Psi(x,y)+c_1$（$c_1$为任意常数）。$\alpha$可由两端截面的力矩平衡条件来确定，例如从端面 $z=l$ 的扭矩

$$M=\iint_{\Omega_0}(\sigma_{31}y-\sigma_{32}x)dx\,dy=G\alpha\iint_{\Omega_0}[(\Psi_x-y)y-(\Psi_y+x)x]dxdy$$

可得出扭转率

$$\alpha=\frac{M}{G}\left[\iint_{\Omega_0}(\Psi_xy-\Psi_yx-x^2-y^2)\,dxdy\right]^{-1}$$

于是，$\Psi(x,y)$可看作位移，问题归结为求使总势能

$$P(\Psi)=\iint_{\Omega_0}(\Psi_x^2+\Psi_y^2)\,dxdy-\int_{\Omega_0'}(yn_1-xn_2)\Psi ds$$

$$=\iint_{\Omega_0}(\Psi_x^2+\Psi_y^2+x\Psi_y-y\Psi_x)dxdy$$

达到极值的解。

四、与有限元解法有关的问题

在讨论空间与平面问题时，为简化起见，坐标(x,y,z)改用(x_1,x_2,x_3)，$\boldsymbol{u}$仍表示位移列矢量，其三分量用(u_1,u_2,u_3)代替(u,v,w)；对体力$\boldsymbol{f}$等荷载仍用(f_1,f_2,f_3)表示其分量；对积分，除列式演算外，一般只用一个积分号表示。

［变形能的正定性与刚性位移］　弹性系数矩阵D是正定的，从变形能$V=0$可推出$\{\varepsilon\}\equiv 0$，即对应变$\{\varepsilon\}$来说它是正定的。但是对位移来说，它却退化为非负的，即不能由$\{\varepsilon\}=B\boldsymbol{u}\equiv 0$推出$\boldsymbol{u}=0$，因为弹性体还存在无应变的位移即刚性位移。

1°　一般空间问题　设位移矢量场$\boldsymbol{u}$的旋度$\mathrm{rot}\boldsymbol{u}$的分量为

$$(\omega_{23},\omega_{31},\omega_{12})=\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

它与位移分量以及应变分量之间的关系式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}(\omega_{ji}+\varepsilon_{ji})\\&\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k}=\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}-\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j}\end{aligned}\right.\qquad (i\neq j)\qquad \begin{matrix} & i & \\ k & & j\end{matrix}$$

因此，在小变形的假定下，应变$\{\varepsilon\}\equiv 0$表示整个弹性体除了作微小的位移外，还可作微小的转动，它的刚性位移可写成

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\omega_1\begin{bmatrix}0\\-x_3\\x_2\end{bmatrix}+\omega_2\begin{bmatrix}x_3\\0\\-x_1\end{bmatrix}+\omega_3\begin{bmatrix}-x_2\\x_1\\0\end{bmatrix}$$

式中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$表示平移的分量，$(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\frac{1}{2}(\omega_{23},\omega_{31},\omega_{12})$表示绕三坐标轴的转角，它们都是任意微小的常量。总之，弹性体无应变的微小刚性位移共有六个自由度，设

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm T} &\qquad &\boldsymbol{l}_1=(0,-x_3,x_2)^{\mathrm T}\\&\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm T} & &\boldsymbol{l}_2=(x_3,0,-x_1)^{\mathrm T}\\&\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm T} & &\boldsymbol{l}_3=(-x_2,x_1,0)^{\mathrm T}\end{aligned}$$

则上式可简写成

$$\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\boldsymbol{e}_i+\sum_{i=1}^{3}\omega_i\boldsymbol{l}_i$$

式中 e_i 就是第 i 坐标轴的单位矢量，l_i 就是绕第 i 坐标轴的旋臂矢量. 于是

$$\left.\begin{aligned}(f,e_i)_\Omega&=\int_\Omega fe_i d\Omega=\int_\Omega f_i d\Omega\\(f,l_i)_\Omega&=\int_\Omega fl_i d\Omega=\int_\Omega (f_j x_k-f_k x_j)d\Omega\end{aligned}\right\}\quad (i=1,2,3)$$

分别表示分布体力 f 对弹性体的合力与合力矩沿第 i 坐标轴方向的分量. 对面力 q 等分布荷载也有类似的结果.

2° 平面应力、应变问题　由于 $u_3=0$，刚性位移简化为

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\omega_3\begin{bmatrix}-x_2\\x_1\end{bmatrix}=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\omega_3l_3$$

其自由度等于 3. 分布荷载与 e_i，l_3 的内积也有类似的定义与含意.

3° 薄板弯曲问题　由于位移分量只有挠度，刚性位移可写成

$$u_3=\alpha_3+\omega_1x_2-\omega_2x_1\quad (\text{即}\quad w=\alpha_3+\omega_1y-\omega_2x)$$

其自由度等于 3. 内积

$$(q,1)_{\Omega_0}=\int_{\Omega_0}qd\Omega,\quad (q,x_2)_{\Omega_0}=\int_{\Omega_0}qx_2d\Omega_0,\quad (q,-x_1)_{\Omega_0}=\int_{\Omega_0}-qx_1d\Omega_0$$

分别表示分布荷载 q 沿中面的合力以及绕 x_1，x_2 轴的合力矩.

4° 圆柱扭转问题　根据假定 $w=0$ 与广义剪应变，即扭转率 $\alpha=\dfrac{d\omega}{dz}=0$ 可得无应变的刚性位移为 $\omega=\omega_3$. 相应的旋臂矢量为 l_3. 这时，位移也可写成

$$u_1=-x_2\omega_3,\qquad u_2=x_1\omega_3\quad (\text{即}\quad u=-y\omega,\ v=x\omega)$$

其自由度等于 1. 设在端面给定分布荷载切力 Q(其分布，严格地说，应与剪应力 σ_{rg} 相同)，则内积 $(Q,l_3)_{\Omega_0}$ 就是沿端面的合力矩 M.

[变分问题的可解性]　这里只讨论一般空间问题、薄板弯曲问题与圆柱扭转问题，其他问题类推.

1° 一般空间问题　先考虑边界纯荷载支承的情况. 从 § 1 可以看出，求解位移函数 u 使弹性体的总势能达到极小值，即

$$P(u)=\frac{1}{2}[u,u]-F(u)=\min$$

的变分问题可以归结为求解变分方程

$$\delta P(u)=[u,\delta u]-F(\delta u)=0\quad (\text{对一切 }\delta u)$$

的问题，其中位移 u 的变分力学上称为虚位移，而积分

$$[u,\delta u]=\int_\Omega (Bu)^\tau D\,(B\delta u)d\Omega=\int_\Omega (B\delta u)^\tau D(Bu)\,d\Omega$$

称为虚功泛函，它是位移 u 和虚位移 δu 的双线性泛函。

上面已经指出，变形能 $\frac{1}{2}[\delta u, \delta u]=0$ 只能得出 δu 是任意刚性的虚位移。反之，对一切非刚性的虚位移 δu，$[\delta u, \delta u]>0$。因此利用等式

$$P(u+\delta u)-P(u)=[u,\delta u]-F(\delta u)+\frac{1}{2}[\delta u,\delta u]$$

可以证明，变分问题有解的充分必要条件是

$$F(\delta u)=0 \quad (\text{对一切刚性的虚位移 } \delta u)$$

由于刚性位移的自由度为 6，$F(\delta u)=0$ 又可分写为 6 个条件

$$F(e_i)=\int_\Omega f e_i d\Omega+\int_{\Omega'} q e_i d\Omega'=0 \quad (i=1,2,3)$$

$$F(l_i)=\int_\Omega f l_i d\Omega+\int_{\Omega'} q l_i d\Omega'=0 \quad (i=1,2,3)$$

这表明，要使弹性体在纯荷载支承下达到平衡状态的充分必要条件就是外力对整个弹性体所产生的合力与合力矩都等于零。

反过来，设变分问题有一解 u_0，则位移 u_0 与任意微小的刚性位移 δu 之和 $u_0+\delta u$ 也是它的解，这表明弹性体的平衡状态可以相差一个微小的刚性位移，具有 6 个自由度。换句话说，解的一般形式可写成

$$u=u_0+\sum_{i=1}^{3}\alpha_i e_i+\sum_{i=1}^{3}\omega_i l_i$$

如果边界 Ω' 上还有一部分受几何约束或弹性支承，则有解的充分必要条件的个数或自由度都会相应地减少，只要这部分边界条件使弹性体不可能有微小的刚性位移，则问题的解存在而且唯一。例如当 u 在部分边界 Ω_1' 上给定位移值时，变分方程改为

$$\delta P(u)=[u,\delta u]-F(\delta u)=0 \quad (\text{对于}\{\delta u \mid [\delta u]_{\Omega_1'}=0\})$$

只要 Ω_1' 包含不共线的三点，条件 $[\delta u]_{\Omega_1'}=0$ 就排除一切刚性的虚位移，解存在的充分必要条件的个数等于零了。如果在部分边界 Ω_3' 上施加弹性支承，则从变形能

$$\frac{1}{2}[u,u]=\frac{1}{2}\int_\Omega (Bu)^T D(Bu)\,d\Omega+\frac{1}{2}\int_{\Omega_3'} u^T C u\,d\Omega'=0$$

与二积分的正定性可得

$$Bu\equiv 0,\quad [u^T C u]_{\Omega_3'}\equiv 0$$

而 C 的正定性又推出 $[u]_{\Omega_3'}\equiv 0$。因此，只要 Ω_3' 包含不共线的三点，那末变形能

$\frac{1}{2}[u,u]$对位移 u 就是正定的，问题的解也就存在而且唯一.

2° **薄板弯曲问题**　考虑纯荷载支承的情况，其变形能与外力势能可用广义应变表示如下

$$\frac{1}{2}[w,w]=\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}(Bw)^{\mathrm{T}}D(Bw)d\Omega_0$$

$$-F(w)=-\left[\int_{\Omega_0}qwd\Omega_0+\int_{\Omega_0'}pwds-\int_{\Omega_0'}m_sw_nds\right]$$

变分问题

$$P(w)=\frac{1}{2}[w,w]-F(w)=\min$$

可归结为求解变分方程

$$\delta P(w)=[w,\delta w]-F(\delta w)=0\quad(\text{对一切虚位移 }\delta w)$$

同样$[\delta w,\delta w]=0$ 只能得出广义应变 $B(\delta w)\equiv 0$，刚性虚位移 δw 可表示为

$$\delta w=a_3+\omega_1y-\omega_2x,$$

其自由度等于3，而变分方程有解的充分必要条件是

$$F(\delta w)=0\quad(\text{对一切刚性虚位移 }\delta w)$$

由于 $s_1=-n_2=-\frac{\partial y}{\partial n}$，$s_2=n_1=-\frac{\partial x}{\partial n}$，上式可分写为三个条件:

$$\int_{\Omega_0}qd\Omega_0+\int_{\Omega_0'}pds=0$$

$$\int_{\Omega_0}qyd\Omega_0+\int_{\Omega_0'}pyds+\int_{\Omega_0'}s_1m_sds=0$$

$$-\int_{\Omega_0}qxd\Omega_0-\int_{\Omega_0'}pxds+\int_{\Omega_0'}s_2m_sds=0$$

前一条件是沿板厚度方向的外力要取得平衡使板不产生移动；后二条件分别表示外力对板所产生的绕 x,y 轴方向的力矩要取得平衡，使板不产生转动．在这些条件下，板的平衡状态也不唯一而具有 3 个自由度，即问题的解可写成

$$w=w_0(x,y)+a_3+y\omega_1-x\omega_2$$

如果边界 Ω_0' 上还有一部分受几何约束或弹性支承，则可解的充分必要条件的个数或自由度都会减少或等于零．例如，只要有不共线的三点给定挠度，或给定一点的挠度与两个绕不同方向的转角就使板不可能有微小的刚性位移，这时问题的解存在而且唯一．对部分边界施加弹性反力或反力矩也会提高变形

能的正定性，例如在部分边界 Ω_3' 上给定弹性反力 $-cw$ 与反力矩 $-c_0w_n$，则从 $\frac{1}{2}[w,w]=0$ 可得 $Bw\equiv0$ 与 $[cw^2]_{\Omega_3'}\equiv0$，$[c_0w_n^2]_{\Omega_3'}\equiv0$，即使 Ω_3' 只是一个点也减少两个自由度，如果 Ω_3' 有两个不同的外法线方向，则自由度为零．这时 $[w,w]$ 对 w 是正定的，问题的解也就存在而且唯一．

3° 圆柱扭转问题 考虑纯荷载支承的情况，其变形能与外力势能可用广义位移(即扭转角) ω 表示如下

$$\frac{1}{2}[\omega,\omega]=\frac{1}{2}\int_0^l GI_0\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2dz$$

$$-F(\omega)=-\int_0^l m_z\omega dz-[M_z\omega]_{z=l}-[M_z\omega]_{z=0}$$

变分问题

$$P(\omega)=\frac{1}{2}[\omega,\omega]-F(\omega)=\min$$

可归结为求解变分方程

$$\delta P(\omega)=[\omega,\delta\omega]-F(\delta\omega)=0 \quad (对一切\ \delta\omega)$$

同样，$[\delta\omega,\delta\omega]=0$ 只能得出扭转率 $\alpha=\frac{d\omega}{dz}=0$，而刚性(广义)虚位移可表示为 $\delta\omega=\omega_3$，其自由度等于 1．变分方程有解的充分必要条件是

$$F(\delta\omega)=\omega_3\left(\int_0^l m_z dz+M_l+M_0\right)=0 \quad (对一切绕\ z\ 轴的扭转角\omega_3)$$

这表示沿整个柱面的扭矩要取得平衡．在这个条件下，圆柱的平衡状态可相差一微小的扭转角，即其解可写成

$$\omega=\omega_0(z)+\omega_3$$

只要有一端受几何约束，自由度就消失；如果有一端(例如 $z=l$)给予弹性支承，则相应的变形能(例如 $\frac{1}{2}\int_0^l GI_0\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2dz+[\bar{c}\omega^2]_{z=l}$)对 ω 就是正定的了．对于这些情况，问题的解存在而且唯一．

[变分问题与微分方程定解问题的等价性] 弹性体内部力的平衡方程是在平衡状态下对其微元进行均值分析而推导出来的；同样，其边界条件也是边界微元上内力与外力达到平衡的体现．因此，弹性力学中各种微分方程定解问题就是要找出弹性体因连续变形而产生的内、外力平衡状态．变分问题则是以整个弹性体的能量的形式来表达这种平衡状态，不论是用变形能泛函或虚功泛函，其实质是一样的．这里还要指出它与微分方程定解问题的等价性．下面仍以一般空间问题、薄板弯曲问题与圆柱扭转问题为范例作简单介绍．

1°　一般空间问题　力的平衡方程

$$\Omega \qquad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+f_j=0 \quad (j=1,2,3)$$

可以看作一组关于位移分量(u_1,u_2,u_3)的二阶微分方程，其边界条件仍按三种支承方式分别表达如下：

$$\Omega_1' \qquad u_i=\bar{u}_i \qquad (i=1,2,3)$$

$$\Omega_2' \qquad \sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}n_i=q_j \qquad (j=1,2,3)$$

$$\Omega_3' \qquad \sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}n_i=q_j-\sum_{i=1}^{3}c_{ij}u_i \qquad (j=1,2,3)$$

它们包含位移分量及其一阶偏导数．

现在从虚功泛函的形式出发，考虑如下的变分方程

$$\delta P(\boldsymbol{u})=[\boldsymbol{u},\delta\boldsymbol{u}]-F(\delta\boldsymbol{u})=0 \quad (\text{对}\{\delta\boldsymbol{u}|[\delta\boldsymbol{u}]_{\Omega_1'}=0\})$$

对$[\boldsymbol{u},\delta\boldsymbol{u}]$应用高斯公式进行分部积分可得

$$[\boldsymbol{u},\delta\boldsymbol{u}]=-\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}\delta u_j d\Omega+\int_{\Omega_2'\cup\Omega_3'}\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}n_i\delta u_j d\Omega'$$

$$+\int_{\Omega_3'}\sum_{i,j=1}^{3}c_{ij}u_i\delta u_j d\Omega'$$

从$F(\delta\boldsymbol{u})=\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}f_j\delta u_j d\Omega+\int_{\Omega_2'}\sum_{j=1}^{3}q_j\delta u_j d\Omega'+\int_{\Omega_3'}\sum_{j=1}^{3}q_j\delta u_j d\Omega'$

和变分方程就得到在Ω内力的平衡方程和Ω_2'，Ω_3'上的边界条件．至于在Ω_1'上的几何约束条件由于在$P(\boldsymbol{u})$中没有反映出来，需要强加上去，即在解变分方程时，除了对变分$\delta\boldsymbol{u}$加上条件$[\delta\boldsymbol{u}]_{\Omega_1'}=0$外，还得要求其解满足$[u_i]_{\Omega_1'}=\bar{u}_i$．反过来，以满足$[u_j]_{\Omega_1'}=\bar{u}_j$的变分$\delta u_j$乘上弹性体$\Omega$内部力的平衡方程与$\Omega'$上的边界条件并且作相应的积分，应用高斯公式显然也得出上述的变分方程．

2°　薄板弯曲问题　以中面Ω_0的挠度$w(x,y)$为待定函数，弹性体内部力的平衡方程在推导过程已自行满足，而以上板面的边界条件作为w所满足的微分方程

$$\Omega_0 \qquad \Delta^2 w=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 w=\frac{q}{d}$$

对应的边界条件是由板的边缘截面内外力平衡来确定. 由于支承方式的复杂性,下面先对纯弹性支承的情况的虚功泛函作分部积分得出一般形式,然后再来考虑其他支承对各项积分的影响. 设

$$[w,\delta w]=\iint\limits_{\Omega_0}(B\delta w)^{\tau}DBwdxdy+\int\limits_{\Omega_0'}\left[cw\delta w+c_0\frac{\partial w}{\partial n}\frac{\partial(\delta w)}{\partial n}\right]ds$$

代以 B,D 及内力等表达式并分部积分,可以证明

$$[w,\delta w]=d\iint\limits_{\Omega_0}(\Delta^2 w)\delta wdxdy-\int\limits_{\Omega_0'}\left(M_{nn}-c_0\frac{\partial w}{\partial n}\right)\frac{\partial(\delta w)}{\partial n}ds$$

$$+\sum_{i=1}^{m}[M_{sn}]_{P_i^-}^{P_i^+}\delta w_{P_i}+\int\limits_{\Omega_0'}\left(Q_n+\frac{\partial M_{sn}}{\partial s}+cw\right)\delta wds$$

式中 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 为边界 Ω_0' 上沿 s 正向依序排列的拐点.

由于荷载支承可看作弹性支承的特例(即 c 或 $c_0=0$ 的情况), 只要考虑在部分边界 Γ_1, Γ_2 上分别给定挠度和转角:

$$[w]_{\Gamma_1}=\overline{w}\qquad(\text{另一条件只能是弹性反力矩})$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]_{\Gamma_2}=-\omega_s\quad(\text{另一条件只能是弹性反力})$$

(Γ_1, Γ_2 可以重迭)并在拐点 P_i 有集中力 R_i (可以取零, 特别当 $P_i\in\Gamma_1$)的情况, 这时相应的外力势能可写成

$$-F(\delta w)=-\iint\limits_{\Omega_0}q\delta wdxdy+\int\limits_{\Omega_0'\setminus\Gamma_2}m_s\frac{\partial(\delta w)}{\partial n}ds$$

$$-\int\limits_{\Omega_0'\setminus\Gamma_1}p\delta wds-\sum_{i=1}^{m}R_i\delta w_{P_i}$$

同样在变形能中应加上条件:

$$[\delta w]_{\Gamma_1}=0,\left[\delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)\right]_{\Gamma_2}=\left[\frac{\partial(\delta w)}{\partial n}\right]_{\Gamma_2}=0$$

对照上述二式,可知变分问题: 满足强加的条件

$$(w)_{\Gamma_1}=\overline{w},\ \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{\Gamma_2}=\omega_s$$

且使

$$[w,\delta w]-F(\delta w)=0\left(\text{对}\left\{\delta w\,\middle|\,[\delta w]_{\Gamma_1}=0,\left[\frac{\partial(\delta w)}{\partial n}\right]_{\Gamma_2}=0\right\}\right)$$

的解 w,是下面微分方程的定解问题的解:

$$\begin{cases}\Delta^2 w = \dfrac{q}{d}, \quad (x,y)\in\Omega \\ [w]_{\Gamma_1} = \bar{w}, \quad \left[\dfrac{\partial w}{\partial n}\right]_{\Gamma_2} = \omega_s, \quad [M_{sn}]_{P_i^-}^{P_i^+} = R_i \\ \left[Q_n + \dfrac{\partial M_{sn}}{\partial s} + cw\right]_{\Omega_0'\setminus\Gamma_1} = p, \left[M_{ns} - c_0\dfrac{\partial w}{\partial n}\right]_{\Omega_0'\setminus\Gamma_2} = m_s\end{cases}$$

反过来，这个问题的解 w 显然也是上述变分问题的解，因此它们是等价的。

3° 圆柱扭转问题　以柱体横截面的扭转角 $\omega(z)$ 为待定函数，其广义力(即扭矩)的平衡方程为沿柱长的微分方程：

$$[0,l] \qquad -\frac{d}{dz}\left(GI_0\frac{d\omega}{dz}\right) = m_z$$

先考虑纯弹性支承的情况，其边界条件可写成

$$\left[GI_0\frac{d\omega}{dz} + \bar{c}\,\omega\right]_{z=0} = M_0, \quad \left[GI_0\frac{d\omega}{dz} + \bar{c}\omega\right]_{z=l} = M_l$$

相应的虚功泛函与外力势能为

$$[\omega,\delta\omega] = \int_0^l\left(GI_0\frac{d\omega}{dz}\right)\frac{d(\delta\omega)}{dz}dz + [\bar{c}\omega\delta\omega]_{z=l} + [\bar{c}\omega\delta\omega]_{z=0}$$

$$-F(\delta\omega) = -\int_0^l m_z\delta\omega dz - [M_z\delta\omega]_{z=l} - [M_z\delta\omega]_{z=0}$$

对前一式作分部积分，再对照后一式不难看出求解变分方程

$$[\omega,\delta\omega] - F(\delta\omega) = 0 \quad (\text{对一切 } \delta\omega)$$

的问题同上述二阶常微分方程的定解问题是等价的。端点受荷载支承的情况可看作其特例(即 $\bar{c}=0$ 的情况)。对于端点受几何约束的情况，只要把变分方程中与该端有关的各项去掉并对 ω 及 $\delta\omega$ 改为强加条件，两个问题仍然等价。例如求满足 $[\omega]_{z=l} = \omega_l$ 及变分方程

$$[\omega,\delta\omega] - F(\delta\omega) = \int_0^l\left(GI_0\frac{d\omega}{dz}\right)\frac{d(\delta\omega)}{dz}dz - \int_0^l m_z\delta\omega dz$$
$$- [M_z\delta\omega]_{z=0} = 0 \quad (\text{对}\{\delta\omega \mid [\delta\omega]_{z=l} = 0\})$$

的函数 $\omega(z)$ 的问题与下面微分方程的定解问题是等价的：

$$\begin{cases}-\dfrac{d}{dz}\left(GI_0\dfrac{d\omega}{dz}\right) = m_z, \quad z\in[0,l] \\ [\omega]_{z=l} = \omega_l, \quad \left[GI_0\dfrac{d\omega}{dz}\right]_{z=0} = M_0\end{cases}$$

[热效应与热当量荷载]　在弹性问题中，弹性体由于受热引起各微元的胀缩，从而调整弹性体内部应力或应变的分布，这种作用称为热效应。设 T_0 为零

应变状态的温度分布；T 为小变形后的温度分布，由于温升 $\Delta T=T-T_0$，弹性体将向周围作均匀的膨胀(或收缩，当 $\Delta T<0$)。在任何直角坐标系中，其位移分量 u_i 只与 x_i 有关，即只有线应变 ε_{ii} 而无剪应变 $\varepsilon_{ij}(i\neq j)$，而且在小变形假定下，它们与 ΔT 有线性关系：

$$\varepsilon_{ii}^T=\alpha\Delta T\quad(i,j=1,2,3),\quad \varepsilon_{ij}^T=0\quad(i\neq j)$$

式中 α 称为线膨胀系数。

如果考虑热效应，则弹性体的总应变为

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^0+\varepsilon_{ij}^T$$

式中 ε_{ij}^0 就是无温差的应变。在小变形的假定下，有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})]+\varepsilon_{11}^T &\quad& \varepsilon_{23}=\frac{1}{G}\sigma_{23}\\
&\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{33})]+\varepsilon_{22}^T && \varepsilon_{31}=\frac{1}{G}\sigma_{31}\\
&\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}[\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})]+\varepsilon_{33}^T && \varepsilon_{12}=\frac{1}{G}\sigma_{12}
\end{aligned}\tag{36}$$

因此对于圆柱扭转等仅与剪应变有关的问题，热效应为零。对一般的空间问题，可令

$$\{\varepsilon^T\}=(\alpha\Delta T,\alpha\Delta T,\alpha\Delta T,0,0,0)^\tau$$

则有

$$\{\sigma\}=D(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^T\})\qquad 或\ \{\varepsilon\}-\{\varepsilon^T\}=D^{-1}\{\sigma\}$$

$\{\varepsilon^T\}$ 可看作总应变 $\{\varepsilon\}$ 的零次项。它表明在无应力状态(例如弹性体完全自由膨胀)下，弹性体也有热应变 $\{\varepsilon^T\}$；而在无应变状态(例如其边界全部受约束)下，弹性体由于温升可产生热应力 $-D\{\varepsilon^T\}$。现在令 $\{\sigma^T\}=D\{\varepsilon^T\}$，则有

$$\{\sigma^T\}=(\sigma_{11}^T,\sigma_{22}^T,\ \sigma_{33}^T,0,0,0)^\tau$$

式中

$$\sigma_{ii}^T=(3\lambda+2G)\alpha\Delta T=\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}\quad(i=1,2,3)$$

对于平面应变问题，由于 $\varepsilon_{33}=0$(注意，不是 $\varepsilon_{33}^0=0$)，可直接用(36)第三式：

$$\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})-E\alpha\Delta T$$

代入(36)前二式，得出零次项为　$(1+\nu)\alpha\Delta T$，记 $\{\sigma^T\}=(\sigma_{11}^T,\sigma_{22}^T,0)^\tau$ 从相应的矩阵 D 可得

$$\sigma_{ii}^T=\frac{E}{1-2\nu}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}+\frac{\nu}{1+\nu}\right](1+\nu)\,\alpha\Delta T=\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}\quad(i=1,2)$$

对于平面应力问题，假定 $\sigma_{33}=0$ 并不改变(36)前二式零次项的值，于是根

语相应的矩阵 D 得出

$$\sigma_{ii}^T=\frac{E}{1-\nu^2}[1+\nu]\alpha\Delta T=\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \qquad (i=1,2)$$

对于薄板弯曲问题，把温升分布函数近似写成

$$\Delta T=t_0(x,y)+zt_1(x,y)$$

其中 t_0 与 $t_1=\frac{\partial(\Delta T)}{\partial z}$ 可分别看作 ΔT 沿厚度的平均值与梯度。于是总应变

$$\varepsilon_{ii}=\varepsilon_{ii}^e+\alpha(t_0+zt_1) \ (i=1,2), \quad \varepsilon_{12}=\varepsilon_{12}^e$$

与零次项 $\varepsilon_{ii}^T=\alpha(t_0+zt_1)$ 相应的应力与弯矩分别为

$$\sigma_{ii}^T=\frac{E\alpha(t_0+zt_1)}{1-\nu} \qquad (i=1,2), \quad \sigma_{12}^T=0$$

$$M_{ii}^T=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{ii}^T dz=d(1+\nu)\alpha t_1 \quad (i=1,2), \quad M_{12}^T=0$$

这表明板的弯矩只与温升的梯度 t_1 成正比，而不受板中面的温升分布 $t_0(x, y)$ 的影响。

对空间问题，由于 $\{\sigma^T\}$ 的出现使得虚功泛函 $[u, \delta u]$ 中与 $\{\sigma\}$ 有关的第一项应改写成

$$\int_\Omega \{B\delta u\}^T\{\sigma\}d\Omega=\int_\Omega \{B\delta u\}^T D\{Bu\}d\Omega-\int_\Omega \{B\delta u\}^T\{\sigma^T\}d\Omega$$

等式右边第二个积分就是由于热效应产生的一项，其中并不出现 u。这表明在变形能中，热效应的部分对 u 是线性的，不妨把它归入外力势能，这同弹性反力所产生的外力势能中的一部分 (Cu,u)，由于对 u 是二次的而归入虚功泛函恰恰相反。为了突出 δu，再对这一项作分部积分：

$$\int_\Omega \{B\delta u\}^T\{\sigma^T\}d\Omega=-\int_\Omega \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}\right)\delta u_i d\Omega$$

$$+\int_{\Omega'}\left(\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}\right)\sum_{i=1}^{3} n_i\delta u_i d\Omega'$$

对照 $F(\delta u)$ 中的被积函数，可知热效应就象对弹性体分别加上体力和面力：

$$f_i^T=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}\right)=-\frac{E\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3)$$

$$q_i^T=\left(\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}\right)n_i \qquad (i=1,2,3)$$

这些力可称为热当量荷载。f_i^T 就是完全受约束的热(正)应力的梯度，当 ΔT 为

常量时 $f_i^T=0$，这时热当量荷载就只有面力 q_i^T 了.

对薄板弯曲问题，由于热效应虚功泛函多出一项积分，同样可把它归入外力势能并作两次分部积分就得到

$$\int_{\Omega_0}\{B\delta w\}^T\{M^T\}d\Omega_0=-\int_{\Omega_0}d(1+\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\alpha t_1)\delta w d\Omega_0$$

$$+\int_{\Omega_0'}d(1+\nu)\frac{\partial(\alpha t_1)}{\partial n}\delta w ds+\int_{\Omega_0'}d(1+\nu)\alpha t_1\frac{\partial(\delta w)}{\partial n}ds$$

对照 $F(\delta w)$ 中的被积函数，可知热效应就象对薄板分别对上板面施加面力 $q^T=-d(1+\nu)\Delta(\alpha t_1)$，对单宽边界侧面施加横向线力 $p^T=d(1+\nu)\frac{\partial(\alpha t_1)}{\partial n}$ 和绕切向的力矩 $m_s^T=-d(1+\nu)\alpha t_1$ 的结果一样. 当 αt_1 取常量时，热当量荷载就只有力矩 m_s^T 了.

［位移法与力法］　位移法是位移、广义位移或象柱体扭转问题中的翘曲函数 Ψ 作为待定的；力法是以应力或如下应力函数 Φ 作为待定的. 仅以柱体扭转问题为例作些说明.

对单连通区域 Ω，平衡方程 $\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y}=0$ 就保证存在一函数 $\Phi(x,y)$，使得

$$\sigma_{13}=\Phi_y,\quad \sigma_{23}=-\Phi_x$$

这个 $\Phi(x,y)$ 称为扭转的应力函数. 与上述的物理方程对照可得它与翘曲函数之间的关系：

$$G\alpha\Psi_x=\Phi_y+G\alpha y,\quad G\alpha\Psi_y=-\Phi_x-G\alpha x$$

由于位移 w 或 Ψ 存在的充分必要条件为：$\Psi_{xy}=\Psi_{yx}$，因而可得 Φ 所满足的

协调方程：　　$\Delta\Phi=\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=-2G\alpha$

由于侧面无外力，即 $\sigma_{13}n_1+\sigma_{23}n_2=0$，可得

$$\left[\frac{d\Phi}{ds}\right]_{\Omega_0'}=\Phi_y\frac{\partial y}{\partial s}+\Phi_x\frac{\partial x}{\partial s}=0$$

这表示 Φ 沿截面边界取常数（不妨取作零），从而可得

边界条件：　　$[\Phi]_{\Omega_0'}=0$

令 $\Phi^*=\frac{\Phi}{2G\alpha}$，则 Φ^* 是泊松方程第一类边值问题：

$$\begin{cases}\Delta\Phi^*=-1, & (x,y)\in\Omega_0\\ [\Phi^*]_{\Omega_0'}=0\end{cases}$$

的解．根据端面 $z=l$ 的力偶矩为M的条件：

$$M=\iint_{\Omega_0}(y\Phi_y+x\Phi_x)dxdy=2G\alpha\iint_{\Omega_0}(y\Phi_y^*+x\Phi_x^*)dxdy$$

就得出扭转率

$$\alpha=\frac{M}{2G}\left[\iint_{\Omega_0}(y\Phi_y^*+x\Phi_x^*)dxdy\right]^{-1}$$

$\Phi^*(x,y)$也可看作"应力"而归结为如下变分问题：求满足$[\Phi^*]_{\Omega_0'}=0$，且使总势能

$$P(\Phi^*)=\iint_{\Omega_0}[(\Phi_x^*)^2+(\Phi_y^*)^2]dxdy+\iint_{\Omega_0}1\cdot\Phi^*dxdy$$

取极值的解．

注意，力法是归结为求泊松方程第一类边值问题的解，比位移法归结为第二类边值问题较为简单．但是当区域是复连通时，协调条件或位移的单值性，在其每个内边界Γ_k还要满足积分条件

$$\oint_{\Gamma_k}\frac{\partial\Phi^*}{\partial n}ds=A_k\quad(k=1,2,\cdots,p)$$

其中A_k为Γ_k所围的面积，p为区域Ω的连通度．在这种情况下，Φ^*在Γ_k上取常数值$\Phi_k^*(k=1,2,\cdots,p)$也是待定的，因此当截面为连通度为p的区域时，力法则归结为泊松方程附加p个积分条件并含有p个待定常数的第一边值问题，较之位移法反而复杂化了．

除了这两种方法还有兼用位移与应力为待定函数的混合方法，如果应用得当，可使问题的解法大大简化．

附录　有限元法中的数值积分

在单元分析中需要计算大量数值积分，这些积分常常通过坐标变换把被积函数(包括对整体直角坐标的微分算子矩阵B)全部化为局部坐标的函数，并且其中大部分是关于局部坐标的多项式．对于方块剖分，它可化为坐标变量ξ,η,ζ的幂函数的积分，对于三角剖分，它可化为自然坐标$\{\lambda_i\}$的幂函数的积分．它们都不难求积．下面列出有关公式．对于被积函数不是多项式的积分，则需用高斯型求积公式求其近似值．关于局部坐标(ξ,η,ζ)的函数的数值积分可参看第六章，这里仅列出关于自然坐标$\{\lambda_i\}$的函数的高斯型数值积分表．

[线段单元]

1°　含距高坐标的积分公式

$$\int_{\Omega_e}\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}d\Omega=\int_{x_1}^{x_2}\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}dx$$

$$=\frac{(x_2-x_1)n_1!\,n_2!}{(n_1+n_2+1)!}=x_{21}\frac{n_1!\,n_2!}{(n_1+n_2+1)!}$$

由于$\frac{d\lambda_i}{dx}=(-1)^i(x_2-x_1)^{-1}=(-1)^i x_{21}^{-1}$，结合上式，可得出包含$\frac{d\lambda_i}{dx}$的积分公式。

2° 常用的数值积分表

$$\int_{\Omega_e}g(\lambda_1,\ \lambda_2)d\Omega\approx x_{21}\sum_{k=1}^{m}w^{(k)}g(\lambda_1^{(k)},\ \lambda_2^{(k)})$$

求积节点个数m	求积节点坐标 $(\lambda_1^{(k)},\ \lambda_2^{(k)})$	求积系数 $w^{(k)}$	代数精确度* n
1	$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$	1	1
2	$(\alpha,1-\alpha),(1-\alpha,\alpha)$ 其中 $\alpha=0.2113248654$	$\frac{1}{2}$	3
3	$(0,1),(1,0)$ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$	3
3	$(\alpha,1-\alpha),(1-\alpha,\alpha)$ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 其中 $\alpha=0.1127016654$	$\frac{5}{18}$ $\frac{4}{9}$	5

[三边形单元]

1° 含面积坐标的积分公式

$$\iint_{\Omega_e}\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\lambda_3^{n_3}dx\,dy=2A\frac{n_1!\,n_2!\,n_3!}{(n_1+n_2+n_3+2)!}$$

式中A为单元的面积．从系数矩阵$(K_{ij}^{(e)})$的积分公式(2)看出，被积函数不仅包含面积坐标为变量的型函数，而且也有关于x，y的微分算子矩阵B．根据坐标变换

* 表示该求积公式对某n次齐次多项式$g(\lambda_1,\lambda_2)$是精确的．

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}=\frac{y_{jk}}{2A},\quad \frac{\partial\lambda_i}{\partial y}=\frac{x_{jk}}{2A}$$

再结合上式可得出包含$\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}$，$\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}$的积分公式.

注意，如三边形单元任意一边（例如 $\lambda_i=0$）作为线元，则上述含距离坐标的积分公式也成立.

2° 常用的数值积分表

$$\iint_{\Omega_e} g(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)d\Omega\approx A\sum_{k=1}^{m}w^{(k)}g(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)},\lambda_3^{(k)})$$

求积节点个数 m	求积节点坐标 $(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)},\lambda_3^{(k)})$	求积系数 $w^{(k)}$	代数精确度 n
1	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	1	1
3	$\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$	$\frac{1}{3}$	2
7	$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{20}$ $\frac{2}{15}$ $\frac{9}{20}$	3
7	$(\alpha_1,\beta_1,\beta_1),(\beta_1,\alpha_1,\beta_1),(\beta_1,\beta_1,\alpha_1)$ 其中 $\alpha_1=0.05961587,\beta_1=0.47014206$ $(\alpha_2,\beta_2,\beta_2),(\beta_2,\alpha_2,\beta_2),(\beta_2,\beta_2,\alpha_2)$ 其中 $\alpha_2=0.79742699,\beta_2=0.10128651$ $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	0.13239415 0.12593918 0.225	5

［四面体单元］

1° 含体积坐标的积分公式

$$\iiint_{\Omega_e}\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\lambda_3^{n_3}\lambda_4^{n_4}dxdydz=6V\frac{n_1!\,n_2!\,n_3!\,n_4!}{(n_1+n_2+n_3+n_4+3)!}$$

式中 V 为单元的体积. 公式(2)出现 $B\{\varphi\}_i$，即被积函数包含型函数 φ_i 关于 x，y，z 的导数，根据坐标变换

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}=\frac{X_{i4}}{6V}=\frac{1}{6V}\begin{vmatrix} y_{j4} & y_{k4} \\ z_{j4} & z_{k4} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}=\frac{Y_{i4}}{6V}=\frac{1}{6V}\begin{vmatrix} z_{j4} & z_{k4} \\ x_{j4} & x_{k4} \end{vmatrix} \qquad \binom{i}{k\ \ j} \qquad (i=1,2,3)$$

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial z}=\frac{Z_{i4}}{6V}=\frac{1}{6V}\begin{vmatrix} x_{j4} & x_{k4} \\ y_{j4} & y_{k4} \end{vmatrix}$$

再结合上式，可得出包含这些偏导数的积分公式.

2° 常用的数值积分表

$$\iiint_{\Delta_e} g(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ \lambda_4)dxdydz=V\sum_{k=1}^{m}w^{(k)}g(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)},\lambda_3^{(k)},\lambda_4^{(k)})$$

求积节点个数m	求积节点坐标 $(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)},\lambda_3^{(k)},\lambda_4^{(k)})$	求积系数 $w^{(k)}$	代数精确度n
1	$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$	1	1
4	$(\alpha,\beta,\beta,\beta)$, $(\beta,\alpha,\beta,\beta)$ $(\beta,\beta,\alpha,\beta)$, $(\beta,\beta,\beta,\alpha)$ 其中 $\alpha=0.58541020$ $\beta=0.13819660$	$\frac{1}{4}$	2
5	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$	$\frac{9}{20}$ $-\frac{4}{5}$	3

第二十章　初等数论

本章简要地介绍了初等数论的基础知识．共分六节．前五节讨论了整数的性质与辗转相除法，连分数与费波那奇序列，同余式与孙子定理，介绍了几种重要的数论函数和麦比乌斯变换，并列出几类不可约多项式的判别方法．最后一节对代数数等基本概念和性质作了简单的介绍．

§1　整　　数

［整数部分与分数部分］　设 α 为一实数．不超过 α 的最大整数称为 α 的整数部分，记作 $[\alpha]$．而 $\{\alpha\}=\alpha-[\alpha]$ 称为 α 的分数部分．

例如　$[1]=1, [2.3]=2, [-3.5]=-4$ 等等．

整数部分具有下列关系式：

$$[\alpha]\leqslant\alpha<[\alpha]+1$$

$$\left[\frac{[n\alpha]}{n}\right]=[\alpha],\ n\text{ 为自然数}$$

$$[\alpha]+\left[\alpha+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[\alpha+\frac{n-1}{n}\right]=[n\alpha],\ n\text{ 为自然数}$$

$$[2\alpha]+[2\beta]\geqslant[\alpha]+[\alpha+\beta]+[\beta]$$

$$[\alpha]-[\beta]=[\alpha-\beta]\text{ 或 }[\alpha-\beta]+1$$

注意，在计算机程序中的"取整运算"与这里的"整数部分"意义是有差别的：当 $\alpha\geqslant0$ 时是一致的；当 $\alpha<0$ 时不一致，例如 $[-3.5]=-4$，但计算机上 -3.5 取整后为 -3．

［整除性］　若有一整数 c，使得整数 a 与 b 之间适合于

$$a=bc$$

则称 b 可整除 a，记作 $b|a$．这时 a 称为 b 的倍数，b 称为 a 的因数（或约数）．若 b 不能整除 a，则记作 $b\nmid a$．

整除性具有下列性质（下列各式 $b\neq0, c\neq0$）：

1°　若 $b|a$，$c|b$，则 $c|a$；

2°　若 $b|a$，则 $bc|ac$；

3°　若 $c|d, c|e$，则对于任意整数 m, n 有

$$c\mid dm+en$$

4° 若 b 是 a 的真因数(即 $b\neq 1,a$),则

$$1<|b|<|a|$$

[素数与爱拉托斯散筛法] 恰有1和本身两个自然数为其因数的大于1的整数称为素数,记作 p. 除2为偶素数外,其余素数都是奇数.

素数具有性质:

1° 素数有无限多个. 如果不超过自然数 n 的素数个数记作 $\pi(n)$, 则当 $n\geqslant 2$ 时, 有 $\frac{1}{8}\frac{n}{\log n}\leqslant\pi(n)\leqslant 12\frac{n}{\log n}$*,进一步有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{\frac{n}{\log n}}=1$$

2° 设 p 为素数,若 $p\mid ab$, 则 $p\mid a$ 或 $p\mid b$.

3° $n!$ 中含素数 p 的方次数等于

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

4° 若 $n\leqslant N$ 为正整数, 它不能被不超过 $\sqrt{N}$ 的所有素数所整除, 则 n 必为素数. 这种判别自然数是否为素数的方法称为爱拉托斯散筛法; 由此法可建立素数表.

[唯一分解定理] 大于1的自然数都可唯一地分解为素数幂的积. 设 $n>1$, 为自然数,则 n 可唯一地表为

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$$

$$a_1>0,a_2>0,\cdots,a_s>0\quad(\text{为自然数})$$

$$p_1<p_2<\cdots<p_s\quad(\text{为素数})$$

这称为 n 的标准分解式. n 所含不同素因数的个数 s 不超过 $\frac{\log n}{\log 2}$.

显然,任意自然数 n 可表为

$$n=2^k(2m+1)\qquad(k,m\text{为自然数或零})$$

这种表达式是唯一的.

[麦森数] 整数

$$M_p=2^p-1\quad(p\text{为素数})$$

为素数者称为麦森数. 至今仅发现24个,即

$p=2,3,5,7,13,17,19,31,61,89,107,127,521,607,1279,2203,2281,$

* 数论中通常把自然对数 $\ln x$ 记作 $\log x$.

3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937

是否有无穷个麦森数还未证明.

[费马数] 整数

$$F_n=2^{2^n}+1 \qquad (n\text{ 为自然数})$$

称为费马数. 至今只发现 5 个费马数为素数, 即

$$F_0=3,\ F_1=5,\ F_2=17,\ F_3=257,\ F_4=65537$$

下列 46 个费马数皆非素数:

n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 30, 32, 36, 38, 39, 42, 52, 55, 58, 63, 73, 77, 81, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 250, 267, 268, 284, 316, 452, 1945

[辗转相除法*] 每一个整数 a 可以唯一地通过正整数 b 表为

$$a=bq+r,\quad 0\leqslant r<b$$

式中 q 称为 a 被 b 除所得的不完全商, r 称为 a 被 b 除所得的余数. 辗转相除法是指下列一串有限个等式:

$$\begin{cases} a=ba_0+r_1, & 0<r_1<b \\ b=r_1a_1+r_2, & 0<r_2<r_1 \\ r_1=r_2a_2+r_3, & 0<r_3<r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ r_{N-2}=r_{N-1}a_{N-1}+r_N, & 0<r_N<r_{N-1} \\ r_{N-1}=r_Na_N & \end{cases} \tag{1}$$

例 1 设 $a=525, b=231$, 根据(1)式可列出下面的算式和草式:

算式

$$525=231\cdot 2+63$$
$$231=63\cdot 3+42$$
$$63=42\cdot 1+21$$
$$42=21\cdot 2$$

草式

	a_i	
	↓	525
231	2	462
189	3	63
42	1	42
42	2	21
0		

[最大公因数与最小公倍数] 设 a, b 为整数. 既能整除 a, 又能整除 b 的正整数称为 a, b 的公因数, 其最大者称为 a, b 的最大公因数*, 记作 (a, b), 即

* 我国古代数学家秦九韶于 1247 年在《数书九章》中讨论过辗转相除法(也称欧几里得算法).

$$(a,b)=\max\{c\mid c|a,c|b\}$$

特别当$(a,b)=1$时,称a,b互素.

设a,b为正整数. a,b都能整除的正整数称为a,b的公倍数, 其最小者称为a,b的最小公倍数*,记作$[a,b]$,即

$$[a,b]=\min\{\alpha\mid a|\alpha,b|\alpha\}$$

设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n个正整数,用归纳法定义其最大公因数为

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=((a_1,\cdots,a_{n-1}),a_n)$$

其最小公倍数为

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n]=[[a_1,\cdots,a_{n-1}],a_n]$$

最大公因数与最小公倍数具有下列性质:

1° 存在整数x,y,使得$(a,b)=ax+by$. 并可由辗转相除法具体求出x,y. (a,b)也由辗转相除法的一串等式(1)得到,即

$$(a,b)=(b,r_1)=(r_1,r_2)=\cdots=(r_{N-1},r_N)=r_N$$

例 2 由例1得$(525,231)=21$. 因为由例1的算式有

$$\begin{aligned}21&=63-42\cdot1=63-(231-63\cdot3)\cdot1\\&=63\cdot4-231=(525-231\cdot2)\cdot4-231\\&=525\cdot4-231\cdot9\end{aligned}$$

所以得到 $x=4,y=-9$.

2° 对任意二整数x,y,必有$(a,b)|ax+by$.

3° 若$e|a,e|b$,则$e|(a,b)$.

4° 若$c>0$,$(a,b)=d$,则$(ac,bc)=dc$.

若$c>0,c|d$,则$\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{d}{c}$.

5° 若a,b为二正整数,$p_1,\cdots,p_s$为它们的素因数,且标准分解式分别为

$$a=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s},\quad a_i\geqslant0\qquad(1\leqslant i\leqslant s)$$
$$b=p_1^{b_1}\cdots p_s^{b_s},\quad b_i\geqslant0\qquad(1\leqslant i\leqslant s)$$
$$p_1<\cdots<p_s$$

则

$$(a,b)=p_1^{c_1}\cdots p_s^{c_s},\qquad c_i=\min\{a_i,b_i\}\qquad(1\leqslant i\leqslant s)$$
$$[a,b]=p_1^{e_1}\cdots p_s^{e_s},\qquad e_i=\max\{a_i,b_i\}\qquad(1\leqslant i\leqslant s)$$

---

* 国外书刊中,a,b的最大公因数常记作g.c.d.(a,b), a,b的最小公倍数常记作l.c.m.(a,b).

6° $[a,b](a,b)=ab$

7° 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互素的正整数，即$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，则

$$(a_1,a_2)\cdots(a_1,a_n)\leqslant a_1^{n-2}$$

§2 连分数

［简单连分数］ 设α为实数(有理数或无理数)，则可表成简单连分数

$$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}+\ddots}}}}} \tag{2}$$

简记为
$$a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}+\cdots$$

或
$$[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots]$$

式中a_0为整数，$a_1,a_2,\cdots$为正整数.

若α为有理数$\left(\alpha=\frac{a}{b}\right)$，则必可展成有限连分数

$$\frac{a}{b}=[a_0,a_1,\cdots,a_N]$$

式中$a_0,a_1,\cdots,a_N$是由辗转相除法一列等式(1)所得到的一列不完全商．如果规定最后一个不完全商大于1，即当$a_N=1$时，可写成

$$[a_0,a_1,\cdots,a_{N-1},1]=[a_0,a_1,\cdots,a_{N-1}+1]$$

则表法唯一.

若α为无理数，则可展成无限连分数，且表法唯一.

［完全商与不完全商］ 简单连分数(2)中$a_i(i=0,1,\cdots)$称为α的第i个不完全商．数$[a_n,a_{n+1},\cdots]=\alpha_n$称为$\alpha$的第$n$个完全商．显然 $\alpha_0=\alpha$.

完全商与不完全商的关系:

$$a_n=[\alpha_n]\leqslant\alpha_n<[\alpha_n]+1=a_n+1$$

$$\alpha_n=a_n+\frac{1}{\alpha_{n+1}},\quad \alpha_{n+1}=\frac{1}{\alpha_n-a_n}$$

$$\alpha=\alpha_0=\frac{\alpha_{n+1}p_n+p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1}}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

式中 p_n, q_n 为 α 的第 n 个渐近分数的分子和分母(见下).

[渐近分数与最佳渐近分数] 简单连分数(1)中截取

$$[a_0,a_1,\cdots,a_n]=\frac{p_n}{q_n}$$

称为 α 的第 n 个渐近分数. 渐近分数都为既约分数.

1° 渐近分数的等式与不等式

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}$$

$$\begin{cases}p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-1} & (n=0,\ 1,2,\cdots)\\ p_{-1}=1,\ \ p_0=a_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1} & (n=0,\ 1,2,\cdots)\\ q_{-1}=0,\ \ q_0=1\end{cases}$$

$$(q_n,\ q_{n-1})=1$$

$$a_nq_{n-1}<q_n<2a_nq_{n-1}$$

$$\frac{q_n}{q_{n-1}}=[a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1]$$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}}=[a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0]$$

$$q_n\geqslant\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\qquad(n\geqslant0)$$

$$\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^{n-1}\leqslant q_n\leqslant\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)^{n}$$

(当 $a\leqslant a_i\leqslant b\ (i\geqslant1)$ 时)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{q_n}=\beta>1$ (当 α 为实二次无理数时)

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}\qquad(n\geqslant1)$$

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}$$

$$p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(-1)^na_n\qquad(n\geqslant2)$$

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}<\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}},\quad\frac{p_{2n}}{q_{2n}}>\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}\qquad(n\geqslant1)$$

$$q_n\alpha-p_n=\frac{(-1)^n\delta_n}{q_{n+1}},\quad 0<\delta_n<1$$

(式中$\frac{\delta_n}{q_{n+1}}$为n的递减函数．α为有理数时，此式仅当$1\leqslant n\leqslant N-2$时成立，$\delta_{N-1}=1$)

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})}$$

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\leqslant\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{a_{n+1}q_n^2}\leqslant\frac{1}{q_n}$$

2° 设$n\geqslant1$，$0<q<q_n$，且$\frac{p}{q}\neq\frac{p_n}{q_n}$，则

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$$

因此在分母不大于q_n的所有分数中，$\frac{p_n}{q_n}$与α最接近（称$\frac{p_n}{q_n}$为最佳渐近分数）．

3° α的两个相邻渐近分数中必有一个$\frac{p}{q}$适合于

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2q^2}$$

4° α的三个相邻渐近分数中必有一个$\frac{p}{q}$适合于

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

5° 设α为实数，$\frac{a}{b}$为有理数，M为正整数．若α适合不等式

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{Mb^2}$$

则α展成连分数的不完全商至少有一个大于$M-2$．

[周期连分数及其充分必要条件] 当$i\geqslant l$时，若$a_i=a_{i+k}$，则连分数

$$[a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots]$$

称为以k为周期的周期连分数，记作

$$[a_0,a_1,\cdots,a_{l-1},\ \overline{a_l,\cdots,a_{l+k-1}}] \tag{3}$$

当$l=0$时，(3)式称为纯周期连分数，当$l=1$时，(3)式称为拟纯周期连分数．

1° 实数α可展成周期连分数的充分必要条件是：α是一个有理数域上二次不可约多项式的根．

2° 实二次无理数α可展成纯周期连分数的充分必要条件是：$\alpha>1$且

$-1<\alpha'<0$，这里 α' 为 α 的共轭实数.

3° 实二次无理数 α 可展成拟纯周期连分数的充分必要条件是：$\alpha'<[\alpha]-1$，这里 α' 为 α 的共轭实数，$[\alpha]$ 为 α 的整数部分。

[$\sqrt{d}$、e 与 π 的连分数]

1° 设 $d>0$ 为非完全平方数. 则

$$\sqrt{d}=[[\sqrt{d}],\ \overline{a_1,a_2,\cdots,a_2,a_1,2[\sqrt{d}]}]$$

2° 设 e 为自然对数的底. 则

$$e=[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,\cdots]$$

式中不完全商的通式为

$$a_0=2,\ a_{3i}=a_{3i-2}=1,\quad a_{3i-1}=2i\quad(i=1,2,\cdots)$$

3° 设 π 为圆周率. 则

$$\pi=[3,7,15,1,292,1,1,1,21,31,14,2,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,1,4,2,6,6,1,\cdots]$$

它的渐近分数依次为

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ \cdots$$

[二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 的整底的连分数表]

ω	连分数表示	ω	连分数表示
$\sqrt{2}$	$[1,\overline{2}]$	$\sqrt{14}$	$[3,\overline{1,2,1,6}]$
$\sqrt{3}$	$[1,\overline{1,2}]$	$\sqrt{15}$	$[3,\overline{1,6}]$
$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$[1,\overline{1}]$	$\frac{\sqrt{17}+1}{2}$	$[2,\overline{1,1,3}]$
$\sqrt{6}$	$[2,\overline{2,4}]$	$\sqrt{18}$*	$[4,\overline{4,8}]$
$\sqrt{7}$	$[2,\overline{1,1,1,4}]$	$\sqrt{19}$	$[4,\overline{2,1,3,1,2,8}]$
$\sqrt{8}$*	$[2,\overline{1,4}]$	$\sqrt{20}$*	$[4,\overline{2,8}]$
$\sqrt{10}$	$[3,\overline{6}]$	$\frac{\sqrt{21}+1}{2}$	$[2,\overline{1,3}]$
$\sqrt{11}$	$[3,\overline{3,6}]$	$\sqrt{22}$	$[4,\overline{1,2,4,2,1,8}]$
$\sqrt{12}$*	$[3,\overline{2,6}]$	$\sqrt{23}$	$[4,\overline{1,3,1,8}]$
$\frac{\sqrt{13}+1}{2}$	$[2,\overline{3}]$	$\sqrt{24}$*	$[4,\overline{1,8}]$

表中 ω 和 1 一起组成二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 的一组整底，ω 栏中右上角注明 * 号的数除外. 二次域的定义及性质见第二十章 § 6.

ω	连分数表示	ω	连分数表示
$\sqrt{26}$	$[5,\overline{10}]$	$\sqrt{56}^*$	$[7,\overline{2,14}]$
$\sqrt{27}^*$	$[5,\overline{5,10}]$	$\frac{\sqrt{57}+1}{2}$	$[4,\overline{3,1,1,1,3,7}]$
$\sqrt{28}^*$	$[5,\overline{3,2,3,10}]$	$\sqrt{58}$	$[7,\overline{1,1,1,1,1,1,14}]$
$\frac{\sqrt{29}+1}{2}$	$[3,\overline{5}]$	$\sqrt{59}$	$[7,\overline{1,2,7,2,1,14}]$
$\sqrt{30}$	$[5,\overline{2,10}]$	$\sqrt{60}^*$	$[7,\overline{1,2,1,14}]$
$\sqrt{31}$	$[5,\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}]$	$\frac{\sqrt{61}+1}{2}$	$[4,\overline{2,2,7}]$
$\sqrt{32}^*$	$[5,\overline{1,1,1,10}]$	$\sqrt{62}$	$[7,\overline{1,6,1,14}]$
$\frac{\sqrt{33}+1}{2}$	$[3,\overline{2,1,2,5}]$	$\sqrt{63}^*$	$[7,\overline{1,14}]$
$\sqrt{34}$	$[5,\overline{1,4,1,10}]$	$\frac{\sqrt{65}+1}{2}$	$[4,\overline{1,1,7}]$
$\sqrt{35}$	$[5,\overline{1,10}]$	$\sqrt{66}$	$[8,\overline{8,16}]$
$\frac{\sqrt{37}+1}{2}$	$[3,\overline{1,1,5}]$	$\sqrt{67}$	$[8,\overline{5,2,1,1,7,1,1,2,5,16}]$
$\sqrt{38}$	$[6,\overline{6,12}]$	$\sqrt{68}^*$	$[8,\overline{4,16}]$
$\sqrt{39}$	$[6,\overline{4,12}]$	$\frac{\sqrt{69}+1}{2}$	$[4,\overline{1,1,1,7}]$
$\sqrt{40}^*$	$[6,\overline{3,12}]$	$\sqrt{70}$	$[8,\overline{2,1,2,1,2,16}]$
$\frac{\sqrt{41}+1}{2}$	$[3,\overline{1,2,2,1,5}]$	$\sqrt{71}$	$[8,\overline{2,2,1,7,1,2,2,16}]$
$\sqrt{42}$	$[6,\overline{2,12}]$	$\sqrt{72}^*$	$[8,\overline{2,16}]$
$\sqrt{43}$	$[6,\overline{1,1,3,1,5,1,3,1,1,12}]$	$\frac{\sqrt{73}+1}{2}$	$[4,\overline{1,3,2,1,1,2,3,1,7}]$
$\sqrt{44}^*$	$[6,\overline{1,1,1,2,1,1,1,12}]$	$\sqrt{74}$	$[8,\overline{1,1,1,1,16}]$
$\sqrt{45}^*$	$[6,\overline{1,2,2,2,1,12}]$	$\sqrt{75}^*$	$[8,\overline{1,1,1,16}]$
$\sqrt{46}$	$[6,\overline{1,3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,12}]$	$\sqrt{76}^*$	$[8,\overline{1,2,1,1,5,4,5,1,1,2,1,16}]$
$\sqrt{47}$	$[6,\overline{1,5,1,12}]$	$\frac{\sqrt{77}+1}{2}$	$[4,\overline{1,7}]$
$\sqrt{48}^*$	$[6,\overline{1,12}]$	$\sqrt{78}$	$[8,\overline{1,4,1,16}]$
$\sqrt{50}^*$	$[7,\overline{14}]$	$\sqrt{79}$	$[8,\overline{1,7,1,16}]$
$\sqrt{51}$	$[7,\overline{7,14}]$	$\sqrt{80}^*$	$[8,\overline{1,16}]$
$\sqrt{52}^*$	$[7,\overline{4,1,2,1,4,14}]$	$\sqrt{82}$	$[9,\overline{18}]$
$\frac{\sqrt{53}+1}{2}$	$[4,\overline{7}]$	$\sqrt{83}$	$[9,\overline{9,18}]$
$\sqrt{54}^*$	$[7,\overline{2,1,6,1,2,14}]$	$\sqrt{84}^*$	$[9,\overline{6,18}]$
$\sqrt{55}$	$[7,\overline{2,2,2,14}]$		

ω	连分数表示	ω	连分数表示
$\frac{\sqrt{85}+1}{2}$	$[5,\overline{9}]$	$\frac{\sqrt{93}+1}{2}$	$[5,\overline{3,9}]$
$\sqrt{86}$	$[9,\overline{3,1,1,1,8,1,1,1,3,18}]$	$\sqrt{94}$	$[9,\overline{1,2,3,1,1,5,1,8,1,5,1,1,3,2,1,18}]$
$\sqrt{87}$	$[9,\overline{3,18}]$		
$\sqrt{88}^*$	$[9,\overline{2,1,1,1,2,18}]$	$\sqrt{95}$	$[9,\overline{1,2,1,18}]$
$\frac{\sqrt{89}+1}{2}$	$[5,\overline{4,1,1,1,1,4,9}]$	$\sqrt{96}^*$	$[9,\overline{1,3,1,18}]$
$\sqrt{90}^*$	$[9,\overline{2,18}]$	$\frac{\sqrt{97}+1}{2}$	$[5,\overline{2,2,1,4,4,1,2,2,9}]$
$\sqrt{91}$	$[9,\overline{1,1,5,1,5,1,1,18}]$	$\sqrt{98}^*$	$[9,\overline{1,8,1,18}]$
$\sqrt{92}^*$	$[9,\overline{1,1,2,4,2,1,1,18}]$	$\sqrt{99}^*$	$[9,\overline{1,18}]$

[黄金分割与费波那奇序列]

1° 把线段 AB 分成中外比(即 $AH^2=AB\cdot HB$)的分割称为黄金分割. 也就是求代数方程

$$x^2+x-1=0$$

的一个根

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

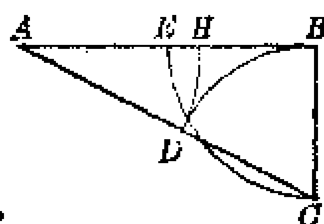


图 20.1

黄金分割的几何作图见图 20.1(E 为 AB 中点).

2° 由递推关系

$$\begin{cases}F_{n+2}=F_{n+1}+F_n & (n\geqslant 0)\\ F_0=0,\quad F_1=1\end{cases}$$

产生的序列

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\cdots$$

称为费波那奇序列. 其通项表达式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\qquad (n=1,2,\cdots)$$

3° 当 $m|n$ 时, $F_m|F_n$.

4° $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的最佳渐近分数, $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ 是 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的最佳渐近分数.

5° 设 a,b 为自然数. 由递推关系

$$\begin{cases}\widetilde{F}_{n+2}=a\widetilde{F}_{n+1}+b\widetilde{F}_n & (n\geqslant 0)\\ \widetilde{F}_0=0,\quad \widetilde{F}_1=1\end{cases}$$

产生的序列的通项表达式为

$$\widetilde{F}_n=\frac{1}{\sqrt{L}}\left[\left(\frac{a+\sqrt{L}}{2}\right)^n-\left(\frac{a-\sqrt{L}}{2}\right)^n\right] \qquad (L=a^2+4b,\ n\geqslant 1)$$

并且具有性质：当 $m \mid n$ 时，$\widetilde{F}_m \mid \widetilde{F}_n$.

[推广的费波那奇序列] 由递推关系

$$\begin{cases} F'^{(m)}_{n+m}=F'^{(m)}_n+F'^{(m)}_{n+1}+\cdots+F'^{(m)}_{n+m-1} & (n\geqslant 1) \\ F'^{(m)}_1=F'^{(m)}_2=\cdots=F'^{(m)}_{m-1}=0, \quad F'^{(m)}_m=1 \end{cases}$$

产生的序列称为 m 级推广的费波那奇序列. 其通项表达式为

$$F'^{(m)}_{(s+1)m+k}=\sum_{n_1+2n_2+\cdots+mn_m=sm+k}\frac{(n_1+\cdots+n_m)!}{n_1!\cdots n_m!}$$

$$=2^{k-s-1}\sum_{j=0}^{s}(-1)^j\left[\binom{(s-j)m+k}{j}+\binom{(s-j)m+k-1}{j-1}\right]2^{(s-j)(m+1)}{}^{*}$$

$$s=0,\ 1,\ 2,\cdots;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

设 w 为方程

$$x^m+x^{m-1}+\cdots+x-1=0 \quad (m\geqslant 2)$$

的唯一的正实根，则

$$w=\lim_{s\to\infty}\frac{F'^{(m)}_{(s+1)m}}{F'^{(m)}_{(s+1)m+1}}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{\sum_{j=0}^{s}(-1)^j\left[\binom{(s-j)m}{j}+\binom{(s-j)m-1}{j-1}\right]2^{sm-j(m+1)-1}}{\sum_{j=0}^{s}(-1)^j\left[\binom{(s-j)m+1}{j}+\binom{(s-j)m}{j-1}\right]2^{sm-j(m+1)}}$$

§3 同 余 式

[同余及其性质] 设 m 为自然数，若整数 a 与 b 之差 $a-b$ 为 m 的倍数，则称 a 与 b 对模 m 同余，记作

$$a\equiv b \pmod m$$

否则记为

$$a\not\equiv b \pmod m$$

---

* 数论中通常把二项系数 C_n^k 记作 $\binom{n}{k}$.

表示 a 与 b 对模 m 不同余。

同余具有下列性质：

1° $a\equiv a \pmod m$　　　　(自反性)

2° 若 $a\equiv b \pmod m$，则 $b\equiv a \pmod m$　　　　(对称性)

3° 若 $a\equiv b$，$b\equiv c \pmod m$，则 $a\equiv c \pmod m$　　　　(传递性)

4° 若 $a\equiv b$，$a_1\equiv b_1 \pmod m$，则

$$a+a_1\equiv b+b_1 \pmod m$$

$$a-a_1\equiv b-b_1 \pmod m$$

$$aa_1\equiv bb_1 \pmod m$$

5° 若 $ac\equiv bd$，$c\equiv d \pmod m$，且 $(c,m)=1$，则 $a\equiv b \pmod m$。

[完全剩余系与缩剩余系]　设以 m 为模，则由同余性质 1°，2°，3° 可将全体整数分为 m 个类，同类的数都同余，不同类的数不同余，称这样的类为同余类，每类中各取一数为代表，例如

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

构成一个完全剩余系。

在与 m 互素的各类中取一代表

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{\varphi(m)}$$

构成一缩剩余系(简称缩系)，此处 $\varphi(m)$ 为不超过 m 且与 m 互素的数的个数(称为欧拉函数)。

剩余系具有下列性质：

1° 若 $(m,m')=1$，x 过 m 的一完全剩余系，x' 过 m' 的一完全剩余系，则 $mx'+m'x$ 过 mm' 的一完全剩余系。

2° 若 $(m,m')=1$，x 过 m 的一缩系，x' 过 m' 的一缩系，则 $mx'+m'x$ 过 mm' 的一缩系。

3° 若 $a_1,a_2,\cdots,a_{\varphi(m)}$ 为模 m 的一缩系，且 $(k,m)=1$，则

$$ka_1,\ ka_2,\ \cdots,\ ka_{\varphi(m)}$$

也为 m 的一缩系。

[欧拉定理]　若 $(k,m)=1$，则

$$k^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m$$

式中 $\varphi(m)$ 为欧拉函数。

[费马定理]　若 p 为素数，则对所有整数 a，有

$$a^p\equiv a \pmod p$$

显然费马定理是欧拉定理的特例.

[一次同余方程可解条件] 同余方程

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n\equiv b \pmod m$$

有解的充分必要条件是:

$$(a_1, \cdots, a_n, m)|b$$

当满足此条件时,其解数(对模m的不同余者)为

$$m^{n-1}(a_1, \cdots, a_n, m)$$

[一元一次同余方程的解法] 一元一次同余方程

$$ax+b\equiv 0 \pmod m \tag{1}$$

有解的充分必要条件是: $(a,m)|b$. 若有解则共有(a,m)个互不同余的解, $\bmod m$. 解法如下:

设 $(a,m)=d$, $d|b$, 则原方程(1)化为

$$\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}\equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{m}{d}\right), \quad \left(\frac{a}{d}, \frac{m}{d}\right)=1$$

记作

$$a'x'+b'\equiv 0 \pmod{m'}, \quad (a',m')=1 \tag{2}$$

首先由辗转相除法确定 x_0, y_0(见§1), 使得

$$a'x_0+m'y_0=1$$

则

$$x'=-b'x_0$$

是同余方程(2)的解,最后得到

$$x=x'+m't, \quad t=0, 1, \cdots, d-1$$

为原方程(1)的解, $\bmod m$. 即有d个解

$$x', \ x'+\frac{m}{d}, \ x'+\frac{2m}{d}, \ \cdots, \ x'+\frac{(d-1)m}{d}$$

对模m不同余.

[孙子定理*] 若 $(m_i,m_j)=1$, $i\neq j$, 则同余方程组

$$x\equiv a_i \pmod{m_i}, \quad 1\leqslant i\leqslant n \tag{3}$$

有唯一解, $\bmod m_1m_2\cdots m_n$.

同余方程组(3)的解法如下:

---

* 外国书刊中称孙子定理为中国剩余定理. 我国古代在《孙子算经》"物不知其数"一问中对此类问题的解法已作叙述.

因为$(m_i, m_i')=1$，所以可由辗转相除法求出z_i, w_i，满足

$$z_i\prod_{j\neq i} m_j - w_i m_i = 1 \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

记

$$y_i = z_i \prod_{j\neq i} m_j \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

于是

$$\begin{cases} y_i\equiv 0 & (\bmod m_j,\ j\neq i) \\ y_i\equiv 1 & (\bmod m_i) \end{cases}$$

最后计算

$$x=\sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

它就是同余方程组(3)的唯一解，$\bmod m_1\cdots m_n$.

［二次剩余与二次非剩余］ 设m为大于1的整数，$(n, m)=1$，若

$$x^2\equiv n \quad (\bmod m)$$

可解，则称n为对模m的二次剩余，或二次剩余，$\bmod m$. 否则，称n为对模m的二次非剩余.

两个二次剩余之积仍为二次剩余，$\bmod p$.

两个二次非剩余之积为二次剩余，$\bmod p$.

一个二次剩余与一个二次非剩余之积为一个二次非剩余，$\bmod p$.

设p为奇素数，则在模p的缩剩余系中，有$\frac{p-1}{2}$个二次剩余：

$$1^2,\ \cdots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

有$\frac{p-1}{2}$个二次非剩余，$\bmod p$.

［勒让德符号及其性质］ 设p为奇素数，$p\nmid n$，又设

$$\left(\frac{n}{p}\right)=\begin{cases} 1, & \text{当}n\text{为二次剩余，}\bmod p \\ -1, & \text{当}n\text{为二次非剩余，}\bmod p \end{cases}$$

则$\left(\frac{n}{p}\right)$称为勒让德符号.

勒让德符号具有下列性质：

1° 若 $n\equiv n'\pmod p$，$p\nmid n$，则

$$\left(\frac{n}{p}\right)=\left(\frac{n'}{p}\right)$$

2° 欧拉判别条件　设 p 为奇素数，则

$$n^{\frac{p-1}{2}}\equiv\left(\frac{n}{p}\right)\pmod p$$

3° 若 p 为奇素数，$p\nmid mn$，则

$$\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right)=\left(\frac{mn}{p}\right)$$

4° 若 p 为奇素数，则

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

5° 若 p 为奇素数，则

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

6° 高斯互逆定律　设 p,q 为两个不同的奇素数，则

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

[二次同余式的解数]　设 $l>0$，$p\nmid n$，若 p 为奇素数，则二次同余式

$$x^2\equiv n\pmod{p^l}$$

的解数为 $1+\left(\frac{n}{p}\right)$.

当 $p=2$ 时，$l=1$ 时　有一解，

$l=2$ 时 $\begin{cases}\text{有二解，当 } n\equiv1 \pmod 4\\ \text{无　解，当 } n\equiv3 \pmod 4\end{cases}$

$l>2$ 时 $\begin{cases}\text{有四解，当 } n\equiv1 \pmod 8\\ \text{无　解，当 } n\not\equiv1 \pmod 8\end{cases}$

[对模 m 的次数]　设 h 为一整数，$(m,h)=1$，满足

$$h^l\equiv1\pmod m$$

的最小正整数 l 称为 h 对模 m 的次数，或 h 的次数，mod m.

若 $h^n\equiv1\pmod m$，则 $l\mid n$，这里 l 为 h 的次数，mod m.

[素数模的原根与指数]　设 p 为素数，次数为 $p-1$ 的数称为模 p 的原根.

设 g 为模 p 的一原根，则

$$1,\ g,\ g^2,\ \cdots,\ g^{p-2}\pmod p$$

两两互不同余.

任一整数 n ($p\nmid n$), 必有一数 a 使得

$$n\equiv g^a \quad (\bmod p), \quad 0\leqslant a<p-1$$

此 a 称为 n 的指数, mod p. 记作

$$a=\operatorname{ind}_g n$$

在不易混淆时, 简记 ind n.

指数具有下列性质:

1° 若 b 为满足

$$n\equiv g^b \quad (\bmod p)$$

的任一数, 则

$$b\equiv \operatorname{ind} n \quad (\bmod p-1)$$

2° $\operatorname{ind} ab\equiv \operatorname{ind} a+\operatorname{ind} b \quad (\bmod p-1), \quad p\nmid ab$

3° $\operatorname{ind} a^l\equiv l \operatorname{ind} a \quad (\bmod p-1), \quad p\nmid a$

4° 底数互换公式 设 g_1, g 为模 p 的两个不等的原根, 且 $g_1\equiv g^b(\bmod p)$, 则

$$\operatorname{ind}_g n\equiv \operatorname{ind}_g g_1\cdot \operatorname{ind}_{g_1} n \quad (\bmod p-1)$$

[模 m 的原根] 设 m 为一自然数, 若有一数 g 存在, 使得

$$1, g, g^2, \cdots, g^{\varphi(m)-1} \quad (\bmod m)$$

两两互不同余, 则此 g 称为对模 m 的原根. 模 m 的原根存在的充分必要条件是:

$$m=2, \ 4, \ p^l, \ 2p^l \ (p \text{ 为奇素数}, \ l \text{ 为正整数})$$

[素数及其最小原根表(5000 之内)] 加 * 者表示10为其原根

p	g	p	g	p	g	p	g
3	2	31	3	71	7	109*	6
5	2	37	2	73	5	113*	3
7*	3	41	6	79	3	127	3
11	2	43	3	83	2	131*	2
13	2	47*	5	89	3	137	3
17*	3	53	2	97*	5	139	2
19*	2	59*	2	101	2	149*	2
23*	5	61*	2	103	5	151	6
29*	2	67	2	107	2	157	5

p	g	p	g	p	g	p	g
163	2	349	2	557	2	757	2
167*	5	353	3	563	2	761	6
173	2	359	7	569	3	769	11
179*	2	367*	6	571*	3	773	2
181*	2	373	2	577*	5	787	2
191	19	379*	2	587	2	797	2
193*	5	383*	5	593*	3	809	3
197	2	389*	2	599	7	811*	3
199	3	397	5	601	7	821*	2
211	2	401	3	607	3	823*	3
223*	3	409	21	613	2	827	2
227	2	419*	2	617	3	829	2
229*	6	421	2	619*	2	839	11
233*	3	431	7	631	3	853	2
239	7	433*	5	641	3	857*	3
241	7	439	15	643	11	859	2
251	6	443	2	647*	5	863*	5
257*	3	449	3	653	2	877	2
263*	5	457	13	659*	2	881	3
269*	2	461*	2	661	2	883	2
271	6	463	3	673	5	887*	5
277	5	467	2	677	2	907	2
281	3	479	13	683	5	911	17
283	3	487*	3	691	3	919	7
293	2	491*	2	701*	2	929	3
307	5	499*	7	709*	2	937*	5
311	17	503*	5	719	11	941*	2
313*	10	509*	2	727*	5	947	2
317	2	521	3	733	6	953*	3
331	3	523	2	739	3	967	5
337*	10	541*	2	743*	5	971*	6
347	2	547	2	751	3	977*	3

p	g	p	g	p	g	p	g
983*	5	1213*	2	1451	2	1667	2
991	6	1217*	3	1453	2	1669	2
997	7	1223*	5	1459	5	1693	2
1009	11	1229*	2	1471	6	1697*	3
1013	3	1231	3	1481	3	1699	3
1019*	2	1237	2	1483	2	1709*	3
1021*	10	1249	7	1487*	5	1721	3
1031	14	1259*	2	1489	14	1723	3
1033*	5	1277	2	1493	2	1733	2
1039	3	1279	3	1499	2	1741*	2
1049	3	1283	2	1511	11	1747	2
1051*	7	1289	6	1523	2	1753	7
1061	2	1291*	2	1531*	2	1759	6
1063*	3	1297*	10	1543*	5	1777*	5
1069*	6	1301*	2	1549*	2	1783*	10
1087*	3	1303*	6	1553*	3	1787	2
1091*	2	1307	2	1559	19	1789*	6
1093	5	1319	13	1567*	3	1801	11
1097*	3	1321	13	1571*	2	1811*	6
1103*	5	1327*	3	1579*	3	1823*	5
1109*	2	1361	3	1583*	5	1831	3
1117	2	1367*	5	1597	11	1847*	5
1123	2	1373	2	1601	3	1861*	2
1129	11	1381*	2	1607*	5	1867	2
1151	17	1399	13	1609	7	1871	14
1153*	5	1409	3	1613	3	1873*	10
1163	5	1423	3	1619*	2	1877	2
1171*	2	1427	2	1621*	2	1879	6
1181*	7	1429*	6	1627	3	1889	3
1187	2	1433*	3	1637	2	1901	2
1193*	3	1439	7	1657	11	1907	2
1201	11	1447*	3	1663*	3	1913*	3

p	g	p	g	p	g	p	g
1931	2	2161	23	2411*	6	2687*	5
1933	5	2179*	7	2417*	3	2689	19
1949*	2	2203	5	2423*	5	2693	2
1951	3	2207*	5	2437*	2	2699*	2
1973	2	2213	2	2441	6	2707	2
1979*	2	2221*	2	2447*	5	2711	7
1987	2	2237	2	2459*	2	2713*	5
1993*	5	2239	3	2467	2	2719	3
1997	2	2243	2	2473*	5	2729*	3
1999	3	2251*	7	2477	2	2731	3
2003	5	2267	2	2503	3	2741*	2
2011	3	2269*	2	2521	17	2749	6
2017*	5	2273*	3	2531	2	2753*	3
2027	2	2281	7	2539*	2	2767*	3
2029*	2	2287	19	2543*	5	2777*	3
2039	7	2293	2	2549*	2	2789*	2
2053	2	2297*	5	2551	6	2791	6
2063*	5	2309*	2	2557	2	2797	2
2069*	2	2311	3	2579*	2	2801	3
2081	3	2333	2	2591	7	2803	2
2083	2	2339*	2	2593*	7	2819*	2
2087	5	2341*	7	2609	3	2833*	5
2089	7	2347	3	2617*	5	2837	2
2099*	2	2351	13	2621*	2	2843	2
2111	7	2357	2	2633*	3	2851*	2
2113*	5	2371*	2	2647	3	2857	11
2129	3	2377	5	2657*	3	2861*	2
2131	2	2381	3	2659	2	2879	7
2137*	10	2383*	5	2663*	5	2887	5
2141*	2	2389*	2	2671	7	2897*	3
2143*	3	2393	3	2677	2	2903*	5
2153*	3	2399	11	2683	2	2909*	2

p	g	p	g	p	g	p	g
2917	5	3209	3	3467	2	3709*	2
2927*	5	3217	5	3469*	2	3719	7
2939*	2	3221*	10	3491	2	3727*	3
2953	13	3229	6	3409	2	3733	2
2957	2	3251*	6	3511	7	3739	7
2963	2	3253	2	3517	2	3761	3
2969	3	3257*	3	3527*	5	3767	5
2971*	10	3259*	3	3529	17	3769	7
2999	17	3271	3	3533	2	3779*	2
3001	14	3299*	2	3539*	2	3793	5
3011*	2	3301*	6	3541	7	3797	2
3019*	2	3307	2	3547	2	3803	2
3023*	5	3313*	10	3557	2	3821*	3
3037	2	3319	6	3559	3	3823	3
3041	3	3323	2	3571*	2	3833*	3
3049	11	3329	3	3581*	2	3847*	5
3061	6	3331*	3	3583	3	3851*	2
3067	2	3343*	5	3593*	3	3853	2
3079	6	3347	2	3607*	5	3863*	5
3083	2	3359	11	3613	2	3877	2
3089	3	3361	22	3617*	3	3881	13
3109	6	3371*	2	3623*	5	3889	11
3119	7	3373	5	3631	21	3907	2
3121	7	3389*	3	3637	2	3911	13
3137*	3	3391	3	3643	2	3917	2
3163	3	3407*	5	3659*	2	3919	3
3167*	5	3413	2	3671	13	3923	2
3169	7	3433*	5	3673*	5	3929	3
3181	7	3449	3	3677	2	3931	2
3187	2	3457	7	3691	2	3943*	3
3191	11	3461*	2	3697	5	3947	2
3203	2	3463*	3	3701*	2	3967*	6

p	g	p	g	p	g	p	g
3989*	2	4231	3	4493	2	4751	19
4001	3	4241	3	4507	2	4759	3
4003	2	4243	2	4513	7	4783*	6
4007*	5	4253	2	4517	2	4787	2
4013	2	4259*	2	4519	3	4789	2
4019*	2	4261*	2	4523	5	4793*	3
4021	2	4271	7	4547	2	4799	7
4027	3	4273	5	4549	6	4801	7
4049	3	4283	2	4561	11	4813	2
4051*	10	4289	3	4567*	3	4817*	3
4057*	5	4297	5	4583*	5	4831	3
4073*	3	4327*	3	4591	11	4861	11
4079	11	4337*	3	4597	5	4871	11
4091*	2	4339*	10	4603	2	4877	2
4093	2	4349*	2	4621	2	4889	3
4099	2	4357	2	4637	2	4903	3
4111	17	4363	2	4639	3	4909	6
4127	5	4373	2	4643	5	4919	13
4129	13	4391	14	4649	3	4931*	6
4133	2	4397	2	4651*	3	4933	2
4139*	2	4409	3	4657	15	4937*	3
4153*	5	4421*	3	4663	3	4943*	7
4157	2	4423*	3	4673*	3	4951	6
4159	3	4441	21	4679	11	4957	2
4177*	5	4447*	3	4691*	2	4967*	5
4201	11	4451*	2	4703*	5	4969	11
4211*	6	4457*	3	4721	6	4973	2
4217*	3	4463*	5	4723	2	4987	2
4219*	2	4481	3	4729	17	4993	5
4229*	2	4483	2	4733	5	4999	3

§4 数论函数

对任一正整数 n 有确定值的函数 $f(n)$ 称为数论函数.

[积性函数与完全积性函数] 若 $(m,n)=1$, 有 $f(mn)=f(m)f(n)$, 则称数论函数 $f(n)$ 为积性函数. 若对任意正整数 m, n 都有 $f(mn)=f(m)f(n)$, 则称 $f(n)$ 为完全积性函数.

积性函数具有下列性质:

1° 若 $f(n)$ 为非零积性函数, 则 $f(1)=1$.

2° 若 $g(n)$, $h(n)$ 都为积性函数, 则 $g(n)h(n)$ 仍为积性函数, 且

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right)h(d)$$

也为积性函数, 这里 Σ 是对 n 的所有不同因数 d 求和.

3° 若 $g(n)$ 为非零积性函数, 且 $n=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$, 则

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d)=\prod_{i=1}^{s}\left[1+g(p_i)+g(p_i^2)+\cdots+g(p_i^{a_i})\right]$$

也为积性函数.

4° 若 $f(n)$ 为积性函数, 则

$$f([m,n])f((m,n))=f(m)f(n)$$

式中 (m,n) 为 m, n 的最大公因数, $[m,n]$ 为 m, n 的最小公倍数.

[麦比乌斯函数] 函数

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1\\ (-1)^r, & \text{当 } n \text{ 为 } r \text{ 个不同素数之积}\\ 0, & \text{当 } n \text{ 为一素数平方所整除}\end{cases}$$

称为麦比乌斯函数.

麦比乌斯函数具有下列性质:

1° $\displaystyle\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1\\ 0, & \text{当 } n>1\end{cases}$

2° $\mu(n)$ 为积性函数, 但非完全积性函数.

3° 设 $n=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$. 若 $f(n)$ 为积性函数, 则

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(d)=\prod_{i=1}^{s}\left[1-f(p_i)\right]$$

也为积性函数．例如

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)d=\prod_{i=1}^{s}(1-p_i)$$

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)d^{\lambda}=\prod_{i=1}^{s}(1-p_i^{\lambda})$$

$$\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{d}=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1\\ \prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i}\right), & \text{当 } n>1\end{cases}$$

$$\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{d^{\lambda}}=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1\\ \prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i^{\lambda}}\right), & \text{当 } n>1\end{cases}$$

[欧拉函数] 设n为自然数，$\varphi(n)$为不超过n且与n互素的正整数的个数，称为欧拉函数．

欧拉函数具有下列性质：

1° $\varphi(n)$为积性函数，但非完全积性函数．

2° 若$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$，则

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{s}n}{p_1p_2\cdots p_s}\prod_{i=1}^{s}(1-p_i)$$

$$=\prod_{i=1}^{s}(p_i^{\alpha_i}-p_i^{\alpha_i-1})$$

特别，当p为素数时，

$$\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}-p^{\alpha-1},\ \varphi(p)=p-1,\ \varphi(2p^{\alpha})=\varphi(p^{\alpha})$$

3° $$\sum_{d\mid n}\varphi(d)=n$$

4° $$\varphi(n)=n\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{d}$$

[除数函数] 自然数n的全部因数的个数称为除数函数，记作$d(n)$．除数函数具有下列性质：

1° $d(n)$ 为积性函数，但非完全积性函数，对任意自然数 m,n，常有

$$d(mn)\leqslant d(m)d(n)$$

2° 若 $n=p_1^{a_1}\cdots p_s^{a_s}$，则

$$d(n)=\sum_{d\mid n}1=\prod_{i=1}^{s}(a_i+1)$$

［冯·曼哥特函数］ 函数

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p, & 当\ n=p^m,\ m>0\\ 0, & 否则\end{cases}$$

称为冯·曼哥特函数．$\Lambda(n)$非积性函数．

［麦比乌斯反转公式与麦比乌斯变换］

1° 反转公式一 设 $0<\eta_0\leqslant\eta_1$，又设 $h(k)$为一非零完全积性函数．若对所有适合于 $\eta_0\leqslant\eta\leqslant\eta_1$ 的 η 常有

$$g(\eta)=\sum_{1\leqslant k\leqslant\frac{\eta_1}{\eta}}f(k\eta)h(k)$$

则对上述 η 也常有

$$f(\eta)=\sum_{1\leqslant k\leqslant\frac{\eta_1}{\eta}}\mu(k)\ g(k\eta)h(k)$$

反之也真．

2° 反转公式二 设 $\xi_0\geqslant1$，又设 $H(k)$为一非零完全积性函数．若对所有适合于 $1\leqslant\xi\leqslant\xi_0$ 的 ξ 常有

$$G(\xi)=\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi}F\left(\frac{\xi}{k}\right)H(k)$$

则对上述 ξ 也常有

$$F(\xi)=\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi}\mu(k)G\left(\frac{\xi}{k}\right)H(k)$$

反之也真．

3° 反转公式三 设 n_0 为一正整数，又设 $h(k)$为一非零完全积性函数．若对所有 $n\leqslant n_0$ 常有

$$g(n)=\sum_{d\mid n}f(d)h\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\mid n}f\left(\frac{n}{d}\right)h(d)$$

则对上述 n 也常有

$$f(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)h(d)$$

反之也真.

4° 麦比乌斯变换 设 n 为正整数, 若

$$g(n)=\sum_{d\mid n}f(d)=\sum_{d\mid n}f\left(\frac{n}{d}\right)$$

则

$$f(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\,g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$$

$g(n)$称为 $f(n)$的麦比乌斯变换, $f(n)$称为 $g(n)$的麦比乌斯逆变换.

5° 乘积麦比乌斯变换 设 n 为正整数, 若

$$g(n)=\prod_{d\mid n}f(d)$$

则

$$f(n)=\prod_{d\mid n}g(d)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

$g(n)$称为 $f(n)$的乘积麦比乌斯变换, $f(n)$称为 $g(n)$的乘积麦比乌斯逆变换.

[麦比乌斯变换表]

$$g(n)=\sum_{d\mid n}f(d) \qquad f(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

$g(n)$	$f(n)$
$\mu(n)$	$\mu(n)d(n)$
$\begin{cases}1, & n=1\\0, & n\neq 1\end{cases}$	$\mu(n)$
1	$\begin{cases}1, & n=1\\0, & n\neq 1\end{cases}$
$d(n)$	1
$\varphi(n)$	$\varphi(n)\prod_{p\mid n}\frac{p-2}{p-1}$
n	$\varphi(n)$

$g(n)$	$f(n)$
n^{λ}	$\sum\limits_{\substack{(d,n)=1\\ d\leqslant n}} d^{\lambda}$
$\sum\limits_{d\mid n} d$	n
$\sum\limits_{d\mid n} d^{\lambda}$	n^{λ}
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}\prod\limits_{p\mid n}(1-p)$
$\Lambda(n)$	$-\mu(n)\log n$
$\log n$	$\Lambda(n)$

§5 多 项 式

[整值多项式] 当变数x为整数时，一多项式$f(x)$的值常为整数，则这种多项式称为整值多项式.

整系数多项式为整值多项式一特例.

整值多项式表达式:

1° 凡n次整值多项式必可表为

$$a_0\binom{x}{n}+a_1\binom{x}{n-1}+\cdots+a_{n-1}\binom{x}{1}+a_n$$

式中a_0, a_1, …, a_n为整数,

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

2° 整值奇多项式(满足$f(-x)=-f(x)$)必可表为

$$a_1\binom{x}{1}+a_2\binom{x+1}{3}+\cdots+a_m\binom{x+m-1}{2m-1}$$

式中 a_1, a_2, …, a_m为整数.

3° 整值偶多项式(满足$f(-x)=f(x)$)必可表为

$$a_0+a_1\frac{x}{1}\binom{x}{1}+a_2\frac{x}{2}\binom{x+1}{3}+\cdots+a_m\frac{x}{m}\binom{x+m-1}{2m-1}$$

式中a_0, a_1, …, a_m为整数.

[可约多项式与不可约多项式] 设$f(x)$为一有理系数多项式，若有非常数的有理系数多项式$g(x)$和$h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)h(x)$$

则称$f(x)$为在有理数域上可约(或可化)，否则称$f(x)$为有理数域上的不可约多项式(简称不可约多项式)。

[高斯定理] 设$f(x)$为一整系数多项式，在有理数域上可约，则必有二整系数多项式$g(x)$和$h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)h(x)$$

[爱森斯坦判别法]

1° 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

为一整系数多项式。若有素数p，使得

$$p|a_i\quad(1\leqslant i\leqslant n),\qquad 但\ p\nmid a_0,\quad p^2\nmid a_n$$

则$f(x)$为不可约多项式。

2° 设 $f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}$

为$2n+1$次整系数多项式，若有素数p，使得

$$p|a_i\ (1\leqslant i\leqslant n),\quad p^2|a_j(n+1\leqslant j\leqslant 2n+1),$$

$$但\quad p\nmid a_0,\quad p^3\nmid a_{2n+1}$$

则$f(x)$为不可约多项式。

[派朗判别法]

1° 设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x-d$$

为一首项系数为1的n次整系数多项式，满足条件：

(i) $a_i\geqslant 0$ $\qquad(1\leqslant i\leqslant n-1)$

(ii) $d\geqslant 1,\ d|a_i$ $\qquad(1\leqslant i\leqslant n-1)$

(iii) $a_{n-1}\geqslant cd(n+a_1+\cdots+a_{n-2})$ $\qquad(c\geqslant 1$，实数$)$

则$f(x)$为不可约多项式。

2° 设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x-d$$

为一首项系数为1的n次整系数多项式，满足条件：

(i) $d\neq 0,\ d|a_i$ $\qquad(1\leqslant i\leqslant n-1)$

(ii) $|a_{n-1}|\geqslant 2|d|B,\quad B=1+|a_1|+\cdots+|a_{n-2}|\geqslant 2$

则$f(x)$为不可约多项式。

3° 设

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x-d,\qquad a_{n-1},d\neq 0$$

为一首项系数为1的n次整系数多项式，满足条件：

$$d|a_{n-1},\quad |a_{n-1}|\geqslant 3|d|$$

则$f(x)$为不可约多项式。

4° 设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

为一首项系数为1的n次整系数多项式，满足条件：

$$|a_{n-1}|\geqslant 2|a_n|^{n+1}B,\quad |a_n|\geqslant 2\quad (n\geqslant 2)$$

$$B=1+|a_1|+\cdots+|a_{n-2}|$$

则$f(x)$为不可约多项式。

5° 设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,\quad a_n\neq 0$$

为一首项系数为1，常数项不为零的n次整系数多项式，满足条件：

$$|a_1|>1+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$$

则$f(x)$为不可约多项式。

［多项式的整除性］　设$f(x)$和$g(x)$为二有理系数多项式，$g(x)$不恒为零，若有一多项式$h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)h(x)$$

则称$g(x)$可整除$f(x)$，记作

$$g(x)|f(x)\ \text{或}\ g|f$$

这时$g(x)$称为$f(x)$的因式，$f(x)$称为$g(x)$的倍式．否则，$g(x)$不能整除$f(x)$，记作$g\nmid f$.

以下$\partial^\circ f$表示多项式$f(x)$的次数。

多项式的整除性具有下列性质：

1°　$f|f$.

2°　若$f|g$且$g|f$，则f与g仅相差一常数因子。

3°　若$f|g$，$g|h$，则$f|h$.

4°　若$f|g$，则$\partial^\circ f\leqslant\partial^\circ g$.

若$f|g$，而$g\nmid f$，则f称为g的真因式，显然$\partial^\circ f<\partial^\circ g$.

5°　若$p(x)$为一不可约多项式，且$p(x)|f(x)g(x)$，则$p(x)|f(x)$或$p(x)|g(x)$。

6° 若 $p(x)$ 为一不可约多项式，且

$$f(x)=0,\ p(x)=0$$

有公共根，则必有 $p(x)\mid f(x)$.

[多项式的带余除法] 设 $f(x), g(x)$ 为任意多项式，$g(x)$ 不恒为零，则必有两个多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$，使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

式中 $r(x)=0$ 或 $\partial^\circ r<\partial^\circ g$. 这称为多项式的带余除法.

[多项式的辗转相除法] 多项式的辗转相除法与整数的辗转相除法的定义，公式完全类似，只须把本章 § 1(1)式中的文字符号看作多项式就行了.

同样，多项式的唯一分解定理，最高公因式和最低公倍式，多项式互素等概念和公式与整数一节完全类似，只须把相应公式中的符号看作多项式就行了.

例 求多项式

$$f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x-3 \text{ 与 } g(x)=2x^3-5x^2-4x+3$$

的最高公因式.

解 为了避免分数，先用 2 乘 $f(x)$，然后再用 $g(x)$ 去除 $2f(x)$：

$$\begin{array}{r|l}
2x^4-4x^3-8x^2+8x-6 & 2x^3-5x^2-4x+3 \\ \hline
2x^4-5x^3-4x^2+3x & x+1 \\ \cline{1-1}
x^3-4x^2+5x-6 & \\
2x^3-8x^2+10x-12 & (\text{乘以 } 2) \\ \cline{1-1}
2x^3-5x^2-4x+3 & \\ \cline{1-1}
r_1(x)=-3x^2+14x-15 &
\end{array}$$

在计算过程中，用 2 乘第一个差，因而商式变了样，但余式 $r_1(x)$ 只获得一个数因子 2，这不关紧要. 用 3 乘 $g(x)$，除以 $r_1(x)$：

$$\begin{array}{r|l}
6x^3-15x^2-12x+9 & -3x^2+14x-15 \\ \hline
6x^3-28x^2+30x & -2x-13 \\ \cline{1-1}
13x^2-42x+9 & \\
39x^2-126x+27 & (\text{乘以 } 3) \\ \cline{1-1}
39x^2-182x+195 & \\ \cline{1-1}
r_2(x)=56x-168 &
\end{array}$$

可取 $r_2(x)=x-3$.

$$\begin{array}{r|l}
-3x^2+14x-15 & x-3 \\ \hline
-3x^2+9x & -3x+5 \\ \cline{1-1}
5x-15 & \\
5x-15 & \\ \cline{1-1}
r_3=0 &
\end{array}$$

所以所求的公因式为 $x-3$.

[同余式]

1° 多项式模同余式　设 $m(x)$ 为一多项式，若

$$m(x)\mid f(x)-g(x)$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对模 $m(x)$ 同余，记作

$$f(x)\equiv g(x)\pmod{m(x)}$$

2° 素数模同余式　设 p 为素数，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为整系数多项式，若各项对应系数都对模 p 同余，则称此二多项式对模 p 同余，记作

$$f(x)\equiv g(x)\pmod{p}$$

3° 重模同余式　设 p 为素数，$\varphi(x)$ 为多项式，若 $f(x)-g(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的倍式，mod p，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对重模 $p,\varphi(x)$ 同余，记作

$$f(x)\equiv g(x)\quad(\text{modd } p,\varphi(x))$$

[费马定理的推广]　设 p 为素数，$\varphi(x)$ 为 n 次不可约多项式，mod p，则对任一非 $\varphi(x)$ 的倍式的多项式 $f(x)$，mod p，恒有

$$(f(x))^{p^n-1}\equiv 1\quad(\text{modd } p,\varphi(x))$$

对任一多项式常有

$$(f(x))^{p^n}\equiv f(x)\quad(\text{modd } p,\varphi(x))$$

特别

$$x^{p^n}\equiv x\quad(\text{modd } p,\varphi(x))$$

§6　代　数　数

[代数数]　若 θ 为一系数为有理数的代数方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的根，则 θ 称为代数数．通分后，θ 满足一有理整*系数的代数方程，因此代数数也可定义为"有理整系数的代数方程的根"．

若 $f(x)$ 为有理数域上不可约多项式，且 $a_0\neq 0$，则 θ 称为 n 次代数数．显然，一次代数数为有理数．

代数数具有下列性质：

1° 两个代数数的和、差、积、商(除数非零)仍为代数数．

2° 系数为代数数的代数方程的根仍为代数数．

[代数整数]　若 θ 为一首项系数为 1，其他系数为有理整数的 n 次不可约

* 有理整数即通常意义下的整数，这里是为了与代数整数相区别．

代数方程的根，则 θ 称为 n 次代数整数.

代数整数具有下列性质:

1° 代数整数为有理数的(即一次代数整数)必为有理整数.

2° 两个代数整数的和、差、积仍为代数整数.

3° 首项系数为 1，其他系数为代数整数的代数方程的根仍为代数整数.

4° 若 θ 为代数数，即满足有理整系数方程

$$a_0x^n+\cdots+a_n=0,\quad a_0>0$$

则 $a_0\theta$ 为代数整数.

5° 若 θ 为 n 次代数整数，则 θ 的幂 θ^i 可表为

$$\theta^i=a_{i0}+a_{i1}\theta+\cdots+a_{i,n-1}\theta^{n-1}$$

式中 i 为非负整数，a_{ik} 都为有理整数.

6° 若 θ 为 n 次代数数，则 θ 的幂 θ^i 满足等式

$$d\theta^i=b_{i0}+b_{i1}\theta+\cdots+b_{i,n-1}\theta^{n-1}$$

式中 i 为非负整数，d, b_{ik} 为有理整数.

[单位数] 若 θ 与 θ^{-1} 都为代数整数，则 θ 称为单位数.

单位数具有下列性质:

1° θ 为单位数的充分必要条件是: θ 为首项系数为 1，常数项为±1 的有理整系数代数方程的根.

2° 首项系数和常数项都为单位数，其他系数为代数整数的代数方程的根为单位数.

[代数扩域]

1° 单扩域 设 θ 为 n 次代数数，则形为

$$a_0+a_1\theta+a_2\theta^2+\cdots+a_{n-1}\theta^{n-1}\quad(\text{系数为有理数})$$

的数的全体构成一个域. 称为在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上添加 θ 所得的 n 次单扩域，记作 $\mathbf{Q}(\theta)$. 若 $\theta\neq0$，则 $\mathbf{Q}(\theta)$ 为由代数数 θ 经加、减、乘、除(除数非零)所生成的数的最大集合.

2° 有限扩域由有限多个代数数 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 经加、减、乘、除(除数非零)所生成的域，称为 $\mathbf{Q}$ 上的有限扩域，记作

$$\mathbf{K}=\mathbf{Q}(\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

有限扩域必为单扩域，即存在代数数 θ，使得

$$\mathbf{Q}(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\mathbf{Q}(\theta)$$

θ 的次数称为有限扩域 $\mathbf{Q}(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 的次数。

[共轭数] 设 θ 为 n 次代数数，θ 满足有理数域上 n 次不可约多项式

$$a_0x^n+\cdots+a_n$$

记 $\theta=\theta^{(1)}$，又设 $\theta^{(2)},\cdots,\theta^{(n)}$ 为该多项式的另外 $n-1$ 个根，则称 $\theta^{(2)},\cdots,\theta^{(n)}$ 为 θ 的共轭根。

任意代数数 $\alpha\in\mathbf{Q}(\theta)$，则 α 可唯一地表为

$$\alpha=a_0+a_1\theta+\cdots+a_{n-1}\theta^{n-1}=a(\theta) \tag{1}$$

式中 $a_k(0\leqslant k\leqslant n-1)$ 为有理数. 记 $\alpha=\alpha^{(1)}$，则

$$\alpha^{(j)}=a_0+a_1\theta^{(j)}+\cdots+a_{n-1}\theta^{(j)n-1}\quad(j=2,\cdots,n)$$

称为 α 的共轭数.

[代数数的迹与矩] 设 $\alpha\in\mathbf{K}=\mathbf{Q}(\theta)$，记 $\alpha=\alpha^{(1)}$，设 $\alpha^{(2)},\ \cdots,\ \alpha^{(n)}$ 是 α 的共轭数，则分别称

$$S(\alpha)=\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(n)}=a(\theta^{(1)})+\cdots+a(\theta^{(n)})$$

$$N(\alpha)=\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(n)}=a(\theta^{(1)})\cdots a(\theta^{(n)})$$

为代数数 α 的迹与矩，式中 $a(\theta^{(j)})$ 如(1)式定义.

注意，这里的迹与矩是对域K而言的，矩又称为范数. 它们的另一个定义是：设 α 的极小多项式(以 α 为根的最低次不可约多次式)为

$$g(x)=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$$

令 $r=\dfrac{n}{m}$，则

$$S(\alpha)=-rb_1N(\alpha)=(-1)^{rm}b_m^r$$

迹与矩具有下列性质：

1° 若 α 为代数数，则 α 的迹与矩均为有理数.

2° 若 α 为代数整数，则 α 的迹与矩为有理整数. 若 α 为非零代数整数，则 $|S(\alpha)|\geqslant1$，$|N(\alpha)|\geqslant1$.

3° 代数整数 α 为单位数的充分必要条件是：$N(\alpha)=\pm1$.

4° $$S(\alpha+\beta)=S(\alpha)+S(\beta)$$

$$N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta)$$

[代数数域的基底与整底]

1° 基底 设 $\mathbf{K}$ 为 n 次代数扩域，$\omega_1,\cdots,\omega_n$ 为 $\mathbf{K}$ 中一组代数数，若 $\mathbf{K}$ 中任意代数数 γ 都可唯一地表为

$$\gamma=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\omega_j$$

式中 γ_j 为有理数，则 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 称为 $\mathbf{K}$ 的一组基底．显然 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 在有理数域上线性无关．

$\omega_1,\cdots,\omega_n$ 是域 $\mathbf{K}$ 的一组基底的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix}\omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \cdots & \omega_n^{(1)}\\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \cdots & \omega_n^{(2)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \cdots & \omega_n^{(n)}\end{vmatrix}\neq 0$$

式中 $\omega_j^{(i)}(i=2,\cdots,n)$ 是 $\omega_j^{(1)}(=\omega_j)$ 的共轭数，$j=1,2,\cdots,n$．

若 $\mathbf{K}=\mathbf{Q}(\theta)$，则 $1,\theta,\cdots,\theta^{n-1}$ 为 $\mathbf{K}$ 的一组基底．

2° 整底　设 $\mathbf{K}$ 为 n 次代数扩域，$\omega_1,\cdots,\omega_n$ 为 $\mathbf{K}$ 中一组代数整数，若 $\mathbf{K}$ 中任意代数整数 γ 都可唯一地表为

$$\gamma=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\omega_j$$

式中 γ_j 为有理整数，则 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 称为 $\mathbf{K}$ 的一组整底．

若 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 为一组使

$$|\det(\omega_j^{(i)})|$$

为最小的代数整数，则这组 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 为一组整底．

［二次域］　设 D 为一无平方因子的有理整数，则 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 为二次域．$\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 中的任意代数数都可表为

$$\alpha=a+b\sqrt{D}$$

式中 a 和 b 都为有理数．

设 D 为一无平方因子的有理整数．

$$\omega=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}, & \text{当 } D\equiv 1 \pmod 4\\ \sqrt{D}, & \text{当 } D\equiv 2,3 \pmod 4\end{cases}$$

则 $1,\omega$ 为二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 的一组整底．

一般 n 次域 $\mathbf{Q}(\theta)(n\geqslant 3)$ 不一定能找到代数整数 ω，使

$$1,\omega,\cdots,\omega^{n-1}$$

构成 $\mathbf{Q}(\theta)$ 的一组整底．

［高斯域］　设 $i=\sqrt{-1}$，则 $\mathbf{Q}(i)$ 称为高斯域，它是二次域．

高斯域中的任意数可表为

$$\alpha=a+bi$$

式中 a, b 都为有理数. 当 a, b 都为有理整数时, $a+bi$ 称为高斯整数.

高斯域有四个单位数: $\pm1, \pm i$, 它们的范都为 1.

[分圆域] 设 m 为正整数, 把多项式 x^m-1 的所有根添加到 $\mathbf{Q}$ 上所构成的域 Σ 称为 $\mathbf{Q}$ 上的 m 次单位根的分圆域.

Σ 中存在一个 m 次本原单位根 θ (θ 是 x^m-1 的根, 但不是 x^n-1 的根 $(n<m)$, 称 θ 为 m 次本原单位根), 使得 $\Sigma=\mathbf{Q}(\theta)$, 而 $1, \theta, \cdots, \theta^{m-1}$ 构成 Σ 的一组整底.

如果 θ 是 m 次本原单位根, 使 $\theta^k((k,m)=1)$ 也是 m 次本原单位根, 共有 $\varphi(m)$ 个, 这里 $\varphi(m)$ 为欧拉函数.

[分解定理]

1° 整除性　若 α, β 为二代数整数, 当 $\frac{\alpha}{\beta}$ 仍为代数整数时, 则称 β 可整除 α, 记作 $\beta|\alpha$. 这时称 α 是 β 的倍数, β 是 α 的因数.

2° 结合性　若二代数整数 α, β 仅相差一单位数因子, 则称 α 与 β 是相结合的.

显然有: (i) α 与 α 相结合; (ii) 若 α 与 β 相结合, 则 β 与 α 相结合; (iii) 若 α 与 β 相结合, β 与 γ 相结合, 则 α 与 γ 相结合.

3° 不可分解　若 $\mathbf{K}$ 中的代数整数 α, 有另外两个代数整数 β, $\gamma\in\mathbf{K}$, 且都不是单位数, 使

$$\alpha=\beta\gamma$$

则称 α 在域 $\mathbf{K}$ 中可分解, 否则称为不可分解.

4° 分解定理　在 $\mathbf{K}$ 中的任意一代数整数可以分解为不可分解的代数整数的乘积.

如果不计次序和结合性, 这种分解是唯一的, 则称为唯一分解.

高斯域的唯一分解定理成立.

二次域中唯一分解定理成立的, 现已知道有

$$\mathbf{Q}(\sqrt{D}),\quad D=2, 3, 5, 6, 7, 13, 17, 21, 29 \text{ 等.}$$

不是所有的二次域唯一分解定理都成立, 例如 $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ 唯一分解定理不成立:

$$6=2\cdot3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

第二十一章　集论与一般拓扑学

集是近代数学最基本的概念，本章首先介绍集论的公理系统．不过这个系统近来已被证明是不完备的，所以对这里所采取的出发点做了必要的说明（见§1,一的最后）．其次介绍集论本身的主要内容——序数与基数理论．

本章另一主要内容是一般拓扑学．这里重点介绍对数学分析特别重要的几种特殊拓扑空间和点集——尺度空间(附一致性结构)、紧致集、联结集、还结合前两者讨论了变换族的点点收敛拓扑、一致收敛拓扑、紧致——开拓扑．最后，介绍流形和微分流形的概念和几个基本的存在定理．代数拓扑的知识不在本章介绍之列(唯一例外是在§6里谈到"单联"的概念)，此外，在介绍微分流形的时候没有牵涉到微分几何结构(如切空间)．

§1　集（集　合）

一、集的定义

1．集的古典定义

［集与元素］　一些事物的全体叫做一个集，这些事物中的每一个，都称为这个集的(或这个集里的)元素．

如果某种事物只有一个，这个事物假定记作a，那末称这种事物的全体是集$\{a\}$，a是$\{a\}$的唯一的元素．

如果某种事物不存在，就称这种事物的全体是空集．规定任何空集都只是同一个集，记作 $\varnothing$．任何事物都不是 $\varnothing$ 的元素．

每一个集都是一个事物．

［属于与包含］　假定a是集A的元素，记作

$$a\in A\quad 或\quad A\ni a$$

"$\in$"读作"属于"，"$\ni$"读作"包含"．假定a不是A的元素，记作

$$a\notin A\quad 或\quad A\not\ni a$$

"$\notin$"读作"不属于"，"$\not\ni$"读作"不包含"．

［定义的注释］

1°　$\{a\}$和a一般是不同的概念，比如$\{\varnothing\}$有一个唯一的元素 $\varnothing$，但是$\varnothing$没

有元素.

2° $\in$和$\notin$在逻辑上是彼此相否定(非)的,换句话说,假定a是一个事物,A是一个集,那末

$$a\in A \text{ 和 } a\notin A$$

不能都成立,也不能都不成立.

3° 假定A和B都是集,如果任何一个事物属于A也一定属于B,属于B也一定属于A,那末A和B是同一个集,或称两个集A和B相等,记作$A=B$.

[集的例子] 假定有一些事物,全部写出来是$a, b, c, \cdots$,那末由定义,它们的全体是一个集,这个集可以记成$\{a, b, c, \cdots\}$. 元素符号的次序和重复都无关实质,比如$\{a, b\}=\{b, a\}=\{a, b, a\}$.

由定义,$\varnothing$是一个集,而集是一个事物,所以下列的事物都是集:

$$\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}, \varnothing\}, \{\{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$$

又例如,零和正整数可以定义如下:

$$0=\varnothing$$
$$1=\{0\}=\{\varnothing\}$$
$$2=\{0,1\}=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$3=\{0,1,2\}=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$
$$4=\{0,1,2,3\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

[族] 族是集的同义词. 在某些情况,比如一个集A的元素都是集的时候,为了避免混淆,也把A叫做一个族或者一个集族.

虽然在近代集论模型中,任何一个集的元素都是集(因为不考虑非集的"事物"),但是有时使用"族"这个称呼可以表达得更清楚.

族有时也当作量词用. 例如把属于一个集族的全部集说成"一族集".

2. 罗素怪异

上面已经用例子说明怎样用列举元素的办法来表示一个集. 但是当一个集的全部元素无法列举的时候,这个集应该怎样表示呢?在集论发展的初期,流行的习惯是把一个集说成是"所有满足某条件的事物的全体". 如果把"某个事物x满足某条件"这句话表示成一个逻辑公式$p(x)$,那末按照所说的这种习惯表示法,一个集可以记作$\{x|p(x)\}$或$\{x: p(x)\}$(所有使$p(x)$成立的x的全体). 一般往往认为只要所说的条件是明确的,也就是对任何x,$p(x)$和$\overline{p(x)}$(非$p(x)$,就是$p(x)$的否定)有一个且只有一个成立,那末这种表示法是没有问题

的．可是实际上并不如此．下面举著名的罗素怪异当例子：

设 $z=\{x|x\notin x\}$．如果 z 是集，那末 z 也是事物，因此 $z\in z$ 和 $z\notin z$ 不能都成立．假定 $z\in z$，那末 z 应该满足所说的条件 $x\notin x$，因此 $z\notin z$，自相矛盾．假定 $z\notin z$，那末 z 已经满足所说的条件 $x\notin x$，因此 $z\in z$，又自相矛盾．这就叫罗素怪异．

根据定义的注释 2°，z 不是集．因此罗素怪异实际上是错误地假设"z 是集"引起的．除了这个形式逻辑上的理由外，对罗素怪异还可做更深入的解释，但是有个根本的问题不好解决，既然 $\{x|x\notin x\}$ 不是集，那末别的 $\{x|p(x)\}$ 可以算作集吗？

为了回答这个问题，集的概念必须进一步精密化，因此下面介绍公理系统．

3．ZFC 公理系统与 BNG 公理系统

目前集论公理系统有两种形式，一种是策莫洛-弗兰克尔-柯恩形式，简称 ZFC；另一种是贝尔内斯-诺伊曼-葛德尔形式，简称 BNG．这里采用 ZFC 公理系统．

ZFC 包括九个公理(有三个显然包含在前面集的定义和定义的注释中)，它们是

［外延公理］　即定义的注释 3°．

［空集公理］　存在一个不包含任何元素的集．

［无序对公理］　对任何事物 x 和 y，存在一个集 $\{x,y\}$，$\{x,y\}$ 的仅有的元素是 x 和 y．

［正则公理］　任何一个不空的集 A 一定包含一个元素 a，A 的任何一个元素都不是 a 的元素．

由正则公理可以知道，对任何集 a 来说，a 和 $\{a\}$ 是不同的．这是因为如果 $a=\{a\}$，那末 $\{a\}$ 就不符合正则公理．

ZFC 的其余五个公理是替换公理(本节，二)，方幂集公理，和集公理(本节，三)，无限公理(§2，三)，选择公理(§2，四)．它们分别在各有关节里详细说明．总的说来，这些公理用比较精密的形式规定了集有哪些．但这个公理系统不能证明自己不矛盾，同时它也没有把集论所必需的所有的集都规定在内(§2，六)．因此这个系统未能成功地取代集的古典定义．后面将采用如下的出发点：(i) 假设这五个公理所规定的集是符合前面集的古典定义和定义的注释的．(ii) 除了元素可以全部列举的集以外，只考虑上述公理所规定的集．

二、变换·集的一般表示法·标号集

[有序对]　假定x和y都是事物，那末

$$\langle x,y\rangle=\{\{x,1\},\{y,2\}\}$$

称为由x和y结成的有序对，x和y分别称为$\langle x,y\rangle$的第一坐标和第二坐标.

有序对是针对无序对说的．可以看到$\langle x',y'\rangle=\langle x,y\rangle$的充分必要条件是：$x'=x$且$y'=y$．而无序对跟元素先后次序无关.

[替换公理]　假定X是一个集，如果对每个$x\in X$作为第一坐标，都有一个且只有一个y与x结成有序对$\langle x,y\rangle$，那末所有这种有序对的第二坐标y的全体是一个集Y.

把每个$\langle x,y\rangle$看作有序对$\langle x,\langle x,y\rangle\rangle$的第二坐标，再一次应用替换公理，就可看到所有这种有序对$\langle x,y\rangle$的全体也是一个集.

[变换(映射)·象源(原象)·象]　假定X是一个集，如果对每个$x\in X$作为第一坐标，都有一个且只有一个y与x结成有序对$\langle x,y\rangle$，其第二坐标y的全体记作Y(是一个集)，那末所有这种有序对$\langle x,y\rangle$的全体是一个集f，这时称f为把X变到Y上的变换(映射)，简称f是变上的(映上的)，X称为在变换f下Y的象源(原象)，Y称为在变换f下X的象，记作$Y=f(X)$.

一般，假定$\langle x,y\rangle\in f$，那末记作

$$y=f(x)$$

x称为在变换f下y的象源，y称为在变换f下x的象.

[一对一变换与逆变换]　由定义，一个变换的每个象源都只有一个象(单值性)，但是一个象不一定只有一个象源．如果特别每个象也都只有一个象源，那末称f是一对一的变换．在一个一对一变换f下，可以得到一个把Y变上X的变换f^{-1}，f^{-1}称为f的逆变换．如果$f(x)=y$，那末$f^{-1}(y)=x$.

[集的一般表示法与标号集]　假定有一个一对一的变换把一个集H变上X，那末X是一个集，如果把每个象源$h(\in H)$的象记作$x_h(\in X)$，把X记作

$$X=\{x_h\mid h\in H\}\tag{1}$$

那末H称为X的标号集，每个h称为x_h的标号.

反过来，一个集总有标号集的．因为至少它自己就可以看作自己的标号集．因此(1)式这种表示法是普遍适用的．以后应用这种记号的时候不一定再说明H是标号集，只要规定这种记号里写在H位置上的必定是标号集.

二、公理系统规定的集

[子集]　假定A和B都是集，B的每个元素都是A的元素，那末称B为A的一个子集，记作$B\subseteq A$或$A\supseteq B$．“$\subseteq$”读作“包含于”或“被掩于”，“$\supseteq$”读作“包含”或“掩盖”．

对于任何的集A,B和C有

1°　$A\subseteq A$　　　　（自反律）

2°　从$A\subseteq B,B\subseteq A$，可推出$A=B$　（反对称律）

3°　若$A\subseteq B,B\subseteq C$，则　$A\subseteq C$　　（传递律）

假定$B\subseteq A$但是$B\neq A$（$B=A$不成立），那末称B为A的一个真子集，记作$B\subset A$．

规定空集$\varnothing$是任何集的子集．

[变进的变换]　假定一个变换f把一个集X变上集Y的一个子集，那末称f为把X变进Y的变换，简称f是变进的(映入的)．变上是变进的特殊情况．

[划分公理与特征函数]　假定有一个变换f把一个集X变进$\{0,1\}$，那末1的所有象源的全体是X的一个子集X'，f称为X'的特征函数．

划分公理是替换公理的结论，因为如果1的象源全体是$\varnothing$，那末$\varnothing$当然是X的子集，否则1至少有一个象源$x_0\in X$，造一个变换

$$g(x)=\begin{cases}x_0, & f(x)=0\\ x, & f(x)=1\end{cases}$$

那末$g(X)=X'$，所以X'是集．

推论　假定X是集，对每个$x\in X$，论点$p(x)$和$\overline{p(x)}$（$p(x)$的否定）一定有一个且只有一个成立，那末$\{x|x\in X\text{ 且 }p(x)\}$是一个集．

[差集与余集]　假定A和B都是集，那末所有属于A但不属于B的元素的全体是一个集(由划分公理的推论)，称为A和B的差集记作$A\setminus B$．

特别，当$B\subseteq A$的时候，$A\setminus B$称为B在A中的余集．

[方幂集公理]　一个集A的所有子集的全体是一个集，记作$^A2$，称为A方幂集．

可以把$^A2$一对一地变上“所有把A变进$2=\{0,1\}$的变换的全体”去．所以后者也是一个集，这个集和A方幂集可以互相作为彼此的标号集．今后，往往把它们看作同一个集，也就是把A的一个子集跟它的一个特征函数混同起来．

[和集(并)与和集公理]　假定$\{A_\lambda|\lambda\in B\}$是一个集族，那末$\{x|$存在一个

$A_h \ni x\}$是一个集，它称为这族集的和集(并)，记作$\bigcup\limits_{h\in H} A_h$.

当一个集族的全部集是$A, B, C, \cdots$时，这族集的和集可写成

$$A \cup B \cup C \cup \cdots$$

例 $\{1,2,3\} \cup \{0,2,4\} \cup \{2,1\} = \{0,1,2,3,4\}$

[通集(交)] 假定$\{A_h | h\in H\}$是一个集族，那末$\{x | \text{所有的 } A_h \ni x\}$是一个集，它称为这族集的通集(交)，记作$\bigcap\limits_{h\in H} A_h$. 通集存在是划分公理的结论.

当一个集族的全部集是$A, B, C, \cdots$时，这族集的通集可写成

$$A \cap B \cap C \cap \cdots$$

例 $\{1,2,3\} \cap \{0,2,4\} \cap \{2,1\} = \{2\}$

[直接积(笛卡儿积)] 假定$A = \{x_h | h\in H\}$, $B = \{y_k | k\in K\}$，那末

$$\{\langle x_h, y_k\rangle | x_h\in A \text{ 且 } y_k\in B\}$$

是一个集，它称为A和B的直接积，记作$A\times B$.

直接积存在是替换公理与和集公理的结论. 因为对任何$h\in H$与$k\in K$, $\{\langle x_h, y_k\rangle\}$是一个集，由替换公理，$\{\{\langle x_h, y_k\rangle\} | h\in H\}$是一个集族，因此存在和集$C_k = \bigcup\limits_{h\in H}\{\langle x_h, y_k\rangle\}$. $\{C_k | k\in K\}$又是一个集族，所以又存在和集$\bigcup\limits_{k\in K} C_k$，这就是$A\times B$.

假定$\{A_h | h\in H\}$是一个集族，其中每个$A_h \neq \varnothing$，那末由选择公理(§2,一)对每个$h\in H$可以得到一个$x_h\in A_h$，并且由替换公理得到一个集

$$\langle x_h | h\in H\rangle = \{\{x_h, h\} | h\in H\}$$

称为由一个选择变换(§2,四)得到的有序组.

把每个$x_h\in A_h$换为一个$x'_h\in A_h$，那末由替换公理得到另一个集

$$\langle x'_h | h\in H\rangle = \{\{x'_h, h\} | h\in H\}$$

这同样可以看作由一个选择变换得到的有序组.

所有这种有序组的全体是一个集，它称为一族集$A_h(h\in H)$的直接积，记作$\mathop{\times}\limits_{h\in H} A_h$.

$H=2$时，$\mathop{\times}\limits_{h\in H} A_h$就是$A\times B$.

[叠集] 假定A和B都是集，那末由变换的定义，每个把A变进B的变换f都是$A\times B$的子集，因此$f\in {}^{A\times B}2$. 由划分公理，所有把A变进B的变换f的全体$\{f | f\in {}^{A\times B}2 \text{ 且 } f \text{ 把 } A \text{ 变进 } B\}$是一个集，称为把$A$叠在$B$上的叠集，记作${}^A B$.

显然，${}^A B \subseteq {}^{A\times B}2$. 另一方面，特别当$B = 2 = \{0,1\}$时，${}^A 2$既是方幂集又是叠集.

[集的运算规律] 设 A, B, C 都是集，则

交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

德·摩根(De Morgan)律

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

§ 2 序数与基数

集论除了为数学各分支提供共同的形式基础以外，它本身的主要成果是序数和基数的理论. 序数和基数都是正整数的推广. 在 § 1 里介绍了与集有关的基本概念，但是没有接触到有限、无限、正整数的一般定义等等，这些都将在本节作严密的说明.

一、排队(良序)集

[关系] 假定 A 是一个集，$G \subseteq A \times A$，那末 G 称为 A 里的一个关系. 如果 $\langle x, y \rangle \in G$，那末称 x 与 y 有 G 这种关系.

[大小关系与分行(偏序)集] 假定 G 是集 A 里的一个关系，由 $\langle x, y \rangle \in G$ 和 $\langle y, z \rangle \in G$，必有 $\langle x, z \rangle \in G$，并且对任何 $x \in A$，$\langle x, x \rangle \notin G$，那末称 G 为 A 里的一个大小关系. 假定 $\langle x, y \rangle \in G$，记作 $x < y$. 如果 A 里有一个大小关系，那末称 A 为一个分行(偏序)集.

[次序与单行集] 假定集 A 里有一个大小关系($<$)满足条件：

(i) 对任何 $x \in A$ 和 $y \in A$，下列各式

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

一定有一个且只有一个成立，这里 $x = y$ 表示 x 和 y 相同；

(ii) 对任何 $x \in A$, $y \in A$ 和 $z \in A$，如果 $x < y$ 和 $y < z$ 都成立，那末 $x < z$ 成立.

那末称这关系是 A 里的一个次序，称 A 依这次序是单行集.

[排队集] 假定按照集 A 里的一个次序，A 的任何一个非空子集都有最小的元素，那末称 A 按照这个次序排队，称 A 为排队(良序)集. 如果 A 按照某个次

序排队，那末A的任何一个子集也都按照这个次序排队。

［小头］ 假定B是排队集A的一个子集，B的任何一个元素都比$A\setminus B$的任何一个元素小，那末称B是A的一个小头（注意，A自己也是A的一个小头，因为$A\setminus A=\varnothing$，上面的假设自然成立）. 如果$A\setminus B\neq\varnothing$，那末称$B$为$A$的真小头.

［保持次序的变换］ 假定一个变换把一个单行集（不一定是排队集）A一对一地变进一个单行集B，并且象源小的象也小，那末称这变换保持次序. 可以证明，假定A和B都是不空的排队集，那末其中一定有一个集可以保持次序地变上另一个集的一个小头，并且这种变换是唯一的.

三、序数

［序数］ 如果集α满足条件：

(i) α的每个元素都是集；

(ii) 如果$x\in\alpha$，$y\in x$，那末$y\in\alpha$；

(iii) α可以用$\in$当作次序（就是把$x<y$理解为$x\in y$）排队，

那末称集α为序数.

序数是存在的，§1，一，集的例子中所述的0和1，2，3，4等正整数就都是序数，例如$2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$显然具备(i)，(ii)，(iii)这三个条件.

［后继序数］ 假定α为序数，那末比α大的最小的序数称为α的后继序数.

［极限序数］ 假定α为序数，如果α没有最大的元素，那末比α的所有元素都大的最小的序数称为极限序数.

［序数的性质］

1° 对任何序数α和β，式子

$$\alpha\in\beta,\quad \alpha=\beta,\quad \beta\in\alpha$$

一定有一个且只有一个成立.

2° 若α,β,γ都是序数，并且$\alpha\in\beta,\beta\in\gamma$，则$\alpha\in\gamma$.

3° 若α和β都是序数，并且$\alpha\in\beta$，则α等于β的一个小头.

上述性质说明如果把$\in$看作$<$，任何序数α和β可以比较大小，而且小的序数既是大的序数的一个元素，又是大的序数的一个小头.

4° $\varnothing$是最小的序数.

5° 任何一个序数α都有唯一的后继序数，如果把这个后继序数记作$\alpha+1$，那末

$$\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$$

6° 一个序数α是所有比α小的序数的全体. 如果α有最大的元素γ，那末α就是γ的后继序数,不妨把γ记作$\alpha-1$. 如果α没有最大的元素，那末α不是任何序数的后继,这时α为极限序数.

7° 对任何一个序数集$\{\alpha_h|h\in H\}$,存在比所有α_h都大的序数,当这个序数集没有最大的元素时,$\alpha=\bigcup\limits_{h\in H}\alpha_h$就是比所有$\alpha_h$都大的最小的序数，$\alpha$是一个极限序数；当这个序数集有最大的元素$\alpha_k$时,$\bigcup\limits_{h\in H}\alpha_h=\alpha_k$，而比所有$\alpha_h$都大的最小序数是$\alpha=\alpha_k\bigcup\{\alpha_k\}=(\bigcup\limits_{h\in H}\alpha_h)\bigcup\{\alpha_k\}$.

[布拉里-弗蒂怪异] 假定"所有序数的全体"是一个集,那末由性质7°,存在一个序数比这个集里所有序数都大,也就是有一个序数比所有序数都大,这个自相矛盾的结论就叫布拉里-弗蒂怪异. 这是集论史上罗素怪异以外又一个著名的怪异.

从公理化集论来看，这无非说明"所有序数的全体"不是集. 因此要避免牵涉到这个概念,至多只说"小于某个序数α的所有序数的全体".

三、正整数·超限序数·超限归纳法

[正整数] 假定n是一个后继序数，比n小的所有序数是零($\varnothing$)或后继序数,那末说n是一个正整数.

[有限序数与超限序数] 零或正整数称为有限序数. 一个序数如果不是有限的,那末这种序数称为超限序数.

$\varnothing$当作序数时,记作0.

[无限公理] 至少存在一个集A有下面的性质：(i) $\varnothing\in A$; (ii) $x\in A$必有$x\bigcup\{x\}\in A$.

定理 所有有限序数的全体是一个集ω，ω是最小的超限序数. 所有正整数全体也是一个集.

事实上，每个有限序数必定属于无限公理所说的那种集A. 所以由划分公理得到定理的结论.

由这个定理知道,无限公理可以用下面的论点代替："所有正整数全体是一个集"或者"所有有限序数的全体是一个集."

[超限序数的例子]

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \cdots$$

所有这些序数的全体显然是一个用ω当作标号集的集$\{x_n|n\in\omega\}$，这里$x_n=$

$\omega+n$, ω 是所有有限序数的全体. 因此存在一个比它们都大的最小的序数，这是一个极限序数，记作 $\omega 2$. 同样由序数集 $\{\omega 2+n \mid n\in\omega\}$ 得到一个比所有 $\omega 2+n$ 都大的极限序数 $\omega 3$. 于是得到下列序数:

$$0, \omega, \omega 2, \omega 3, \cdots$$

比 ωn 这些序数都大的最小序数记作 $\omega^2=\omega\omega$. 同样还得到 ω^n. 比所有 ω^n $(n\in\omega)$ 都大的最小序数记作 ω^ω.

同样道理，由 $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \cdots$ 得到一个比它们都大的最小的序数，记作 ε_0.

还可以把比

$$\varepsilon_0, \varepsilon_0+1, \omega^{\varepsilon_0+1}, \omega^{\omega^{\varepsilon_0+1}}, \omega^{\omega^{\omega^{\varepsilon_0+1}}}, \cdots$$

这些序数都大的最小的序数记作 ε_1. 对任何正整数 $n+1$, 用 ε_{n+1} 表示比 ε_n+1, ω^{ε_n+1}, $\omega^{\omega^{\varepsilon_n+1}}$, …都大的最小的序数. 然后又把比 ε_0, ε_1, ε_2, …都大的最小的序数记作 ε_ω.

用类似办法还可得到 $\varepsilon_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_{\varepsilon_1}$, …, 因此得到序数 $\varepsilon_{\varepsilon_\omega}$. 当然还可得到 $\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_\omega}}$ 等等序数，不再多说.

上面是专门利用那些用 ω 当作标号集的序数族得到新的序数. 其实，还可利用那些用任何序数 α 当作标号集的序数集来得到新的序数；当 α 是极限序数的时候，从序数族 $\{\varepsilon_\beta \mid \beta<\alpha\}$ 可以得到一个比所有 $\varepsilon_\beta(\beta<\alpha)$ 都大的最小的序数，这序数就可记作 ε_α；当 α 是后继序数的时候，把 ε_α 定义为比下列这个用 ω 当标号集的序数族

$$\{\varepsilon_{\alpha-1}+1, \omega^{\varepsilon_{\alpha-1}+1}, \omega^{\omega^{\varepsilon_{\alpha-1}+1}}, \cdots\}$$

的每个序数都大的最小的序数.

[数学归纳法]　假定 ω 是所有有限序数的全体，$A\subseteq\omega$. 如果 $\varnothing\in A$ 并且由 $n\in A$ 可以推出 $n+1\in A$, 那末 $A=\omega$.

在实用上，A 是当作使某个论点成立的所有有限序数的全体的. 如果 A 满足上述数学归纳法的假设的话，那末 A 就是所有有限序数全体，所以，所有有限序数都使那个论点成立.

数学归纳法只针对特殊的序数 ω. 实际上对一般序数（特别是超限序数）α, 类似的结论也是成立的，这就是超限归纳法.

[超限归纳法]　假定 α 是一个序数，$A\subseteq\alpha$, 如果 $\varnothing\in A$, 并且对任何一个 $\beta\in\alpha$, 由所有比 β 小的序数 $\gamma\in A$ 可以推出 $\beta\in A$, 那末 $A=\alpha$.

超限归纳法显然可以用下面推论的形式表达，有时候应用这种形式比较方便：

推论 假定α是一个序数，$\varnothing \in A \subset \alpha$，那末存在序数$\beta$使$\xi \in A$对所有的$\xi < \beta$成立，但是$\beta \notin A$.

四、选择公理与排队定理

［选择公理与选择变换］ 假定$\{A_h | h \in H\}$是一个集族，这里每个集$A_h \neq \varnothing$，那末存在一个定义在这集族上的变换f：对所有$h \in H$，

$$f(A_h) = x_h \in A_h$$

变换f称为选择变换.

［排队定理］ 一个集一定可以按一个次序排队.

注意，1° 一个不空的排队集可以保持次序地变上一个序数，这序数和这变换都由这排队集唯一决定，这序数称为这个排队集的序数.

2° 一个集A可以依不同的次序成不同的排队集，而且这种不同的排队集的序数也不同，例如，如果依照把有限序数全体只当作一个集，不依照原来的次序，而规定每一个偶数都比任何一个奇数小，而偶数和偶数或者奇数和奇数之间依照原来的次序，那末得到的排队集是

$$\{0, 2, 4, \cdots, 1, 3, 5, \cdots\}$$

如果把它保持次序地变上一个序数的话，这个序数只能是

$$\{0, 1, 2, \cdots, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots\}$$

也就是$\omega+\omega=\omega 2$，而不是原来的序数ω.

3° 由选择公理(还有其他公理)推出排队定理；反过来由排队定理也可以推出选择公理，所以也可把排队定理当公理，而把选择公理当定理.

［仓恩定理］ 假定一个分行集A的任何一个单行子集都有上界(就是A的一个大于或者等于这个单行子集的每个元素的元素)，那末A一定包含一个极大元素(就是没有任何别的元素大于它).

定理 假设集论公理系统ZFC中除选择公理外，别的公理都成立，那末选择公理、排队定理、仓恩定理中任何一个和任何另外一个都是等价的.

五、序数算术

利用超限归纳法规定序数的算术如下：

［加法］ $\alpha+0=\alpha$，$\alpha+\beta=\sup\{\alpha+\gamma | \gamma<\beta\}$

[乘法]　$\alpha 0=0$，$\alpha(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha$，$\alpha\beta=\sup\{\alpha\gamma\mid\gamma<\beta\}$

[方幂]　$\alpha^0=1$，$\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\alpha$，$\alpha^\beta=\sup\{\alpha^\gamma\mid\gamma<\beta\}$

注意，以上假设β是极限序数．加法和乘法都是不可交换的．例如

$$1+\omega=\sup\{1+n\mid n<\omega\}=\omega<\omega+1$$

$$2\omega=\sup\{2n\mid n<\omega\}=\omega$$

但是$\omega 2=\omega(1+1)=\omega+\omega>\omega$．

[除法]　假定α和β是序数，$\beta>0$，那末存在唯一的序数ξ和唯一的序数η，$\eta<\beta$，使

$$\alpha=\beta\xi+\eta$$

α为极限序数的充分必要条件是：$\alpha=\omega\xi$，这里ξ由α唯一决定；而α为有限序数的充分必要条件是$\alpha=\omega\xi+n$，这里ξ和正整数n都由α唯一决定．

六、基数

[基数]　假定集A可以一对一地变上集B，那末记成

$$\text{card}(A)=\text{card}(B)$$

"card(A)"读作"A的基数"或势．

为了符合习惯，进一步把card(A)定义作"可以一对一地变上A的最小的序数"．这里不妨采用这个定义，不过要注意：1°　基数跟序数的算术不一样，所以尽管这样定义，但一般不用那个序数的记号来表示所说的基数，例如card(ω)不记作ω或其他的序数；2°　虽然由选择公理知道可以一对一变上集A的最小的序数存在并且唯一，但是并非所有关于基数的基本原理都跟选择公理有关系，下面的定理就是例子．

假定集A可以一对一地变进集B，那末记成

$$\text{card}(A)\leqslant\text{card}(B)$$

特别，当card$(A)\leqslant$card(B)而card$(A)\neq$card(B)时，记作

$$\text{card}(A)<\text{card}(B)$$

上面规定了基数间的大小如何比较，但这只是表面的，要等建立了下面的定理以后才能说明这样规定是合理的．

[康托-伯恩斯坦定理]　假定card$(A)\leqslant$card(B)，card$(B)\leqslant$card(A)，那末

$$\text{card}(A)=\text{card}(B)$$

推论

1° 对任何集A和集B，下列式子

$$\text{card}(A)<\text{card}(B),\quad \text{card}(A)=\text{card}(B)$$
$$\text{card}(B)<\text{card}(A)$$

一定有一个且只有一个成立.

2° 假定$\text{card}(A)<\text{card}(B)$，$\text{card}(B)<\text{card}(C)$，那末

$$\text{card}(A)<\text{card}(C)$$

[康托定理] 假定A不是空集，那末

$$\text{card}(A)<\text{card}({}^A2)$$

[有限基数与有限集] 一个有限序数的基数称为有限基数. 如果$\text{card}(A)$是有限基数，那末称A为有限集.

定理 假定h和k是有限序数，$h<k$，那末

$$\text{card}(h)<\text{card}(k)$$

由这个定理看到，所有有限基数的全体可以保持次序地变上所有有限序数的全体ω. 由于这个缘故，假定n是一个有限序数，那末可以用n来代表$\text{card}(n)$，也就是记成

$$\text{card}(n)=n$$

这样一来，正整数和零不仅是有限序数，而且是有限基数，并且当作基数来看，它们之间大小关系仍旧保持.

[超限基数] 任何一个基数总是某个序数的基数. 有限序数的基数是有限基数. 超限序数的基数一定不是有限基数，称为超限基数.

大的基数必定是大的序数的基数. 因此超限基数的全体是一个排队集. 所以可以把比某个超限基数小的所有超限基数用序数当作下标从小到大排队：

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots$$

其中$\aleph_0$就是最小的超限基数$\text{card}(\omega)$. "$\aleph$"读作"阿勒夫".

由上面说明知道，任何一个基数都可以表示$\aleph_\alpha$，这里α是某个序数，并且$\aleph_\alpha$是比所有$\aleph_\beta(\beta<\alpha)$大的最小的基数. 反过来，对任何序数$\alpha$，这样的$\aleph_\alpha$都存在. 因为假定$\aleph_k$存在，那末$\aleph_{k+1}$一定存在，因为总有基数比$\aleph_k$大，于是由排队集的性质知道存在比$\aleph_k$大的最小的基数$\aleph_{k+1}$，于是由数学归纳法知道，对任何正整数$n$，$\aleph_n$存在.

对一般序数α可以用超限归纳法证明，因为假定对于比序数β小的每个序数δ，$\aleph_\delta$存在，那末存在序数γ_δ，使$\text{card}(\gamma_\delta)=\aleph_\delta$比所有这些$\gamma_\delta$都大的序数存在，随便取一个记作$\gamma$，那末$\text{card}({}^\gamma 2)>\text{card}(\gamma)\geqslant\text{card}(\gamma_\delta)=\aleph_\delta$. 所以比

所有的$\aleph_\beta$都大的基数存在。因此由排队集的性质知道存在比所有的$\aleph_\beta$都大的最小的基数，这个最小的基数就是$\aleph_\beta$。因此由超限归纳法知道，对任何序数α，$\aleph_\alpha$存在。

[可数集与不可数集]　$\aleph_0$称为可数无限集的基数，因为$\aleph_0=\mathrm{card}(\omega)$，凡是$\aleph_0$当基数的集一定可以一对一地变上$\omega$（也就是零和所有正整数全体）。有限集和可数无限集都称为可数集。

由康托定理$\aleph_0<2^{\aleph_0}$（非空集的所有子集的全体的集的基数），所以基数等于$2^{\aleph_0}$的集是不可数的。$2^{\aleph_0}$正好是所有实数全体（连续域）的基数，这是因为实数全体就是二进位小数全体。但是$2^{\aleph_0}$究竟是那一个超限基数呢？康托猜测$2^{\aleph_0}$是最小的不可数的基数，这就是下面著名的

[连续域假设]　$\aleph_1=2^{\aleph_0}$

[广义连续域假设]　$\aleph_{\alpha+1}=2^{\aleph_\alpha}$对任何序数$\alpha$成立。

连续域假设对不对？这问题曾经长期得不到答案，三十年代末发现了意外的结果：如果集论的公理系统本身没有矛盾，那末连续域假设跟这个公理系统是不矛盾的，以后又进一步证明连续域假设的否定（非）（就是$\aleph_1<2^{\aleph_0}$）跟这个公理系统也是不矛盾的。这就是说，连续域假设对不对是不可解的（从现有公理系统来看）。由于实数在数学中的重要意义，这个问题不可解说明集论公理不完备。

七、基数算术

[公式]　假定A和B是集，$A\cap B=\varnothing$，那末规定

$$\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(A\cup B)$$

$$\mathrm{card}(A)\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(A\times B)$$

$$\mathrm{card}(B)^{\mathrm{card}(A)}=\mathrm{card}({}^AB)$$

基数的加法和乘法都是可以交换的。

定理

$$\aleph_\alpha^2=\aleph_\alpha$$

推论

1°　$\aleph_\alpha^n=\aleph_\alpha$　　　（n为正整数）

2°　$\aleph_\alpha+\aleph_\beta=\aleph_\alpha$　（$\beta\leqslant\alpha$）

3°　$\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta=\aleph_\alpha$　（$\beta\leqslant\alpha$）

[几个特殊数集*的基数计算]

1° 所有整数全体的基数等于$\aleph_0$. 这是因为

$$\begin{aligned}\text{card}(\text{所有整数全体}) &= \text{card}(\text{所有正整数全体})\\ &\quad+\text{card}(\text{所有负整数全体})+\text{card}(\{0\})\\ &=\aleph_0+\aleph_0+1=\aleph_0\end{aligned}$$

2° 所有有理数全体的基数等于$\aleph_0$. 因为每个有理数是一对整数的商，所以所有有理数全体的基数不超过所有整数对全体的基数，所以所有有理数全体的基数不超过$\aleph_0$. 但是整数可以看作有理数的特例，这基数又不小于$\aleph_0$. 所以所有有理数全体的基数等于$\aleph_0$.

3° 所有无理数全体的基数等于$2^{\aleph_0}$. 否则所有实数全体的基数不会等于$2^{\aleph_0}$.

4° 所有实代数数（整系数代数方程的根）全体的基数等于$\aleph_0$. 这是因为只有可数无限多个不同的整系数代数方程，而每个方程只有有限个根.

5° 所有实超越数（不是代数数的实数）全体的基数等于$2^{\aleph_0}$.

6° 复数全体的基数等于$(2^{\aleph_0})^2=2^{\aleph_0}$. 这是因为一个复数是一个实数对.

[康托三分集] 把闭区间$[0,1]$里的所有实数表示成三进位无限小数**. 各位数字都不是1的那些三进位无限小数全体记作T，那末T称为康托三分集. 从几何上看，把$T_0=[0,1]$等分成三段，去掉中间一段，剩下的部分$\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$记作$T_1$. 又把$\left[0,\frac{1}{3}\right]$和$\left[\frac{2}{3},1\right]$各等分为三段，去掉中间一段，剩下的部分$\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$记作$T_2$. 继续下去得到一个集族$\{T_n|n\in\omega\}$，这族集的通集就是$T=\bigcap_{n\in\omega}T_n$.

把T里每个数用2除，就得二进位无限小数全体，因此$\text{card}(T)=2^{\aleph_0}$.

§3 拓扑空间

一、基本概念

[拓扑与拓扑空间] 假定D是一个集，$\tau\subseteq{}^D2$（就是τ的每个元素都是D的子集），且满足条件：

---

* 这段中的数集的数都是按通常意义下定义的，见第一章，§1，一.

** 实数的进位制见第一章，§1，一.

(i) $\varnothing\in\tau$, $D\in\tau$;

(ii)任何一族属于 τ 的集的和集属于 τ;

(iii)任何有限个属于 τ 的集的通集属于 τ,

那末称 τ 为 D 的一个拓扑,称 $\langle D,\tau\rangle$ 这个有序对(见 §1,二)为一个拓扑空间.

假定 $X=\langle D,\tau\rangle$ 是一个拓扑空间,那末 D 的每个元素都称为 X 里的点,D 的每个子集都称为 X 里的点集,特别,D 称为 X 的承载点集. τ 的每个元素(是 D 的特殊子集)都称为 X 里的开集,τ 称为 X 的拓扑.

在不至于引起误解的情况下,也往往把一个拓扑空间跟它的承载点集混为一谈.

[凝固拓扑与分散拓扑] 注意,任何一个集 D 的拓扑总是存在的. 比如 $\{\varnothing, D\}$ 就是 D 的一个拓扑,称为 D 的凝固拓扑,$\langle D,\{\varnothing,D\}\rangle$ 称为一个凝固空间,在这个凝固空间里,开集只有 $\varnothing$ 和 D. 还有 ${}^{D}2$ 也是 D 的一个拓扑,称为 D 的分散拓扑,$\langle D, {}^{D}2\rangle$ 称为分散空间,在这个分散空间里,任何点集都是开集.

[诱导拓扑与拓扑子空间] 假定 X 是一个拓扑空间,A 是 X 里的一个点集. 把 X 里的任何一个开集跟 A 的通集称为 A 的一个相对开集,那末 A 的所有相对开集全体 τ' 是 A 的一个拓扑,称为 A 的诱导拓扑,$\langle A,\tau'\rangle$ 称为 X 的一个拓扑子空间.

注意,凡是说拓扑子空间,它的拓扑一定是指诱导拓扑.

[拓扑的粗细] 假定 τ_1 和 τ_2 都是集 D 的拓扑,$\tau_1\subset\tau_2$,那末说 τ_1 比 τ_2 粗,或者说 τ_2 比 τ_1 细.

一个集 D 的每个拓扑都是 ${}^{D}2$ 的一个子集,因此是 ${}^{{}^{D}2}2$ 的一个元素,应用划分公理,一个集 D 的所有拓扑的全体是一个集,称为 D 的拓扑族,而粗细关系是这个拓扑族里的一个小大关系,不过还不是次序,因为 D 的不同的拓扑不一定可以比粗细. 因此,D 的拓扑族按照这个粗细关系是一个分行集. 不过,当 D 的元素不止一个时,D 一定有最粗的拓扑,那就是凝固拓扑,也一定有最细的拓扑,那就是分散拓扑.

[拓扑亚基与拓扑的确定] 虽然一个集 D 的任何一族子集的全体只要满足上面定义的条件(i),(ii),(iii)就可以取做拓扑,但是要验证这些条件是否满足往往不很方便. 通常要利用拓扑亚基的概念来确定一个拓扑.

假定 σ 是集 D 的一族子集(就是 $\sigma\subseteq{}^{D}2$),把 D 的所有掩盖 σ 的拓扑 τ(就是 $\tau\supseteq\sigma$)的通集记作 τ_0,那末不难看到,τ_0 是一个拓扑,并且是掩盖 σ 的最粗的拓扑. τ_0 称为 σ 所繁殖的拓扑,而 σ 称为 τ_0 的一个亚基.

任何一个拓扑 τ 都是它自己所繁殖的拓扑，因此都是自己的一个亚基.

由这定义知道，集 D 的任何一族子集可以繁殖出一个唯一的拓扑来.

例 1 (一维实数空间 R^1) 把实数全体记作 R^1. 由所有区间 (a, b) (当 $a\geqslant b$, (a, b) 表示空集) 的全体所繁殖的拓扑 τ^1 称为 R^1 的普通拓扑. 以后如果没有另外声明，就把 R^1 当作具备这个普通拓扑的拓扑空间，称为一维实数空间.

R^1 当作集看还有别的拓扑，除凝固拓扑、分散拓扑外，比如由所有的半闭区间 $(a, b]$ (就是 $\{x|a<x\leqslant b\}$，当 $a\geqslant b$ 时，$(a, b]$ 表示空集) 全体也繁殖出一个拓扑来. 但是这些都不是普通拓扑，如果要采用这些拓扑，要另外声明.

[拓扑基] 假定 σ 是一个拓扑空间 X 里的一族开集的全体. 如果 X 里任何一个开集都是一族属于 σ 的开集的和集，那末称 σ 为 X 的拓扑的一个基. 显然 X 的拓扑自己就是自己的一个基.

由这定义知道，如果 σ 是拓扑空间 X 的拓扑的一个基，那末一定是 X 的拓扑的一个亚基.

定理 一个集 D 的一族子集的全体 σ 是它所繁殖的拓扑的一个基的充分必要条件是：对任何 $A\in\sigma$, 任何 $B\in\sigma$ 和任何 $x\in A\cap B$, 存在 $C\in\sigma$, 使 $x\in C\subseteq A\cap B$.

因此可以看到，所有实数区间 (a, b) 的全体是 R^1 的普通拓扑的一个基，因为属于任何两个区间的通集的任何一个实数 x, 一定属于这个通集的一个子区间. 因此还知道 R^1 里的任何一个开集都是区间的和集.

[开邻域、邻域与基本邻域] 假定一个拓扑空间里的一点 x 属于一个开集，那末称这开集为 x 的一个开邻域. 假定一个点集掩盖 x 的一个开邻域，那末称这点集为 x 的一个邻域. 假设 x 的一个开邻域属于这空间的拓扑的基，那末称这开邻域为 x 的一个基本邻域.

一个拓扑空间里的一个点集 S 是开集的充分必要条件：属于 S 的每一点都至少有一个基本邻域被 S 所掩盖.

开集也可用基本邻域的概念来定义. 这是通常利用拓扑基来确定拓扑的另一个办法. 例如这样规定：假定 S 是一个实数集. 如果对任何 $x\in S$, 存在一个区间 (a, b) 使 $x\in(a, b)\subseteq S$, 那末称 S 为一个开集. 所有这种开集全体正好就是 R^1 的普通拓扑.

[拓扑乘积空间] 假定 $\{X_h|h\in H\}$ 是一个拓扑空间族，$X_h=\langle D_h, \tau_h\rangle$, 那末 $\{A_h\times(\underset{k\neq h}{\times}D_k)\,|\,A_h$ 是 τ_h 的任何一个元素，h 是 H 的任何一个元素$\}$ 是 $\underset{h\in H}{\times}D_h$ 的一个子集族，由这个子集族繁殖出 $\underset{h\in H}{\times}D_h$ 的一个拓扑 τ, 称为这族 τ_h 的乘积拓扑.

把$\langle \underset{h\in H}{\times} D_h, \tau\rangle$称为这族拓扑空间$X_h$的拓扑乘积空间。

注意，$\{\underset{h\in H}{\times} A_h | A_h$ 是 τ_h 的任何一个元素$\}$这个集族所繁殖的拓扑一般比乘积拓扑细。只有对有限个拓扑空间的乘积，才跟乘积拓扑一致。

在不至于引起误解的情况，这个拓扑乘积空间往往就记作它的承载点集$\underset{h\in H}{\times} D_h$，因为说到拓扑乘积空间，意思就是它的拓扑是乘积拓扑。

[n维实数空间与n维区间] 把所有实数全体记作R^1。由例1可知R^1是一维实数空间。当n是一个正整数时，n个R^1的拓扑乘积空间$\underbrace{R^1\times R^1\times\cdots\times R^1}_{n\text{个}}$，记作$R^n$，称为$n$维实数空间。

如果把n个区间的直接积$(a_1, b_1)\times\cdots\times(a_n, b_n)$称为$n$维区间（如果其中某个$(a_i, b_i)=\varnothing$的话，这个直接积也当作$\varnothing$理解），那末由拓扑乘积空间的定义知道，$R^n$的拓扑就是所有$n$维区间的全体繁殖出来的拓扑，而且所有$n$维区间的全体是这个拓扑的一个基。换句话说，$R^n$里的任何一个开集都是$n$维区间的和集。

二、点集的基本拓扑概念

[内部·外部·边界·包] 假定S是拓扑空间$X=\langle D, \tau\rangle$里的一个点集，也就是$S\subseteq D$，那末相对于S可以把X里的点分为三类：

1° 内点与内部。如果对一点x存在一个开集V，使$x\in V\subseteq S$，那末称x为S的内点。

S的所有内点的全体，称为S的内部，记作$N(S)$，S的内部是S的子集。

2° 外点与外部。S的余集$D\backslash S$的内点称为S的外点。

S的所有外点的全体称为S的外部，S的外部是S的余集的子集。

3° 边界点与边界。既不是S的内点也不是S的外点的点称为S的边界点。

S的边界点的全体称为S的边界，记作$B(S)$。

$S\cup B(S)$称为S的包，记作$\bar{S}=S\cup B(S)$。

它们之间的基本关系如下：

点集S的边界同时也是S的余集的边界。

点集S的包的余集就是S的外部；S的余集的包的余集就是S的内部。

点集S的包就是S的内部和S的边界的和集，也就是$\bar{S}=S\cup B(S)=$

$N(S) \cup B(S)$；注意，一般 $\bar{S}$ 和 $\overline{N(S)}$ 不一定相等，也就是 $\bar{S}=N(S) \cup B(N(S))$ 不一定成立。

[处处稠密与无一处稠密] 假定 P 和 Q 是一个拓扑空间里的点集，$\overline{Q \cap P} \supseteq Q$，那末称 P 在 Q 里处处稠密。假定 P 的外部在 Q 里处处稠密，那末称 P 在 Q 里无一处稠密。注意，这里"P 的外部"不能换成"P 的余集"。

例如，有理数全体在一维实数空间 R^1 里处处稠密。无理数全体在 R^1 里也是处处稠密。整数全体在 R^1 里无一处稠密。一个不空区间 (a, b) 在 R^1 里既不处处稠密也不无一处稠密。

[开集与闭集] 一个拓扑空间 $\langle D, \tau\rangle$ 里的开集的概念是基本的（本节，一），一个开集的余集称为闭集。

1° 点集 S 为开集的充分必要条件是：S 等于它的内部，或者说 S 的每个边界点都不属于 S。

2° 点集 S 为闭集的充分必要条件是：S 等于它的包，或者说 S 的每个边界点都属于 S。

3° 点集 S 既是开集又是闭集的充分必要条件是：S 的边界是空集。例如 $\varnothing$ 和 D 都是既开又闭的。

4° 点集 S 不是开集也不是闭集的充分必要条件是：$B(S) \cap S \neq \varnothing$ 并且 $B(S) \cap S \neq B(S)$。

例如在 R^1 里，不空的区间 (a, b) 开而不闭，半闭区间 $(a, b]$ 不开不闭，闭区间 $[a, b]$ 闭而不开，有理数全体不开不闭，无理数全体不开不闭，整数全体闭而不开，R^1 既开又闭。

此外，由闭集的定义得到三个跟开集相对偶的性质：

1° $\varnothing$ 是闭集，D 是闭集；

2° 任何一族闭集的通集是闭集；

3° 任何有限个闭集的和集是闭集。

[孤立点、聚点与导集] 假定 S 是拓扑空间里的一个点集，一点 $x \in S$ 并且 x 有一个邻域 G 使 $G \cap S=\{x\}$，那末称 x 为 S 的孤立点。

假定 $y \in \bar{S}$（$\bar{S}$ 表示 S 的包），但 y 不是 S 的孤立点，那末称 y 为 S 的聚点。

一点 y 是点集 S 的聚点的充分必要条件是：对 y 的任何一个邻域 L，$(L \backslash\{y\}) \cap S \neq \varnothing$。

由定义知道，一个点集 S 的任何一个孤立点一定是 S 的边界点，而一个点集的任何一个内点一定是 S 的聚点，但是倒过来说显然不行。

S 的聚点的全体也称为 S 的导集，记作 S'. S 的包 $\bar{S}$ 可以表示为:

$$\bar{S}=S\cup S'=(S\text{ 的孤立点的全体})\cup S'$$

[孤立点集、自密集与完全集] 对一个拓扑空间里的任何一个点集 S，这空间里的全部点可以分为三类：S 的外点，S 的孤立点，还有 S 的聚点. 聚点包括 S 的内点和不孤立的边界点.

没有聚点的点集称为孤立点集(分散点集)，因为它的诱导拓扑一定是分散拓扑.

没有孤立点的点集 S（就是 $S\subseteq S'$）称为自密集. 特别如果 S 自密并且闭，那末 S 称为完全集. 因为 S 为闭集的充分必要条件是: $S'\subseteq S$，所以 S 是完全集的充分必要条件是: $S=S'$.

三、拓扑空间的分离程度·可数公理

1. 不同分离程度的拓扑空间

[T_0 空间] 如果拓扑空间 X 里任何不同的两点中至少有一点有一个邻域不包含另一点，那末称 X 为 T_0 空间.

[T_1 空间] 如果拓扑空间 X 里任何不同的两点一定各有邻域不包含另一点，那末称 X 为 T_1 空间.

X 是 T_1 空间的充分必要条件是: X 里任何一个只包含一点 x 的集 $\{x\}$ 是闭集.

[T_2 空间——豪斯道夫空间] 如果拓扑空间 X 里任何不同的两点一定各有邻域彼此没有公共点，那末称 X 为 T_2 空间，也称分离空间.

[正则空间] 假定对拓扑空间 X 里任何一个闭集 S 和任何一点 $x\notin S$，一定有两个开集 U 和 V，使 $U\supseteq S$, $V\ni x$ 且 $U\cap V\neq\varnothing$，那末称 X 为正则空间.

[T_3 空间] 正则的 T_1 空间称为 T_3 空间.

[正常空间] 假定对拓扑空间 X 里任何两个没有公共点的闭集 A 和 B 一定有两个开集 U 和 V 使 $U\supseteq A$, $V\supseteq B$ 且 $U\cap V=\varnothing$，那末称 X 为正常空间.

[T_4 空间] 正常的 T_1 空间称为 T_4 空间.

例如 n 维实数空间就是 T_4 空间.

定义所说的分离程度强弱次序如下:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \nearrow\text{正常} & & \nearrow\text{正则} & & & & & \\ T_4 & \rightarrow & T_3 & \rightarrow & T_2 & \rightarrow & T_1 & \rightarrow & T_0\end{array}$$

箭头表示"必是". 如 T_4 空间必是 T_3 空间，又必是正常空间. 至于正常和正则

是不能比较分离强弱程度的，它们跟 T_2, T_1 与 T_0 也是不能比较的。

2. 可数性

[邻域基] 假定 σ 是拓扑空间里一点 x 的一个邻域族，对 x 的任何一个邻域 U，一定存在 $V\in\sigma$ 使 $V\subseteq U$ 成立，那末称 σ 为 x 的一个邻域基。

[合盖族] 假定一族点集的和集掩盖一个集 S，那末称这族点集的全体是 S 的一个合盖族。

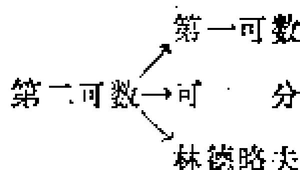
[第一可数空间] 假定拓扑空间 X 里任何一点有可数的邻域基，那末称这个空间为第一可数空间（"满足第一可数公理"的空间）。

[林德略夫空间] 假定一个拓扑空间里任何一个点集的任何一个合盖开集族有可数的子合盖族，那末称这个空间为林德略夫空间。

[可分空间] 假定在一个拓扑空间 X 里有可数点集处处稠密，那末称这空间为可分空间。

[第二可数空间] 有可数的拓扑基的空间称为第二可数空间（"满足第二可数公理"的空间）。

它们有下面的强弱关系：



例如，n 维实数空间 R^n 是一个第二可数空间，因为 $\{\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}(a_i, b_i) \mid a_i$ 和 b_i 都是有理数$\}$ 显然是它的一个可数的拓扑基。因此 R^n 又是第一可数空间、可分空间和林德略夫空间。

四、极限与连续

[变换的极限] 假定 f 是把一个拓扑空间 X 里的一个点集 A 变进另一个拓扑空间 Y 的变换。又假定 x_0 是 A 的一个聚点。如果 Y 里有一点 y_0，对 y_0 的任何一个邻域 V，x_0 有一个邻域 G，使

$$f((G\setminus\{x_0\})\cap A)\subseteq V$$

那末称 y_0 为 f 在 x_0 的极限，记作

$$\lim_{A\ni x\to x_0} f(x)=y_0$$

注意. 1° 假定 y_0 是 f 在点 $x_0\in A'$ 的极限，那末只有两种情形，一种情形是 x_0 有一个邻域 G 使 $f((G\setminus\{x_0\})\cap A)=\{y_0\}$ 成立，否则就是对 x_0 的任何一个邻

域 G, y_0 都是 $f((G\setminus\{x_0\})\cap A)$ 的一个聚点。

2° 一般，$\lim\limits_{A\ni x\to x_0} f(x)$ 不一定存在，存在的话也不一定唯一。但是特别当 f 是把 A 变进一个 T_2 空间的变换时，$\lim\limits_{A\ni x\to x_0} f(x)$ 要么不存在，要么存在并且唯一。

〔连续变换〕 假定 f 是把一个拓扑空间里的点集 A 变进一个拓扑空间的变换。假定 x_0 是 A 的孤立点或者 x_0 是 A 的聚点而 $\lim\limits_{A\ni x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，那末称 f 在 x_0 连续。

如果 $f(x)$ 在每一点 $x\in A$ 都连续，那末称 f 在 A 里连续，或称 f 为 A 的连续变换。

定理　把拓扑空间里的一个点集 A 变进一个拓扑空间的变换 f 是 A 的连续变换的充分必要条件是：$f(A)$ 的任何一个相对开集的象源（就是这个相对开集里每一点的象源的全体）是 A 的相对开集（条件中的"开"可以改成"闭"）。

〔使一个变换连续的最粗的拓扑〕 假定一个变换 f 把一个集 A 变进一个拓扑空间的承载点集 B，那末把 $f(A)$ 的所有相对开集的象源全体当作 A 的一个拓扑亚基，就得到 A 的一个拓扑 τ。这个拓扑 τ 就是使 f 在 A 里连续的最粗的拓扑。

特别当 f 是在集 A 里定义的实函数（或者实泛函）*时，f 可以看作把 A 变进 R^1 的变换，于是所有形如 $\{x\mid x\in A$ 并且 $a<f(x)<b\}$ 的子集（其中 a 和 b 是任意实数）全体就可以繁殖出使 f 连续的最粗的拓扑。

〔开拓定理——体策定理〕 假定 f 是正常空间 X 的一个闭集 B 里的连续有界实函数，对任何 $x\in B$，$m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立，那末存在一个函数 g 在 X（X 的承载点集）里连续，并且对所有的 $x\in B$，$g(x)=f(x)$，而对 X 里所有的点 x，$m\leqslant g(x)\leqslant M$ 成立。

它是下面实变数连续函数性质的推广：

假定 A 是一个拓扑空间里的点集，$f_1, f_2, \cdots$ 是 A 里一列连续函数，一致收敛于函数 f（也就是对任何正数 ε，存在正整数 N，使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对任何 $x\in A$ 和任何 $n>N$ 成立），那末 f 在 A 里连续。

〔拓扑变换与同胚〕 假定 X 和 Y 都是拓扑空间，f 是一个把 X 的承载点集一对一地变上 Y 的承载点集的变换，在变换 f 下，X 里的每个开集的象是 Y 里的开集，Y 里的每个开集的象源也是 X 里的开集，那末称 f 为一个把 X 变上 Y 的

---

* 当 A 是一个函数族时，习惯上把在 A 里定义的实函数称为实泛函。

拓扑变换(同胚变换),称X和Y在f下同胚或者拓扑地等价.

定理　把拓扑空间X的承载点集一对一地变上拓扑空间Y的承载点集的变换为拓扑变换的充分必要条件是:f可逆连续(就是f和f^{-1}都是连续变换).

五、点网

在实变数分析中,数列、函数列、函数值列等等是常见的基本工具.这些概念可以用拓扑空间里的点列这样一个统一的概念来概括.不过对一般拓扑空间的极限理论,点列的概念是过分狭隘的,应该推广为点网的概念,点网的作用就相当于实变数分析中点列所起的作用.

[汇总集]　假定Q是一个集,Q里有一个大小关系<,并且满足条件:(i)对任何$p\in Q$和$q\in Q$,式子$p<q,p=q,q<p$有一个且只有一个成立;(ii)若p,q,r都属于Q,并且$p<q$和$q<r$都成立,则$p<r$成立;(iii)对任何$p\in Q$和$q<Q$,存在$r\in Q$使$p<r,q<r$都成立.那末称Q为汇总集.

由定义看到,汇总集就是满足条件(iii)的分行集.

[点网]　一个汇总集Q变进一个拓扑空间X的变换f称为X里的点网.通常把一点$q\in Q$的象$f(q)$记作x_q,于是$\langle x_q|q\in Q\rangle=\{\{f(q),q\}|q\in Q\}$是一个点网.

特别当Q是有限序数的全体ω或者正整数的全体时,点网$\langle x_q|q\in Q\rangle$称为点列.

[点网极限的两种定义]

1°　假定Q是一个汇总集,把Q看作分散空间.任意取一个不属于Q的事物(比如就是Q自己)记作∞,称为Q的无限大(终极).把∞和Q里所有比某个元素p大的元素q的全体(就是$\{\infty\}\cup\{q|q\in Q$并且$q>p\}$)规定为$Q\cup\{\infty\}$里的一个开集.在上面规定下,在$Q\cup\{\infty\}$里繁殖一个拓扑.在这拓扑下,Q成了一个拓扑空间里的点集;∞是Q的唯一的聚点.

拓扑空间X里的一个点网$\langle x_q|q\in Q\rangle$是一个把$Q$变进$X$的变换,因此由上节变换的极限的定义,得到$\lim\limits_{Q\ni q\to\infty}x_q$的概念,这个极限如果存在的话,就称为点网$\langle x_q|q\in Q\rangle$的极限.在这个极限记号里$\infty$不妨省去,写成$\lim\limits_{q\in Q}x_q$,这是因为除$\infty$外,没有别的聚点.

如果一个点网的极限存在,则称这点网收敛于这个极限.

2°　假定$\langle x_q|q\in Q\rangle$是拓扑空间里的一个点网,那末

$$\lim_{q\in Q}x_q=a$$

的意思就是对 a 的任何一个邻域 V，总存在一个 $p\in Q$，使对所有的 $q>p$，$x_q\in V$ 成立。

这就跟通常点列极限的定义在形式上更加一致了。

［子网与聚限］　假定 Q_1 是一个汇总集 Q 的没有上界的子集（也就是 Q 里没有元素能比 Q_1 的所有元素都大），那末称 Q_1 为 Q 的共终极的子汇总集。

取这名字的理由是 Q_1 必然也是一个汇总集，并且在 $Q\cup\{\infty\}$ 里，终极 ∞ 也是 Q_1 的唯一聚点。

假定 $\langle x_q|q\in Q\rangle$ 是一个点网，又假定 Q_1 是 Q 的一个共终极的子汇总集，那末 $\langle x_q|q\in Q_1\rangle$ 称为 $\langle x_q|q\in Q\rangle$ 的子网。

一个点网的子网的极限称为这个点网的一个聚限。

定理 1　在一个拓扑空间里，一点 x_0 为一个点集 A 的聚点的充分必要条件是：$A\setminus\{x_0\}$ 里有一个点网收敛于 x_0。

推论　在一个第一可数空间里，一点 x_0 为点集 A 的聚点的充分必要条件是：$A\setminus\{x_0\}$ 有一个点列收敛于 x_0。

定理 2　假定 A 是一个拓扑空间里的一个子集，x_0 是 A 的聚点，f 是把 A 变进一个拓扑空间的变换，那末 $\lim\limits_{A\ni x\to x_0} f(x)=y_0$ 的充分必要条件是：对 $A\setminus\{x_0\}$ 里所有收敛于 x_0 的点网 $\langle x_p|p\in Q\rangle$，$\lim\limits_{p\in Q} f(x_p)=y_0$。

［变换族的点点收敛拓扑］　把一个集 A 变进一个拓扑空间 Y 的变换的全体是叠集 ${}^AY$。${}^AY$ 实际上可以看作直接积 $\underset{x\in A}{\times} Y_x$，这里每个 Y_x 都是同一个 Y，因为每个变换 f 可以理解为有序组 $\langle f(x)|x\in A\rangle$。

由于 Y 是拓扑空间，可以把 ${}^AY$ 或者 $\underset{x\in A}{\times} Y_x$ 看作拓扑乘积。${}^AY$ 的这个乘积拓扑称为点点收敛拓扑。

定理　假定 A 是一个集，Y 是一个拓扑空间，那末跟 ${}^AY$ 的别的拓扑比较，点点收敛拓扑的特点是：${}^AY$ 里的任何一个点网 $\langle f_p|p\in Q\rangle$ 收敛的充分必要条件是：对每一个 $x\in A$，Y 里的点网 $\langle f_p(x)|p\in Q\rangle$ 都收敛。

§4　尺度空间与一致空间

一、尺度空间

［尺度、距离与尺度空间］　假定 D 是一个集，f 是一个把 $D\times D$ 变进 R^1 的变换，如果对于所有的 $x\in D, y\in D, z\in D$，满足条件：

（i）$f(x,y)\geqslant 0$，等号只当 $x=y$ 时成立，这里 $f(x,y)=f(\langle x,y\rangle)$；

(ii) $j(x,y)=j(y,x)$;

(iii) $j(x,y)+j(y,z)\geqslant j(x,z)$,

那末称 j 为 D 的一个尺度，$j(x,y)$ 是在 j 这个尺度下 x 和 y 的距离，D 是以 j 为尺度的尺度空间(距离空间)。

如果条件(i)中不附加"等号只当 $x=y$ 时成立"，其余(ii)，(iii)相同，那末称 j 为 D 的一个拟尺度。

[尺度空间的拓扑]　假定 j 是集 D 的一个尺度．对一点 $a\in D$ 和一个实数 r，把 $\{x|j(x,a)<r\}$ (当 $r\leqslant 0$ 时它表示空集)称为以 a 为球心 r 为半径的开球．所有开球全体所繁殖的拓扑称为 D 的尺度拓扑．实际上，所有开球的全体是这个拓扑的一个基．以后如果没有另外声明，凡是尺度空间都假定是以这个尺度拓扑为拓扑的拓扑空间．

假定 a 是尺度空间里的一点，那末所有以 a 为球心，把有理数作为半径的开球的全体是 a 的一个邻域基．所以尺度空间一定是第一可数空间．此外也不难看到，尺度空间一定是 T_2 空间．

[尺度化与尺度化定理]　假定一个拓扑空间 X 的承载点集有一个尺度，由这尺度得到的拓扑跟 X 原有的拓扑相等，那末称 X 可以尺度化．

假定 Φ 是拓扑空间 X 里的一族点集的全体．如果 X 里每一点都有一个邻域至多只跟有限个属于 Φ 的点集有公共点，那末称 Φ 是局部有限的；特别如果任何两个属于 Φ 的点集的包都没有公共点，那末称 Φ 是绝缘的．

定理　一个拓扑空间 X 可以尺度化的充分必要条件是：X 为 T_3 空间并且 X 的拓扑有一个基是可数个局部有限族的和集(这里"局部有限"可以改作"绝缘"，T_3 也可以改作 T_4)．

[n 维欧氏空间与直角坐标法]　假定 X 是一个以 j 为尺度的尺度空间，又假定存在一个把 X 变上 n 维实数空间 R^n 的一对一变换 f，使对 X 里任何两点 x 和 y，

$$j(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$$

成立，这里 $f(x)=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\in R^n$，$f(y)=\langle y_1,\cdots,y_n\rangle\in R^n$，那末称 X 为 n 维欧几里得空间，简称 n 维欧氏空间，记作 E^n，f 是 E^n 的一个直角坐标法，$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 称为点 x 的直角坐标，$f^{-1}(\langle 0,\cdots,0\rangle)=O_f$ 称为这直角坐标法下的原点．

E^n 的直角坐标法存在但是不唯一．假定 f 和 f' 都是 E^n 的直角坐标法，$f'(O_f)=\langle b_1,\cdots,b_n\rangle$，而 E^n 里任何一点 x 在 f 和 f' 下的坐标分别记作 $\langle x_1,\cdots,$

$x_n\rangle$ 和 $\langle x_1', \cdots, x_n'\rangle$，那末由于

$$\jmath(x, O_f)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k'^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k'-b_k)^2}$$

得到

$$x_h'=\sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k+b_k,\quad h=1, 2, \cdots, n$$

这里 (a_{hk}) 是一个 $n\times n$ 正交矩阵。

反过来，只要 (a_{hk}) 是任何一个 $n\times n$ 正交矩阵，$b_1, \cdots, b_n$ 是任何 n 个实数，那末上面这组方程就代表了一个新的直角坐标法。所以直角坐标法是无限多的，而不同的直角坐标法间的变换就是通常所谓"转轴"、"移轴"的组合。

此外，E^n 的一个直角坐标法 f 实际上是把 E^n 变上 R^n 的一个拓扑变换，因此 E^n 里的一个开球在 f 下的象是 R^n 里的一族 n 维区间的和集，反过来，R^n 里一个 n 维区间的象源是 E^n 里的开球的和集。

因此在 R^n 里可以定一个尺度，使它成为 E^n。这同时也就证明了 n 维欧氏空间的存在。

〔空间的完备化〕　假定 X 是一个以 $\jmath$ 为尺度的尺度空间。如果 $\langle x_n | n\in\omega\rangle$ 是 X 里的一个点列，对任何正数 ε，总存在一个正整数 N，使

$$\jmath(x_n, x_m)<\varepsilon$$

对比 N 大的一切正整数 n 和 m 都成立，那末称 $\langle x_n | n\in\omega\rangle$ 是 X 里的柯西列。

一个尺度空间里的任何一个收敛点列一定是柯西列，但是一个柯西列未必收敛。例如，把所有的有理数全体 S 看作一维实数空间 R^1 的子空间的话，那末 S 里的柯西列就可能不收敛（因为它的极限可能是无理数）。

如果一个尺度空间 X 里的任何柯西列都收敛，那末称 X 完备。

假定 X 和 X' 都是尺度空间，X' 完备，又假定存在一个把 X 等尺度同胚地变进 X' 的变换 f，并且 X 的象 $f(X)$ 在 X' 里处处稠密，那末称 X' 为 X 的完备化。

定理　任何一个尺度空间都有完备化，并且任何两个完备化等尺度同胚。

只要把尺度空间里一个柯西列看作一个元素，适当规定两个柯西列的距离（距离等于零时，认为两个元素是相同的）不难证明所有这些元素全体就是一个完备化。

把两个实数的差的绝对值看作这两个实数的距离，那末一维实数空间 R^1 就是所有的有理数全体的完备化。可以用这个办法来建立无理数的概念。

柯西列当然可以推广成柯西网，不过由于尺度空间满足第一可数公理，用

柯西网概念只能得到同样的完备化.

[有界变换族的一致收敛拓扑]　假定A是一个集，Y是一个尺度空间，把A变进Y的所有有界变换(把A变进一个开球的变换称为有界变换)的全体记作F. 在F里规定距离如下：设$f\in F$，$g\in F$，则它们的距离

$$J(f,g)=\sup_{x\in A}j(f(x),g(x))$$

这里j表示Y里的尺度. 由J所产生的F的尺度拓扑称为F的一致收敛拓扑.

注意，F的一致收敛拓扑只用Y的尺度定义，没有牵涉到A的拓扑.

定理　有界变换族F的一致收敛拓扑跟其他拓扑比较起来其特点是：在这拓扑下，F里任何一个点网$\langle f_p|p\in Q\rangle$收敛的充分必要条件是：对所有的$x\in A$，$\langle f_p(x)|p\in Q\rangle$在$A$里一致收敛(也就是对任何正数$\varepsilon$，存在一个$q\in Q$，使对所有的$x\in A$和$Q$里所有的$p>q$，

$$j(f_p(x),f_q(x))<\varepsilon$$

成立).

F可以看作${}^AY$的子集. 因此${}^AY$的点点收敛拓扑在F里有诱导拓扑，不妨称为F的点点收敛拓扑，因为同样是用"点点收敛"当收敛的. 比较起来，一致收敛拓扑比点点收敛拓扑细. 因为在一致收敛拓扑下，对每一点$f\in F$，所有的集$\{g|$对所有的$x\in A$，$j(g(x),f(x))<\varepsilon\}$($\varepsilon$是一个任意正数)构成一个邻域基. 而在点点收敛拓扑下，对每个$f\in F$，所有的集$\{g|$存在有限个$x\in A$使$j(g(x),f(x))<\varepsilon\}$构成一个邻域基. 后一个邻域基里的每一个集显然都掩盖前一个邻域基里的一个集，但是倒过来说不行.

二、一致空间

[复合关系与逆关系]　假设X是一个集，u和v是X里的两个关系(即是$u\subseteq X\times X$，$v\subseteq X\times X$)，规定

$$u\circ v=\{\langle x,y\rangle|x\in X,y\in X,\text{并且存在 }z\in X,\text{使}\ \langle x,z\rangle\in u\text{ 并且}\langle z,y\rangle\in v\}$$

$u\circ v$当然也是X里的一个关系，称为u和v的复合关系

再规定

$$u^{-1}=\{\langle x,y\rangle|\langle y,x\rangle\in u\},$$

那末u^{-1}也是X里的一个关系，称为u的逆关系

容易证明

$$(u\circ v)^{-1}=V^{-1}\circ u^{-1}$$

［一致空间］　假定X是一个集，U是X里的一个不空的关系族（即$U\neq\varnothing$并且$U\subseteq{}^{X\times X}2$），并且满足条件：

（i）若$u\in U$，则对任何$x\in X$，$\langle x,x\rangle\in u$；

（ii）若$u\in U$，则存在$v\in U$，使$v\circ v\subseteq u$；

（iii）若$u\in U$，$v\in U$，则$u\cap v\in U$；

（iv）若$u\in U$，$u\subseteq v\subseteq X\times X$，则$v\in U$；

（v）若$u\in U$，则$u^{-1}\in U$。

那末称U为X的一个一致性，$\langle X, U\rangle$称为一致空间（有时称X是在U这个一致性下的一致空间）。

把满足条件(i)—(iv)的U称为X的一个拟一致性，对应的$\langle X,U\rangle$称为拟一致空间。

如果U和U'是集X的两个一致性，$U\subseteq U'$，那末称U比U'粗，U'比U细。

假定集X里有一个不空的关系族V，满足定义所说条件(i)和(ii)，那末X的所有掩盖V的一致性的通集U_0也是一个一致性，是能掩盖V的最粗的一致性，称为V所繁殖的一致性，V称为U_0的一个亚基*．假定V是一致性U_0的亚基，并且对任何$u\in U_0$存在$v\in V$使$v\subseteq u$，那末称V为U_0的一个基。

对任何一个集X，由$\{\{\langle x,x\rangle|x\in X\}\}$所繁殖的一致性是最细的一致性。

尺度空间可以看作一致空间的特例：假定X是一个尺度空间，把X里的关系族$\{\{\langle x,y\rangle|x$和y的距离小于$\gamma\}|\gamma$是一个正数$\}$所繁殖的一致性称为由X的尺度产生的一致性．通常除特别声明外，一个尺度空间X总是看作在这个一致性下的一致空间．实际上，上面“γ是一个正数”的条件可以改作“γ是一个正有理数”(由于一致性的条件(iv))，所以由尺度产生的一致性一定有可数的基。

［一致拓扑与一致空间的尺度化］　假定$\langle X,U\rangle$是一个一致空间．对$x\in X$，$u\in U$，把$\{y|\langle x,y\rangle\in u\}$记作$u[x]$，称为$x$的一个邻域．由所有这种邻域所繁殖的拓扑称为$X$的一致拓扑．以后如果不另外声明，一个一致空间$X$总是看作在一致拓扑下的拓扑空间。

如果在一个一致空间里可以规定一个尺度，由这尺度产生的一致性跟原来的一致性相同，那末称这一致空间是可以尺度化。

一个一致空间可以尺度化的充分必要条件是：它的一致性有可数的基，并

---

* 有些文献上规定亚基V除了满足条件(i)和(ii)外还满足：对任何$u\in V$，存在$v\in V$，使$v\subseteq u^{-1}$。

且它是 T_2 空间. 一个一致空间可以拟尺度化的充分必要条件是: 它的一致性有可数的基.

[一致连续与一致同构变换] 假定 $\langle X, U\rangle$ 和 $\langle Y, V\rangle$ 是两个一致空间, f 是一个把 X 变进 Y 的变换, 如果对任何 $v\in V$, 总存在 $u\in U$, 使对所有的 $\langle x, y\rangle\in u$, $\langle f(x), f(y)\rangle\in v$ 成立, 那末称 f 为一致连续. 一致连续必定连续, 但是在一致拓扑下连续不一定一致连续.

一个变上的可逆一致连续变换称为一致同构变换. 一致同构变换一定是同胚变换, 但是反过来说不一定对.

[一致收敛] 假定 $\langle Y, V\rangle$ 是一个一致空间, X 是一个集, 又假定 $\langle f_p | p\in Q\rangle$ 是 ${}^XY$ 里的一个点网, $f\in {}^XY$, 如果对任何 $v\in V$, 存在一个 $q\in Q$ 使对所有的 $p>q$ 和所有的 $x\in X$,

$$\langle f_p(x), f(x)\rangle\in V$$

成立, 那末称 $\langle f_p | p\in Q\rangle$ 一致收敛于 f.

假定 $\langle Y, V\rangle$ 是一致空间, X 是一个集, 那末还可以对 ${}^XY$ 规定一个一致收敛的一致性如下: 对任何 $v\in V$, 可以得到 ${}^XY$ 里的一个关系 w

$$w=\{\langle f, g\rangle | \text{对所有的 } x\in {}^XX, \langle f(x), g(x)\rangle\in v \text{ 成立}\}.$$

所有这些 w 的全体所繁殖的一致性称为 ${}^XY$ 的一致收敛的一致性. 由这一致性所产生的拓扑称为 ${}^XY$ 的一致收敛拓扑. 可以看到, ${}^XY$ 里的一个点网一致收敛就是在一致收敛拓扑下收敛的意思.

§5 紧致点集与联结点集

一、紧致点集

[紧致点集及其性质] 假定 S 是一个拓扑空间里的一个点集, S 的任何一个合盖开集族都一定有有限合盖子族, 那末称 S 为紧致点集, 或称 S 紧致.

紧致点集具有性质:

1° 紧致点集在连续变换下的象是紧致的.

2° 一个拓扑空间里的点集 S 紧致的充分必要条件是: S 的任何一个无限子集 Q 都至少有一个聚点 $x_0\in S$, 并且对 x_0 的任何邻域 G,

$$\text{card}(G\cap Q)=\text{card}(Q)$$

(card 的定义见 §2).

3° 一个拓扑空间里的点集 S 紧致的充分必要条件是: S 里任何一个点网

都有子网收敛于一点$x_0 \in S$.

4° 紧致点集的相对闭集紧致.

5° T_2空间里的紧致点集为闭.

6° 正则空间里的紧致点集的包紧致.

7° 尺度空间里的点集S紧致的充分必要条件是：S全有界(即对任何正数r, S总能被有限个半径等于r的开球所合盖)并且完备. 特别n维欧氏空间E^n里的点集S紧致的充分必要条件是：S有界并且闭.

8° 一个分散点集S紧致的充分必要条件是：S有限.

9° 一个拓扑空间里的点集S紧致的充分必要条件是：S的任何一族有限相交(即族里任何有限个集的通集都不空)的相对闭集的通集不空.

10° 康托定理　假定$\langle B_n | n \in \omega \rangle$是紧致点集$S$的不空的相对闭集，每个$B_n \supset B_{n+1}$ $(n=0, 1, \cdots)$，那末$\bigcap\limits_{n \in \omega} B_n \neq \varnothing$.

11° 吉洪诺夫定理　一族紧致空间的拓扑乘积紧致.

[变换族的紧致-开拓扑]　假定X和Y是两个拓扑空间. 在叠集${}^XY$(所有把X变进Y的变换全体)里造一个拓扑如下：对Y里任何一个开集V, X里任何一个紧致集K, 所有把K变进V的变换全体$W(K, V)$规定为${}^XY$里的一个开集，并且从所有这种开集$W(K, V)$繁殖一个拓扑. 这拓扑称为${}^XY$的紧致-开拓扑.

1° 假定X是一个拓扑空间，Y是一个尺度空间，那末对属于${}^XY$的所有连续变换的全体C来说，跟${}^XY$别的拓扑比起来，紧致-开拓扑的特点是：任何一个连续变换网$\langle f_p | p \in Q \rangle$收敛的充分必要条件是：对$X$里任何一个紧致集，$\langle f_p(x) | p \in Q \rangle$在$K$里一致收敛.

因此，所有连续变换的全体C在${}^XY$的紧致-开拓扑下是闭集.

1°中"Y是尺度空间"可以改做"Y是一致空间".

2° 阿斯可里定理　假定X是一个正则局部紧致空间*，Y是一个以δ为尺度的尺度空间，C表示所有把X变进Y的连续变换的全体. 那末C的一个子族F在${}^XY$的紧致-开拓扑下紧致的充分必要条件是：

(i) F是C的相对闭集；

(ii) 对X里每一点x, x在所有属于F的变换下的象的全体的包是Y里的

---

* 一个拓扑空间里的每点都有一个紧致的邻域，就把它称为局部紧致空间.

紧致集；

(iii) F 同等连续(即假定 x_0 是 X 里的一点，如果对任何正数 ε，总存在一个 x_0 的邻域 V，使对任何 $x\in V$ 和任何 $f\in F$，都有 $\delta(f(x),f(x_0))<\varepsilon$)。

定理中"Y 是一个尺度空间"可以改为"Y 是一个 T_2 一致空间"。

[紧致化] 假定 X 是一个拓扑空间，X^* 是一个紧致空间。如果存在一个同胚变换 f 把 X 变进 X^*，并且 $f(X)$ 在 X^* 里处处稠密，那末称 X^* (或称 $\langle f, X^*\rangle$)是 X 的一个紧致化。这时候，往往把 X 和 $f(X)$ 混同起来，于是把 X 看成 X^* 的子集。

1° 单点紧致化 假定 X 是一个拓扑空间，X 的承载点集记作 D。随便把一个不属于 D 的事物记作 ∞。用 $D\cup\{\infty\}$ 的下列两种子集的全体当拓扑亚基：(i) X 里的开集，(ii) X 里任何一个紧致闭集在 $D\cup\{\infty\}$ 里的余集。由这个亚基得到 $D\cup\{\infty\}$ 的一个拓扑 τ^*。拓扑空间 $X^*=\langle D\cup\{\infty\}, \tau^*\rangle$ 是一个紧致空间。在恒等变换下，X 同胚地变进 X^* 并且 X 在 X^* 里处处稠密，因此 X^* 是 X 的一个紧致化，称为 X 的单点紧致化，∞ 称为 X^* 里的无限远点。

一维复数空间 C^1 的单点紧致化称为复数球面。

一维实数空间 R^1 的单点紧致化跟圆周同胚。

2° 广一维实数空间 随便把两个不是实数的东西(如 $\{\{\{\varnothing\}\}\}$ 和 $\{\{\varnothing\}\}$)记作 ∞ 和 $-\infty$，在 $R^1\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$ 里把所有下列点集的全体当拓扑亚基：(i) R^1 里的开集，(ii) $(a,\infty)\cup\{\infty\}$，(iii) $(-\infty, b)\cup\{-\infty\}$。用这个拓扑亚基所繁殖的拓扑当拓扑，$R^1\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$ 是一个紧致空间，称为广一维实数空间，是在恒等变换 $f(\{x=f(x)\,|\,x\in R^1\})$ 下的 R^1 的一个紧致化。

在广一维实数空间里，∞ 是任何一个无上界的实数集合的聚点。假如 f 是把一个无上界的实数集 S 变进一拓扑空间的变换，那末由于 ∞ 是 S 的一个聚点，$\lim\limits_{S\ni x\to\infty} f(x)$ 的意义就包括在§3，四的极限定义中了。

二、联结点集

[联结点集·区域·连续域] 假定一个拓扑空间里的点集不是两个没有公共点的不空的相对闭集的和集，那末称它为一个联结点集。联结的开集称为区域。不止包含一点的联结的闭集称为连续域。

注意，在§2，六里"连续域假设"指的是一维实数空间 R^1 里的连续域。

在上面联结点集的定义中，"相对闭集"显然也可以改为"相对开集"。

联结点集的定义也可以改为"没有不空的相对既开又闭的真子集的点集"。

[联结点集的性质]

1° 联结点集在连续变换下的象联结.

2° 如果S是联结点集, $A\subseteq\bar{S}$, 那末$S\cup A$联结. 特别, 联结点集S的包$\bar{S}$联结.

3° 如果一族联结点集的通集不空, 那末这族联结点集的和集联结.

4° 一维实数空间R^1里的联结点集只有下列九种: R^1自己, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, 这里a和b表示任意实数.

性质1°可以看作微分学中下述定理的推广: 假定f是一个区间里的连续实函数, 取到两个数值a和b, 那末一定取到a和b间的任何一个数值.

[用线联结的点集] 实数闭区间$[a, b]$在一个变进一个拓扑空间X的连续变换下的象称为这空间X里的一条曲线. 如果一个拓扑空间里的一个点集里的任何两点都属于这点集的一条子曲线, 那末称这点集是用线联结的.

用线联结的点集联结.

[局部联结与局部用线联结] 拓扑空间里的一个点集, 如果它的任何一点的任何一个相对邻域一定掩盖这一点的一个联结的相对邻域, 那末称这个点集局部联结. 如果"联结"换作"用线联结", 那末称这点集局部用线联结.

例如n维欧氏空间E^n里任何一个开集都是局部用线联结的, 这是因为任何一个开球都是用线联结的.

一个局部用线联结的点集联结的充分必要条件是: 它用线联结. 特别E^n里的开集是区域的充分必要条件是: 它用线联结.

[独立片与全不联结] 假定拓扑空间里一个点集的一个子集联结并且不是别的联结子集的真子集, 那末称这子集为这点集的一个独立片.

拓扑空间的一个点集是它的所有独立片的和集, 每个独立片都是相对闭集, 任何两个不同的独立片没有公共点. 特别, 开集的每个独立片都是区域, 所以是相对既开又闭的子集. 开集是一族两两没有公共点的区域的和集. 闭集的每个不止包含一点的独立片是连续域, 闭集是一族两两没有公共点的联结闭集的和集.

注意, 无限个两两没有公共点的联结闭集的和集不一定是闭集.

假定一个拓扑空间里的一个点集的每个独立片都只包含一点, 那末称这点集全不联结. 例如R^1里的有理数全体和无理数全体都是全不联结的.

§6 流 形

[n维实流形] 假定M是T_2联结空间，M有一个合盖开集族Σ，对每个开集$V\in\Sigma$，存在一个拓扑变换f_V把V变上一个n维区间，那末称$\{f_V|V\in\Sigma\}$为M的一个n维实流形结构，称M是一个n维实流形。

[局部坐标法] 假定$\{f_V|V\in\Sigma\}$是流形M的一个流形结构，那末称每个$V\in\Sigma$是坐标区域，每个f_V是V里的局部坐标法，对每点$x\in V$，

$$f_V(x)=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$$

称为x的坐标，实数$x_k(k=1,\cdots,n)$称为x的第k个坐标。

[衔接关系] 假定$V\in\Sigma$，$V'\in\Sigma$，$V\cap V'\neq\varnothing$，那末每一点$x\in V\cap V'$在f_V和$f_{V'}$这两个局部坐标法下各有坐标$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$和$\langle x_1',\cdots,x_n'\rangle$，它们的关系可表示为

$$\langle x_1',\cdots,x_n'\rangle=f_{V'}(x)=f_{V'}f_V^{-1}(\langle x_1\cdots,x_n\rangle) \tag{1}$$

由流形的定义，$f_{V'}f_V^{-1}$是把$f_V(V\cap V')$变上$f_{V'}(V\cap V')$的拓扑变换，称为从局部坐标法f_V到局部坐标法$f_{V'}$的衔接关系。

[微分结构与微分流形] 假定$\{f_V|V\in\Sigma\}$是流形M的一个流形结构，$f_{V'}f_V^{-1}(V\in\Sigma,V'\in\Sigma,V\cap V'\neq\varnothing)$是从$f_V$到$f_{V'}$的衔接关系。$f_{V'}f_V^{-1}$的表达式(1)可以改写为方程组

$$x_k'=\varphi_k(x_1,\cdots,x_n),k=1,\cdots,n \tag{2}$$

如果(2)中各个函数$\varphi_k(k=1,\cdots,n)$在$f_V(V\cap V')$里关于实变数$x_1,\cdots,x_n$的1到m各阶偏导数都存在并且连续，那末称$f_{V'}f_V^{-1}$是m级可连续微分的。如果每个φ_k的各阶偏导数在$f_V(V\cap V')$里都存在(因此都连续)，那末称$f_{V'}f_V^{-1}$是∞级可连续微分的。如果每个φ_k在$f_V(V\cap V')$里解析（即在每点$\langle x_1^0,\cdots,x_n^0\rangle$ $(\in f_V(V\cap V'))$的一个邻域里，$\varphi_k(x_1,\cdots,x_n)$都可以展开成$n$个实变数$x_k-x_k^0$ $(k=1,\cdots,n)$的幂级数)，那末称$f_{V'}f_V^{-1}$是解析的或者ω级可连续微分的。

如果一个流形结构$\{f_V|V\in\Sigma\}$的所有衔接关系都是m级可连续微分的(因此都是可逆m级可连续微分的)，那末称它为m级微分结构。如果一个流形结构的所有衔接关系都是∞级可连续微分的，那末称它为∞级微分结构。如果一个流形结构的所有衔接关系都是解析的，那末称它为解析结构。

假定一个实流形M的一个流形结构$\{f_V|V\in\Sigma\}$是m阶微分结构或者∞级微分结构或者实解析结构，那末分别说M是这结构下的m级微分流形或者∞级微

分流形或者实解析流形.

[微分结构的等价] 假定$\{f_V|V\in\Sigma\}$是流形M的一个m级微分结构. 又假定G是M里的一个开集,f是在G里定义的一个函数. 对每一点$x\in G\cap V(V\in\Sigma)$, $f(x)$可以表示为

$$f(x)=ff_V^{-1}(\langle x_1,\cdots,x_n\rangle)$$

假定ff_V^{-1}关于$x_1,\cdots,x_n$这n个实变数的1到$k(0\leqslant k\leqslant m)$各阶偏导数都连续,那末称$f$在$G\cap V$里可$k$级连续微分. 如果$f$在每个$G\cap V(V\in\Sigma)$里都可$k$级连续微分,那末称$f$在$G$里可$k$级连续微分,记作$f\in C_k(G)$,由于$\{f_V|V\in\Sigma\}$的所有衔接关系都可$m$级连续微分,并且假设$0\leqslant k\leqslant m$,上面这样的定义对任何$x\in V\cap V'(V\in\Sigma,V'\in\Sigma)$都不会产生矛盾.

设$\{f_V|V\in\Sigma\}$和$\{f_W|W\in\pi\}$是流形M的两个m级微分结构(其中π也是M的一个合盖开集族). 如果$\{f_V|V\in\Sigma\}\cup\{f_W|W\in\pi\}$是$M$的一个$m$级微分结构,那末称$\{f_V|V\in\Sigma\}$和$\{f_W|W\in\pi\}$等价. 流形$M$的两个$m$级微分结构等价的充分必要条件是:对$M$里任何开集$G$,它们所决定的各个函数族$C_k(G)$ $(k=0,1,\cdots,m)$一致.

流形M的两个∞级微分结构等价或两个实解析结构等价的概念也可类似地定义.

[可定向流形] 假定n维实数空间里的一点$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$的一个邻域被一个拓扑变换$f$变上一点$\langle x_1',\cdots,x_n'\rangle$的一个邻域. 即$f(\langle x_1,\cdots,x_n\rangle)=\langle x_1',\cdots,x_n'\rangle$. 如果$f$可逆连续微分,并且雅可比式

$$\frac{\partial(x_1',\cdots,x_n')}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\det\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\right)>0$$

那末称f在$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$这一点保持架势.

如果f不可微分,用差商(见第五章)代替偏导数同样可规定f在一点$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$保持架势.

假定流形M有一个流形结构,它的任何一个衔接关系都在各自的定义开集里的每一点保持架势,那末称这流形结构是一个定向流形结构,称流形M被它定了向.

假定$\{f_V|V\in\Sigma\}$和$\{f_W|W\in\pi\}$是流形M的两个定向结构,而$\{f_V|V\in\Sigma\}\cup\{f_W|W\in\pi\}$也是$M$的一个定向结构,那末称它们定的向一致.

假定$\{f_V|V\in\Sigma\}$是流形M的一个定向结构,又假定

$$f_V(x)=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\quad x\in V$$

那末

$$g_V(x)=\langle -x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle \quad x\in V$$

是另一个定向结构 $\{g_V|V\in\Sigma\}$. 显然$\{f_V|V\in\Sigma\}\cup\{g_V|V\in\Sigma\}$不再是定向结构. 那末称$\{f_V|V\in\Sigma\}$和$\{g_V|V\in\Sigma\}$定的向相反.

因此,如果流形M有一个定向结构,那末M有两类定向结构,同一类的结构定的向相同,不同类定的向相反. 所以在未指定那一类定向结构的时候,只说有定向结构的流形M是可定向的.

可以证明,可定向流形的任何一个流形结构只要象上面规定g_V那样修改一部分局部坐标法,就可以成为一个定向结构,定的向可以跟这一类定向结构一致,也可以跟另一类的一致.

因此,一个可定向的微分流形的微分结构虽然不都是定向的,但是每个微分结构等价类中,一定包含两种定向结构,定的向彼此相反.

不可定向的流形最简单的例子是"麦比乌斯(Möbius)带",它是一个单侧曲面,它的模型可以用下面方法得到,把一个长方形的纸条 a□b (d, c) 扭转 180°,把两边 ad 和 cb 粘起来,a 与 c 重合,b 与 d 重合.

[复解析流形]　把二维实数空间 R^2 里的点$\langle x_1, x_2\rangle$改记作复数 x_1+ix_2,就得到一维复数空间 C^1,C^1 就用 R^2 的普通拓扑当拓扑. R^2 的普通拓扑可以用二维区间全体当基,也可以用开圆全体当基. 在 C^1 里为了记号方便,用后者当基比较常见. 一个以复数 z_0 为中心的开圆可以表示为$\{z|z\in C^1$且$|z-z_0|<r\}$,这里半径 r 是一个正数. n 个 C^1 的拓扑乘积称为 n 维复数空间 C^n,C^n 的拓扑的一个基是 n 个 C^1 里的开圆的直接积的全体,n 个开圆的直接积称为 n 重柱.

在流形的定义中,如果把"n 维区间"改作"n 重柱",就成为"复流形"的定义.

复流形的复解析结构跟实流形的实解析结构同样定义. 特别,一维复解析流形称为黎曼面,是复变函数论的一个重要概念(见第十章).

[存在定理]

定理 1　有的流形不可能有一级微分结构.

注意,当 $m\geqslant m'\geqslant 1$时,由定义,m 级微分结构必定是 m' 级微分结构,所以定理 1 所说的那种流形一定不可能有任何级的微分结构.

定理 2　第二可数实流形的一个 $m(m\geqslant 1)$ 级微分结构一定有等价的∞级微分结构(这里等价的意思是当作 m 级微分结构看).

定理 3　8 维欧氏空间里的球面 S^7 有不等价的微分结构.

从定理 3 知道，不等价的微分结构的流形确实存在．至于对球面 S^n 的微分结构问题本身的认识，现在已经证明了每个 S^n 的微分结构的不同的等价类的数目 d_n 等于某个有限群的元素的个数，并且有很多 d_n 已经算出来了，例如

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_n	1	1	?	1	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256

从表上看到，S^7 一共有 28 类微分结构，不同类的不等价．d_3，也就是 S^3 的不等价的微分结构的数目，还没有算出来．

定理 4 第二可数的可定向的二维实流形的任何一个 $m(1\leqslant m\leqslant\infty)$ 级微分结构跟一个复解析结构等价（把后者看作 m 级实微分结构）．

附　　表

1. 数学常数表

常　数	n	$\lg n$
π	3.14159 26535 9	0.49714 98726 9
2π	6.28318 53071 8	0.79817 98683 6
$\pi/4$	0.78539 81634 0	$\bar{1}$.89508 98813 7
$\pi/6$	0.52359 87756 0	$\bar{1}$.71899 86223 1
$4\pi/3$	4.18879 02047 9	0.62208 86093 0
$1/\pi$	0.31830 98861 8	$\bar{1}$.50285 01273 1
$1/2\pi$	0.15915 49430 9	$\bar{1}$.20182 01316 4
$4/\pi$	1.27323 95447 4	0.10491 01186 8
π^2	9.86960 44010 9	0.99429 97453 9
π^3	31.00627 66803 0	1.49144 96180 8
$\sqrt{\pi}$	1.77245 38509 1	0.24857 49363 5
$\sqrt[3]{\pi}$	1.46459 18875 6	0.16571 66242 3
$1/\sqrt{\pi}$	0.56418 95835 5	$\bar{1}$.75142 50636 5
$\sqrt[3]{3/4\pi}$	0.62035 04909 0	$\bar{1}$.79263 71302 3
e	2.71828 18284 6	0.43429 44819 0
$1/e$	0.36787 94411 7	$\bar{1}$.56570 55181 0
$M=\lg e$	0.43429 44819 0	$\bar{1}$.63778 43113 0
$1/M=\ln 10$	2.30258 50929 9	0.36221 56887 0
$180°/\pi$	57°.29577 9513	1.75812 26324 1
$10800'/\pi$	3437'.74677 08	3.53627 38827 4
$648000''/\pi$	206264''.80625	5.31442 51331 8
$\pi/180$	0.01745 3293	$\bar{2}$.24187 7368

常　数	n	lg n
γ	0.57721 56649 0	$\bar{1}$.76133 81087 8
e^{γ}	1.78107 24179 9	0.25068 15781 3
$e^{-\gamma}$	0.56145 94835 7	$\bar{1}$.74931 84218 6
$\pi/3$	1.04719 7551	0.02002 3618
$1/3\pi$	0.10610 3295	$\bar{1}$.02572 8873
$1/4\pi$	0.07957 7472	$\bar{2}$.90079 0136
$2/\pi$	0.63661 9772	$\bar{1}$.80388 0123
$3/\pi$	0.95492 9658	$\bar{1}$.97997 1382
$\sqrt{2\pi}$	2.50662 8275	0.39908 9934
$\sqrt{\pi/2}$	1.25331 4137	0.09805 9938
$\sqrt[3]{4\pi/3}$	1.61190 1954	0.20736 2870
$1/\pi^2$	0.10132 1184	$\bar{1}$.00570 0255
$\sqrt{1/2\pi}$	0.39894 2280	$\bar{1}$.60091 0066
$\sqrt{2/\pi}$	0.79788 4561	$\bar{1}$.90194 0062
$\sqrt[3]{1/\pi}$	0.68278 4063	$\bar{1}$.83428 3376
$\ln\pi$	1.14472 9886	0.05870 3021
e^2	7.38905 6098	0.86858 8964
$\sqrt{e}$	1.64872 1271	0.21714 7241
$\sqrt{1/e}$	0.60653 0660	$\bar{1}$.78285 2759
$\sqrt[3]{1/e}$	0.71653 1311	$\bar{1}$.85523 5173
e^{π}	23.14069 264	1.36437 6354
$e^{-\pi}$	0.04321 3918	$\bar{2}$.63562 3646
$e^{\pi/2}$	4.81047 7382	0.68218 8177
$e^{-\pi/2}$	0.20787 9576	$\bar{1}$.31781 1823
$e^{2\pi}$	535.49165 59	2.72875 2708
$e^{-2\pi}$	0.00186 7443	$\bar{3}$.27124 7292

表中 γ 为欧拉常数。

2. 2的幂乘表

n	2^n	n	2^n
1	2	33	85899 34592
2	4	34	17179 86918 4
3	8	35	34359 73836 8
4	16	36	68719 47673 6
5	32	37	13743 89534 72
6	64	38	27487 79069 44
7	128	39	54975 58138 88
8	256	40	10995 11627 776
9	512	41	21990 23255 552
10	1024	42	43980 46511 104
11	2048	43	87960 93022 208
12	4096	44	17592 18604 4416
13	8192	45	35184 37208 8832
14	16384	46	70368 74417 7664
15	32768	47	14073 74883 55328
16	65536	48	28147 49767 10656
17	1 31072	49	56294 99534 21312
18	2 62144	50	11258 99906 84262 4
19	5 24288	51	22517 99813 68524 8
20	10 48576	52	45035 99627 37049 6
21	20 97152	53	90071 99254 74099 2
22	41 94304	54	18014 39850 94819 84
23	83 88608	55	36028 79701 89639 68
24	167 77216	56	72057 59403 79279 36
25	335 54432	57	14411 51880 75855 872
26	671 08864	58	28823 03761 51711 744
27	1342 17728	59	57646 07523 03423 488
28	2684 35456	60	11529 21504 60684 6976
29	5368 70912	61	23058 43009 21369 3952
30	10737 41824	62	46116 86018 42738 7904
31	21474 83648	63	92233 72036 85477 5808
32	42949 67296	64	18446 74407 37095 51616

3. n^m 表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10^4
n^5	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049	10^5
n^6	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441	10^6
n^7	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969	10^7
n^8	1	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721	10^8
n^9	1	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489	10^9
n^{10}	1	1024	59049	1048576	9765625	60466176	282475249	1073741824	3486784401	10^{10}

4. 素数表

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83
89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149
151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211
223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353
359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431
433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499
503	509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587
593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739
743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823
827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907
911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991
997	1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063
1069	1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153
1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237
1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291	1297	1301	1303	1307	1319
1321	1327	1361	1367	1373	1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433
1439	1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499
1511	1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597
1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669
1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733	1741	1747	1753	1759	1777
1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873
1877	1879	1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979
1987	1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053	2063
2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113	2129	2131	2137	2141
2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213	2221	2237	2239	2243	2251

2267	2269	2273	2281	2287	2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341
2347	2351	2357	2371	2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417
2423	2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531	2539
2543	2549	2551	2557	2579	2591	2593	2609	2617	2621	2633	2647
2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687	2689	2693	2699	2707	2711
2713	2719	2729	2731	2741	2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797
2801	2803	2819	2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897
2903	2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971	2999	3001
3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079	3083	3089	3109
3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181	3187	3191	3203	3209	3217
3221	3229	3251	3253	3257	3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319
3323	3329	3331	3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407
3413	3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511	3517
3527	3529	3533	3539	3541	3547	3557	3559	3571	3581	3583	3593
3607	3613	3617	3623	3631	3637	3643	3659	3671	3673	3677	3691
3697	3701	3709	3719	3727	3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793
3797	3803	3821	3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889
3907	3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989	4001
4003	4007	4013	4019	4021	4027	4049	4051	4057	4073	4079	4091
4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139	4153	4157	4159	4177	4201
4211	4217	4219	4229	4231	4241	4243	4253	4259	4261	4271	4273
4283	4289	4297	4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391	4397
4409	4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493	4507
4513	4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567	4583	4591	4597	4603
4621	4637	4639	4643	4649	4651	4657	4663	4673	4679	4691	4703
4721	4723	4729	4733	4751	4759	4783	4787	4789	4793	4799	4801
4813	4817	4831	4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933
4937	4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987	4993	4999		

5. 二　项

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	1 25970
21	1	21	210	1330	5985	20349	54264	1 16280	2 03490
22	1	22	231	1540	7315	26334	74613	1 70544	3 19770
23	1	23	253	1771	8855	33649	1 00947	2 45157	4 90314
24	1	24	276	2024	10626	42504	1 34596	3 46104	7 35471
25	1	25	300	2300	12650	53130	1 77100	4 80700	10 81575

6. 阶

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5040
3	6	8	40320
4	24	9	3 62880
5	120	10	36 28800

系 数 表

9	10	11	12	13	k / n
					1
					2
					3
					4
					5
					6
					7
					8
1					9
10	1				10
55	11	1			11
220	66	12	1		12
715	286	78	13	1	13
2002	1001	364	91	14	14
5005	3003	1365	455	105	15
11440	8008	4368	1820	560	16
24310	19448	12376	6188	2380	17
48620	43758	31824	18564	8568	18
92378	92378	75582	50388	27132	19
1 67960	1 84756	1 67960	1 25970	77520	20
2 93930	3 52716	3 52716	2 93930	2 03490	21
4 97420	6 46646	7 05432	6 46646	4 97420	22
8 17190	11 44066	13 52078	13 52078	11 44066	23
13 07504	19 61256	24 96144	27 04156	24 96144	24
20 42975	32 68760	44 57400	52 00300	52 00300	25

乘 表

n	n!	n	n!
11	399 16800	16	2092 27898 88000
12	4790 01600	17	35568 74280 96000
13	62270 20800	18	6 40237 37057 28000
14	8 71782 91200	19	121 64510 04088 32000
15	130 76743 68000	20	2432 90200 81766 40000

7. 平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
1	1	1	1.00000 00	1.00000 00	1000.0000	1.00000 00
2	4	8	1.41421 36	1.25992 10	500.0000	0.70710 68
3	9	27	1.73205 08	1.44224 96	333.3333	0.57735 03
4	16	64	2.00000 00	1.58740 11	250.0000	0.50000 00
5	25	125	2.23606 80	1.70997 59	200.0000	0.44721 36
6	36	216	2.44948 97	1.81712 06	166.6667	0.40824 83
7	49	343	2.64575 13	1.91293 12	142.8571	0.37796 45
8	64	512	2.82842 71	2.00000 00	125.0000	0.35355 34
9	81	729	3.00000 00	2.08008 38	111.1111	0.33333 33
10	100	1000	3.16227 77	2.15443 47	100.0000	0.31622 78
11	121	1331	3.31662 48	2.22398 01	90.90909	0.30151 13
12	144	1728	3.46410 16	2.28942 85	83.33333	0.28867 51
13	169	2197	3.60555 13	2.35133 47	76.92308	0.27735 01
14	196	2744	3.74165 74	2.41014 23	71.42857	0.26726 12
15	225	3375	3.87298 33	2.46621 21	66.66667	0.25819 89
16	256	4096	4.00000 00	2.51984 21	62.50000	0.25000 00
17	289	4913	4.12310 56	2.57128 16	58.82353	0.24253 56
18	324	5832	4.24264 07	2.62074 14	55.55556	0.23570 23
19	361	6859	4.35889 89	2.66840 16	52.63158	0.22941 57
20	400	8000	4.47213 60	2.71441 76	50.00000	0.22360 68
21	441	9261	4.58257 57	2.75892 42	47.61905	0.21821 79
22	484	10648	4.69041 58	2.80203 93	45.45455	0.21320 07
23	529	12167	4.79583 15	2.84386 70	43.47826	0.20851 44
24	576	13824	4.89897 95	2.88449 91	41.66667	0.20412 41
25	625	15625	5.00000 00	2.92401 77	40.00000	0.20000 00
26	676	17576	5.09901 95	2.96249 61	38.46154	0.19611 61
27	729	19683	5.19615 24	3.00000 00	37.03704	0.19245 01
28	784	21952	5.29150 26	3.03658 90	35.71429	0.18898 22
29	841	24389	5.38516 48	3.07231 68	34.48276	0.18569 53
30	900	27000	5.47722 56	3.10723 25	33.33333	0.18257 42
31	961	29791	5.56776 44	3.14138 07	32.25806	0.17960 53
32	1024	32768	5.65685 42	3.17480 21	31.25000	0.17677 67
33	1089	35937	5.74456 26	3.20753 43	30.30303	0.17407 77
34	1156	39304	5.83095 19	3.23961 18	29.41176	0.17149 86
35	1225	42875	5.91607 98	3.27106 63	28.57143	0.16903 09
36	1296	46656	6.00000 00	3.30192 72	27.77778	0.16666 67
37	1369	50653	6.08276 25	3.33222 19	27.02703	0.16439 90
38	1444	54872	6.16441 40	3.36197 54	26.31579	0.16222 14
39	1521	59319	6.24499 80	3.39121 14	25.64103	0.16012 82
40	1600	64000	6.32455 53	3.41995 19	25.00000	0.15811 39

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
41	1681	68921	6.40312 42	3.44821 72	24.39024	0.15617 38
42	1764	74088	6.48074 07	3.47602 66	23.80952	0.15430 34
43	1849	79507	6.55743 85	3.50339 81	23.25581	0.15249 86
44	1936	85184	6.63324 96	3.53034 83	22.72727	0.15075 57
45	2025	91125	6.70820 39	3.55689 33	22.22222	0.14907 12
46	2116	97336	6.78233 00	3.58304 79	21.73913	0.14744 20
47	2209	103823	6.85565 46	3.60882 61	21.27660	0.14586 50
48	2304	110592	6.92820 32	3.63424 12	20.83333	0.14433 76
49	2401	117649	7.00000 00	3.65930 57	20.40816	0.14285 71
50	2500	125000	7.07106 78	3.68403 15	20.00000	0.14142 14
51	2601	132651	7.14142 84	3.70842 98	19.60784	0.14002 80
52	2704	140608	7.21110 26	3.73251 12	19.23077	0.13867 50
53	2809	148877	7.28010 99	3.75628 58	18.86792	0.13736 06
54	2916	157464	7.34846 92	3.77976 31	18.51852	0.13608 28
55	3025	166375	7.41619 85	3.80295 25	18.18182	0.13484 00
56	3136	175616	7.48331 48	3.82586 24	17.85714	0.13363 06
57	3249	185193	7.54983 44	3.84850 11	17.54386	0.13245 32
58	3364	195112	7.61577 31	3.87087 66	17.24138	0.13130 64
59	3481	205379	7.68114 57	3.89299 64	16.94915	0.13018 89
60	3600	216000	7.74596 67	3.91486 76	16.66667	0.12909 94
61	3721	226981	7.81024 97	3.93649 72	16.39344	0.12803 69
62	3844	238328	7.87400 79	3.95789 16	16.12903	0.12700 01
63	3969	250047	7.93725 39	3.97905 72	15.87302	0.12598 82
64	4096	262144	8.00000 00	4.00000 00	15.62500	0.12500 00
65	4225	274625	8.06225 77	4.02072 58	15.38462	0.12403 47
66	4356	287496	8.12403 84	4.04124 00	15.15152	0.12309 15
67	4489	300763	8.18535 28	4.06154 81	14.92537	0.12216 94
68	4624	314432	8.24621 13	4.08165 51	14.70588	0.12126 78
69	4761	328509	8.30662 39	4.10156 59	14.49275	0.12038 59
70	4900	343000	8.36660 03	4.12128 53	14.28571	0.11952 29
71	5041	357911	8.42614 98	4.14081 77	14.08451	0.11867 82
72	5184	373248	8.48528 14	4.16016 76	13.88889	0.11785 11
73	5329	389017	8.54400 37	4.17933 92	13.69863	0.11704 11
74	5476	405224	8.60232 53	4.19833 65	13.51351	0.11624 76
75	5625	421875	8.66025 40	4.21716 33	13.33333	0.11547 01
76	5776	438976	8.71779 79	4.23582 36	13.15789	0.11470 79
77	5929	456533	8.77496 44	4.25432 09	12.98701	0.11396 06
78	6084	474552	8.83176 09	4.27265 87	12.82051	0.11322 77
79	6241	493039	8.88819 44	4.29084 04	12.65823	0.11250 88
80	6400	512000	8.94427 19	4.30886 94	12.50000	0.11180 34

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
81	6561	531441	9.00000 00	4.32674 87	12.34568	0.11111 11
82	6724	551368	9.05538 51	4.34448 15	12.19512	0.11043 15
83	6889	571787	9.11043 36	4.36207 07	12.04819	0.10976 43
84	7056	592704	9.16515 14	4.37951 91	11.90476	0.10910 89
85	7225	614125	9.21954 45	4.39682 97	11.76471	0.10846 52
86	7396	636056	9.27361 85	4.41400 50	11.62791	0.10783 28
87	7569	658503	9.32737 91	4.43104 76	11.49425	0.10721 13
88	7744	681472	9.38083 13	4.44796 02	11.36364	0.10660 04
89	7921	704969	9.43398 11	4.46474 51	11.23596	0.10599 98
90	8100	729000	9.48683 30	4.48140 47	11.11111	0.10540 93
91	8281	753571	9.53939 20	4.49794 14	10.98901	0.10482 85
92	8464	778688	9.59166 30	4.51435 74	10.86957	0.10425 72
93	8649	804357	9.64365 08	4.53065 49	10.75269	0.10369 52
94	8836	830584	9.69535 97	4.54683 59	10.63830	0.10314 21
95	9025	857375	9.74679 43	4.56290 26	10.52632	0.10259 78
96	9216	884736	9.79795 90	4.57885 70	10.41667	0.10206 21
97	9409	912673	9.84885 78	4.59470 09	10.30928	0.10153 46
98	9604	941192	9.89949 49	4.61043 63	10.20408	0.10101 53
99	9801	970299	9.94987 44	4.62606 50	10.10101	0.10050 38
100	10000	1000000	10.00000 00	4.64158 88	10.00000	0.10000 00
101	10201	1030301	10.04987 56	4.65700 95	9.90099 0	0.09950 37
102	10404	1061208	10.09950 49	4.67232 87	9.80392 2	0.09901 48
103	10609	1092727	10.14889 16	4.68754 81	9.70873 8	0.09853 29
104	10816	1124864	10.19803 90	4.70266 94	9.61538 5	0.09805 81
105	11025	1157625	10.24695 08	4.71769 40	9.52381 0	0.09759 00
106	11236	1191016	10.29563 01	4.73262 35	9.43396 2	0.09712 86
107	11449	1225043	10.34408 04	4.74745 94	9.34579 4	0.09667 36
108	11664	1259712	10.39230 48	4.76220 32	9.25925 9	0.09622 50
109	11881	1295029	10.44030 65	4.77685 62	9.17431 2	0.09578 26
110	12100	1331000	10.48808 85	4.79141 99	9.09090 9	0.09534 63
111	12321	1367631	10.53565 38	4.80589 55	9.00900 9	0.09491 58
112	12544	1404928	10.58300 52	4.82028 45	8.92857 1	0.09449 11
113	12769	1442897	10.63014 58	4.83458 81	8.84955 8	0.09407 21
114	12996	1481544	10.67707 83	4.84880 76	8.77193 0	0.09365 86
115	13225	1520875	10.72380 53	4.86294 41	8.69565 2	0.09325 05
116	13456	1560896	10.77032 96	4.87699 90	8.62069 0	0.09284 77
117	13689	1601613	10.81665 38	4.89097 32	8.54700 9	0.09245 00
118	13924	1643032	10.86278 05	4.90486 81	8.47457 6	0.09205 75
119	14161	1685159	10.90871 21	4.91868 47	8.40336 1	0.09166 98
120	14400	1728000	10.95445 12	4.93242 41	8.33333 3	0.09128 71

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
121	14641	1771561	11.00000 00	4.94608 74	8.26446 3	0.09090 91
122	14884	1815848	11.04536 10	4.95967 57	8.19672 1	0.09053 57
123	15129	1860867	11.09053 56	4.97318 98	8.13008 1	0.09016 70
124	15376	1906624	11.13552 87	4.98663 10	8.06451 6	0.08980 27
125	15625	1953125	11.18033 99	5.00000 00	8.00000 0	0.08944 27
126	15876	2000376	11.22497 22	5.01329 79	7.93650 8	0.08908 71
127	16129	2048383	11.26942 77	5.02652 57	7.87401 6	0.08873 57
128	16384	2097152	11.31370 85	5.03968 42	7.81250 0	0.08838 83
129	16641	2146689	11.35781 67	5.05277 43	7.75193 8	0.08804 51
130	16900	2197000	11.40175 43	5.06579 70	7.69230 8	0.08770 58
131	17161	2248091	11.44552 31	5.07875 31	7.63358 8	0.08737 01
132	17424	2299968	11.48912 53	5.09164 34	7.57575 8	0.08703 88
133	17689	2352637	11.53256 26	5.10446 87	7.51879 7	0.08671 10
134	17956	2406104	11.57583 69	5.11722 99	7.46268 7	0.08638 68
135	18225	2460375	11.61895 00	5.12992 78	7.40740 7	0.08606 63
136	18496	2515456	11.66190 38	5.14256 32	7.35294 1	0.08574 93
137	18769	2571353	11.70469 99	5.15513 67	7.29927 0	0.08543 58
138	19044	2628072	11.74734 01	5.16764 93	7.24637 7	0.08512 57
139	19321	2685619	11.78982 61	5.18010 15	7.19424 5	0.08481 89
140	19600	2744000	11.83215 96	5.19249 41	7.14285 7	0.08451 54
141	19881	2803221	11.87434 21	5.20482 79	7.09219 9	0.08421 52
142	20164	2863288	11.91637 53	5.21710 34	7.04225 4	0.08391 81
143	20449	2924207	11.95826 07	5.22932 15	6.99300 7	0.08362 42
144	20736	2985984	12.00000 00	5.24148 28	6.94444 4	0.08333 33
145	21025	3048625	12.04159 46	5.25358 79	6.89655 2	0.08304 55
146	21316	3112136	12.08304 60	5.26563 74	6.84931 5	0.08276 06
147	21609	3176523	12.12435 57	5.27763 21	6.80272 1	0.08247 86
148	21904	3241792	12.16552 51	5.28957 25	6.75675 7	0.08219 95
149	22201	3307949	12.20655 56	5.30145 92	6.71140 9	0.08192 32
150	22500	3375000	12.24744 87	5.31329 28	6.66666 7	0.08164 97
151	22801	3442951	12.28820 57	5.32507 40	6.62251 7	0.08137 88
152	23104	3511808	12.32882 80	5.33680 33	6.57894 7	0.08111 07
153	23409	3581577	12.36931 69	5.34848 12	6.53594 8	0.08084 52
154	23716	3652264	12.40967 36	5.36010 84	6.49350 6	0.08058 23
155	24025	3723875	12.44989 96	5.37168 54	6.45161 3	0.08032 19
156	24336	3796416	12.48999 60	5.38321 26	6.41025 6	0.08006 41
157	24649	3869893	12.52996 41	5.39469 07	6.36942 7	0.07980 87
158	24964	3944312	12.56980 51	5.40612 02	6.32911 4	0.07955 57
159	25281	4019679	12.60952 02	5.41750 15	6.28930 8	0.07930 52
160	25600	4096000	12.64911 06	5.42883 52	6.25000 0	0.07905 69

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
161	25921	4173281	12.68857 75	5.44012 18	6.21118 0	0.07881 10
162	26244	4251528	12.72792 21	5.45136 18	6.17284 0	0.07856 74
163	26569	4330747	12.76714 53	5.46255 56	6.13496 9	0.07832 60
164	26896	4410944	12.80624 85	5.47370 37	6.09756 1	0.07808 69
165	27225	4492125	12.84523 26	5.48480 66	6.06060 6	0.07784 89
166	27556	4574296	12.88409 87	5.49586 47	6.02409 6	0.07761 51
167	27889	4657463	12.92284 80	5.50687 84	5.98802 4	0.07738 23
168	28224	4741632	12.96148 14	5.51784 84	5.95238 1	0.07715 17
169	28561	4826809	13.00000 00	5.52877 48	5.91716 0	0.07692 31
170	28900	4913000	13.03840 48	5.53965 83	5.88235 3	0.07669 65
171	29241	5000211	13.07669 68	5.55049 91	5.84795 3	0.07647 19
172	29584	5088448	13.11487 70	5.56129 78	5.81395 3	0.07624 93
173	29929	5177717	13.15294 64	5.57205 47	5.78034 7	0.07602 86
174	30276	5268024	13.19090 60	5.58277 02	5.74712 6	0.07580 98
175	30625	5359375	13.22875 66	5.59344 47	5.71428 6	0.07559 29
176	30976	5451776	13.26649 92	5.60407 87	5.68181 8	0.07537 78
177	31329	5545233	13.30413 47	5.61467 24	5.64971 8	0.07516 46
178	31684	5639752	13.34166 41	5.62522 63	5.61797 8	0.07495 32
179	32041	5735339	13.37908 82	5.63574 08	5.58659 2	0.07474 35
180	32400	5832000	13.41640 79	5.64621 62	5.55555 6	0.07453 56
181	32761	5929741	13.45362 40	5.65665 28	5.52486 2	0.07432 94
182	33124	6028568	13.49073 76	5.66705 11	5.49450 5	0.07412 49
183	33489	6128487	13.52774 99	5.67741 14	5.46448 1	0.07392 21
184	33856	6229504	13.56466 00	5.68773 40	5.43478 3	0.07372 10
185	34225	6331625	13.60147 05	5.69801 92	5.40540 5	0.07352 15
186	34596	6434856	13.63818 17	5.70826 75	5.37634 4	0.07332 36
187	34969	6539203	13.67479 43	5.71847 91	5.34759 4	0.07312 72
188	35344	6644672	13.71130 92	5.72865 43	5.31914 9	0.07293 25
189	35721	6751269	13.74772 71	5.73879 35	5.29100 5	0.07273 93
190	36100	6859000	13.78404 88	5.74889 71	5.26315 8	0.07254 76
191	36481	6967871	13.82027 50	5.75896 52	5.23560 2	0.07235 75
192	36864	7077888	13.85640 65	5.76899 83	5.20833 3	0.07216 88
193	37249	7189057	13.89244 40	5.77899 66	5.18134 7	0.07198 16
194	37636	7301384	13.92838 83	5.78896 04	5.15463 9	0.07179 58
195	38025	7414875	13.96424 00	5.79889 00	5.12820 5	0.07161 13
196	38416	7529536	14.00000 00	5.80878 57	5.10204 1	0.07142 86
197	38809	7645373	14.03566 88	5.81864 79	5.07614 2	0.07124 70
198	39204	7762392	14.07124 73	5.82847 67	5.05050 5	0.07106 69
199	39601	7880599	14.10673 60	5.83827 25	5.02512 6	0.07088 81
200	40000	8000000	14.14213 56	5.84803 55	5.00000 0	0.07071 07

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
201	40401	8120601	14.17744 69	5.85776 60	4.975124	0.07053 46
202	40804	8242408	14.21267 04	5.86746 43	4.950495	0.07035 98
203	41209	8365427	14.24780 68	5.87713 07	4.926108	0.07018 62
204	41616	8489664	14.28285 69	5.88676 53	4.901961	0.07001 40
205	42025	8615125	14.31782 11	5.89636 85	4.878049	0.06984 30
206	42436	8741816	14.35270 01	5.90594 06	4.854369	0.06967 33
207	42849	8869743	14.38749 46	5.91548 17	4.830918	0.06950 48
208	43264	8998912	14.42220 51	5.92499 21	4.807692	0.06933 75
209	43681	9129329	14.45683 23	5.93447 23	4.784689	0.06917 14
210	44100	9261000	14.49137 67	5.94392 20	4.761905	0.06900 66
211	44521	9393931	14.52583 90	5.95334 18	4.739336	0.06884 28
212	44944	9528128	14.56021 98	5.96273 20	4.716981	0.06868 03
213	45369	9663597	14.59451 95	5.97209 26	4.694836	0.06851 89
214	45796	9800344	14.62873 88	5.98142 40	4.672897	0.06835 86
215	46225	9938375	14.66287 83	5.99072 64	4.651163	0.06819 94
216	46656	10077696	14.69693 85	6.00000 00	4.629630	0.06804 14
217	47089	10218313	14.73091 99	6.00924 50	4.608295	0.06788 44
218	47524	10360232	14.76482 31	6.01846 17	4.587156	0.06772 85
219	47961	10503459	14.79864 86	6.02765 02	4.566210	0.06757 37
220	48400	10648000	14.83239 70	6.03681 07	4.545455	0.06742 00
221	48841	10793861	14.86606 87	6.04594 36	4.524887	0.06726 73
222	49284	10941048	14.89966 44	6.05504 89	4.504505	0.06711 56
223	49729	11089567	14.93318 45	6.06412 70	4.484305	0.06696 50
224	50176	11239424	14.96662 95	6.07317 79	4.464286	0.06681 53
225	50625	11390625	15.00000 00	6.08220 20	4.444444	0.06666 67
226	51076	11543176	15.03329 64	6.09119 93	4.424779	0.06651 90
227	51529	11697083	15.06651 92	6.10017 02	4.405286	0.06637 23
228	51984	11852352	15.09966 89	6.10911 47	4.385965	0.06622 66
229	52441	12008989	15.13274 60	6.11803 32	4.366812	0.06608 19
230	52900	12167000	15.16575 09	6.12692 57	4.347826	0.06593 80
231	53361	12326391	15.19868 42	6.13579 24	4.329004	0.06579 52
232	53824	12487168	15.23154 62	6.14463 37	4.310345	0.06565 32
233	54289	12649337	15.26433 75	6.15344 95	4.291845	0.06551 22
234	54756	12812904	15.29705 85	6.16224 01	4.273504	0.06537 20
235	55225	12977875	15.32970 97	6.17100 58	4.255319	0.06523 28
236	55696	13144256	15.36229 15	6.17974 66	4.237288	0.06509 45
237	56169	13312053	15.39480 43	6.18846 28	4.219409	0.06495 70
238	56644	13481272	15.42724 86	6.19715 44	4.201681	0.06482 04
239	57121	13651919	15.45962 48	6.20582 18	4.184100	0.06468 48
240	57600	13824000	15.49193 34	6.21446 50	4.166667	0.06454 97

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
241	58081	13997521	15.52417 47	6.22308 43	4.14937 8	0.06441 57
242	58564	14172488	15.55634 92	6.23167 97	4.13223 1	0.06428 24
243	59049	14348907	15.58845 73	6.24025 15	4.11522 6	0.06415 00
244	59536	14526784	15.62049 94	6.24879 98	4.09836 1	0.06401 84
245	60025	14706125	15.65247 58	6.25732 47	4.08163 3	0.06388 77
246	60516	14886936	15.68438 71	6.26582 66	4.06504 1	0.06375 77
247	61009	15069223	15.71623 36	6.27430 54	4.04858 3	0.06362 85
248	61504	15252992	15.74801 57	6.28276 13	4.03225 8	0.06350 01
249	62001	15438249	15.77973 38	6.29119 46	4.01606 4	0.06337 24
250	62500	15625000	15.81138 83	6.29960 52	4.00000 0	0.06324 56
251	63001	15813251	15.84297 95	6.30799 35	3.98406 4	0.06311 94
252	63504	16003008	15.87450 79	6.31635 96	3.96825 4	0.06299 41
253	64009	16194277	15.90597 37	6.32470 35	3.95256 9	0.06286 95
254	64516	16387064	15.93737 75	6.33302 55	3.93700 8	0.06274 56
255	65025	16581375	15.96871 94	6.34132 57	3.92156 9	0.06262 24
256	65536	16777216	16.00000 00	6.34960 42	3.90625 0	0.06250 00
257	66049	16974593	16.03121 95	6.35786 12	3.89105 1	0.06237 83
258	66564	17173512	16.06237 84	6.36609 68	3.87596 9	0.06225 73
259	67081	17373979	16.09347 69	6.37431 11	3.86100 4	0.06213 70
260	67600	17576000	16.12451 55	6.38250 43	3.84615 4	0.06201 74
261	68121	17779581	16.15549 44	6.39067 65	3.83141 8	0.06189 84
262	68644	17984728	16.18641 41	6.39882 79	3.81679 4	0.06178 02
263	69169	18191447	16.21727 47	6.40695 86	3.80228 1	0.06166 26
264	69696	18399744	16.24807 68	6.41506 87	3.78787 9	0.06154 57
265	70225	18609625	16.27882 06	6.42315 83	3.77358 5	0.06142 95
266	70756	18821096	16.30950 64	6.43122 76	3.75939 8	0.06131 39
267	71289	19034163	16.34013 46	6.43927 67	3.74531 8	0.06119 90
268	71824	19248832	16.37070 55	6.44730 57	3.73134 3	0.06108 47
269	72361	19465109	16.40121 96	6.45531 48	3.71747 2	0.06097 11
270	72900	19683000	16.43167 67	6.46330 41	3.70370 4	0.06085 81
271	73441	19902511	16.46207 76	6.47127 36	3.69003 7	0.06074 57
272	73984	20123648	16.49242 25	6.47922 36	3.67647 1	0.06063 39
273	74529	20346417	16.52271 16	6.48715 41	3.66300 4	0.06052 28
274	75076	20570824	16.55294 54	6.49506 53	3.64963 5	0.06041 22
275	75625	20796875	16.58312 40	6.50295 72	3.63636 4	0.06030 23
276	76176	21024576	16.61324 77	6.51083 01	3.62318 8	0.06019 29
277	76729	21253933	16.64331 70	6.51868 39	3.61010 8	0.06008 42
278	77284	21484952	16.67333 20	6.52651 89	3.59712 2	0.05997 60
279	77841	21717639	16.70329 31	6.53433 51	3.58422 9	0.05986 84
280	78400	21952000	16.73320 05	6.54213 26	3.57142 9	0.05976 14

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
281	78961	22188041	16.76305 46	6.54991 16	3.55871 9	0.05965 50
282	79524	22425768	16.79285 56	6.55767 22	3.54609 9	0.05954 91
283	80089	22665187	16.82260 38	6.56541 44	3.53356 9	0.05944 38
284	80656	22906304	16.85229 95	6.57313 85	3.52112 7	0.05933 91
285	81225	23149125	16.88194 30	6.58084 44	3.50877 2	0.05923 49
286	81796	23393656	16.91153 45	6.58853 23	3.49650 3	0.05913 12
287	82369	23639903	16.94107 43	6.59620 23	3.48432 1	0.05902 81
288	82944	23887872	16.97056 27	6.60385 45	3.47222 2	0.05892 56
289	83521	24137569	17.00000 00	6.61148 90	3.46020 8	0.05882 35
290	84100	24389000	17.02938 64	6.61910 59	3.44827 6	0.05872 20
291	84681	24642171	17.05872 21	6.62670 54	3.43642 6	0.05862 10
292	85264	24897088	17.08800 75	6.63428 74	3.42465 8	0.05852 06
293	85849	25153757	17.11724 28	6.64185 22	3.41296 9	0.05842 06
294	86436	25412184	17.14642 82	6.64939 98	3.40136 1	0.05832 12
295	87025	25672375	17.17556 40	6.65693 02	3.38983 1	0.05822 23
296	87616	25934336	17.20465 05	6.66444 37	3.37837 8	0.05812 38
297	88209	26198073	17.23368 79	6.67194 03	3.36700 3	0.05802 59
298	88804	26463592	17.26267 65	6.67942 00	3.35570 5	0.05792 84
299	89401	26730899	17.29161 65	6.68688 31	3.34448 2	0.05783 15
300	90000	27000000	17.32050 81	6.69432 95	3.33333 3	0.05773 50
301	90601	27270901	17.34935 16	6.70175 94	3.32225 9	0.05763 90
302	91204	27543608	17.37814 72	6.70917 29	3.31125 8	0.05754 35
303	91809	27818127	17.40689 52	6.71657 00	3.30033 0	0.05744 85
304	92416	28094464	17.43559 58	6.72395 08	3.28947 4	0.05735 39
305	93025	28372625	17.46424 92	6.73131 55	3.27868 9	0.05725 98
306	93636	28652616	17.49285 57	6.73866 41	3.26797 4	0.05716 62
307	94249	28934443	17.52141 55	6.74599 67	3.25732 9	0.05707 30
308	94864	29218112	17.54992 88	6.75331 34	3.24675 3	0.05698 03
309	95481	29503629	17.57839 58	6.76061 43	3.23624 6	0.05688 80
310	96100	29791000	17.60681 69	6.76789 95	3.22580 6	0.05679 62
311	96721	30080231	17.63519 21	6.77516 90	3.21543 4	0.05670 48
312	97344	30371328	17.66352 17	6.78242 29	3.20512 8	0.05661 39
313	97969	30664297	17.69180 60	6.78966 13	3.19488 8	0.05652 33
314	98596	30959144	17.72004 51	6.79688 44	3.18471 3	0.05643 33
315	99225	31255875	17.74823 93	6.80409 21	3.17460 3	0.05634 36
316	99856	31554496	17.77638 88	6.81128 46	3.16455 7	0.05625 44
317	100489	31855013	17.80449 38	6.81846 19	3.15457 4	0.05616 56
318	101124	32157432	17.83255 45	6.82562 42	3.14465 4	0.05607 72
319	101761	32461759	17.86057 11	6.83277 15	3.13479 6	0.05598 93
320	102400	32768000	17.88854 38	6.83990 38	3.12500 0	0.05590 17

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
321	103041	33076161	17.91647 29	6.84702 13	3.11526 5	0.05581 46
322	103684	33386248	17.94435 84	6.85412 40	3.10559 0	0.05572 78
323	104329	33698267	17.97220 08	6.86121 20	3.09597 5	0.05564 15
324	104976	34012224	18.00000 00	6.86828 55	3.08642 0	0.05555 56
325	105625	34328125	18.02775 64	6.87534 43	3.07692 3	0.05547 00
326	106276	34645976	18.05547 01	6.88238 88	3.06748 5	0.05538 49
327	106929	34965783	18.08314 13	6.88941 88	3.05810 4	0.05530 01
328	107584	35287552	18.11077 03	6.89643 45	3.04878 0	0.05521 58
329	108241	35611289	18.13835 71	6.90343 59	3.03951 4	0.05513 18
330	108900	35937000	18.16590 21	6.91042 32	3.03030 3	0.05504 82
331	109561	36264691	18.19340 54	6.91739 64	3.02114 8	0.05496 50
332	110224	36594368	18.22086 72	6.92435 56	3.01204 8	0.05488 21
333	110889	36926037	18.24828 76	6.93130 08	3.00300 3	0.05479 97
334	111556	37259704	18.27566 69	6.93823 21	2.99401 2	0.05471 76
335	112225	37595375	18.30300 52	6.94514 96	2.98507 5	0.05463 58
336	112896	37933056	18.33030 28	6.95205 33	2.97619 0	0.05455 45
337	113569	38272753	18.35755 98	6.95894 33	2.96735 9	0.05447 35
338	114244	38614472	18.38477 63	6.96581 98	2.95858 0	0.05439 28
339	114921	38958219	18.41195 26	6.97268 26	2.94985 3	0.05431 25
340	115600	39304000	18.43908 89	6.97953 20	2.94117 6	0.05423 26
341	116281	39651821	18.46618 53	6.98636 80	2.93255 1	0.05415 30
342	116964	40001688	18.49324 20	6.99319 07	2.92397 7	0.05407 38
343	117649	40353607	18.52025 92	7.00000 00	2.91545 2	0.05399 49
344	118336	40707584	18.54723 70	7.00679 61	2.90697 7	0.05391 64
345	119025	41063625	18.57417 56	7.01357 91	2.89855 1	0.05383 82
346	119716	41421736	18.60107 52	7.02034 90	2.89017 3	0.05376 03
347	120409	41781923	18.62793 60	7.02710 58	2.88184 4	0.05368 28
348	121104	42144192	18.65475 81	7.03384 97	2.87356 3	0.05360 56
349	121801	42508549	18.68154 17	7.04058 06	2.86533 0	0.05352 88
350	122500	42875000	18.70828 69	7.04729 87	2.85714 3	0.05345 22
351	123201	43243551	18.73499 40	7.05400 41	2.84900 3	0.05337 61
352	123904	43614208	18.76166 30	7.06069 67	2.84090 9	0.05330 02
353	124609	43986977	18.78829 42	7.06737 66	2.83286 1	0.05322 46
354	125316	44361864	18.81488 77	7.07404 40	2.82485 9	0.05314 94
355	126025	44738875	18.84144 37	7.08069 88	2.81690 1	0.05307 45
356	126736	45118016	18.86796 23	7.08734 11	2.80898 9	0.05299 99
357	127449	45499293	18.89444 36	7.09397 09	2.80112 0	0.05292 56
358	128164	45882712	18.92088 79	7.10058 85	2.79329 6	0.05285 16
359	128881	46268279	18.94729 53	7.10719 37	2.78551 5	0.05277 80
360	129600	46656000	18.97366 60	7.11378 66	2.77777 8	0.05270 46

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
361	130321	47045881	19.00000 00	7.12036 74	2.77008 3	0.05263 16
362	131044	47437928	19.02629 76	7.12693 60	2.76243 1	0.05255 88
363	131769	47832147	19.05255 89	7.13349 25	2.75482 1	0.05248 64
364	132496	48228544	19.07878 40	7.14003 70	2.74725 3	0.05241 42
365	133225	48627125	19.10497 32	7.14656 95	2.73972 6	0.05234 24
366	133956	49027896	19.13112 65	7.15309 01	2.73224 0	0.05227 08
367	134689	49430863	19.15724 41	7.15959 88	2.72479 6	0.05219 96
368	135424	49836032	19.18332 61	7.16609 57	2.71739 1	0.05212 86
369	136161	50243409	19.20937 27	7.17258 09	2.71002 7	0.05205 79
370	136900	50653000	19.23538 41	7.17905 44	2.70270 3	0.05198 75
371	137641	51064811	19.26136 03	7.18551 62	2.69541 8	0.05191 74
372	138384	51478848	19.28730 15	7.19196 63	2.68817 2	0.05184 76
373	139129	51895117	19.31320 79	7.19840 50	2.68096 5	0.05177 80
374	139876	52313624	19.33907 96	7.20483 21	2.67379 7	0.05170 88
375	140625	52734375	19.36491 67	7.21124 79	2.66666 7	0.05163 98
376	141376	53157376	19.39071 94	7.21765 22	2.65957 4	0.05157 11
377	142129	53582633	19.41648 78	7.22404 51	2.65252 0	0.05150 26
378	142884	54010152	19.44222 21	7.23042 68	2.64550 3	0.05143 45
379	143641	54439939	19.46792 23	7.23679 72	2.63852 2	0.05136 65
380	144400	54872000	19.49358 87	7.24315 64	2.63157 9	0.05129 89
381	145161	55306341	19.51922 13	7.24950 45	2.62467 2	0.05123 16
382	145924	55742968	19.54482 03	7.25584 15	2.61780 1	0.05116 45
383	146689	56181887	19.57038 58	7.26216 74	2.61096 6	0.05109 76
384	147456	56623104	19.59591 79	7.26848 24	2.60416 7	0.05103 10
385	148225	57066625	19.62141 69	7.27478 63	2.59740 3	0.05096 47
386	148996	57512456	19.64688 27	7.28107 94	2.59067 4	0.05089 87
387	149769	57960603	19.67231 56	7.28736 16	2.58397 9	0.05083 29
388	150544	58411072	19.69771 56	7.29363 30	2.57732 0	0.05076 73
389	151321	58863869	19.72308 29	7.29989 37	2.57069 4	0.05070 20
390	152100	59319000	19.74841 77	7.30614 36	2.56410 3	0.05063 70
391	152881	59776471	19.77371 99	7.31238 28	2.55754 5	0.05057 22
392	153664	60236288	19.79898 99	7.31861 14	2.55102 0	0.05050 76
393	154449	60698457	19.82422 76	7.32482 94	2.54452 9	0.05044 33
394	155236	61162984	19.84943 32	7.33103 69	2.53807 1	0.05037 93
395	156025	61629875	19.87460 69	7.33723 39	2.53164 6	0.05031 55
396	156816	62099136	19.89974 87	7.34342 05	2.52525 3	0.05025 19
397	157609	62570773	19.92485 88	7.34959 66	2.51889 2	0.05018 86
398	158404	63044792	19.94993 73	7.35576 24	2.51256 3	0.05012 55
399	159201	63521199	19.97498 44	7.36191 78	2.50626 6	0.05006 26
400	160000	64000000	20.00000 00	7.36806 30	2.50000 0	0.05000 00

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
401	160801	64481201	20.02498 44	7.37419 79	2.49376 6	0.04993 76
402	161604	64964808	20.04993 77	7.38032 27	2.48756 2	0.04987 55
403	162409	65450827	20.07485 99	7.38643 73	2.48139 0	0.04981 35
404	163216	65939264	20.09975 12	7.39254 18	2.47524 8	0.04975 19
405	164025	66430125	20.12461 18	7.39863 62	2.46913 6	0.04969 04
406	164836	66923416	20.14944 17	7.40472 06	2.46305 4	0.04962 92
407	165649	67419143	20.17424 10	7.41079 51	2.45700 2	0.04956 82
408	166464	67917312	20.19900 99	7.41685 95	2.45098 0	0.04950 74
409	167281	68417929	20.22374 84	7.42291 41	2.44498 8	0.04944 68
410	168100	68921000	20.24845 67	7.42895 88	2.43902 4	0.04938 65
411	168921	69426531	20.27313 49	7.43499 37	2.43309 0	0.04932 64
412	169744	69934528	20.29778 31	7.44101 89	2.42718 4	0.04926 65
413	170569	70444997	20.32240 14	7.44703 42	2.42130 8	0.04920 68
414	171396	70957944	20.34698 99	7.45303 99	2.41545 9	0.04914 73
415	172225	71473375	20.37154 88	7.45903 59	2.40963 9	0.04908 81
416	173056	71991296	20.39607 81	7.46502 23	2.40384 6	0.04902 90
417	173889	72511713	20.42057 79	7.47099 91	2.39808 2	0.04897 02
418	174724	73034632	20.44504 83	7.47696 64	2.39234 4	0.04891 16
419	175561	73560059	20.46948 95	7.48292 41	2.38663 5	0.04885 32
420	176400	74088000	20.49390 15	7.48887 24	2.38095 2	0.04879 50
421	177241	74618461	20.51828 45	7.49481 12	2.37529 7	0.04873 70
422	178084	75151448	20.54263 86	7.50074 07	2.36966 8	0.04867 92
423	178929	75686967	20.56696 38	7.50666 07	2.36406 6	0.04862 17
424	179776	76225024	20.59126 03	7.51257 15	2.35849 1	0.04856 43
425	180625	76765625	20.61552 81	7.51847 30	2.35294 1	0.04850 71
426	181476	77308776	20.63976 74	7.52436 52	2.34741 8	0.04845 02
427	182329	77854483	20.66397 83	7.53024 82	2.34192 0	0.04839 34
428	183184	78402752	20.68816 09	7.53612 20	2.33644 9	0.04833 68
429	184041	78953589	20.71231 52	7.54198 67	2.33100 2	0.04828 05
430	184900	79507000	20.73644 14	7.54784 23	2.32558 1	0.04822 43
431	185761	80062991	20.76053 95	7.55368 88	2.32018 6	0.04816 83
432	186624	80621568	20.78460 97	7.55952 63	2.31481 5	0.04811 25
433	187489	81182737	20.80865 20	7.56535 48	2.30946 9	0.04805 69
434	188356	81746504	20.83266 67	7.57117 43	2.30414 7	0.04800 15
435	189225	82312875	20.85665 36	7.57698 49	2.29885 1	0.04794 63
436	190096	82881856	20.88061 30	7.58278 65	2.29357 8	0.04789 13
437	190969	83453453	20.90454 50	7.58857 93	2.28833 0	0.04783 65
438	191844	84027672	20.92844 95	7.59436 33	2.28310 5	0.04778 18
439	192721	84604519	20.95232 68	7.60013 85	2.27790 4	0.04772 74
440	193600	85184000	20.97617 70	7.60590 49	2.27272 7	0.04767 31

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
441	194481	85766121	21.00000 00	7.61166 26	2.26757 4	0.04761 90
442	195364	86350888	21.02379 60	7.61741 16	2.26244 3	0.04756 51
443	196249	86938307	21.04756 52	7.62315 19	2.25733 6	0.04751 12
444	197136	87528384	21.07130 75	7.62888 33	2.25225 2	0.04745 79
445	198025	88121125	21.09502 31	7.63460 67	2.24719 1	0.04740 45
446	198916	88716536	21.11871 21	7.64032 12	2.24215 2	0.04735 14
447	199809	89314623	21.14237 45	7.64602 72	2.23713 6	0.04729 84
448	200704	89915392	21.16601 05	7.65172 47	2.23214 3	0.04724 56
449	201601	90518849	21.18962 01	7.65741 37	2.22717 1	0.04719 29
450	202500	91125000	21.21320 34	7.66309 43	2.22222 2	0.04714 05
451	203401	91733851	21.23676 06	7.66876 65	2.21729 5	0.04708 82
452	204304	92345408	21.26029 16	7.67443 03	2.21238 9	0.04703 60
453	205209	92959677	21.28379 67	7.68008 57	2.20750 6	0.04698 41
454	206116	93576664	21.30727 58	7.68573 28	2.20264 3	0.04693 23
455	207025	94196375	21.33072 90	7.69137 17	2.19780 2	0.04688 07
456	207936	94818816	21.35415 65	7.69700 23	2.19298 2	0.04682 93
457	208849	95443993	21.37755 83	7.70262 46	2.18818 4	0.04677 80
458	209764	96071912	21.40093 46	7.70823 88	2.18340 6	0.04672 69
459	210681	96702579	21.42428 53	7.71384 48	2.17864 9	0.04667 60
460	211600	97336000	21.44761 06	7.71944 26	2.17391 3	0.04662 52
461	212521	97972181	21.47091 06	7.72503 24	2.16919 7	0.04657 46
462	213444	98611128	21.49418 53	7.73061 41	2.16450 2	0.04652 42
463	214369	99252847	21.51743 48	7.73618 77	2.15982 7	0.04647 39
464	215296	99897344	21.54065 92	7.74175 33	2.15517 2	0.04642 38
465	216225	100544625	21.56385 87	7.74731 09	2.15053 8	0.04637 39
466	217156	101194696	21.58703 31	7.75286 05	2.14592 3	0.04632 41
467	218089	101847563	21.61018 28	7.75840 23	2.14132 8	0.04627 45
468	219024	102503232	21.63330 77	7.76393 61	2.13675 2	0.04622 50
469	219961	103161709	21.65640 78	7.76946 20	2.13219 6	0.04617 57
470	220900	103823000	21.67948 34	7.77498 01	2.12766 0	0.04612 66
471	221841	104487111	21.70253 44	7.78049 04	2.12314 2	0.04607 76
472	222784	105154048	21.72556 10	7.78599 28	2.11864 4	0.04602 87
473	223729	105823817	21.74856 32	7.79148 75	2.11416 5	0.04598 00
474	224676	106496424	21.77154 11	7.79697 45	2.10970 5	0.04593 15
475	225625	107171875	21.79449 47	7.80245 38	2.10526 3	0.04588 31
476	226576	107850176	21.81742 42	7.80792 53	2.10084 0	0.04583 49
477	227529	108531333	21.84032 97	7.81338 92	2.09643 6	0.04578 69
478	228484	109215352	21.86321 11	7.81884 55	2.09205 0	0.04573 89
479	229441	109902239	21.88606 86	7.82429 42	2.08768 3	0.04569 12
480	230400	110592000	21.90890 23	7.82973 53	2.08333 3	0.04564 35

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
481	231361	111284641	21.93171 22	7.83516 88	2.07900 2	0.04559 61
482	232324	111980168	21.95449 84	7.84059 48	2.07468 9	0.04554 88
483	233289	112678587	21.97726 10	7.84601 34	2.07039 3	0.04550 16
484	234256	113379904	22.00000 00	7.85142 44	2.06611 6	0.04545 45
485	235225	114084125	22.02271 55	7.85682 80	2.06185 6	0.04540 77
486	236196	114791256	22.04540 77	7.86222 42	2.05761 3	0.04536 09
487	237169	115501303	22.06807 65	7.86761 30	2.05338 8	0.04531 43
488	238144	116214272	22.09072 20	7.87299 44	2.04918 0	0.04526 79
489	239121	116930169	22.11334 44	7.87836 84	2.04499 0	0.04522 16
490	240100	117649000	22.13594 36	7.88373 52	2.04081 6	0.04517 54
491	241081	118370771	22.15851 98	7.88909 46	2.03666 0	0.04512 94
492	242064	119095488	22.18107 30	7.89444 68	2.03252 0	0.04508 35
493	243049	119823157	22.20360 33	7.89979 17	2.02839 8	0.04503 77
494	244036	120553784	22.22611 08	7.90512 94	2.02429 1	0.04499 21
495	245025	121287375	22.24859 55	7.91045 99	2.02020 2	0.04494 67
496	246016	122023936	22.27105 75	7.91578 32	2.01612 9	0.04490 13
497	247009	122763473	22.29349 68	7.92109 94	2.01207 2	0.04485 61
498	248004	123505992	22.31591 36	7.92640 84	2.00803 2	0.04481 11
499	249001	124251499	22.33830 79	7.93171 04	2.00400 8	0.04476 61
500	250000	125000000	22.36067 98	7.93700 53	2.00000 0	0.04472 14
501	251001	125751501	22.38302 93	7.94229 31	1.99600 8	0.04467 67
502	252004	126506008	22.40535 65	7.94757 39	1.99203 2	0.04463 22
503	253009	127263527	22.42766 15	7.95284 76	1.98807 2	0.04458 78
504	254016	128024064	22.44994 43	7.95811 44	1.98412 7	0.04454 35
505	255025	128787625	22.47220 51	7.96337 42	1.98019 8	0.04449 94
506	256036	129554216	22.49444 38	7.96862 71	1.97628 5	0.04445 54
507	257049	130323843	22.51666 05	7.97387 31	1.97238 7	0.04441 16
508	258064	131096512	22.53885 53	7.97911 22	1.96850 4	0.04436 78
509	259081	131872229	22.56102 83	7.98434 44	1.96463 7	0.04432 42
510	260100	132651000	22.58317 96	7.98956 97	1.96078 4	0.04428 07
511	261121	133432831	22.60530 91	7.99478 83	1.95694 7	0.04423 74
512	262144	134217728	22.62741 70	8.00000 00	1.95312 5	0.04419 42
513	263169	135005697	22.64950 33	8.00520 49	1.94931 8	0.04415 11
514	264196	135796744	22.67156 81	8.01040 31	1.94552 5	0.04410 81
515	265225	136590875	22.69361 14	8.01559 46	1.94174 8	0.04406 53
516	266256	137388096	22.71563 34	8.02077 93	1.93798 4	0.04402 25
517	267289	138188413	22.73763 40	8.02595 74	1.93423 6	0.04397 99
518	268324	138991832	22.75961 34	8.03112 87	1.93050 2	0.04393 75
519	269361	139798359	22.78157 15	8.03629 34	1.92678 2	0.04389 51
520	270400	140608000	22.80350 85	8.04145 15	1.92307 7	0.04385 29

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
521	271441	141420761	22.82542 44	8.04660 30	1.91938 6	0.04381 08
522	272484	142236648	22.84731 93	8.05174 79	1.91570 9	0.04376 88
523	273529	143055667	22.86919 33	8.05688 62	1.91204 6	0.04372 69
524	274576	143877824	22.89104 63	8.06201 80	1.90839 7	0.04368 52
525	275625	144703125	22.91287 83	8.06714 32	1.90476 2	0.04364 36
526	276676	145531576	22.93468 99	8.07226 20	1.90114 1	0.04360 21
527	277729	146363183	22.95648 06	8.07737 42	1.89753 3	0.04356 07
528	278784	147197952	22.97825 06	8.08248 00	1.89393 9	0.04351 94
529	279841	148035889	23.00000 00	8.08757 94	1.89035 9	0.04347 83
530	280900	148877000	23.02172 89	8.09267 23	1.88679 2	0.04343 72
531	281961	149721291	23.04343 72	8.09775 89	1.88323 9	0.04339 63
532	283024	150568768	23.06512 52	8.10283 90	1.87969 9	0.04335 55
533	284089	151419437	23.08679 28	8.10791 28	1.87617 3	0.04331 48
534	285156	152273304	23.10844 00	8.11298 03	1.87265 9	0.04327 42
535	286225	153130375	23.13006 70	8.11804 14	1.86915 9	0.04323 38
536	287296	153990656	23.15167 38	8.12309 62	1.86567 2	0.04319 34
537	288369	154854153	23.17326 05	8.12814 47	1.86219 7	0.04315 32
538	289444	155720872	23.19482 70	8.13318 70	1.85873 6	0.04311 31
539	290521	156590819	23.21637 35	8.13822 30	1.85528 8	0.04307 30
540	291600	157464000	23.23790 01	8.14325 28	1.85185 2	0.04303 31
541	292681	158340421	23.25940 67	8.14827 64	1.84842 9	0.04299 34
542	293764	159220088	23.28089 35	8.15329 39	1.84501 8	0.04295 37
543	294849	160103007	23.30236 04	8.15830 51	1.84162 1	0.04291 41
544	295936	160989184	23.32380 76	8.16331 02	1.83823 5	0.04287 46
545	297025	161878625	23.34523 51	8.16830 92	1.83486 2	0.04283 53
546	298116	162771336	23.36664 29	8.17330 20	1.83150 2	0.04279 60
547	299209	163667323	23.38803 11	8.17828 88	1.82815 4	0.04275 69
548	300304	164566592	23.40939 98	8.18326 95	1.82481 8	0.04271 79
549	301401	165469149	23.43074 90	8.18824 41	1.82149 4	0.04267 90
550	302500	166375000	23.45207 88	8.19321 27	1.81818 2	0.04264 01
551	303601	167284151	23.47338 92	8.19817 53	1.81488 2	0.04260 14
552	304704	168196608	23.49468 02	8.20313 19	1.81159 4	0.04256 28
553	305809	169112377	23.51595 20	8.20808 25	1.80831 8	0.04252 43
554	306916	170031464	23.53720 46	8.21302 71	1.80505 4	0.04248 59
555	308025	170953875	23.55843 80	8.21796 57	1.80180 2	0.04244 76
556	309136	171879616	23.57965 22	8.22289 85	1.79856 1	0.04240 94
557	310249	172808693	23.60084 74	8.22782 54	1.79533 2	0.04237 14
558	311364	173741112	23.62202 36	8.23274 63	1.79211 5	0.04233 34
559	312481	174676879	23.64318 08	8.23766 14	1.78890 9	0.04229 55
560	313600	175616000	23.66431 91	8.24257 06	1.78571 4	0.04225 77

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
561	314721	176558481	23.68543 86	8.24747 40	1.78253 1	0.04222 00
562	315844	177504328	23.70653 92	8.25237 15	1.77935 9	0.04218 25
563	316969	178453547	23.72762 10	8.25726 33	1.77619 9	0.04214 50
564	318096	179406144	23.74868 42	8.26214 92	1.77305 0	0.04210 76
565	319225	180362125	23.76972 86	8.26702 94	1.76991 2	0.04207 03
566	320356	181321496	23.79075 45	8.27100 38	1.76678 4	0.04203 21
567	321489	182284463	23.81176 18	8.27677 25	1.76366 8	0.04199 61
568	322624	183250432	23.83275 06	8.28163 55	1.76056 3	0.04195 91
569	323761	184220009	23.85372 09	8.28649 28	1.75746 9	0.04192 22
570	324900	185193000	23.87467 28	8.29134 43	1.75438 6	0.04188 54
571	326041	186169411	23.89560 63	8.29619 02	1.75131 3	0.04184 87
572	327184	187149248	23.91652 15	8.30103 05	1.74825 2	0.04181 21
573	328329	188132517	23.93741 84	8.30586 51	1.74520 1	0.04177 56
574	329476	189119224	23.95829 71	8.31069 41	1.74216 0	0.04173 92
575	330625	190109375	23.97915 76	8.31551 75	1.73913 0	0.04170 29
576	331776	191102976	24.00000 00	8.32033 53	1.73611 1	0.04166 67
577	332929	192100033	24.02082 43	8.32514 75	1.73310 2	0.04163 05
578	334084	193100552	24.04163 06	8.32995 42	1.73010 4	0.04159 45
579	335241	194104539	24.06241 88	8.33475 53	1.72711 6	0.04155 86
580	336400	195112000	24.08318 92	8.33955 09	1.72413 8	0.04152 27
581	337561	196122941	24.10394 16	8.34434 10	1.72117 0	0.04148 70
582	338724	197137368	24.12467 62	8.34912 56	1.71821 3	0.04145 13
583	339889	198155287	24.14539 29	8.35390 47	1.71526 6	0.04141 58
584	341056	199176704	24.16609 19	8.35867 84	1.71232 9	0.04138 03
585	342225	200201625	24.18677 32	8.34344 66	1.70940 2	0.04134 49
586	343396	201230056	24.20743 69	8.36820 94	1.70648 5	0.04130 96
587	344569	202262003	24.22808 29	8.37296 68	1.70357 8	0.04127 44
588	345744	203297472	24.24871 13	8.37771 87	1.70068 0	0.04123 93
589	346921	204336469	24.26932 22	8.38246 53	1.69779 3	0.04120 43
590	348100	205379000	24.28991 56	8.38720 65	1.69491 5	0.04116 93
591	349281	206425071	24.31049 16	8.39194 24	1.69204 7	0.04113 45
592	350464	207474688	24.33105 01	8.39667 29	1.68918 9	0.04109 97
593	351649	208527857	24.35159 13	8.40139 81	1.68634 1	0.04106 51
594	352836	209584584	24.37211 52	8.40611 80	1.68350 2	0.04103 05
595	354025	210644875	24.39262 18	8.41083 26	1.68067 2	0.04099 60
596	355216	211708736	24.41311 12	8.41554 19	1.67785 2	0.04096 16
597	356409	212776173	24.43358 34	8.42024 59	1.67504 2	0.04092 73
598	357604	213847192	24.45403 85	8.42494 47	1.67224 1	0.04089 30
599	358801	214921799	24.47447 65	8.42963 83	1.66944 9	0.04085 89
600	360000	216000000	24.49489 74	8.43432 67	1.66666 7	0.04082 48

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
601	361201	217081801	24.51530 13	8.43900 98	1.66389 4	0.04079 00
602	362404	218167208	24.53568 83	8.44368 77	1.66113 0	0.04075 70
603	363609	219256227	24.55605 83	8.44836 05	1.65837 5	0.04072 31
604	364816	220348864	24.57641 15	8.45302 81	1.65562 9	0.04068 94
605	366025	221445125	24.59674 78	8.45769 06	1.65289 3	0.04065 58
606	367236	222545016	24.61706 73	8.46234 79	1.65016 5	0.04062 22
607	368449	223648543	24.63737 00	8.46700 01	1.64744 6	0.04058 87
608	369664	224755712	24.65765 60	8.47164 72	1.64473 7	0.04055 54
609	370881	225866529	24.67792 54	8.47628 92	1.64203 6	0.04052 20
610	372100	226981000	24.69817 81	8.48092 61	1.63934 4	0.04048 83
611	373321	228099131	24.71841 42	8.48555 79	1.63666 1	0.04045 57
612	374544	229220928	24.73863 38	8.49018 47	1.63398 7	0.04042 26
613	375769	230346397	24.75883 68	8.49480 65	1.63132 1	0.04038 96
614	376996	231475544	24.77902 34	8.49942 33	1.62866 4	0.04035 67
615	378225	232608375	24.79919 35	8.50403 50	1.62601 6	0.04032 39
616	379456	233744896	24.81934 73	8.50864 17	1.62337 7	0.04029 11
617	380689	234885113	24.83948 47	8.51324 35	1.62074 6	0.04025 85
618	381924	236029032	24.85960 58	8.51784 03	1.61812 3	0.04022 59
619	383161	237176659	24.87971 06	8.52243 21	1.61550 9	0.04019 34
620	384400	238328000	24.89979 92	8.52701 90	1.61290 3	0.04016 10
621	385641	239483061	24.91987 16	8.53160 09	1.61030 6	0.04012 86
622	386884	240641848	24.93992 78	8.53617 80	1.60771 7	0.04009 63
623	388129	241804367	24.95996 79	8.54075 01	1.60513 6	0.04006 42
624	389376	242970624	24.97999 20	8.54531 74	1.60256 4	0.04003 20
625	390625	244140625	25.00000 00	8.54987 97	1.60000 0	0.04000 00
626	391876	245314376	25.01999 20	8.55443 72	1.59744 4	0.03996 80
627	393129	246491883	25.03996 81	8.55898 99	1.59489 6	0.03993 62
628	394384	247673152	25.05992 82	8.56353 77	1.59235 7	0.03990 43
629	395641	248858189	25.07987 24	8.56808 07	1.58982 5	0.03987 26
630	396900	250047000	25.09980 08	8.57261 89	1.58730 2	0.03984 10
631	398161	251239591	25.11971 34	8.57715 23	1.58478 6	0.03980 94
632	399424	252435968	25.13961 02	8.58168 09	1.58227 8	0.03977 79
633	400689	253636137	25.15949 13	8.58620 47	1.57977 9	0.03974 64
634	401956	254840104	25.17935 66	8.59072 37	1.57728 7	0.03971 51
635	403225	256047875	25.19920 63	8.59523 80	1.57480 3	0.03968 38
636	404496	257259456	25.21904 04	8.59974 76	1.57232 7	0.03965 26
637	405769	258474853	25.23885 89	8.60425 24	1.56985 9	0.03962 14
638	407044	259694072	25.25866 19	8.60875 26	1.56739 8	0.03959 04
639	408321	260917119	25.27844 93	8.61324 80	1.56494 5	0.03955 94
640	409600	262144000	25.29822 13	8.61773 88	1.56250 0	0.03952 85

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
641	410881	263374721	25.31797 78	8.62222 48	1.56006 2	0.03949 76
642	412164	264609288	25.33771 89	8.62670 62	1.55763 2	0.03946 69
643	413449	265874707	25.35744 47	8.63118 30	1.55521 0	0.03943 62
644	414736	267089984	25.37715 51	8.63565 51	1.55279 5	0.03940 55
645	416025	268336125	25.39685 02	8.64012 26	1.55038 8	0.03937 50
646	417316	269586136	25.41653 01	8.64458 55	1.54998 8	0.03934 45
647	418609	270840023	25.43619 47	8.64904 37	1.54559 5	0.03931 41
648	419904	272097792	25.45584 41	8.65349 74	1.54321 0	0.03928 37
649	421201	273359449	25.47547 84	8.65794 65	1.54083 2	0.03925 34
650	422500	274625000	25.49509 76	8.66239 11	1.53846 2	0.03922 32
651	423801	275894451	25.51470 16	8.66683 10	1.53609 8	0.03919 31
652	425104	277167808	25.53429 07	8.67126 65	1.53374 2	0.03916 30
653	426409	278445077	25.55386 47	8.67569 74	1.53139 4	0.03913 30
654	427716	279726264	25.57342 37	8.68012 37	1.52905 2	0.03910 31
655	429025	281011375	25.59296 78	8.68454 56	1.52671 8	0.03907 32
656	430336	282300416	25.61249 69	8.68896 30	1.52439 0	0.03904 34
657	431649	283593393	25.63201 12	8.69337 59	1.52207 0	0.03901 37
658	432964	284890312	25.65151 07	8.69778 43	1.51975 7	0.03898 41
659	434281	286191179	25.67099 53	8.70218 82	1.51745 1	0.03895 45
660	435600	287496000	25.69046 52	8.70658 77	1.51515 2	0.03892 49
661	436921	288804781	25.70992 03	8.71098 27	1.51285 9	0.03889 55
662	438244	290117528	25.72936 07	8.71537 34	1.51057 4	0.03886 61
663	439569	291434247	25.74878 64	8.71975 96	1.50829 6	0.03883 68
664	440896	292754944	25.76819 75	8.72414 13	1.50602 4	0.03880 75
665	442225	294079625	25.78759 39	8.72851 87	1.50375 9	0.03877 83
666	443556	295408296	25.80697 58	8.73289 17	1.50150 2	0.03874 92
667	444889	296740963	25.82634 31	8.73726 04	1.49925 0	0.03872 02
668	446224	298077632	25.84569 60	8.74162 46	1.49700 6	0.03869 12
669	447561	299418309	25.86503 43	8.74598 46	1.49476 8	0.03866 22
670	448900	300763000	25.88435 82	8.75034 01	1.49253 7	0.03863 34
671	450241	302111711	25.90366 77	8.75469 14	1.49031 3	0.03860 46
672	451584	303464448	25.92296 28	8.75903 83	1.48809 5	0.03857 58
673	452929	304821217	25.94224 35	8.76338 09	1.48588 4	0.03854 72
674	454276	306182024	25.96151 00	8.76771 92	1.48368 0	0.03851 86
675	455625	307546875	25.98076 21	8.77205 32	1.48148 1	0.03849 00
676	456976	308915776	26.00000 00	8.77638 30	1.47929 0	0.03846 15
677	458329	310288733	26.01922 37	8.78070 84	1.47710 5	0.03843 31
678	459684	311665752	26.03843 31	8.78502 96	1.47492 6	0.03840 48
679	461041	313046839	26.05762 84	8.78934 66	1.47275 4	0.03837 65
680	462400	314432000	26.07680 96	8.79365 93	1.47058 8	0.03834 82

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
681	463761	315821241	26.09597 67	8.79796 79	1.46842 9	0.03832 01
682	465124	317214568	26.11512 97	8.80227 21	1.46627 6	0.03829 20
683	466489	318611987	26.13426 87	8.80657 22	1.46412 9	0.03826 39
684	467856	320013504	26.15339 37	8.81086 81	1.46198 8	0.03823 60
685	469225	321419125	26.17250 47	8.81515 98	1.45985 4	0.03820 80
686	470596	322828856	26.19160 17	8.81944 73	1.45772 6	0.03818 02
687	471969	324242703	26.21068 48	8.82373 07	1.45560 4	0.03815 24
688	473344	325660672	26.22975 41	8.82800 99	1.45348 8	0.03812 46
689	474721	327082769	26.24880 95	8.83228 50	1.45137 9	0.03809 70
690	476100	328509000	26.26785 11	8.83655 59	1.44927 5	0.03806 93
691	477481	329939371	26.28687 89	8.84082 27	1.44717 8	0.03804 18
692	478864	331373888	26.30589 29	8.84508 54	1.44508 7	0.03801 43
693	480249	332812557	26.32489 32	8.84934 40	1.44300 1	0.03798 69
694	481636	334255384	26.34387 97	8.85359 85	1.44092 2	0.03795 95
695	483025	335702375	26.36285 27	8.85784 89	1.43884 9	0.03793 22
696	484416	337153536	26.38181 19	8.86209 52	1.43678 2	0.03790 49
697	485809	338608873	26.40075 76	8.86633 75	1.43472 0	0.03787 77
698	487204	340068392	26.41968 96	8.87057 57	1.43266 5	0.03785 06
699	488601	341532099	26.43860 81	8.87480 99	1.43061 5	0.03782 35
700	490000	343000000	26.45751 31	8.87904 00	1.42857 1	0.03779 64
701	491401	344472101	26.47640 46	8.88326 61	1.42653 4	0.03776 95
702	492804	345948408	26.49528 26	8.88748 82	1.42450 1	0.03774 26
703	494209	347428927	26.51414 72	8.89170 63	1.42247 5	0.03771 57
704	495616	348913664	26.53299 83	8.89592 04	1.42045 5	0.03768 89
705	497025	350402625	26.55183 61	8.90013 05	1.41844 0	0.03766 22
706	498436	351895816	26.57066 05	8.90433 66	1.41643 1	0.03763 55
707	499849	353393243	26.58947 16	8.90853 87	1.41442 7	0.03760 89
708	501264	354894912	26.60826 94	8.91273 69	1.41242 9	0.03758 23
709	502681	356400829	26.62705 39	8.91693 11	1.41043 7	0.03755 58
710	504100	357911000	26.64582 52	8.92112 14	1.40845 1	0.03752 93
711	505521	359425431	26.66458 33	8.92530 78	1.40647 0	0.03750 29
712	506944	360944128	26.68332 81	8.92949 02	1.40449 4	0.03747 66
713	508369	362467097	26.70205 98	8.93366 87	1.40252 5	0.03745 03
714	509796	363994344	26.72077 84	8.93784 33	1.40056 0	0.03742 41
715	511225	365525875	26.73948 39	8.94201 40	1.39860 1	0.03739 79
716	512656	367061696	26.75817 63	8.94618 09	1.39664 8	0.03737 18
717	514089	368601813	26.77685 57	8.95034 38	1.39470 0	0.03734 57
718	515524	370146232	26.79552 20	8.95450 29	1.39275 8	0.03731 97
719	516961	371694959	26.81417 54	8.95865 81	1.39082 1	0.03729 37
720	518400	373248000	26.83281 57	8.96280 95	1.38888 9	0.03726 78

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
721	519841	374805361	26.85144 32	8.96695 70	1.38696 3	0.03724 19
722	521284	376367048	26.87005 77	8.97110 07	1.38504 2	0.03721 61
723	522729	377933067	26.88865 93	8.97524 06	1.38312 6	0.03719 04
724	524176	379503424	26.90724 81	8.97937 66	1.38121 5	0.03716 47
725	525625	381078125	26.92582 40	8.98350 89	1.37931 0	0.03713 91
726	527076	382657176	26.94438 72	8.98763 73	1.37741 0	0.03711 35
727	528529	384240583	26.96293 75	8.99176 20	1.37551 6	0.03708 79
728	529984	385828352	26.98147 51	8.99588 29	1.37362 6	0.03706 25
729	531441	387420489	27.00000 00	9.00000 00	1.37174 2	0.03703 70
730	532900	389017000	27.01851 22	9.00411 33	1.36986 3	0.03701 17
731	534361	390617891	27.03701 17	9.00822 29	1.36798 9	0.03698 63
732	535824	392223168	27.05549 85	9.01232 88	1.36612 0	0.03696 11
733	537289	393832837	27.07397 27	9.01643 09	1.36425 6	0.03693 58
734	538756	395446904	27.09243 44	9.02052 93	1.36239 8	0.03691 07
735	540225	397065375	27.11088 34	9.02462 39	1.36054 4	0.03688 56
736	541696	398688256	27.12931 99	9.02871 49	1.35869 6	0.03686 05
737	543169	400315553	27.14774 39	9.03280 21	1.35685 2	0.03683 55
738	544644	401947272	27.16615 54	9.03688 57	1.35501 4	0.03681 05
739	546121	403583419	27.18455 44	9.04096 55	1.35318 0	0.03678 56
740	547600	405224000	27.20294 10	9.04504 17	1.35135 1	0.03676 07
741	549081	406869021	27.22131 52	9.04911 42	1.34952 8	0.03673 59
742	550564	408518488	27.23967 69	9.05318 31	1.34770 9	0.03671 12
743	552049	410172407	27.25802 63	9.05724 82	1.34589 5	0.03668 64
744	553536	411830784	27.27636 34	9.06130 98	1.34408 6	0.03666 18
745	555025	413493625	27.29468 81	9.06536 77	1.34228 2	0.03663 72
746	556516	415160936	27.31300 06	9.06942 20	1.34048 3	0.03661 26
747	558009	416832723	27.33130 07	9.07347 26	1.33868 8	0.03658 81
748	559504	418508992	27.34958 87	9.07751 97	1.33689 8	0.03656 36
749	561001	420189749	27.36386 44	9.08156 31	1.33511 3	0.03653 92
750	562500	421875000	27.38612 79	9.08560 30	1.33333 3	0.03651 48
751	564001	423564751	27.40437 92	9.08963 92	1.33155 8	0.03649 05
752	565504	425259008	27.42261 84	9.09367 19	1.32978 7	0.03646 62
753	567009	426957777	27.44084 55	9.09770 10	1.32802 1	0.03644 20
754	568516	428661064	27.45906 04	9.10172 65	1.32626 0	0.03641 79
755	570025	430368875	27.47726 33	9.10574 85	1.32450 3	0.03639 37
756	571536	432081216	27.49545 42	9.10976 69	1.32275 1	0.03636 96
757	573049	433798093	27.51363 30	9.11378 18	1.32100 4	0.03634 56
758	574564	435519512	27.53179 98	9.11779 31	1.31926 1	0.03632 16
759	576081	437245479	27.54995 46	9.12180 10	1.31752 3	0.03629 77
760	577600	438976000	27.56809 75	9.12580 53	1.31578 9	0.03627 38

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
761	579121	440711081	27.58622 84	9.12980 61	1.31406 0	0.03625 00
762	580644	442450728	27.60434 75	9.13380 34	1.31233 6	0.03622 62
763	582169	444194947	27.62245 46	9.13779 71	1.31061 6	0.03620 24
764	583696	445943744	27.64054 99	9.14178 74	1.30890 1	0.03617 87
765	585225	447697125	27.65863 34	9.14577 43	1.30719 0	0.03615 51
766	586756	449455096	27.67670 50	9.14975 76	1.30548 3	0.03613 15
767	588289	451217663	27.69476 48	9.15373 75	1.30378 1	0.03610 79
768	589824	452984832	27.71281 29	9.15771 39	1.30208 3	0.03608 44
769	591361	454756609	27.73084 92	9.16168 69	1.30039 0	0.03606 09
770	592900	456533000	27.74887 39	9.16565 65	1.29870 1	0.03603 75
771	594441	458314011	27.76688 68	9.16962 26	1.29701 7	0.03601 41
772	595984	460099648	27.78488 80	9.17358 52	1.29533 7	0.03599 08
773	597529	461889917	27.80287 75	9.17754 45	1.29366 1	0.03596 75
774	599076	463684824	27.82085 55	9.18150 03	1.29199 0	0.03594 43
775	600625	465484375	27.83882 18	9.18545 28	1.29032 3	0.03592 11
776	602176	467288576	27.85677 66	9.18940 18	1.28866 0	0.03589 79
777	603729	469097433	27.87471 97	9.19334 74	1.28700 1	0.03587 48
778	605284	470910952	27.89265 14	9.19728 97	1.28534 7	0.03585 17
779	606841	472729139	27.91057 15	9.20122 86	1.28369 7	0.03582 87
780	608400	474552000	27.92848 01	9.20516 41	1.28205 1	0.03580 57
781	609961	476379541	27.94637 72	9.20909 62	1.28041 0	0.03578 28
782	611524	478211768	27.96426 29	9.21302 50	1.27877 2	0.03575 99
783	613089	480048687	27.98213 72	9.21695 05	1.27713 9	0.03573 71
784	614656	481890304	28.00000 00	9.22087 26	1.27551 0	0.03571 43
785	616225	483736625	28.01785 15	9.22479 14	1.27388 5	0.03569 15
786	617796	485587656	28.03569 15	9.22870 68	1.27226 5	0.03566 88
787	619369	487443403	28.05352 03	9.23261 89	1.27064 8	0.03564 62
788	620944	489303872	28.07133 77	9.23652 77	1.26903 6	0.03562 35
789	622521	491169069	28.08914 38	9.24043 33	1.26742 7	0.03560 09
790	624100	493039000	28.10693 86	9.24433 55	1.26582 3	0.03557 84
791	625681	494913671	28.12472 22	9.24823 44	1.26422 3	0.03555 59
792	627264	496793088	28.14249 46	9.25213 00	1.26262 6	0.03553 35
793	628849	498677257	28.16025 57	9.25602 24	1.26103 4	0.03551 10
794	630436	500566184	28.17800 56	9.25991 15	1.25944 6	0.03548 87
795	632025	502459875	28.19574 44	9.26379 73	1.25786 2	0.03546 63
796	633616	504358336	28.21347 20	9.26767 98	1.25628 1	0.03544 41
797	635209	506261573	28.23118 84	9.27155 92	1.25470 5	0.03542 18
798	636804	508169592	28.24889 38	9.27543 52	1.25313 3	0.03539 96
799	638401	510082399	28.26658 81	9.27930 81	1.25156 4	0.03537 75
800	640000	512000000	28.28427 12	9.28317 77	1.25000 0	0.03535 53

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
801	641601	513922401	28.30194 34	9.28704 40	1.24843 9	0.03533 33
802	643204	515849608	28.31960 45	9.29090 72	1.24688 3	0.03531 12
803	644809	517781627	28.33725 46	9.29476 72	1.24533 0	0.03528 92
804	646416	519718464	28.35489 38	9.29862 39	1.24378 1	0.03526 73
805	648025	521660125	28.37252 19	9.30247 75	1.24223 6	0.03524 54
806	649636	523606616	28.39013 91	9.30632 78	1.24069 5	0.03522 35
807	651249	525557943	28.40774 54	9.31017 50	1.23915 7	0.03520 17
808	652864	527514112	28.42534 08	9.31401 90	1.23762 4	0.03517 99
809	654481	529475129	28.44292 53	9.31785 98	1.23609 4	0.03515 81
810	656100	531441000	28.46049 89	9.32169 75	1.23456 8	0.03513 64
811	657721	533411731	28.47806 17	9.32553 20	1.23304 6	0.03511 47
812	659344	535387328	28.49561 37	9.32936 34	1.23152 7	0.03509 31
813	660969	537367797	28.51315 49	9.33319 16	1.23001 2	0.03507 15
814	662596	539353144	28.53068 52	9.33701 67	1.22850 1	0.03505 00
815	664225	541343375	28.54820 48	9.34083 86	1.22699 4	0.03502 85
816	665856	543338496	28.56571 37	9.34465 75	1.22549 0	0.03500 70
817	667489	545338513	28.58321 19	9.34847 32	1.22399 0	0.03498 56
818	669124	547343432	28.60069 93	9.35228 58	1.22249 4	0.03496 42
819	670761	549353259	28.61817 60	9.35609 52	1.22100 1	0.03494 28
820	672400	551368000	28.63564 21	9.35990 16	1.21951 2	0.03492 15
821	674041	553387661	28.65309 76	9.36370 49	1.21802 7	0.03490 02
822	675684	555412248	28.67054 24	9.36750 51	1.21654 5	0.03487 90
823	677329	557441767	28.68797 66	9.37130 22	1.21506 7	0.03485 78
824	678976	559476224	28.70540 02	9.37509 63	1.21359 2	0.03483 67
825	680625	561515625	28.72281 32	9.37888 73	1.21212 1	0.03481 56
826	682276	563559976	28.74021 57	9.38267 52	1.21065 4	0.03479 45
827	683929	565609283	28.75760 77	9.38646 01	1.20919 0	0.03477 34
828	685584	567663552	28.77498 91	9.39024 19	1.20772 9	0.03475 24
829	687241	569722789	28.79236 01	9.39402 06	1.20627 3	0.03473 14
830	688900	571787000	28.80972 06	9.39779 64	1.20481 9	0.03471 05
831	690561	573856191	28.82707 06	9.40156 91	1.20336 9	0.03468 96
832	692224	575930368	28.84441 02	9.40533 88	1.20192 3	0.03466 88
833	693889	578009537	28.86173 94	9.40910 54	1.20048 0	0.03464 79
834	695556	580093704	28.87905 82	9.41286 90	1.19904 1	0.03462 72
835	697225	582182875	28.89636 66	9.41662 97	1.19760 5	0.03460 64
836	698896	584277056	28.91366 46	9.42038 73	1.19617 2	0.03458 57
837	700569	586376253	28.93095 23	9.42414 20	1.19474 3	0.03456 51
838	702244	588480472	28.94822 97	9.42789 36	1.19331 7	0.03454 44
839	703921	590589719	28.96549 67	9.43164 23	1.19189 5	0.03452 38
840	705600	592704000	28.98275 35	9.43538 80	1.19047 6	0.03450 33

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
841	707281	594823321	29.00000 00	9.43913 07	1.18906 1	0.03448 28
842	708964	596947688	29.01723 65	9.44287 04	1.18764 8	0.03446 23
843	710649	599077107	29.03446 23	9.44660 72	1.18624 0	0.03444 18
844	712336	601211584	29.05167 81	9.45034 11	1.18483 4	0.03442 14
845	714025	603351125	29.06888 37	9.45407 19	1.18343 2	0.03440 10
846	715716	605495736	29.08607 91	9.45779 99	1.18203 3	0.03438 07
847	717409	607645423	29.10326 44	9.46152 49	1.18063 8	0.03436 04
848	719104	609800192	29.12043 96	9.46524 70	1.17924 5	0.03434 01
849	720801	611960049	29.13760 46	9.46896 61	1.17785 6	0.03431 99
850	722500	614125000	29.15475 95	9.47268 24	1.17647 1	0.03429 97
851	724201	616295051	29.17190 43	9.47639 57	1.17508 8	0.03427 96
852	725904	618470208	29.18903 90	9.48010 61	1.17370 9	0.03425 94
853	727609	620650477	29.20616 37	9.48381 36	1.17233 3	0.03423 93
854	729316	622835864	29.22327 84	9.48751 82	1.17096 0	0.03421 93
855	731025	625026375	29.24038 30	9.49122 00	1.16959 1	0.03419 93
856	732736	627222016	29.25747 77	9.49491 88	1.16822 4	0.03417 93
857	734449	629422793	29.27456 23	9.49861 48	1.16686 1	0.03415 93
858	736164	631628712	29.29163 70	9.50230 78	1.16550 1	0.03413 94
859	737881	633839779	29.30870 18	9.50599 81	1.16414 4	0.03411 96
860	739600	636056000	29.32575 66	9.50968 54	1.16279 1	0.03409 97
861	741321	638277381	29.34280 15	9.51336 99	1.16144 0	0.03407 99
862	743044	640503928	29.35983 65	9.51705 16	1.16009 3	0.03406 01
863	744769	642735647	29.37686 16	9.52073 04	1.15874 9	0.03404 04
864	746496	644972544	29.39387 69	9.52440 63	1.15740 7	0.03402 07
865	748225	647214625	29.41088 23	9.52807 94	1.15606 9	0.03400 10
866	749956	649461896	29.42787 79	9.53174 97	1.15473 4	0.03398 14
867	751689	651714363	29.44486 37	9.53541 72	1.15340 3	0.03396 18
868	753424	653972032	29.46183 97	9.53908 18	1.15207 4	0.03394 22
869	755161	656234909	29.47880 59	9.54274 37	1.15074 8	0.03392 27
870	756900	658503000	29.49576 24	9.54640 27	1.14942 5	0.03390 32
871	758641	660776311	29.51270 91	9.55005 89	1.14810 6	0.03388 37
872	760384	663054848	29.52964 61	9.55371 24	1.14678 9	0.03386 43
873	762129	665338617	29.54657 34	9.55736 30	1.14547 5	0.03384 49
874	763876	667627624	29.56349 10	9.56101 08	1.14416 5	0.03382 55
875	765625	669921875	29.58039 89	9.56465 59	1.14285 7	0.03380 62
876	767376	672221376	29.59729 72	9.56829 82	1.14155 3	0.03378 69
877	769129	674526133	29.61418 58	9.57193 77	1.14025 1	0.03376 76
878	770884	676836152	29.63106 48	9.57557 45	1.13895 2	0.03374 84
879	772641	679151439	29.64793 42	9.57920 85	1.13765 6	0.03372 92
880	774400	681472000	29.66479 39	9.58283 97	1.13636 4	0.03371 00

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
881	776161	683797841	29.68164 42	9.58646 82	1.13507 4	0.03369 09
882	777924	686128968	29.69848 48	9.59009 39	1.13378 7	0.03367 18
883	779689	688465387	29.71531 59	9.59371 70	1.13250 3	0.03365 27
884	781456	690807104	29.73213 75	9.59733 72	1.13122 2	0.03363 36
885	783225	693154125	29.74894 96	9.60095 48	1.12994 4	0.03361 46
886	784996	695506456	29.76575 21	9.60456 96	1.12866 8	0.03359 57
887	786769	697864103	29.78254 52	9.60818 17	1.12739 6	0.03357 67
888	788544	700227072	29.79932 89	9.61179 11	1.12612 6	0.03355 78
889	790321	702595369	29.81610 30	9.61539 77	1.12485 9	0.03353 89
890	792100	704969000	29.83286 78	9.61900 17	1.12359 6	0.03352 01
891	793881	707347971	29.84962 31	9.62260 30	1.12233 4	0.03350 13
892	795664	709732288	29.86636 90	9.62620 16	1.12107 6	0.03348 25
893	797449	712121957	29.88310 56	9.62979 75	1.11982 1	0.03346 37
894	799236	714516984	29.89983 28	9.63339 07	1.11856 8	0.03344 50
895	801025	716917375	29.91655 06	9.63698 12	1.11731 8	0.03342 63
896	802816	719323136	29.93325 91	9.64056 91	1.11607 1	0.03340 77
897	804609	721734273	29.94995 83	9.64415 42	1.11482 9	0.03338 90
898	806404	724150792	29.96664 81	9.64773 68	1.11358 6	0.03337 04
899	808201	726572699	29.98332 87	9.65131 66	1.11234 7	0.03335 19
900	810000	729000000	30.00000 00	9.65489 38	1.11111 1	0.03333 33
901	811801	731432701	30.01666 20	9.65846 84	1.10987 8	0.03331 48
902	813604	733870808	30.03331 48	9.66204 03	1.10864 7	0.03329 64
903	815409	736314327	30.04995 84	9.66560 96	1.10742 0	0.03327 79
904	817216	738763264	30.06659 28	9.66917 63	1.10619 5	0.03325 95
905	819025	741217625	30.08321 79	9.67274 03	1.10497 2	0.03324 11
906	820836	743677416	30.09983 39	9.67630 17	1.10375 3	0.03322 28
907	822649	746142643	30.11644 07	9.67986 04	1.10253 6	0.03320 45
908	824464	748613312	30.13303 83	9.68341 66	1.10132 2	0.03318 62
909	826281	751089429	30.14962 69	9.68697 01	1.10011 0	0.03316 79
910	828100	753571000	30.16620 63	9.69052 11	1.09890 1	0.03314 97
911	829921	756058031	30.18277 65	9.69406 94	1.09769 5	0.03313 15
912	831744	758550528	30.19933 77	9.69761 52	1.09649 1	0.03311 33
913	833569	761048497	30.21588 99	9.70115 83	1.09529 0	0.03309 52
914	835396	763551944	30.23243 29	9.70469 89	1.09409 2	0.03307 71
915	837225	766060875	30.24896 69	9.70823 69	1.09289 6	0.03305 90
916	839056	768575296	30.26549 19	9.71177 23	1.09170 3	0.03304 09
917	840889	771095213	30.28200 79	9.71530 51	1.09051 3	0.03302 29
918	842724	773620632	30.29851 48	9.71883 54	1.08932 5	0.03300 49
919	844561	776151559	30.31501 28	9.72236 31	1.08813 9	0.03298 70
920	846400	778688000	30.33150 18	9.72588 83	1.08695 7	0.03296 90

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
921	848241	781229961	30.34798 18	9.72941 09	1.08577 6	0.03295 11
922	850084	783777448	30.36445 29	9.73293 09	1.08459 9	0.03293 32
923	851929	786330467	30.38091 51	9.73644 84	1.08342 4	0.03291 54
924	853776	788889024	30.39736 83	9.73996 34	1.08225 1	0.03289 76
925	855625	791453125	30.41381 27	9.74347 58	1.08108 1	0.03287 98
926	857476	794022776	30.43024 81	9.74698 57	1.07991 4	0.03286 20
927	859329	796597983	30.44667 47	9.75049 31	1.07874 9	0.03284 43
928	861184	799178752	30.46309 24	9.75399 79	1.07758 6	0.03282 66
929	863041	801765089	30.47950 13	9.75750 03	1.07642 6	0.03280 89
930	864900	804357000	30.49590 14	9.76100 01	1.07526 9	0.03279 13
931	866761	806954491	30.51229 26	9.76449 74	1.07411 4	0.03277 37
932	868624	809557568	30.52867 50	9.76799 22	1.07296 1	0.03275 61
933	870489	812166237	30.54504 87	9.77148 45	1.07181 1	0.03273 85
934	872356	814780504	30.56141 36	9.77497 43	1.07066 4	0.03272 10
935	874225	817400375	30.57776 97	9.77846 17	1.06951 9	0.03270 35
936	876096	820025856	30.59411 71	9.78194 65	1.06837 6	0.03268 60
937	877969	822656953	30.61045 57	9.78542 89	1.06723 6	0.03266 86
938	879844	825293672	30.62678 57	9.78890 87	1.06609 8	0.03265 12
939	881721	827936019	30.64310 69	9.79238 61	1.06496 3	0.03263 38
940	883600	830584000	30.65941 94	9.79586 11	1.06383 0	0.03261 64
941	885481	833237621	30.67572 33	9.79933 36	1.06269 9	0.03259 91
942	887364	835896888	30.69201 85	9.80280 36	1.06157 1	0.03258 18
943	889249	838561807	30.70830 51	9.80627 11	1.06044 5	0.03256 45
944	891136	841232384	30.72458 30	9.80973 63	1.05932 2	0.03254 72
945	893025	843908625	30.74085 23	9.81319 89	1.05820 1	0.03253 00
946	894916	846590536	30.75711 30	9.81665 92	1.05708 2	0.03251 28
947	896809	849278123	30.77336 51	9.82011 69	1.05596 6	0.03249 56
948	898704	851971392	30.78960 86	9.82357 23	1.05485 2	0.03247 85
949	900601	854670349	30.80584 36	9.82702 52	1.05374 1	0.03246 14
950	902500	857375000	30.82207 00	9.83047 57	1.05263 2	0.03244 43
951	904401	860085351	30.83828 79	9.83392 38	1.05152 5	0.03242 72
952	906304	862801408	30.85449 72	9.83736 95	1.05042 0	0.03241 02
953	908209	865523177	30.87069 81	9.84081 27	1.04931 8	0.03239 32
954	910116	868250664	30.88689 04	9.84425 36	1.04821 8	0.03237 62
955	912025	870983875	30.90307 43	9.84769 20	1.04712 0	0.03235 92
956	913936	873722816	30.91924 97	9.85112 80	1.04602 5	0.03234 23
957	915849	876467493	30.93541 66	9.85456 17	1.04493 2	0.03232 54
958	917764	879217912	30.95157 51	9.85799 29	1.04384 1	0.03230 85
959	919681	881974079	30.96772 51	9.86142 18	1.04275 3	0.03229 17
960	921600	884736000	30.98386 68	9.86484 83	1.04166 7	0.03227 49

平方、立方、平方根、立方根与倒数表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
961	923521	887503681	31.00000 00	9.86827 24	1.04058 3	0.03225 81
962	925444	890277128	31.01612 48	9.87169 41	1.03950 1	0.03224 13
963	927369	893056347	31.03224 13	9.87511 35	1.03842 2	0.03222 45
964	929296	895841344	31.04834 94	9.87853 05	1.03734 4	0.03220 78
965	931225	898632125	31.06444 91	9.88194 51	1.03626 9	0.03219 11
966	933156	901428696	31.08054 05	9.88535 74	1.03519 7	0.03217 45
967	935089	904231063	31.09662 36	9.88876 73	1.03412 6	0.03215 78
968	937024	907039232	31.11269 84	9.89217 49	1.03305 8	0.03214 12
969	938961	909853209	31.12876 48	9.89558 01	1.03199 2	0.03212 46
970	940900	912673000	31.14482 30	9.89898 30	1.03092 8	0.03210 81
971	942841	915498611	31.16087 29	9.90238 36	1.02986 6	0.03209 15
972	944784	918330048	31.17691 45	9.90578 17	1.02880 7	0.03207 50
973	946729	921167317	31.19294 79	9.90917 76	1.02774 9	0.03205 85
974	948676	924010424	31.20897 31	9.91257 12	1.07669 4	0.03204 21
975	950625	926859375	31.22499 00	9.91596 24	1.02564 1	0.03202 56
976	952576	929714176	31.24099 87	9.91935 13	1.02459 0	0.03200 92
977	954529	932574833	31.25699 92	9.92273 79	1.02354 1	0.03199 28
978	956484	935441352	31.27299 15	9.92612 22	1.02249 5	0.03197 65
979	958441	938313739	31.28897 57	9.92950 42	1.02145 0	0.03196 01
980	960400	941192000	31.30495 17	9.93288 39	1.02040 8	0.03194 38
981	962361	944076141	31.32091 95	9.93626 13	1.01936 8	0.03192 75
982	964324	946966168	31.33687 92	9.93963 64	1.01833 0	0.03191 13
983	966289	949862087	31.35283 08	9.94300 92	1.01729 4	0.03189 50
984	968256	952763904	31.36877 43	9.94637 97	1.01626 0	0.03187 88
985	970225	955671625	31.38470 97	9.94974 79	1.01522 8	0.03186 26
986	972196	958585256	31.40063 69	9.95311 38	1.01419 9	0.03184 65
987	974169	961504803	31.41655 61	9.95647 75	1.01317 1	0.03183 04
988	976144	964430272	31.43246 73	9.95983 89	1.01214 6	0.03181 42
989	978121	967361669	31.44837 04	9.96319 81	1.01112 2	0.03179 82
990	980100	970299000	31.46426 54	9.96655 49	1.01010 1	0.03178 21
991	982081	973242271	31.48015 25	9.96990 95	1.00908 2	0.03176 60
992	984064	976191488	31.49603 15	9.97326 19	1.00806 5	0.03175 00
993	986049	979146657	31.51190 25	9.97661 20	1.00704 9	0.03173 40
994	988036	982107784	31.52776 55	9.97995 99	1.00603 6	0.03171 81
995	990025	985074875	31.54362 06	9.98330 55	1.00502 5	0.03170 21
996	992016	988047936	31.55946 77	9.98664 89	1.00401 6	0.03168 62
997	994009	991026973	31.57530 68	9.98999 00	1.00300 9	0.03167 03
998	996004	994011992	31.59113 80	9.99332 89	1.00200 4	0.03165 44
999	998001	997002999	31.60696 13	9.99666 56	1.00100 1	0.03163 86
1000	1000000	1000000000	31.62277 66	10.00000 00	1.00000 0	0.03162 28

8. 三角函数表

正弦函数表

sin θ

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
0°00′	0.00000	00029	00058	00087	00116	00145	00175	00204	00233	00262	50′
10′	00291	00320	00349	00378	00407	00436	00465	00495	00524	00553	40′
20′	00582	00611	00640	00669	00698	00727	00756	00785	00814	00844	30′
30′	00873	00902	00931	00960	00989	01018	01047	01076	01105	01134	20′
40′	01164	01193	01222	01251	01280	01309	01338	01367	01396	01425	10′
50′	01454	01483	01513	01542	01571	01600	01629	01658	01687	0.01716	89°00′
1°00′	0.01745	01774	01803	01832	01862	01891	01920	01949	01978	02007	50′
10′	02036	02065	02094	02123	02152	02181	02211	02240	02269	02298	40′
20′	02327	02356	02385	02414	02443	02472	02501	02530	02560	02589	30′
30′	02618	02647	02676	02705	02734	02763	02792	02821	02850	02879	20′
40′	02908	02938	02967	02996	03025	03054	03083	03112	03141	03170	10′
50′	03199	03228	03257	03286	03316	03345	03374	03403	03432	0.03461	88°00′
2°00′	0.03490	03519	03548	03577	03606	03635	03664	03693	03723	03752	50′
10′	03781	03810	03839	03868	03897	03926	03955	03984	04013	04042	40′
20′	04071	04100	04129	04159	04188	04217	04246	04275	04304	04333	30′
30′	04362	04391	04420	04449	04478	04507	04536	04565	04594	04623	20′
40′	04653	04682	04711	04740	04769	04798	04827	04856	04885	04914	10′
50′	04943	04972	05001	05030	05059	05088	05117	05146	05175	0.05205	87°00′
3°00′	0.05234	05263	05292	05321	05350	05379	05408	05437	05466	05495	50′
10′	05524	05553	05582	05611	05640	05669	05698	05727	05756	05785	40′
20′	05814	05844	05873	05902	05931	05960	05989	06018	06047	06076	30′
30′	06105	06134	06163	06192	06221	06250	06279	06308	06337	06366	20′
40′	06395	06424	06453	06482	06511	06540	06569	06598	06627	06656	10′
50′	06685	06714	06743	06773	06802	06831	06860	06889	06918	0.06947	86°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数表 cos φ

sin θ

正弦函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
4°00′	0.06976	07005	07034	07063	07092	07121	07150	07179	07208	07237	50′
10′	07266	07295	07324	07353	07382	07411	07440	07469	07498	07527	40′
20′	07556	07585	07614	07643	07672	07701	07730	07759	07788	07817	30′
30′	07846	07875	07904	07933	07962	07991	08020	08049	08078	08107	20′
40′	08136	08165	08194	08223	08252	08281	08310	08339	08368	08397	10′
50′	08426	08455	08484	08513	08542	08571	08600	08629	08658	0.08687	85°00′
5°00′	0.08716	08745	08774	08803	08831	08860	08889	08918	08947	08976	50′
10′	09005	09034	09063	09092	09121	09150	09179	09208	09237	09266	40′
20′	09295	09324	09353	09382	09411	09440	09469	09498	09527	09556	30′
30′	09585	09614	09642	09671	09700	09729	09758	09787	09816	09845	20′
40′	09874	09903	09932	09961	09990	10019	10048	10077	10106	10135	10′
50′	10164	10192	10221	10250	10279	10308	10337	10366	10395	0.10424	84°00′
6°00′	0.10453	10482	10511	10540	10569	10597	10626	10655	10684	10713	50′
10′	10742	10771	10800	10829	10858	10887	10916	10945	10973	11002	40′
20′	11031	11060	11089	11118	11147	11176	11205	11234	11263	11291	30′
20′	11320	11349	11378	11407	11436	11465	11494	11523	11552	11580	20′
40′	11609	11638	11667	11696	11725	11754	11783	11812	11840	11869	10′
50′	11898	11927	11956	11985	12014	12043	12071	12100	12129	0.12158	83°00′
7°00′	0.12187	12216	12245	12274	12302	12331	12360	12389	12418	12447	50′
10′	12476	12504	12533	12562	12591	12620	12649	12678	12706	12735	40′
20′	12764	12793	12822	12851	12880	12908	12937	12966	12995	13024	30′
30′	13053	13081	13110	13139	13168	13197	13226	13254	13283	13312	20′
40′	13341	13370	13399	13427	13456	13485	13514	13543	13572	13600	10′
50′	13629	13658	13687	13716	13744	13773	13802	13831	13860	0.13889	82°00′

8°00′	0.13917	13946	13975	14004	14033	14061	14090	14119	14148	14177	50′
10′	14205	14234	14263	14292	14320	14349	14378	14407	14436	14464	40′
20′	14493	14522	14551	14580	14608	14637	14666	14695	14723	14752	30′
30′	14781	14810	14838	14867	14896	14925	14954	14982	15011	15040	20′
40′	15069	15097	15126	15155	15184	15212	15241	15270	15299	15327	10′
50′	15356	15385	15414	15442	15471	15500	15529	15557	15586	0.15615	81°00′
9°00′	0.15643	15672	15701	15730	15758	15787	15816	15845	15873	15902	50′
10′	15931	15959	15938	16017	16046	16074	16103	16132	16160	16189	40′
20′	16218	16246	16275	16304	16333	16361	16390	16419	16447	16476	30′
30′	16505	16533	16502	16591	16620	16648	16677	16706	16734	16763	20′
40′	16792	16820	16849	16878	16906	16935	16964	16992	17021	17050	10′
50′	17078	17107	17136	17164	17193	17222	17250	17279	17308	0.17336	80°00′
10°00′	0.17365	17393	17422	17451	17479	17508	17537	17565	17594	17623	50′
10′	17651	17680	17708	17737	17766	17794	17823	17852	17880	17909	40′
20′	17937	17966	17095	18023	18052	18081	18109	18138	18166	18195	30′
30′	18224	18252	18281	18309	18338	18367	18395	18424	18452	18481	20′
40′	18509	18538	18567	18595	18624	18652	18681	18710	18738	18767	10′
50′	18795	18824	18852	18881	18910	18938	18967	18995	19024	0.19052	79°00′
11°00′	0.19081	19109	19138	19167	19195	19224	19252	19281	19309	19338	50′
10′	19366	19395	19423	19452	19481	19509	19538	19566	19595	19623	40′
20′	19652	19680	19709	19737	19766	19794	19823	19851	19880	19908	30′
30′	19937	19965	19994	20022	20051	20079	20108	20136	20165	20193	20′
40′	20222	20250	20279	20307	20336	20364	20393	20421	20450	20478	10′
50′	20507	20535	20563	20592	20620	20649	20677	20706	20734	0.20763	78°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数表 $\cos\varphi$

sin θ　　正弦函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
12°00′	0.20791	20820	20848	20877	20905	20933	20962	20990	21019	21047	50′
10′	21076	21104	21132	21161	21189	21218	21246	21275	21303	21331	40′
20′	21360	21388	21417	21445	21474	21502	21530	21559	21587	21616	30′
30′	21644	21672	21701	21729	21758	21786	21814	21843	21871	21899	20′
40′	21928	21956	21985	22013	22041	22070	22098	22126	22155	22183	10′
50′	22212	22240	22268	22297	22325	22353	22382	22410	22438	0.22467	77°00′
13°00′	0.22495	22523	22552	22580	22608	22637	22665	22693	22722	22750	50′
10′	22778	22807	22835	22863	22892	22920	22948	22977	23005	23033	40′
20′	23062	23090	23118	23146	23175	23203	23231	23260	23288	23316	30′
30′	23345	23373	23401	23429	23458	23486	23514	23542	23571	23599	20′
40′	23627	23656	23684	23712	23740	23769	23797	23825	23853	23882	10′
50′	23910	23938	23966	23995	24023	24051	24079	24108	24136	0.24164	76°00′
14°00′	0.24192	24220	24249	24277	24305	24333	24362	24390	24418	24446	50′
10′	24474	24503	24531	24559	24587	24615	24644	24672	24700	24728	40′
20′	24756	24784	24813	24841	24869	24897	24925	24954	24982	25010	30′
30′	25038	25066	25094	25122	25151	25179	25207	25235	25263	25291	20′
40′	25320	25348	25376	25404	25432	25460	25488	25516	25545	25573	10′
50′	25601	25629	25657	25685	25713	25741	25769	25798	25826	0.25854	75°00′
15°00′	0.25882	25910	25938	25966	25994	26022	26050	26079	26107	26135	50′
10′	26163	26191	26219	26247	26275	26303	26331	26359	26387	26415	40′
20′	26443	26471	26500	26528	26556	26584	26612	26640	26668	26696	30′
30′	26724	26752	26780	26808	26836	26864	26892	26920	26948	26976	20′
40′	27004	27032	27060	27088	27116	27144	27172	27200	27228	27256	10′
50′	27284	27312	27340	27368	27396	27424	27452	27480	27508	0.27536	74°00′

16°00′	0.27564	27592	27620	27648	27676	27704	27731	27759	27787	27815	50′
10′	27843	27871	27899	27927	27955	27983	28011	28039	28067	28095	40′
20′	28123	28150	28178	28206	28234	28262	28290	28318	28346	28374	30′
30′	28402	28429	28457	28485	28513	28541	28569	28597	28625	28652	20′
40′	28680	28708	28736	28764	28792	28820	28847	28875	28903	28931	10′
50′	28959	28987	29015	29042	29070	29098	29126	29154	29182	0.29209	73°00′
17°00′	0.29237	29265	29293	29321	29348	29376	29404	29432	29460	29487	50′
10′	29515	29543	29571	29599	29626	29654	29682	29710	29737	29765	40′
20′	29793	29821	29849	29876	29904	29932	29960	29957	30015	30043	30′
30′	30071	30098	30126	30154	30182	30209	20237	30265	30292	30320	20′
40′	30348	30376	30403	30431	30459	30486	30514	30542	30570	30597	10′
50′	30625	30653	30680	30708	30736	30763	30791	30819	30846	0.30874	72°00′
18°00′	0.30902	30929	30957	30985	31012	31040	31068	31095	31123	31151	50′
10′	31178	31206	31233	31261	31289	31316	31344	31372	31399	31427	40′
20′	31454	31482	31510	31537	31565	31593	31620	31648	31675	31703	30′
30′	31730	31758	31786	31813	31841	31868	31896	31923	31951	31979	20′
40′	32006	32034	32061	32089	32116	32144	32171	32199	32227	32254	10′
50′	32282	32309	32337	32364	32392	32419	32447	32474	32502	0.32529	71°00′
19°00′	0.32557	32584	32612	32639	32667	32694	32722	32749	32777	32804	50′
10′	32832	32859	32887	32914	32942	32969	32997	33024	33051	33079	40′
20′	33106	33134	33161	33189	33216	33244	33271	33298	33326	33353	30
30′	33381	33408	33436	33463	33490	33518	33545	33573	33600	33627	20′
40′	33655	33682	33710	33737	33764	33792	33819	33846	33874	33901	10′
50′	33929	33956	33983	34011	34038	34065	34093	34120	34147	0.34175	70°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函數表 cos φ

$\sin\theta$

正弦函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
20°00′	0.34202	34229	34257	34284	34311	34339	34366	34393	34421	34448	50′
10′	34475	34503	34530	34557	34584	34612	34639	34666	34694	34721	40′
20′	34748	34775	34803	34830	34857	34884	34912	34939	34966	34993	30′
30′	35021	35048	35075	35102	35130	35157	35184	35211	35239	35266	20′
40′	35293	35320	35347	35375	35402	35429	35456	35484	35511	35538	10′
50′	35565	35592	35619	35647	35674	35701	35728	35755	35782	0.35810	69°00′
21°00′	0.35837	35864	35891	35918	35945	35973	36000	36027	36054	36081	50′
10′	36108	36135	36162	36190	36217	36244	36271	36298	36325	36352	40′
20′	36379	36406	36434	36461	36488	36515	36542	36569	36596	36623	30′
30′	36650	36677	36704	36731	36758	36785	36812	36839	36867	36894	20′
40′	36921	36948	36975	37002	37029	37056	37083	37110	37137	37164	10′
50′	37191	37218	37245	37272	37299	37326	37353	37380	37407	0.37434	68°00′
22°00′	0.37461	37488	37515	37542	37569	37595	37622	37649	37676	37703	50′
10′	37730	37757	37784	37811	37838	37865	37892	37919	37946	27973	40′
20′	37999	38026	38053	38080	38107	38134	38161	38188	38215	38241	30′
30′	38268	38295	38322	38349	38376	38403	38430	38456	38483	38510	20′
40′	38537	38564	38591	38617	38644	38671	38698	38725	38752	38778	10′
50′	38805	38832	38859	38886	38912	38939	38966	38993	39020	0.39046	67°00′
23°00′	0.39073	39100	39127	39153	39180	39207	39234	39260	39287	39314	50′
10′	39341	39367	39394	39421	39448	39474	39501	39528	39555	39581	40′
20′	39608	39635	39661	39688	39715	39741	39768	39795	39822	39848	20′
30′	39875	39902	39928	39955	39982	40008	40035	40062	40088	40115	20′
40′	40141	40168	40195	40221	40248	40275	40301	40328	40355	40381	10′
50′	40408	40434	40461	40488	40514	40541	40567	40594	40621	0.40647	66°00′

24°00′	0.40674	40700	40727	40753	40780	40806	40833	40860	40886	40913	50′
10′	40939	40966	40992	41019	41045	41072	41098	41125	41151	41178	40′
20′	41204	41231	41257	41284	41310	41337	41363	41390	41416	41443	30′
30′	41469	41496	41522	41549	41575	41602	41628	41655	41681	41707	20′
40′	41734	41760	41787	41813	41840	41866	41892	41919	41945	41972	10′
50′	41998	42024	42051	42077	42104	42130	42156	42183	42209	0.42235	65°00′
25°00′	0.42262	42288	42315	42341	42367	42394	42420	42446	42473	42499	50′
10′	42525	42552	42578	42604	42631	42657	42683	42709	42736	42762	40′
20′	42788	42815	42841	42867	42894	42920	42946	42972	42999	43025	30′
30′	43051	43077	43104	43130	43156	43182	43209	43235	43261	43287	20′
40′	43313	43340	43366	43392	43418	43445	43471	43497	43523	43549	10′
50′	43575	43602	43628	43654	43680	43706	43733	43759	43785	0.43811	64°00′
26°00′	0.43837	43863	43889	43916	43942	43968	43994	44020	44046	44072	50′
10′	44098	44124	44151	44177	44203	44229	44255	44281	44307	44333	40′
20′	44359	44385	44411	44437	44464	44490	44516	44542	44568	44594	30′
30′	44620	44646	44672	44698	44724	44750	44776	44802	44828	44854	20′
40′	44880	44906	44932	44958	44984	45010	45036	45062	45088	45114	10′
50′	45140	45166	45192	45218	45243	45269	45295	45321	45347	0.45373	63°00′
27°00′	0.45399	45425	45451	45477	45503	45529	45554	45580	45606	45632	50′
10′	45658	45684	45710	45736	45762	45787	45813	45839	45865	45891	40′
20′	45917	45942	45968	45994	46020	46046	46072	46097	46123	46149	30′
30′	46175	46201	46226	46252	46278	46304	46330	46355	46381	46407	20′
40′	46433	46458	46484	46510	46536	46561	46587	46613	46639	46664	10′
50′	46690	46716	46742	46767	46793	46819	46844	46870	46896	0.46921	62°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数表 $\cos\varphi$

sin θ

正弦函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
28°00′	0.46947	46973	46999	47024	47050	47076	47101	47127	47153	47178	50′
10′	47204	47229	47255	47281	47306	47332	47358	47383	47409	47434	40′
20′	47460	47485	47511	47537	47562	47588	47614	47639	47665	47690	30′
30′	47716	47741	47767	47793	47818	47844	47869	47895	47920	47946	20′
40′	47971	47997	48022	48048	48073	48099	48124	48150	48175	48201	10′
50′	48226	48252	48277	48303	48328	48354	48379	48405	48430	0.48456	61°00′
29°00′	0.48481	48506	48532	48557	48583	48608	48634	48659	48684	48710	50′
10′	48735	48761	48786	48811	48837	48862	48888	48913	48938	48964	40′
20′	48989	49014	49040	49065	49090	49116	49141	49166	49192	49217	30′
30′	49242	49268	49293	49318	49344	49369	49394	49419	49445	49470	20′
40′	49495	49521	49546	49571	49596	49622	49647	49672	49697	49723	10′
50′	49748	49773	49798	49824	49849	49874	49899	49924	49950	0.49975	60°00′
30°00′	0.50000	50025	50050	50076	50101	50126	50151	50176	50201	50227	50′
10′	50252	50277	50302	50327	50352	50377	50403	50428	50453	50478	40′
20′	50503	50528	50553	50578	50603	50628	50654	50679	50704	50729	30′
30′	50754	50779	50804	50829	50854	50879	50904	50929	50954	50979	20′
40′	51004	51029	51054	51079	51104	51129	51154	51179	51204	51229	10′
50′	51254	51279	51304	51329	51354	51379	51404	51429	51454	0.51479	59°00′
31°00′	0.51504	51529	51554	51579	51604	51628	51653	51678	51703	51728	50′
10′	51753	51778	51803	51828	51852	51877	51902	51927	51952	51977	40′
20′	52002	52026	52051	52076	52101	52126	52151	52175	52200	52225	30′
30′	52250	52275	52299	52324	52349	52374	52399	52423	52448	52473	20′
40′	52498	52522	52547	52572	52597	52621	52646	52671	52696	52720	10′
50′	52745	52770	52794	52819	52844	52869	52893	52918	52943	0.52967	58°00′

32°00′	0.52992	53017	53041	53066	53091	53115	53140	53164	53189	53214	50′
10′	53238	53263	53288	53312	53337	53361	53386	53411	53435	53460	40′
20′	53484	53509	53534	53558	53583	53607	53632	53656	53681	53705	30′
30′	53730	53754	53779	53804	53828	53853	53877	53902	53926	53951	20′
40′	53975	54000	54024	54049	54073	54097	54122	54146	54171	54195	10′
50′	54220	54244	54269	54293	54317	54342	54366	54391	54415	0.54440	57°00′
33°00′	0.54464	54488	54513	54537	54561	54586	54610	54635	54659	54683	50′
10′	54708	54732	54756	54781	54805	54829	54854	54878	54902	54927	40′
20′	54951	54975	54999	55024	55048	55072	55097	55121	55145	55169	30′
30′	55194	55218	55242	55266	55291	55315	55339	55363	55388	55412	20′
40′	55436	55460	55484	55509	55533	55557	55581	55605	55630	55654	10′
50′	55678	55702	55726	55750	55775	55799	55823	55847	55871	0.55895	56°00′
34°00′	0.55919	55943	55968	55992	56016	56040	56064	56088	56112	56136	50′
10′	56160	56184	56208	56232	56256	56280	56305	56329	56353	56377	40′
20′	56401	56425	56449	56473	56497	56521	56545	56569	56593	56617	30′
30′	56641	56665	56689	56713	56736	56760	56784	56808	56832	56856	20′
40′	56880	56904	56928	56952	56976	57000	57024	57047	57071	57095	10′
50′	57119	57143	57167	57191	57215	57238	57262	57286	57310	0.57334	55°00′
35°00′	0.57358	57381	57405	57429	57453	57477	57501	57524	57548	57572	50′
10′	57596	57619	57643	57667	57691	57715	57738	57762	57786	57810	40′
20′	57833	57857	57881	57904	57928	57952	57976	57999	58023	58047	30′
30′	58070	58094	58118	58141	58165	58189	58212	58236	58260	58283	20′
40′	58307	58330	58354	58378	58401	58425	58449	58472	58496	58519	10′
50′	58543	58567	58590	58614	58637	58661	58684	58708	58731	0.58755	54°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数表 $\cos\varphi$

sin θ

正弦函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
36°00′	0.58779	58802	58826	58849	58873	58896	58920	58943	58967	58990	50′
10′	59014	59037	59061	59084	59108	59131	59154	59178	59201	59225	40′
20′	59248	59272	59295	59318	59342	59365	59389	59412	59436	59459	30′
30′	59482	59506	59529	59552	59576	59599	59622	59646	59669	59693	20′
40′	59716	59739	59763	59786	59809	59832	59856	59879	59902	59926	10′
50′	59949	59972	59995	60019	60042	60065	60089	60112	60135	0.60158	53°00′
37°00′	0.60182	60205	60228	60251	60274	60298	60321	60344	60367	60390	50′
10′	60414	60437	60460	60483	60506	60529	60553	60576	60599	60622	40′
20′	60645	60668	60691	60714	60738	60761	60784	60807	60830	60853	30′
30′	60876	60899	60922	60945	60968	60991	61015	61038	61061	61084	20′
40′	61107	61130	61153	61176	61199	61222	61245	61268	61291	61314	10′
50′	61337	61360	61383	61406	61429	61451	61474	61497	61520	0.61543	52°00′
38°00′	0.61566	61589	61612	61635	61658	61681	61704	61726	61749	61772	50′
10′	61795	61818	61841	61864	61887	61909	61932	61955	61978	62001	40′
20′	62024	62046	62069	62092	62115	62138	62160	62183	62206	62229	30′
30′	62251	62274	62297	62320	62342	62365	62388	62411	62433	62456	20′
40′	62479	62502	62524	62547	62570	62592	62615	62638	62660	62683	10′
50′	62706	62728	62751	62774	62796	62819	62842	62864	62887	0.62909	51°00′
39°00′	0.62932	62955	62977	63000	63022	63045	63068	63090	63113	63135	50′
10′	63158	63180	63203	63225	63248	63271	63293	63316	63338	63361	40′
20′	63383	63406	63428	63451	63473	63496	63518	63540	63563	63585	30′
30′	63608	63630	63653	63675	63698	63720	63742	63765	63787	63810	20′
40′	63832	63854	63877	63899	63922	63944	63966	63989	64011	64033	10′
50′	64056	64078	64100	64123	64145	64167	64190	64212	64234	0.64256	50°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	
40°00′	0.64279	64301	64323	64346	64368	64390	64412	64435	64457	64479	50′
10′	64501	64524	64546	64568	64590	64612	64635	64657	64679	64701	40′
20′	64723	64746	64768	64790	64812	64834	64856	64878	64901	64923	30′
30′	64945	64967	64989	65011	65033	65055	65077	65100	65122	65144	20′
40′	65166	65188	65210	65232	65254	65276	65298	65320	65342	65364	10′
50′	65386	65408	65430	65452	65474	65496	65518	65540	65562	0.65584	49°00′
41°00′	0.65606	65628	65650	65672	65694	65716	65738	65759	65781	65803	50′
10′	65825	65847	65869	65891	65913	65935	65956	65978	66000	66022	40′
20′	66044	66066	66088	66109	66131	66153	66175	66197	66218	66240	30′
30′	66262	66284	66306	66327	66349	66371	66393	66414	66436	66458	20′
40′	66480	66501	66523	66545	66566	66588	66610	66632	66653	66675	10′
50′	66697	66718	66740	66762	66783	66805	66827	66848	66870	0.66891	48°00′
42°00′	0.66913	66935	66956	66978	66999	67021	67043	67064	67086	67107	50′
10′	67129	67151	67172	67194	67215	67237	67258	67280	67301	67323	40′
20′	67344	67366	67387	67409	67430	67452	67473	67495	67516	67538	30′
30′	67559	67580	67602	67623	67645	67666	67688	67709	67730	67752	20′
40′	67773	67795	67816	67837	67859	67880	67901	67923	67944	67965	10′
50′	67987	68008	68029	68051	68072	68093	68115	68136	68157	0.68179	47°00′
43°00′	0.68200	68221	68242	68264	68285	68306	68327	68349	68370	68391	50′
10′	68412	68434	68455	68476	68497	68518	68539	68561	68582	68603	40′
20′	68624	68645	68666	68688	68709	68730	68751	68772	68793	68814	30′
30′	68835	68857	68878	68899	68920	68941	68962	68983	69004	69025	20′
40′	69046	69067	69088	69109	69130	69151	69172	69193	69214	69235	10′
50′	69256	69277	69298	69319	69340	69361	69382	69403	69424	0.69445	46°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数表 $\cos\varphi$

sin θ

正弦函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
44°00′	0.69466	69487	69508	69529	69549	69570	69591	69612	69633	69654	50′
10′	69675	69696	69717	69737	69758	69779	69800	69821	69842	69862	40′
20′	69883	69904	69925	69946	69966	69987	70008	70029	70049	70070	30′
30′	70091	70112	70132	70153	70174	70195	70215	70236	70257	70277	20′
40′	70298	70319	70339	70360	70381	70401	70422	70443	70463	70484	10′
50′	70505	70525	70546	70567	70587	70608	70628	70649	70670	0.70690	45°00′
45°00′	0.70711	70731	70752	70772	70793	70813	70834	70855	70875	70896	50′
10′	70916	70937	70957	70978	70998	71019	71039	71059	71080	71100	40′
20′	71121	71141	71162	71182	71203	71223	71243	71264	71284	71305	30′
30′	71325	71345	71366	71386	71407	71427	71447	71468	71488	71508	20′
40′	71529	71549	71569	71590	71610	71630	71650	71671	71691	71711	10′
50′	71732	71752	71772	71792	71813	71833	71853	71873	71894	0.71914	44°00′
46°00′	0.71934	71954	71974	71995	72015	72035	72055	72075	72095	72116	50′
10′	72136	72156	72176	72196	72216	72236	72257	72277	72297	72317	40′
20′	72337	72357	72377	72397	72417	72437	72457	72477	72497	72517	30′
30′	72537	72557	72577	72597	72617	72637	72657	72677	72697	72717	20′
40′	72737	72757	72777	72797	72817	72837	72857	72877	72897	72917	10′
50′	72937	72957	72976	72996	73016	73036	73056	73076	73096	0.73116	48°00′
47°00′	0.73135	73155	73175	73195	73215	73234	73254	73274	73294	73314	50′
10′	73333	73353	73373	73393	73413	73432	73452	73472	73491	73511	40′
20′	73531	73551	73570	73590	73610	73629	73649	73669	73688	73708	30′
30′	73728	73747	73767	73787	73806	73826	73846	73865	73885	73904	20′
40′	73924	73944	73963	73983	74002	74022	74041	74061	74080	74100	10′
50′	74120	74139	74159	74178	74198	74217	74237	74256	74276	0.74295	42°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
48°00′	0.74314	74334	74353	74373	74392	74412	74431	74451	74470	74489	50′
10′	74509	74528	74548	74567	74586	74606	74625	74644	74664	74683	40′
20′	74703	74722	74741	74760	74780	74799	74818	74838	74857	74876	30′
30′	74896	74915	74934	74953	74973	74992	75011	75030	75050	75069	20′
40′	75088	75107	75126	75146	75165	75184	75203	75222	75241	75261	10′
50′	75280	75299	75318	75337	75356	75375	75395	75414	75433	0.75452	41°00′
49°00′	0.75471	75490	75509	75528	75547	75566	75585	75604	75623	75642	50′
10′	75661	75680	75700	75719	75738	75756	75775	75794	75813	75832	40′
20′	75851	75870	75889	75908	75927	75946	75965	75984	76003	76002	30′
30′	76041	76059	76078	76097	76116	76135	76154	76173	76192	76210	20′
40′	76229	76248	76267	76286	76304	76323	76342	76361	76380	76398	10′
50′	76417	76436	76455	76473	76492	76511	76530	76548	76567	0.76586	40°00′
50°00′	0.76604	76623	76642	76661	76679	76698	76717	76735	76754	76772	50′
10′	76791	76810	76828	76847	76866	76884	76903	76921	76940	76959	40′
20′	76977	76966	77014	77033	77051	77070	77088	77107	77125	77144	30′
30′	77162	77181	77199	77218	77236	77255	77273	77292	77310	77329	20′
40′	77347	77366	77384	77402	77421	77439	77458	77476	77494	77513	10′
50′	77531	77550	77568	77386	77605	77623	77641	77660	77678	0.77696	39°00′
51°00′	0.77715	77733	77751	77769	77788	77806	77824	77843	77861	77879	50′
10′	77897	77916	77934	77952	77970	77988	78007	78025	78043	78061	40′
20′	78079	78098	78116	78134	78152	78170	78188	78206	78225	78243	30′
30′	78261	78279	78297	78315	78333	78351	78369	78387	78405	78424	20′
40′	78442	78460	78478	78496	78514	78532	78550	78568	78586	78604	10′
50′	78622	78640	78658	78676	78694	78711	78729	78747	78765	0.78783	38°00′

余弦函数表 cos φ

sin θ

正弦函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
52°00′	0.78801	78819	78837	78855	78873	78891	78908	78926	78944	78962	50′
10′	78980	78998	79016	79033	79051	79069	79087	79105	79122	79140	40′
20′	79158	79176	79193	79211	79229	79247	79264	79282	79300	79318	30′
30′	79335	79353	79371	79388	79406	79424	79441	79459	79477	79474	20′
40′	79512	79530	79547	79565	79583	79600	79618	79636	79653	79671	10′
50′	79688	79706	79723	79741	79758	79776	79793	79811	79829	0.79846	37°00′
53°00′	0.79864	79881	79899	79916	79934	79951	79968	79986	80003	80021	50′
10′	80038	80056	80073	80091	80108	80125	80143	80160	80178	80195	40′
20′	80212	80230	80247	80264	80282	80299	80316	80334	80351	80368	30′
30′	80386	80403	80420	80438	80455	80472	80489	80507	80524	80541	20′
40′	80558	80576	80593	80610	80627	80644	80662	80679	80696	80713	10′
50′	80730	80748	80765	80782	80799	80816	80833	80850	80867	0.80885	36°00′
54°00′	0.80902	80919	80936	80953	80970	80987	81004	81021	81038	81055	50′
10′	81072	81089	81106	81123	81140	81157	81174	81191	81208	81225	40′
20′	81242	81259	81276	81293	81310	81327	81344	81361	81378	81395	30′
30′	81412	81428	81445	81462	81479	81496	81513	81530	81546	81563	20′
40′	81580	81597	81614	81631	81647	81664	81681	81698	81714	81731	10′
50′	81748	81765	81782	81798	81815	81832	81848	81865	81882	0.81899	35°00′
55°00′	0.81915	81932	81949	81965	81982	81999	82015	82032	82048	82065	50′
10′	82082	82098	82115	82132	82148	82165	82181	82198	82214	82231	40′
20′	82248	82264	82281	82297	82314	82330	82347	82363	82380	82396	30′
30′	82413	82429	82446	82462	82478	82495	82511	82526	82544	82561	20′
40′	82577	82593	82610	82626	82643	82659	82675	82692	82708	82724	10′
50′	82741	82757	82773	82790	82806	82822	82839	82855	82871	0.82887	34°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
56°00′	0.82904	82920	82936	82953	82969	82985	83001	83017	83034	83050	50′
10′	83066	83082	83098	83115	83131	83147	83163	83179	83195	83212	40′
20′	83228	83244	83260	83276	83292	83308	83324	83340	83356	83373	30′
30′	83389	83405	83421	83437	83453	83469	83485	83501	83517	83533	20′
40′	83549	83565	83581	83597	83613	83629	83645	83660	83676	83692	10′
50′	83708	83724	83740	83756	83772	83788	83804	83819	83835	0.83851	33°00′
57°00′	0.83867	83883	83899	83915	83930	83946	83962	83978	83994	84009	50′
10′	84025	84041	84057	84072	84088	84104	84120	84135	84151	84167	40′
20′	84182	84198	84214	84230	84245	84261	84277	84292	84308	84624	30′
30′	84339	84355	84370	84386	84402	84417	84433	84448	84464	84480	20′
40′	84495	84511	84526	84542	84557	84573	84588	84604	84619	84635	10′
50′	84650	84666	84681	84697	84712	84728	84743	84759	84774	0.84789	32°00′
58°00′	0.84805	84820	84836	84851	84866	84882	84897	84913	84928	84943	50′
10′	84959	84974	84989	85005	85020	85035	85051	85066	85081	85096	40′
20′	85112	85127	85142	85157	85173	85188	85203	85218	85234	85249	30′
30′	85264	85279	85294	85310	85325	85340	85355	85370	85385	85401	20′
40′	85416	85431	85446	85461	85476	85491	85506	85521	85536	85551	10′
50′	85567	85582	85597	85612	85627	85642	85657	85672	85687	0.85702	31°00′
59°00′	0.85717	85732	85747	85762	85777	85792	85806	85821	85836	85851	50′
10′	85866	85881	85896	85911	85926	85941	85956	85970	85985	86000	40′
20′	86015	86030	86045	86059	86074	86089	86104	86119	86133	86148	30′
30′	86163	86178	86192	86207	86222	86237	86251	86266	86281	86295	20′
40′	86310	86325	86340	86354	86369	86384	86398	86413	86427	86442	10′
50′	86457	86471	86486	86501	86515	86530	86544	86559	86573	0.86588	30°00′

余弦函数表 $\cos\varphi$

sin θ

正弦函數表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
60°00′	0.86603	86617	86632	86646	86661	86675	86690	86704	86719	86733	50′
10′	86748	86762	86777	86791	86805	86820	86834	86849	86863	86878	40′
20′	86892	86906	86921	86935	86949	86964	86978	86993	87007	87021	30′
30′	87036	87050	87064	87079	87093	87107	87121	87136	87150	87164	20′
40′	87178	87193	87207	87221	87235	87250	87264	87278	87292	87306	10′
50′	87321	87335	87349	87363	87377	87391	87406	87420	87434	0.87448	29°00′
61°00′	0.87462	87476	87490	87504	87518	87532	87546	87561	87575	87589	50′
10′	87603	87617	87631	87645	87659	87673	87687	87701	87715	87729	40′
20′	87743	87756	87770	87784	87798	87812	87826	87840	87854	87868	30′
30′	87882	87896	87909	87923	87937	87951	87965	87979	87993	88006	20′
40′	88020	88034	88048	88062	88075	88089	88103	88117	88130	88144	10′
50′	88158	88172	88185	88199	88213	88226	88240	88254	88267	0.88281	28°00′
62°00′	0.88295	88308	88322	88336	88349	88363	88377	88390	88404	88417	50′
10′	88431	88445	88458	88472	88485	88499	88512	88526	88539	88553	40′
20′	88566	88580	88593	88607	88620	88634	88647	88661	88674	88688	30′
30′	88701	88715	88728	88741	88755	88768	88782	88795	88808	88822	20′
40′	88835	88848	88862	88875	88888	88902	88915	88928	88942	88955	10′
50′	88968	88981	88995	89008	89021	89035	89048	89061	89074	0.89087	27°00′
63°00′	0.89101	89114	89127	89140	89153	89167	89180	89193	89206	89219	50′
10′	89232	89245	89259	89272	89285	89298	89311	89324	89337	89350	40′
20′	89363	89376	89389	89402	89415	89428	89441	89454	89467	89480	30′
30′	89493	89506	89519	89532	89545	89558	89571	89584	89597	89610	20′
40′	89623	89636	89649	89662	89674	89687	89700	89713	89726	89739	10′
50′	89752	89764	89777	89700	89803	89816	89828	89841	89854	0.89867	26°00′

64°00′	0.89879	89892	89905	89918	89930	89943	89956	89968	89981	89994	50′
10′	90007	90019	90032	90045	90057	90070	90082	90095	90108	90120	40′
20′	90133	90146	90158	90171	90183	90196	90208	90221	90233	90246	30′
30′	90259	90271	90284	90296	90309	90321	90334	90346	90358	90371	20′
40′	90383	90396	90408	90421	90433	90446	90458	90470	90483	90495	10′
50′	90507	90520	90532	90545	90557	90569	90582	90594	90606	0.90618	25°00′
65°00′	0.90631	90643	90655	90668	90680	90692	90704	90717	90729	90741	50′
10′	90753	90766	90778	90790	90802	90814	90826	90839	90851	90863	40′
20′	90875	90887	90899	90911	90924	90936	90948	90960	90972	90984	30′
30′	90996	91008	91020	91032	91044	91056	91068	91080	91092	91104	20′
40′	91116	91128	91140	91152	91164	91176	91188	91200	91212	91224	10′
50′	91236	91248	91260	91272	91283	91295	91307	91319	91331	0.91343	24°00′
66°00′	0.91355	91366	91378	91390	91402	91414	91425	91437	91449	91461	50′
10′	91472	91484	91496	91508	91519	91531	91543	91555	91566	91578	40′
20′	91590	91601	91613	91625	91636	91648	91660	91671	91683	91694	30′
30′	91706	91718	91729	91741	91752	91764	91775	91787	91799	91810	20′
40′	91822	91833	91845	91856	91868	91879	91891	91902	91914	91925	10′
50′	91936	91948	91959	91971	91982	91994	92005	92016	92028	0.92039	23°00′
67°00′	0.92050	92062	92073	92085	92096	92107	92119	92130	92141	92152	50′
10′	92164	92175	92186	92198	92209	92220	92231	92243	92254	92265	40′
20′	92276	92287	92299	92310	92321	92332	92343	92355	92366	92377	30′
30′	92388	92399	92410	92421	92432	92444	92455	92466	92477	92488	20′
40′	92499	92510	92521	92532	92543	92554	92565	92576	92587	92598	10′
50′	92609	92620	92631	92642	92653	92664	92675	92686	92697	0.92707	23°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数表 $\cos\varphi$

sin θ

正弦函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
68°00′	0.92718	92729	92740	92751	92762	92773	92784	92794	92805	92816	50′
10′	92827	92838	92849	92859	92870	92881	92892	92902	92913	92924	40′
20′	92935	92945	92958	92967	92978	92988	92999	93010	93020	93031	30′
30′	93042	93052	93063	93074	93084	93095	93106	93116	93127	93137	20′
40′	93148	93159	93169	93180	93190	93201	93211	93222	93232	93243	10′
50′	93253	93264	93274	93285	93295	93306	93316	93327	93337	0.93348	21°00′
69°00′	0.93358	93368	93379	93389	93400	93410	93420	93431	93441	93452	50′
10′	93462	93472	93483	93493	93503	93514	93524	93534	93544	93555	40′
20′	93565	93575	93585	93596	93606	93616	93626	93637	93647	93657	30′
30′	93667	93677	93688	93698	93708	93718	93728	93738	93748	93759	20′
40′	93769	93779	93789	93799	93809	93819	93829	93839	93849	93859	10′
50′	93869	93879	93889	93899	93909	93919	93929	93939	93949	0.93959	20°00′
70°00′	0.93969	93979	93989	93999	94009	94019	94029	94039	94049	94058	50′
10′	94068	94078	94088	94098	94108	94118	94127	94137	94147	94157	40′
20′	94167	94176	94186	94196	94206	94215	94225	94235	94245	94254	30′
30′	94264	94274	94284	94293	94303	94313	94322	94332	94342	94351	20′
40′	94361	94370	94380	94390	94399	94409	94418	94428	94438	94447	10′
50′	94457	94466	94476	94485	94495	94504	94514	94523	94533	0.94542	19°00′
71°00′	0.94552	94561	94571	94580	94590	94599	94609	94618	94627	94637	50′
10′	94646	94656	94665	94674	94684	94693	94702	94712	94721	94730	40′
20′	94740	94749	94758	94768	94777	94786	94795	94805	94814	94823	30′
30′	94832	94842	94851	94860	94869	94878	94888	94897	94905	94915	20′
40′	94924	94933	94943	94952	94961	94970	94979	94988	94997	95006	10′
50′	95015	95024	95033	95043	95052	95061	95070	95079	95088	0.95097	18°00′

72°00′	0.95106	95115	95124	95133	95142	95150	95159	95168	95177	95186	50′
10′	95195	95204	95213	95222	95231	95240	95248	95257	95266	95275	40′
20′	95284	95293	95301	95310	95319	95328	95337	95345	95354	95363	30′
30′	95372	95380	95389	95398	95407	95415	95424	95433	95441	95450	20′
40′	95459	95467	95476	95485	95493	95502	95511	95519	95528	95536	10′
50′	95545	95554	95562	95571	95579	95588	95596	95605	95613	0.95622	17°00′
73°00′	0.95630	95639	95647	95656	95664	95673	95681	95690	95698	95707	50′
10′	95715	95724	95732	95740	95749	95757	95766	95774	95782	95791	40′
20′	95799	95807	95816	95824	95832	95841	95849	95857	95865	95874	30′
30′	95882	95890	95898	95907	95915	95923	95931	95940	95948	95956	20′
40′	95964	95972	95981	95989	95997	96005	96013	96021	96029	96037	10′
50′	96046	96054	96062	96070	96078	96086	96094	96102	96110	0.96118	16°00′
74°00′	0.96126	96134	96142	96150	96158	96166	96174	96182	96190	96198	50′
10′	96206	96214	96222	96230	96238	96246	96253	96261	96269	96277	40′
20′	96285	96293	96301	96308	96316	96324	96332	96340	96347	96355	30′
30′	96363	96371	96379	96386	96394	96402	96410	96417	96425	96433	20′
40′	96440	96448	96456	96463	96471	96479	96486	96494	96562	96509	10′
50′	96517	96524	96532	96540	96547	96555	96562	96570	96578	0.96585	15°00′
75°00′	0.96593	96600	96608	96615	96623	96630	96638	96645	96653	96660	50′
10′	96667	96675	96682	96690	96697	96705	96712	96719	96727	96734	40′
20′	96742	96749	96756	96764	96771	96778	96786	96793	96800	96807	30′
30′	96815	96822	96829	96837	96844	96851	96858	96866	96873	96880	20′
40′	96887	96894	96902	96909	96916	96923	96930	96937	96945	96952	10′
50′	96959	96966	96973	96980	96987	96994	97001	97008	97015	0.97023	14°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数表 cos φ

sin θ

正弦函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
76°00′	0.97030	97037	97044	97051	97058	97065	97072	97079	97086	97093	50′
10′	97100	97106	97113	97120	97127	97134	97141	97148	97155	97162	40′
20′	97169	97176	97182	97189	97196	97203	97210	97217	97223	97230	30′
30′	97237	97244	97251	97257	97264	97271	97278	97284	97291	97298	20′
40′	97304	97311	97318	97325	97331	97338	97345	97351	97358	97365	10′
50′	97371	97378	97384	97391	97398	97404	97411	97417	97424	0.97430	13°00′
77°00′	0.97437	97444	97450	97457	97463	97470	97476	97483	97489	97496	50′
10′	97502	97508	97515	97521	97528	97534	97541	97547	97553	97560	40′
20′	97566	97573	97579	97585	97592	97598	97604	97611	97617	97623	30′
30′	97630	97636	97642	97648	97055	97661	97667	97673	97680	97686	20′
40′	97692	97698	97705	97711	97717	97723	97229	97735	97742	97748	10′
50′	97754	97760	97766	97772	97778	97784	97791	97797	97803	0.97809	12°00′
78°00′	0.97815	97821	97827	97833	97839	97845	97851	97857	97863	97869	50′
10′	97875	97881	97887	97893	97899	97905	97910	97916	97922	97928	40′
20′	97934	97940	97946	97952	97958	97963	97969	97975	97981	97987	30′
30′	97992	97998	98004	98010	98016	98021	98027	98033	98039	98044	20′
40′	98050	98056	98061	98067	98073	98079	98084	98090	98096	98101	10′
50′	98107	98112	98118	98124	98129	98135	98140	98146	98152	0.98157	11°00′
79°00′	0.98163	98168	98174	98179	98185	98190	98196	98201	98207	98212	50′
10′	98218	98223	98229	98234	98240	98245	98250	98256	98261	98267	40′
20′	98272	98277	98283	98288	98294	98299	98304	98310	98315	98320	30′
30′	98325	98331	98336	98341	98347	98352	98357	98362	98368	98373	20′
40′	98378	98383	98389	98394	98399	98404	98409	98414	98420	98425	10′
50′	98430	98435	98440	98445	98450	98455	98461	98466	98471	0.98476	10°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
80°00′	0.98481	98486	98491	98496	98501	98506	98511	98516	98521	98526	50′
10′	98531	98536	98541	98546	98551	98556	98561	98565	98570	98575	40′
20′	98580	98585	98590	98595	98600	98604	98609	98614	98619	98624	30′
30′	98629	98633	98638	98643	98648	98652	98657	98662	98667	98671	20′
40′	98676	98681	98686	98690	98695	98700	98704	98709	98714	98718	10′
50′	98723	98728	98732	98737	98741	98746	98751	98755	98760	0.98764	9°00′
81°00′	0.98769	98773	98778	98782	98787	98791	98796	98800	98805	98809	50′
10′	98814	98818	98823	98827	98832	98836	98841	98845	98849	98854	40′
20′	98858	98863	98867	98871	98876	98880	98884	98889	98893	98897	30′
30′	98902	98906	98910	98914	98919	98923	98927	98931	98936	98940	20′
40′	98944	98948	98953	98957	98961	98965	98969	98973	98978	98982	10′
50′	98986	98990	98994	98998	99002	99006	99011	99015	99019	0.99023	8°00′
82°00′	0.99027	99031	99035	99039	99043	99047	99051	99055	99059	99063	50′
10′	99067	99071	99075	99079	99083	99087	99091	99094	99098	99102	40′
20′	99106	99110	99114	99118	99122	99125	99129	99133	99137	99141	30′
30′	99144	99148	99152	99156	99160	99163	99167	99171	99175	99178	20′
40′	99182	99186	99189	99193	99197	99200	99204	99208	99211	99215	10′
50′	99219	99222	99226	99230	99233	99237	99240	99244	99248	0.99251	7°00′
83°00′	0.99255	99258	99262	99265	99269	99272	99276	99279	99283	99286	50′
10′	99290	99293	99297	99300	99303	99307	99310	99314	99317	99320	40′
20′	99324	99327	99331	99334	99337	99341	99344	99347	99351	99354	30′
30′	99357	99360	99364	99367	99370	99374	99377	99380	99383	99386	20′
40′	99390	99393	99396	99399	99402	99406	99409	99412	99415	99418	10′
50′	99421	99424	99428	99431	99434	99437	99440	99443	99446	0.99449	6°00′

余弦函数表 cos φ

sin θ

正弦函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
84°00′	0.99452	99455	99458	99461	99464	99467	99470	99473	99476	99479	50′
10′	99482	99485	99488	99491	99494	99497	99500	99503	99506	99508	40′
20′	99511	99514	99517	99520	99523	99526	99528	99531	99534	99537	30′
30′	99540	99542	99545	99548	99551	99553	99556	99559	99562	99564	20′
40′	99567	99570	99572	99575	99578	99580	99583	99586	99588	99591	10′
50′	99594	99596	99599	99602	99604	99607	99609	99612	99614	0.99617	5°00′
85°00′	0.99619	99622	99625	99627	99630	99632	99635	99637	99639	99642	50′
10′	99644	99647	99649	99652	99654	99657	99659	99661	99664	99666	40′
20′	99668	99671	99673	99676	99678	99680	99683	99685	99687	99689	30′
30′	99692	99694	99696	99699	99701	99703	99705	99708	99710	99712	20′
40′	99714	99716	99719	99721	99723	99725	99727	99729	99731	99734	10′
50′	99736	99738	99740	99742	99744	99746	99748	99750	99752	0.99754	4°00′
86°00′	0.99756	99758	99760	99762	99764	99766	99768	99770	99772	99774	50′
10′	99776	99778	99780	99782	99784	99786	99788	99790	99792	99793	40′
20′	99795	99797	99799	99801	99803	99804	99806	99808	99810	99812	30′
30′	99813	99815	99817	99819	99821	99822	99824	99826	99827	99829	20′
40′	99831	99833	99834	99836	99838	99839	99841	99842	99844	99846	10′
50′	99847	99849	99851	99852	99854	99855	99857	99858	99860	0.99861	3°00′

87°00′	0.99863	99864	99866	99867	99869	99870	99872	99873	99875	99876	50′
10′	99878	99879	99881	99882	99883	99885	99886	99888	99889	99890	40′
20′	99892	99893	99894	99896	99897	99898	99900	99901	99902	99904	30′
30′	99905	99906	99907	99909	99910	99911	99912	99913	99915	99916	20′
40′	99917	99918	99919	99921	99922	99923	99924	99925	99926	99927	10′
50′	99929	99930	99931	99932	99933	99934	99935	99936	99937	0.99938*	2°00′
88°00′	0.99939	99940	99941	99942	99943	99944	99945	99946	99947	99948	50′
10′	99949	99950	99951	99952	99952	99953	99954	99955	99956	99957	40′
20′	99958	99959	99959	99960	99961	99962	99963	99963	99964	99965	30′
30′	99966	99966	99967	99968	99969	99969	99970	99971	99972	99972	20′
40′	99973	99974	99974	99975	99976	99976	99977	99977	99978	99979	10′
50′	99979	99980	99980	99981	99982	99982	99983	99983	99984	0.99984	1°00′
89°00′	0.99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989	99989	50′
10′	99989	99990	99990	99991	99991	99991	99992	99992	99993	99993	40′
20′	99993	99994	99994	99994	99995	99995	99995	99995	99996	99996	30′
30′	99996	99996	99997	99997	99997	99997	99998	99998	99998	99998	20′
40′	99998	99998	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	10′
50′	1.00000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数表 $\cos\varphi$

正切函数表

$tg\,\theta$

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
0°00′	0.00000	00029	00058	00087	00116	00145	00175	00204	00233	00262	50′
10′	00291	00320	00349	00378	00407	00436	00465	00495	00524	00553	40′
20′	00582	00611	00640	00669	00698	00727	00756	00785	00815	00844	30′
30′	00873	00902	00931	00960	00989	01018	01047	01076	01105	01136	20′
40′	01164	01193	01222	01251	01280	01309	01338	01367	01396	01425	10′
50′	01455	01484	01513	01542	01571	01600	01629	01658	01687	0.01716	89°00′
1°00′	0.01746	01775	01804	01833	01862	01891	01920	01949	01978	02007	50′
10′	02036	02066	02095	02124	02153	02182	02211	02240	02269	02298	40′
20′	02328	02357	02386	02415	02444	02473	02502	02531	02560	02589	30′
30′	02619	02648	02677	02706	02735	02764	02793	02822	02851	02881	20′
40′	02910	02939	02968	02997	03026	03055	03084	03114	03143	03172	10′
50′	03201	03230	03259	03288	03317	03346	03376	03405	03434	0.03463	88°00′
2°00′	0.03492	03521	03550	03579	03609	03638	03667	03696	03725	03754	50′
10′	03783	03812	03842	03871	03900	03929	03958	03987	04016	04046	40′
20′	04075	04104	04133	04162	04191	04220	04250	04279	04308	04337	30′
30′	04366	04395	04424	04454	04483	04512	04541	04570	04599	04628	20′
40′	04658	04687	04716	04745	04774	04803	04833	04862	04891	04920	10′
50′	04949	04978	05007	05037	05066	05095	05124	05153	05182	0.05212	87°00′
3°00′	0.05241	05270	05299	05328	05357	05387	05416	05445	05474	05503	50′
10′	05533	05562	05591	05620	05649	05678	05708	05737	05766	05795	40′
20′	05824	05854	05883	05912	05941	05970	05999	06029	06058	06087	30′
30′	06116	06145	06175	06204	06233	06262	06291	06321	06350	06379	20′
40′	06408	06438	06467	06496	06525	06554	06584	06613	06642	06671	10′
50′	06700	06730	06759	06788	06817	06847	06876	06905	06934	0.06963	86°00′

4°00′	0.06993	07022	07051	07080	07110	07139	07168	07197	07227	07256	50′
10′	07285	07314	07344	07373	07402	07431	07461	07490	07519	07548	40′
20′	07578	07607	07636	07665	07695	07724	07753	07782	07812	07841	30′
30′	07870	07899	07929	07958	07987	08017	08046	08075	08104	08134	20′
40′	08163	08192	08221	08251	08280	08309	08339	08368	08397	08427	10′
50′	08456	08485	08514	08544	08573	08602	08632	08661	08690	0.08720	85°00′
5°00′	0.08749	08778	08807	08837	08866	08895	08925	08954	08983	09013	50′
10′	09042	09071	09101	09130	09159	09189	09218	09247	09277	09306	40′
20′	09335	09365	09394	09423	09453	09482	09511	09541	09570	09600	30′
30′	09629	09658	09688	09717	09746	09776	09805	09834	09864	09893	20′
40′	09923	09952	09981	10011	10040	10069	10099	10128	10158	10187	10′
50′	10216	10246	10275	10305	10334	10363	10393	10422	10452	0.10481	84°00′
6°00′	0.10510	10540	10569	10599	10628	10657	10687	10716	10746	10775	50′
10′	10805	10834	10863	10893	10922	10952	10981	11011	11040	11070	40′
20′	11099	11128	11158	11187	11217	11246	11276	11305	11335	11364	30′
30′	11394	11423	11452	11482	11511	11541	11570	11600	11629	11659	20′
40′	11688	11718	11747	11777	11805	11835	11865	11895	11924	11954	10′
50′	11983	12013	12042	12072	12101	12131	12160	12190	12219	0.12249	83°00′
7°00′	0.12278	12308	12338	12367	12397	12426	12456	12485	12515	12544	50′
10′	12574	12603	12633	12662	12692	12722	12751	12781	12810	12840	40′
20′	12869	12899	12929	12958	12988	13017	13047	13076	13106	13136	30′
30′	13165	13195	13224	13254	13284	13313	13343	13372	13402	13432	20′
40′	13461	13491	13521	13550	13580	13609	13639	13669	13698	13728	10′
50′	13758	13787	13817	13846	13876	13906	13935	13965	13995	0.14024	82°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数表 ctg φ

tg θ 正切函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
8°00′	0.14054	14084	14113	14143	14173	14202	14232	14262	14291	14321	50′
10′	14351	14381	14410	14440	14470	14499	14529	14559	14588	14618	40′
20′	14648	14678	14707	14737	14767	14796	14826	14856	14886	14915	30′
30′	14945	14975	15005	15034	15064	15094	15124	15153	15183	15213	20′
40′	15243	15272	15302	15332	15362	15391	15421	15451	15481	15511	10′
50′	15540	15570	15600	15630	15660	15689	15719	15749	15779	0.15809	81°00′
9°00′	0.15838	15868	15898	15928	15958	15988	16017	16047	16077	16107	50′
10′	16137	16167	16196	16226	16256	16286	16316	16346	16376	16405	40′
20′	16436	16465	16495	16525	16555	16585	16615	16645	16674	16704	30′
30′	16734	16764	16794	16824	16854	16884	16914	16944	16974	17004	20′
40′	17033	17063	17093	17123	17153	17183	17213	17243	17273	17303	10′
50′	17333	17363	17393	17423	17453	17483	17513	17543	17573	0.17603	80°00′
10°00′	0.17633	17663	17693	17723	17753	17783	17813	17843	17873	17903	50′
10′	17933	17963	17993	18023	18053	18083	18113	18143	18173	18203	40′
20′	18233	18263	18293	18323	18353	18384	18414	18444	18474	18504	30′
30′	18534	18564	18594	18624	18654	18684	18714	18745	18775	18805	20′
40′	18835	18865	18895	18925	18955	18986	19016	19046	19076	19106	10′
50′	19136	19166	19197	19227	19257	19287	19317	19347	19378	0.19408	79°00′
11°00′	0.19438	19468	19498	19529	19559	19589	19619	19649	19680	19710	50′
10′	19740	19770	19801	19831	19861	19891	19921	19952	19982	20012	40′
20′	20042	20073	20103	20133	20164	20194	20224	20254	20285	20315	30′
30′	20345	20376	20406	20436	20466	20497	20527	20557	20588	20618	20′
40′	20648	20679	20709	20739	20770	20800	20830	20861	20891	20921	10′
50′	20952	20982	21013	21043	21073	21104	21134	21164	21195	0.21225	78°00′

12°00′	0.21256	21286	21316	21347	21377	21408	21438	21469	21499	21529	50′
10′	21560	21590	21621	21651	21682	21712	21743	21773	21804	21834	40′
20′	21864	21895	21925	21956	21986	22017	22047	22078	22108	22139	30′
30′	22169	22200	22231	22261	22292	22322	22353	22383	22414	22444	20′
40′	22475	22505	22536	22567	22597	22628	22658	22689	22719	22750	10′
50′	22781	22811	22842	22872	22903	22934	22964	22995	23026	0.23056	77°00′
13°00′	0.23087	23117	23148	23179	23209	23240	23271	23301	23332	23363	50′
10′	23393	23424	23455	23485	23516	23547	23578	23608	23639	23670	40′
20′	23700	23731	23762	23793	23823	23854	23885	23916	23946	23977	30′
30′	24008	24039	24069	24100	24131	24162	24193	24223	24254	24285	20′
40′	24316	24347	24377	24408	24439	24470	24501	24532	24562	24593	10′
50′	24624	24655	24686	24717	24747	24778	24809	24840	24871	0.24902	76°00′
14°00′	0.24933	24964	24995	25026	25056	25087	25118	25149	25180	25211	50′
10′	25242	25273	25304	25335	25366	25397	25428	25459	25490	25521	40′
20′	25552	25583	25614	25645	25676	25707	25738	25769	25800	25831	30′
30′	25862	25893	25924	25955	25986	26017	26048	26079	26110	26141	20′
40′	26172	26203	26235	26266	26297	26328	26359	26390	26421	26452	10′
50′	26483	26515	26546	26577	26608	26639	26670	26701	26733	0.26764	75°00′
15°00′	0.26795	26826	26857	26888	26920	26951	26982	27013	27044	27076	50′
10′	27107	27138	27169	27201	27232	27263	27294	27326	27357	27388	40′
20′	27419	27451	27482	27513	27545	27576	27607	27638	27670	27701	30′
30′	27732	27764	27795	27826	27858	27889	27921	27952	27983	28015	20′
40′	28046	28077	28109	28140	28172	28203	28234	28266	28297	28329	10′
50′	28360	28391	28423	28454	28486	28517	28549	28580	28612	0.28643	74°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数表 ctg φ

$tg\,\theta$

正切函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
16°00′	0.28675	28706	28738	28769	28801	28832	28864	28895	28927	28958	50′
10′	28990	29021	29053	29084	29116	29147	29179	29210	29242	29274	40′
20′	29305	29337	29368	29400	29432	29463	29495	29526	29558	29590	30′
30′	29621	29653	29685	29716	29748	29780	29811	29843	29875	29906	20′
40′	29938	29970	30001	30033	30065	30097	30128	30160	30192	30224	10′
50′	30255	30287	30319	30351	30382	30414	30446	30478	30509	0.30541	73°00′
17°00′	0.30573	30605	30637	30669	30700	30732	30764	30796	30828	30860	50′
10′	30891	30923	30955	30987	31019	31051	31083	31115	31147	31178	40′
20′	31210	31242	31274	31306	31338	31370	31402	31434	31466	31498	30′
30′	31530	31562	31594	31626	31658	31690	31722	31754	31786	31818	20′
40′	31850	31882	31914	31946	31978	32010	32042	32074	32106	32139	10′
50′	32171	32203	32235	32267	32299	32331	32363	32396	32428	0.32460	72°00′
18°00′	0.32492	32524	32556	32588	32621	32653	32685	32717	32749	32782	50′
10′	32814	32846	32878	32911	32943	32975	33007	33040	33072	33104	40′
20′	33136	33169	33201	33233	33266	33298	33330	33363	33395	33427	30′
30′	33460	33492	33524	33557	33589	33621	33654	33686	33718	33751	20′
40′	33783	33816	33848	33881	33913	33945	33978	34010	34043	34075	10′
50′	34108	34140	34173	34205	34238	34270	34303	34335	34368	0.34400	71°00′
19°00′	0.34433	34465	34498	34530	34563	34596	34628	34661	34693	34726	50′
10′	34758	34791	34824	34856	34889	34922	34954	34987	35020	35052	40′
20′	35085	35118	35150	35183	35216	35248	35281	35314	35346	35379	30′
30′	35412	35445	35477	35510	35543	35576	35608	35641	35674	35707	20′
40′	35740	35772	35805	35838	35871	35904	35937	35969	36002	36035	10′
50′	36068	36101	36134	36167	36199	36232	36265	36298	36331	0.36364	70°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
20°00′	0.36397	36430	36463	36496	36529	36562	36595	36628	36661	36694	50′
10′	36727	36760	36793	36826	36859	36892	36925	36958	36991	37024	40′
20′	37057	37090	37123	37157	37190	37223	37256	37289	37322	37355	30′
30′	37388	37422	37455	37488	37521	37554	37588	37621	37654	37687	20′
40′	37720	37754	37787	37820	37853	37887	37920	37953	37986	38020	10′
50′	38053	38086	38120	38153	38186	38220	38253	38286	38320	0.38353	69°00′
21°00′	0.38386	38420	38453	38487	38520	38553	38587	38620	38654	38687	50′
10′	38721	38754	38787	38821	38854	38888	38921	38955	38988	39022	40′
20′	39055	39089	39122	39156	39190	39223	39257	39290	39324	39357	30′
30′	39391	39425	39458	39492	39526	39559	39593	39626	39660	39694	20′
40′	39727	39761	39795	39829	39862	39896	39930	39963	39997	40031	10′
50′	40065	40098	40132	40166	40200	40234	40267	40301	40335	0.40369	68°00′
22°00′	0.40403	40436	40470	40504	40538	40572	40606	40640	40674	40707	50′
10′	40741	40775	40809	40843	40877	40911	40945	40979	41013	41047	40′
20′	41081	41115	41149	41183	41217	41251	41285	41319	41353	41387	30′
30′	41421	41455	41490	41524	41558	41592	41626	41660	41694	41728	20′
40′	41763	41797	41831	41865	41899	41933	41968	42002	42036	42070	10′
50′	42105	42139	42173	42207	42242	42276	42310	42345	42379	0.42413	67°00′
23°00′	0.42447	42482	42516	42551	42585	42619	42654	42688	42722	42757	50′
10′	42791	42826	42860	42894	42929	42963	42998	43032	43067	43101	40′
20′	43136	43170	43205	43239	43274	43308	43343	43378	43412	43447	30′
30′	43481	43516	43550	43585	43620	43654	43689	43724	43758	43793	20′
40′	43828	43862	43897	43932	43966	44001	44036	44071	44105	44140	10′
50′	44175	44210	44244	44279	44314	44349	44384	44418	44453	0.44488	66°00′

余切函数表 ctg φ

tg θ

正切函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
24°00′	0.44523	44558	44593	44627	44662	44697	44732	44767	44802	44837	50′
10′	44872	44907	44942	44977	45012	45047	45082	45117	45152	45187	40′
20′	45222	45257	45292	45327	45362	45397	45432	45467	45502	45538	30′
30′	45573	45608	45643	45678	45713	45748	45784	45819	45854	45889	20′
40′	45924	45960	45995	46030	46065	46101	46136	46171	46206	46242	10′
50′	46277	46312	46348	46383	46418	46454	46489	46525	46560	0.46595	65°00′
25°00′	0.46631	46666	46702	46737	46772	46808	46843	46879	46914	46950	50′
10′	46985	47021	47056	47092	47128	47163	47199	47234	47270	47305	40′
20′	47341	47377	47412	47448	47483	47519	47555	47590	47626	47662	30′
30′	47698	47733	47769	47805	47840	47876	47912	47948	47984	48019	20′
40′	48055	48091	48127	48163	48198	48234	48270	48305	48342	48378	10′
50′	48414	48450	48486	48521	48557	48593	48629	48665	48701	0.48737	64°00′
26°00′	0.48773	48809	48845	48881	48917	48953	48989	49026	49062	49098	50′
10′	49134	49170	49206	49242	49278	49315	49351	49387	49423	49459	40′
20′	49495	49532	49568	49604	49640	49677	49713	49749	49786	49822	30′
30′	49858	49894	49931	49967	50004	50040	50076	50113	50149	50185	20′
40′	50222	50258	50295	50331	50368	50404	50441	50477	50514	50550	10′
50′	50587	50623	50660	50696	50733	50769	50806	50843	50879	0.50916	63°00′
27°00′	0.50953	50989	51026	51063	51099	51136	51173	51209	51246	51283	50′
10′	51319	51356	51393	51430	51467	51503	51540	51577	51614	51651	40′
20′	51688	51724	51761	51798	51835	51872	51909	51946	51983	52020	30′
30′	52057	52094	52131	52168	52205	52242	52279	52316	52353	52390	20′
40′	52427	52464	52501	52538	52575	52613	52650	52687	52724	52761	10′
50′	52798	52836	52873	52910	52947	52985	53022	53059	53096	0.53134	62°00′

28°00′	0.53171	53208	53246	53283	53320	53358	53395	53432	53470	53507	50′
10′	53545	53582	53620	53657	53694	53732	53769	53807	53844	53882	40′
20′	53920	53957	53995	54032	54070	54107	54145	54183	54220	54258	30′
30′	54296	54333	54371	54409	54446	54484	54522	54560	54597	54635	20′
40′	54673	54711	54748	54786	54824	54862	54900	54938	54975	55013	10′
50′	55051	55089	55127	55165	55203	55241	55279	55317	55355	0.55393	61°00′
29°00′	0.55431	55469	55507	55545	55583	55621	55659	55697	55736	55774	50′
10′	55812	55850	55888	55926	55964	56003	56041	56079	56117	56156	40′
20′	56194	56232	56270	56309	56347	56385	56424	56462	56501	56539	30′
30′	56577	56616	56654	56693	56731	56769	56808	56846	56885	56923	20′
40′	56962	57000	57039	57078	57116	57155	57193	57232	57271	57309	10′
50′	57348	57386	57425	57464	57503	57541	57580	57619	57657	0.57696	60°00′
30°00′	0.57735	57774	57813	57851	57890	57929	57968	58007	58046	58085	50′
10′	58124	58162	58201	58240	58279	58318	58357	58396	58435	58474	40′
20′	58513	58552	58591	58631	58670	58709	58748	58787	58826	58865	30′
30′	58905	58944	58983	59022	59061	59101	59140	59179	59218	59258	20′
40′	59297	59336	59376	59415	59454	59494	59533	59573	59612	59651	10′
50′	59691	59730	59770	59809	59849	59888	59928	59967	60007	0.60046	59°00′
31°00′	0.60086	60126	60165	60205	60245	60284	60324	60364	60403	60443	50′
10′	60483	60522	60562	60602	60642	60681	60721	60761	60801	60841	40′
20′	60881	60921	60960	61000	61040	61080	61120	61160	61200	61240	30′
30′	61280	61320	61360	61400	61440	61480	61520	61561	61601	61641	20′
40′	61681	61721	61761	61801	61842	61882	61922	61962	62003	62043	10′
50′	62083	62124	62164	62204	62245	62285	62325	62366	62406	0.62446	58°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数表 ctg φ

$tg\,\theta$ 正切函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
32°00′	0.62487	62527	62568	62608	62649	62689	62730	62770	62811	62852	50′
10′	62892	62933	62973	63014	63055	63095	63136	63177	63217	63258	40′
20′	63299	63340	63380	63421	63462	63503	63544	63584	63625	63666	30′
30′	63707	63748	63789	63830	63871	63912	63953	63994	64035	64076	20′
40′	64117	64158	64199	64240	64281	64322	64363	64404	64446	64487	10′
50′	64528	64569	64610	64652	64693	64734	64775	64817	64858	0.64899	57°00′
33°00′	0.64941	64982	65024	65065	65106	65148	65189	65231	65272	65314	50′
10′	65355	65397	65438	65480	65521	65563	65604	65646	65688	65729	40′
20′	65771	65813	65854	65896	65938	65980	66021	66063	66105	66147	30′
30′	66189	66230	66272	66314	66356	66398	66440	66482	66524	66566	20′
40′	66608	66650	66692	66734	66776	66818	66860	66902	66944	66986	10′
50′	67028	67071	67113	67155	67197	67239	67282	67324	67366	0.67409	56°00′
34°00′	0.67451	67493	67536	67578	67620	67663	67705	67748	67790	67832	50′
10′	67875	67917	67960	68002	68045	68088	68130	68173	68215	68258	40′
20′	68301	68343	68386	68429	68471	68514	68557	68600	68642	68685	30′
30′	68728	68771	68814	68857	68900	68942	68985	69028	69071	69114	20′
40′	69157	69200	69243	69286	69329	69372	69416	69459	69502	69545	10′
50′	69588	69631	69675	69718	69761	69804	69847	69891	69934	0.69977	55°00′
35°00′	0.70021	70064	70107	70151	70194	70238	70281	70325	70368	70412	50′
10′	70455	70499	70542	70586	70629	70673	70717	70760	70804	70848	40′
20′	70891	70935	70979	71023	71066	71110	71154	71198	71242	71285	30′
30′	71329	71373	71417	71461	71505	71549	71593	71637	71681	71725	20′
40′	71769	71813	71857	71901	71946	71990	72034	72078	72122	72167	10′
50′	72211	72255	72299	72344	72388	72432	72477	72521	72565	0.72610	54°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
36°00′	0.72654	72699	72743	72788	72832	72877	72921	72966	73010	73055	50′
10′	73100	73144	73189	73234	73278	73323	73368	73413	73457	73502	40′
20′	73547	73592	73637	73681	73726	73771	73816	73861	73906	73951	30′
30′	73996	74041	74086	74131	74176	74221	74267	74312	74357	74402	20′
40′	74447	74492	74538	74583	74628	74674	74719	74764	74810	74855	10′
50′	74900	74946	74991	75037	75082	75128	75173	75219	75264	0.75310	53°00′
37°00′	0.75355	75401	75447	75492	75538	75584	75629	75675	75721	75767	50′
10′	75812	75858	75904	75950	75996	76042	76088	76134	76180	76226	40′
20′	76272	76318	76364	76410	76456	76502	76548	76594	76640	76686	30′
30′	76733	76799	76825	76871	76918	76964	77010	77057	77103	77149	20′
40′	77196	77242	77289	77335	77382	77428	77475	77521	77568	77615	10′
50′	77661	77708	77754	77801	77848	77895	77941	77988	78035	0.78082	52°00′
38°00′	0.78129	78175	78222	78269	78316	78363	78410	78457	78504	78551	50′
10′	78598	78645	78692	78739	78786	78834	78881	78928	78975	79022	40′
20′	79070	79117	79164	79212	79259	79306	79354	79401	79449	79496	30′
30′	79544	79591	79639	79686	79734	79781	79829	79877	79924	79972	20′
40′	80020	80067	80115	80163	80211	80258	80306	80354	80402	80450	10′
50′	80498	80546	80594	80642	80690	80738	80786	80834	80882	0.80930	51°00′
39°00′	0.80978	81027	81075	81123	81171	81220	81268	81316	81364	81413	50′
10′	81461	81510	81588	81606	81655	81703	81752	81800	81849	81898	40′
20′	81946	81995	82044	82092	82141	82190	82238	82287	82336	82385	30′
30′	82434	82483	82531	82580	82629	82678	82727	82776	82825	82874	20′
40′	82923	82972	83022	83071	83120	83169	83218	83268	83317	83366	10′
50′	83415	83463	83514	83564	83613	83662	83712	83761	83811	0.83860	50°00′

余切函数表 ctg φ

tg θ

正切函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
40°00′	0.83910	83960	84009	84059	84108	84158	84208	84258	84307	84357	50′
10′	84407	84457	84507	84556	84606	84656	84706	84756	84806	84856	40′
20′	84906	84956	85006	85057	85107	85157	85207	85257	85308	85358	30′
30′	85408	85458	85509	85559	85609	85660	85710	85761	85811	85862	20′
40′	85912	85963	86014	86064	86115	86166	86216	86267	86318	86368	10′
50′	86419	86470	86521	86572	86623	86674	86725	86776	86827	0.86878	49°00′
41°00′	0.86929	86980	87031	87082	87133	87184	87236	87287	87338	87389	50′
10′	87441	87492	87543	87595	87646	87698	87749	87801	87852	87904	40′
20′	87955	88007	88059	88110	88162	88214	88265	88317	88369	88421	30′
30′	88473	88524	88576	88628	88680	88732	88784	88836	88888	88940	20′
40′	88992	89045	89097	89149	89201	89253	89306	89358	89410	89463	10′
50′	89515	89567	89620	89672	89725	89777	89830	89883	89935	0.89988	48°00′
42°00′	0.90040	90093	90146	90199	90251	90304	90357	90410	90463	90516	50′
10′	90569	90621	90674	90727	90781	90834	90887	90940	90993	91046	40′
20′	91099	91153	91206	91259	91313	91366	91419	91473	91526	91580	30′
30′	91633	91687	91740	91794	91847	91901	91955	92008	92062	92116	20′
40′	92170	92224	92277	92331	92385	92439	92493	92547	92601	92655	10′
50′	92709	92763	92817	92872	92926	92980	93034	93088	93143	0.93197	47°00′
43°00′	0.93252	93306	93360	93415	93469	93524	93578	93633	93688	93742	50′
10′	93797	93852	93906	93961	94016	94071	94125	94180	94235	94290	40′
20′	94345	94400	94455	94510	94565	94620	94676	94731	94786	94841	30′
30′	94896	94952	95007	95062	95118	95173	95229	95284	95340	95395	20′
40′	95451	95506	95562	95618	95673	95729	95785	95841	95897	95952	10′
50′	96008	96064	96120	96176	96232	96288	96344	96400	96457	0.96513	46°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
44°00′	0.96569	96625	96681	96738	96794	96850	96907	96963	97020	97076	50′
10′	97133	97189	97246	97302	97359	97416	97472	97529	97586	97643	40′
20′	97700	97756	97813	97870	97927	97984	98041	98098	98155	98213	30′
30′	98270	98327	98384	98441	98499	98556	98613	98671	98728	98786	20′
40′	98843	98901	98958	99016	99073	99131	99189	99247	99304	99362	10′
50′	99420	99478	99536	99594	99652	99710	99768	99826	99384	0.99942	45°00′
45°00′	1.0000	0006	0012	0017	0023	0029	0035	0041	0047	0052	50′
10′	0058	0064	0070	0076	0082	0088	0094	0099	0105	0111	40′
20′	0117	0123	0129	0135	0141	0147	0152	0158	0164	0170	30′
30′	0176	0182	0188	0194	0200	0206	0212	0218	0224	0230	20′
40′	0235	0241	0247	0253	0259	0265	0271	0277	0283	0289	10′
50′	0295	0301	0307	0313	0319	0325	0331	0337	0343	1.0349	44°00′
46°00′	1.0355	0361	0367	0373	0379	0385	0392	0398	0404	0410	50′
10′	0416	0422	0428	0434	0440	0446	0452	0458	0464	0470	40′
20′	0477	0483	0489	0495	0501	0507	0513	0519	0526	0532	30′
30′	0538	0544	0550	0556	0562	0569	0575	0581	0587	0593	20′
40′	0599	0606	0612	0618	0624	0630	0637	0643	0649	0655	10′
50′	0661	0668	0674	0680	0686	0692	0699	0705	0711	1.0717	43°00′
47°00′	1.0724	0730	0736	0742	0749	0755	0761	0768	0774	0780	50′
10′	0786	0793	0799	0805	0812	0818	0824	0831	0837	0843	40′
20′	0850	0856	0862	0869	0875	0881	0888	0894	0900	0907	30′
30′	0913	0919	0926	0932	0939	0945	0951	0958	0964	0971	20′
40′	0977	0983	0990	0996	1003	1009	1016	1022	1028	1035	10′
50′	1041	1048	1054	1061	1067	1074	1080	1087	1093	1.1100	42°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数表　　ctg φ

正切函数表

tg θ

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
48°00′	1.1106	1113	1119	1126	1132	1139	1145	1152	1158	1165	50′
10′	1171	1178	1184	1191	1197	1204	1211	1217	1224	1230	40′
20′	1237	1243	1250	1257	1263	1270	1276	1283	1290	1296	30′
30′	1303	1310	1316	1323	1329	1336	1343	1349	1356	1363	20′
40′	1369	1376	1383	1389	1396	1403	1410	1416	1423	1430	10′
50′	1436	1443	1450	1456	1463	1470	1477	1483	1490	1.1497	41°00′
49°00′	1.1504	1510	1517	1524	1531	1538	1544	1551	1558	1565	50′
10′	1571	1578	1585	1592	1599	1606	1612	1619	1626	1633	40′
20′	1640	1647	1653	1660	1667	1674	1681	1688	1695	1702	30′
30′	1708	1715	1722	1729	1736	1743	1750	1757	1764	1771	20′
40′	1778	1785	1792	1799	1806	1812	1819	1826	1833	1840	10′
50′	1847	1854	1861	1868	1875	1882	1889	1896	1903	1.1910	40°00′
50°00′	1.1918	1925	1932	1939	1946	1953	1960	1967	1974	1981	50′
10′	1988	1995	2002	2009	2017	2024	2031	2038	2045	2052	40′
20′	2059	2066	2074	2081	2088	2095	2102	2109	2117	2124	30′
30′	2131	2138	2145	2153	2160	2167	2174	2181	2189	2196	20′
40′	2203	2210	2218	2225	2232	2239	2247	2254	2261	2268	10′
50′	2276	2283	2290	2298	2805	2312	2320	2327	2334	1.2342	39°00′
51°00′	1.2349	2356	2364	2371	2378	2386	2393	2401	2408	2415	50′
10′	2428	2430	2437	2445	2452	2460	2467	2475	2482	2489	40′
20′	2497	2504	2512	2519	2527	2534	2542	2549	2557	2564	30′
30′	2572	2579	2587	2594	2602	2609	2617	2624	2632	2640	20′
40′	2647	2655	2662	2670	2677	2685	2693	2700	2708	2715	10′
50′	2723	2731	2738	2746	2753	2761	2769	2776	2784	1.2792	38°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
52°00′	1.2790	2807	2815	2822	2830	2838	2846	2853	2861	2869	50′
10′	2876	2884	2892	2900	2907	2915	2923	2931	2938	2946	40′
20′	2954	2962	2970	2977	2985	2993	3001	3009	3017	3024	30′
30′	3032	3040	3048	3056	3064	3072	3079	3087	3095	3103	20′
40′	3111	3119	3127	3135	3143	3151	3159	3167	3175	3182	10′
50′	3190	3198	3206	3214	3222	3230	3238	3246	3254	1.3262	37°00′
53°00′	1.3270	3278	3287	3295	3303	3311	3319	3327	3335	3343	50′
10′	3351	3359	3367	3375	3384	3392	3400	3408	3416	3424	40′
20′	3432	3440	3449	3457	3465	3473	3481	3490	3498	3506	30′
30′	3514	3522	3531	3539	3547	3555	3564	3572	3580	3588	20′
40′	3597	3605	3613	3622	3630	3638	3647	3655	3663	3672	10′
50′	3680	3688	3697	3705	3713	3722	3730	3739	3747	1.3755	36°00′
54°00′	1.3764	3772	3781	3789	3798	3806	3814	3823	3831	3840	50′
10′	3848	3857	3865	3874	3882	3891	3899	3908	3916	3925	40′
20′	3934	3942	3951	3959	3968	3976	3985	3994	4002	4011	30′
30′	4019	4028	4037	4045	4054	4063	4071	4080	4089	4097	20′
40′	4106	4115	4124	4132	4141	4150	4158	4167	4176	4185	10′
50′	4193	4202	4211	4220	4229	4237	4246	4255	4264	1.4273	35°00′
55°00′	1.4281	4290	4299	4308	4317	4326	4335	4344	4352	4361	50′
10′	4370	4379	4388	4397	4406	4415	4424	4433	4442	4451	40′
20′	4460	4469	4478	4487	4496	4505	4514	4523	4532	4541	30′
30′	4550	4559	4568	4577	4586	4596	4605	4614	4623	4632	20′
40′	4641	4650	4659	4669	4678	4687	4696	4705	4715	4724	10′
50′	4733	4742	4751	4761	4770	4779	4788	4798	4807	1.4816	34°00′

余切函数表 $\operatorname{ctg}\varphi$

$tg\theta$ 正切函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
56°00′	1.4826	4835	4844	4854	4863	4872	4882	4891	4900	4910	50′
10′	4919	4928	4938	4947	4957	4966	4975	4985	4994	5004	40′
20′	5013	5023	5032	5042	5051	5061	5070	5080	5089	5099	30′
30′	5108	5118	5127	5137	5147	5156	5166	5175	5185	5195	20′
40′	5204	5214	5224	5233	5243	5253	5262	5272	5282	5291	10′
50′	5301	5311	5320	5330	5340	5350	5359	5369	5379	1.5389	33°00′
57°00′	1.5399	5408	5418	5428	5438	5448	5458	5468	5477	5487	50′
10′	5497	5507	5517	5527	5537	5547	5557	5567	5577	5587	40′
20′	5597	5607	5617	5627	5637	5647	5657	5667	5677	5687	30′
30′	5697	5707	5717	5727	5737	5747	5757	5768	5778	5788	20′
40′	5798	5808	5818	5829	5839	5849	5859	5869	5980	5890	10′
50′	5900	5911	5921	5931	5941	5952	5962	5972	5983	1.5993	32°00′
58°00′	1.6003	6014	6024	6034	6045	6055	6066	6076	6087	6097	50′
10′	6107	6118	6128	6139	6149	6160	6170	6181	6191	6202	40′
20′	6212	6223	6234	6244	6255	6265	6276	6287	6297	6308	30′
30′	6319	6329	6340	6351	6361	6372	6383	6393	6404	6415	20′
40′	6426	6436	6447	6458	6469	6479	6490	6501	6512	6523	10′
50′	6534	6545	6555	6566	6577	6588	6599	6610	6621	1.6632	31°00′
59°00′	1.6643	6654	6665	6676	6687	6698	6709	6720	6731	6742	50′
10′	6753	6764	6775	6786	6797	6808	6820	6831	6842	6853	40′
20′	6864	6875	6887	6898	6909	6920	6932	6943	6954	6965	30′
30′	6977	6988	6999	7011	7022	7033	7045	7056	7067	7079	20′
40′	7090	7102	7113	7124	7136	7147	7159	7170	7182	7193	10′
50′	7205	7216	7228	7239	7251	7262	7274	7286	7297	1.7309	30°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
60°00′	1.7321	7332	7344	7355	7367	7379	7391	7402	7414	7426	50′
10′	7437	7449	7461	7473	7485	7496	7508	7520	7532	7544	40′
20′	7556	7567	7579	7591	7603	7615	7627	7639	7651	7663	30′
30′	7675	7687	7699	7711	7723	7735	7747	7759	7771	7783	20′
40′	7796	7808	7820	7832	7844	7856	7868	7881	7893	7905	10′
50′	7917	7930	7942	7954	7966	7979	7991	8003	8016	1.8028	29°00′
61°00′	1.8040	8053	8065	8078	8090	8103	8115	8127	8140	8152	50′
10′	8165	8177	8190	8202	8215	8228	8240	8253	8265	8278	40′
20′	8291	8303	8316	8329	8341	8354	8367	8379	8392	8405	30′
30′	8418	8430	8443	8456	8469	8482	8495	8507	8520	8533	20′
40′	8546	8559	8572	8585	8598	8611	8624	8637	8650	8663	10′
50′	8676	8689	8702	8715	8728	8741	8755	8768	8781	1.8794	28°00′
62°00′	1.8807	8820	8834	8847	8860	8873	8887	8900	8913	8927	50′
10′	8940	8953	8967	8980	8993	9007	9020	9034	9047	9061	40′
20′	9074	9088	9101	9115	9128	9142	9155	9169	9183	9196	30′
30′	9210	9223	9237	9251	9265	9278	9292	9306	9319	9333	20′
40′	9347	9361	9375	9388	9402	9416	9430	9444	9458	9472	10′
50′	9486	9500	9514	9528	9542	9556	9570	9584	9598	1.9612	27°00′
63°00′	1.9626	9640	9654	9669	9683	9697	9711	9725	9740	9754	50′
10′	9768	9782	9797	9811	9825	9840	9854	9868	9883	9897	40′
20′	9912	9926	9941	9955	9970	9984	9999	*0013	*0028	2.0042	30′
30′	2.0057	0072	0086	0101	0115	0130	0145	0160	0174	0189	20′
40′	0204	0219	0233	0248	0263	0278	0293	0308	0323	0338	10′
50′	0353	0368	0383	0398	0413	0428	0443	0458	0473	2.0488	26°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数表 ctg φ

tg θ

正切函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
64°00′	2.0503	0518	0533	0549	0564	0579	0594	0609	0625	0640	50′
10′	0655	0671	0686	0701	0717	0732	0748	0763	0778	0794	40′
20′	0809	0825	0840	0856	0872	0887	0903	0918	0934	0950	30′
30′	0965	0981	0997	1013	1028	1044	1060	1076	1092	1107	20′
40′	1123	1139	1155	1171	1187	1203	1219	1235	1251	1267	10′
50′	1283	1299	1315	1332	1348	1364	1380	1396	1413	2.1429	25°00′
65°00′	2.1445	1461	1478	1494	1510	1527	1543	1560	1576	1592	50′
10′	1609	1625	1642	1659	1675	1692	1708	1725	1742	1758	40′
20′	1775	1792	1808	1825	1842	1859	1876	1892	1909	1926	30′
30′	1943	1960	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	2096	20′
40′	2113	2130	2148	2165	2182	2199	2216	2234	2251	2268	10′
50′	2286	2303	2320	2338	2355	2373	2390	2408	2425	2.2443	24°00′
66°00′	2.2460	2478	2496	2513	2531	2549	2566	2584	2602	2620	50′
10′	2637	2655	2673	2691	2709	2727	2745	2763	2781	2799	40′
20′	2817	2835	2853	2871	2889	2907	2925	2944	2962	2980	30′
30′	2998	3017	3035	3053	3072	3090	3109	3127	3146	3164	20′
40′	3183	3201	3220	3238	3257	3276	3294	3313	3332	3351	10′
50′	3369	3388	3407	3426	3445	3464	3483	3501	3520	2.3539	23°00′
67°00′	2.3559	3578	3597	3616	3635	3654	3673	3693	3712	3731	50′
10′	3750	3770	3789	3808	3828	3847	3867	3886	3906	3925	40′
20′	3945	3964	3984	4004	4023	4043	4063	4083	4102	4122	30′
30′	4142	4162	4182	4202	4222	4242	4262	4282	4302	4322	20′
40′	4342	4362	4383	4403	4423	4443	4464	4484	4504	4525	10′
50′	4545	4566	4586	4606	4627	4648	4668	4689	4709	2.4730	22°00′

余切函数表 ctg φ

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
68°00′	2.4751	4772	4792	4813	4834	4855	4876	4897	4918	4939	50′
10′	4960	4981	5002	5023	5044	5065	5086	5108	5129	5150	40′
20′	5172	5193	5214	5236	5257	5279	5300	5322	5343	5365	30′
30′	5386	5408	5430	5452	5473	5495	5517	5539	5561	5583	20′
40′	5605	5627	5649	5671	5693	5715	5737	5759	5782	5804	10′
50′	5826	5848	5871	5893	5916	5938	5961	5983	6006	2.6028	21°00′
69°00′	2.6051	6074	6096	6119	6142	6165	6187	6210	6233	6256	50′
10′	6279	6302	6325	6348	6371	6395	6418	6441	6464	6488	40′
20′	6511	6534	6558	6581	6605	6628	6652	6675	6699	6723	30′
30′	6746	6770	6794	6818	6841	6865	6889	6913	6937	6961	20′
40′	6985	7009	7034	7058	7082	7106	7130	7155	7179	7204	10′
50′	7228	7253	7277	7302	7326	7351	7376	7400	7425	2.7450	20°00′
70°00′	2.7475	7500	7525	7550	7575	7600	7625	7650	7675	7700	50′
10′	7725	7751	7776	7801	7827	7852	7878	7903	7929	7955	40′
20′	7980	8006	8032	8057	8083	8109	8135	8161	8187	8213	30′
30′	8239	8265	8291	8318	8344	8370	8397	8423	8449	8476	20′
40′	8502	8529	8556	8582	8609	8636	8662	8689	8716	8743	10′
50′	8770	8797	8824	8851	8878	8905	8933	8960	8987	2.9015	19°00′
71°00′	2.9042	9070	9097	9125	9152	9180	9208	9235	9263	9291	50′
10′	9319	9347	9375	9403	9431	9459	9487	9515	9544	9572	40′
20′	9600	9629	9657	9686	9714	9743	9772	9800	9829	9858	30′
30′	9887	9916	9945	9974	*0003	*0032	*0061	*0090	*0120	3.0149	20′
40′	3.0178	0208	0237	0267	0296	0326	0356	0385	0415	0445	10′
50′	0475	0505	0535	0565	0595	0625	0655	0686	0716	3.0746	18°00′

tg θ

正切函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
72°00′	3.0777	0807	0838	0868	0899	0930	0961	0991	1022	1053	50′
10′	1084	1115	1146	1178	1209	1240	1271	1303	1334	1366	40′
20′	1397	1429	1460	1492	1524	1556	1588	1620	1652	1684	30′
30′	1716	1748	1780	1813	1845	1878	1910	1943	1975	2008	20′
40′	2041	2073	2106	2139	2172	2205	2238	2272	2305	2338	10′
50′	2371	2405	2438	2472	2506	2539	2573	2607	2641	3.2675	17°00′
73°00′	3.2709	2743	2777	2811	2845	2879	2914	2948	2983	3017	50′
10′	3052	3087	3122	3156	3191	3226	3261	3297	3332	3367	40′
20′	3402	3438	3473	3509	3544	3580	3616	3652	3687	3723	30′
30′	3759	3796	3832	3868	3904	3941	3977	4014	4050	4087	20′
40′	4124	4160	4197	4234	4271	4308	4346	4383	4420	4458	10′
50′	4495	4533	4570	4608	4646	4684	4722	4760	4798	3.4836	16°00′
74°00′	3.4874	4912	4951	4989	5028	5067	5105	5144	5183	5222	50′
10′	5261	5300	5339	5379	5418	5457	5497	5536	5576	5616	40′
20′	5656	5696	5736	5776	5816	5856	5897	5937	5978	6018	30′
30′	6059	6100	6140	6181	6222	6264	6305	6346	6387	6429	20′
40′	6470	6512	6554	6596	6638	6680	6722	6764	6806	6848	10′
50′	6891	6933	6976	7019	7062	7105	7148	7191	7234	3.7277	15°00′
75°00′	3.7321	7364	7408	7451	7495	7539	7583	7627	7671	7715	50′
10′	7760	7804	7848	7893	7938	7983	8028	8073	8118	8163	40′
20′	8208	8254	8299	8345	8391	8436	8482	8528	8575	8621	30′
30′	8667	8714	8760	8807	8854	8900	8947	8995	9042	9089	20′
40′	9136	9184	9232	9279	9327	9375	9423	9471	9520	9568	10′
50′	9617	9665	9714	9763	9812	9861	9910	9959	*0009	4.0058	14°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
76°30′	4.0108	0158	0207	0257	0308	0358	0408	0459	0509	0560	50′
40′	0611	0662	0713	0764	0815	0867	0918	0970	1022	1074	40′
20′	1126	1178	1230	1282	1335	1388	1441	1493	1547	1600	30′
30′	1653	1706	1760	1814	1868	1922	1976	2030	2084	2139	20′
40′	2193	2248	2303	2358	2413	2468	2524	2580	2635	2691	10′
50′	2747	2803	2859	2916	2972	3029	3086	3143	3200	4.3257	13°00′
77°00′	4.3315	3372	3430	3488	3546	3604	3662	3721	3779	3838	50′
10′	3897	3956	4015	4075	4134	4194	4253	4313	4373	4434	40′
20′	4494	4555	4615	4676	4737	4799	4860	4922	4983	5045	30′
30′	5107	5169	5232	5294	5357	5420	5483	5546	5609	5673	20′
40′	5736	5800	5864	5928	5993	6057	6122	6187	6252	6317	10′
50′	6382	6448	6514	6580	6646	6712	6779	6845	6912	4.6979	12°00′
78°00′	4.7046	7114	7181	7249	7317	7385	7453	7522	7591	7659	50′
10′	7729	7798	7867	7937	8007	8077	8147	8218	8288	8359	40′
20′	8430	8501	8573	8644	8716	8788	8860	8933	9006	9078	30′
30′	9152	9225	9298	9372	9446	9520	9594	9669	9744	9819	20′
40′	9894	9969	*0045	*0121	*0197	*0273	*0350	*0427	*0504	5.0581	10′
50′	5.0658	0736	0814	0892	0970	1049	1128	1207	1286	5.1366	11°00′
79°00′	5.1446	1526	1606	1686	1767	1848	1929	2011	2092	2174	50′
10′	2257	2339	2422	2505	2588	2672	2755	2839	2924	3008	40′
20′	3093	3178	3263	3349	3435	3521	3607	3694	3781	3868	30′
30′	3955	4043	4131	4219	4308	4397	4486	4575	4665	4755	20′
40′	4845	4936	5026	5118	5209	5301	5393	5485	5578	5671	10′
50′	5764	5857	5951	6045	6140	6234	6329	6425	6521	5.6617	10°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数表 ctg φ

tg θ

正切函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
80°00′	5.6713	6809	6906	7004	7101	7199	7297	7396	7495	7594	50′
10′	7694	7794	7894	7994	8095	8197	8298	8400	8502	8605	40′
20′	8708	8811	8915	9019	9124	9228	9333	9439	9545	9651	30′
30′	9758	9865	9972	*0080	*0188	*0296	*0405	*0514	*0624	6.0734	20′
40′	6.0844	0955	1066	1178	1290	1402	1516	1628	1742	1856	10′
50′	1970	2085	2200	2316	2432	2549	2666	2783	2901	6.3019	9°00′
81°00′	6.3138	3257	3376	3496	3617	3737	3859	3980	4103	4225	50′
10′	4348	4472	4596	4721	4846	4971	5097	5223	5350	5478	40′
20′	5606	5734	5863	5992	6122	6252	6383	6514	6646	6779	30′
30′	6912	7045	7179	7313	7448	7584	7720	7856	7994	8131	20′
40′	8260	8408	8548	8687	8828	8969	9110	9252	9395	9538	10′
50′	9682	9827	9972	*0117	*0264	*0410	*0558	*0706	*0855	7.1004	8°00′
82°00′	7.1154	1304	1455	1607	1759	1912	2066	2220	2375	2531	50′
10′	2687	2844	3002	3160	3319	3479	3639	3800	3962	4124	40′
20′	4287	4451	4615	4781	4947	5114	5281	5449	5618	5787	30′
30′	5958	6129	6301	6473	6647	6821	6996	7171	7348	7525	20′
40′	7704	7882	8062	8243	8424	8606	8789	8973	9158	9344	10′
50′	9530	9718	9906	*0095	*0285	*0476	*0667	*0860	*1054	8.1248	7°00′
83°00′	8.1443	1640	1837	2035	2234	2434	2636	2838	3041	3245	50′
10′	3450	3656	3863	4071	4280	4490	4701	4913	5126	5340	40′
20′	5555	5772	5989	6208	6427	6648	6870	7093	7317	7542	30′
30′	7769	7996	8225	8455	8686	8919	9152	9387	9623	8.9860	20′
40′	9.0098	0338	0579	0821	1065	1309	1555	1803	2052	2302	10′
50′	2553	2806	3060	3315	3572	3831	4090	4352	4614	9.4878	6°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	
84°00′	9.5144	5411	5679	5949	6220	6493	6768	7044	7322	7601	50′
10′	7882	8164	8448	8734	9021	9310	9601	9893	10.019	10.048	40′
20′	10.078	10.108	10.138	10.168	10.199	10.229	10.260	10.291	10.322	10.354	30′
30′	10.385	10.417	10.449	10.481	10.514	10.546	10.579	10.612	10.645	10.678	20′
40′	10.712	10.746	10.780	10.814	10.848	10.883	10.918	10.953	10.988	11.024	10′
50′	11.059	11.095	11.132	11.168	11.205	11.242	11.279	11.316	11.354	11.392	5°00′
85°00′	11.430	11.468	11.507	11.546	11.585	11.625	11.664	11.705	11.745	11.785	50′
10′	11.826	11.867	11.909	11.950	11.992	12.035	12.077	12.120	12.163	12.207	40′
20′	12.251	12.295	12.339	12.384	12.429	12.474	12.520	12.566	12.612	12.659	30′
30′	12.706	12.754	12.801	12.850	12.898	12.947	12.996	13.046	13.096	13.146	20′
40′	13.197	13.248	13.300	13.352	13.404	13.457	13.510	13.563	13.617	13.672	10′
50′	13.727	13.782	13.838	13.894	13.951	14.008	14.065	14.124	11.182	14.241	4°00′
86°00′	14.301	14.361	14.421	14.482	14.544	14.606	14.669	14.732	14.795	14.860	50′
10′	14.924	14.990	15.056	15.122	15.189	15.257	15.325	15.394	15.464	15.534	40′
20′	15.605	15.676	15.748	15.821	15.895	15.969	16.043	16.119	16.195	16.272	30′
30′	16.350	16.428	16.507	16.587	16.668	16.750	16.832	16.915	16.999	17.084	20′
40′	17.169	17.256	17.343	17.431	17.521	17.611	17.702	17.793	17.886	17.980	10′
50′	18.075	18.171	18.268	18.366	18.464	18.564	18.666	18.768	18.871	18.976	3°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数表 $\text{ctg}\,\varphi$

tg θ

正切函数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
87°00′	19.081	19.188	19.296	19.405	19.516	19.627	19.740	19.855	19.970	20.087	50′
10′	20.206	20.325	20.446	20.569	20.693	20.819	20.946	21.075	21.205	21.337	40′
20′	21.470	21.606	21.743	21.881	22.022	22.164	22.308	22.454	22.602	22.752	30′
30′	22.904	23.058	23.214	23.372	23.532	23.695	23.859	24.026	24.196	24.368	20′
40′	24.542	24.719	24.898	25.080	25.264	25.452	25.642	25.835	26.031	26.230	10′
50′	26.432	26.637	26.845	27.057	27.271	27.490	27.712	27.937	28.166	28.399	2°00′
88°00′	28.636	28.877	29.122	29.371	29.624	29.882	30.145	30.412	30.683	30.960	50′
10′	31.242	31.528	31.821	32.118	32.421	32.730	33.045	33.366	33.694	34.027	40′
20′	34.368	34.715	35.070	35.431	35.801	36.178	36.563	36.956	37.358	37.769	30′
30′	38.188	38.618	39.057	39.506	39.965	40.436	40.917	41.411	41.916	42.433	20′
40′	42.964	43.508	44.066	44.639	45.226	45.829	46.449	47.085	47.740	48.412	10′
50′	49.104	49.816	50.549	51.303	52.081	52.882	53.709	54.561	55.442	56.351	1°00′
89°00′	57.290	58.261	59.266	60.306	61.383	62.499	63.657	64.858	66.105	67.402	50′
10′	68.750	70.153	71.615	73.139	74.729	76.390	78.126	79.943	81.847	83.844	40′
20′	85.940	88.144	90.463	92.908	95.489	98.218	101.11	104.17	107.43	110.89	30′
30′	114.59	118.54	122.77	127.32	132.22	137.51	143.24	149.47	156.26	163.70	20′
40′	171.89	180.93	190.98	202.22	214.86	229.18	245.55	264.44	286.48	312.52	10′
50′	343.77	381.97	429.72	491.11	572.96	687.55	859.44	1145.9	1718.9	3437.7	0°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数表

ctg φ

正弦函数表

sin α 0～π/2 弧度

α 弧度	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0699	0799	0.0899
0.1	0998	1098	1197	1296	1395	1494	1593	1692	1790	1889
0.2	1987	2085	2182	2280	2377	2474	2571	2667	2764	2860
0.3	2955	3051	3146	3240	3335	3429	3523	3616	3709	3802
0.4	3894	3986	4078	4169	4259	4350	4439	4529	4618	4706
0.5	0.4794	4882	4969	5055	5141	5227	5312	5396	5480	0.5564
0.6	5646	5729	5810	5891	5972	6052	6131	6210	6286	6365
0.7	6442	6518	6594	6669	6743	6816	6889	6961	7033	7104
0.8	7174	7243	7311	7379	7446	7513	7578	7643	7707	7771
0.9	7833	7895	7956	8016	8076	8134	8192	8249	8305	8360
1.0	0.8415	8468	8521	8573	8624	8674	8724	8772	8820	0.8866
1.1	8912	8957	9001	9044	9086	9128	9168	6108	9246	9284
1.2	9320	9356	9391	9425	9458	9490	9521	9551	9580	9608
1.3	9636	9662	9687	9711	9735	9757	9779	9799	9819	9837
1.4	9854	9871	9837	9901	9915	9927	9939	9949	9959	9967
1.5	0.9975	9982	9987	9992	9995	9998	9999	1.000	1.000	0.9998

对于任意角，可用下列π和$\frac{\pi}{2}$的倍值来计算其三角函数

n	$n\cdot\frac{\pi}{2}$	$n\cdot\pi$
1	1.5708	3.1416
2	3.1416	6.2832
3	4.7124	9.4248
4	6.2832	12.5664
5	7.8540	15.7080
6	9.4248	18.8496
7	10.9956	21.9912
8	12.5664	25.1327
9	14.1372	28.2743
10	15.7080	31.4159

例 1 $\sin 7.5=\sin\left(5\times\frac{\pi}{2}-0.3540\right)$

$=\cos(0.3540)\approx 0.9380$

(用线性插值法)

例 2 $\sin 29=\sin(9\pi+0.7257)$

$=-\sin(0.7257)\approx -0.6637$

(用线性插值法)

余弦函数表

cos α $0\sim\pi/2$ 弧度

α 弧度	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.0000	0000	*9998	*9996	*9992	*9988	*9982	*9976	*9968	*0.9960
0.1	0.9950	9940	9928	9916	9902	9888	9872	9856	9838	9820
0.2	9801	9780	9759	9737	9713	9689	9664	9638	9611	9582
0.3	9553	9523	9492	9460	9428	9394	9359	9323	9287	9249
0.4	9211	9174	9131	9090	9048	9004	8961	8916	8870	8823
0.5	0.8776	8727	8678	8628	8577	8525	8473	8419	8365	0.8309
0.6	8253	8196	8139	8080	8021	7961	7900	7838	7776	7712
0.7	7648	7584	7518	7452	7385	7317	7248	7179	7109	7038
0.8	6967	6895	6822	6749	6675	6600	6524	6448	6372	6294
0.9	6216	6137	6058	5978	5898	5817	5735	5653	5570	5487
1.0	0.5403	5319	5234	5148	5062	4976	4889	4801	4713	0.4625
1.1	4536	4447	4357	4267	4176	4085	3993	3902	3809	3717
1.2	3624	3530	3436	3342	3248	3153	3058	2963	2867	2771
1.3	2675	2579	2482	2385	2288	2190	2092	1994	1896	1798
1.4	1700	1601	1502	1403	1304	1205	1106	1006	0907	0807
1.5	0.0707	0608	0508	0408	0308	0208	0108	0008	*0092	−0.0192

正切函数表

tg α　　　　0～π/2 弧度

α 弧度	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0100	0200	0300	0400	0500	0601	0701	0802	0.0902
0.1	1003	1104	1206	1307	1409	1511	1614	1717	1820	1923
0.2	2027	2131	2236	2341	2447	2553	2660	2768	2876	2984
0.3	3093	3203	3314	3425	3537	3650	3764	3879	3994	4111
0.4	4228	4346	4466	4586	4708	4831	4954	5080	5206	5334
0.5	0.5463	5594	5726	5859	5994	6131	6269	6410	6552	6696
0.6	6841	6989	7139	7291	7445	7602	7761	7923	8087	8253
0.7	8423	8595	8771	8949	9131	9316	9505	9697	9893	1.0092
0.8	1.0296	0505	0717	0934	1156	1383	1616	1853	2097	2346
0.9	2602	2864	3133	3409	3692	3984	4284	4592	4910	5237
1.0	1.5574	5922	6281	6652	7036	7433	7844	8270	8712	1.9171
1.1	1.9648	2.0143	2.0660	2.1198	2.1759	2.2345	2.2958	2.3600	2.4273	2.4979
1.2	2.5722	2.6503	2.7328	2.8198	2.9119	3.0096	3.1133	3.2236	3.3413	3.4672
1.3	3.6021	3.7471	3.9033	4.0723	4.2556	4.4552	4.6734	4.9131	5.1774	5.4707
1.4	5.7979	6.1654	6.5811	7.0555	7.6018	8.2381	8.9886	9.8874	10.983	12.350
1.5	14.101	16.428	19.670	24.498	32.461	48.078	92.620	1225.8	-108.65	-52.067

9. 常用对数表

lg*N*

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
115	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
117	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	07 918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
121	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
123	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
125	09 691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	11 394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001
135	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
138	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582

插值部分

	44	43	42	41	40
1	4.4	4.3	4.2	4.1	4.0
2	8.8	8.6	8.4	8.2	8.0
3	13.2	12.9	12.6	12.3	12.0
4	17.6	17.2	16.8	16.4	16.0
5	22.0	21.5	21.0	20.5	20.0
6	26.4	25.8	25.2	24.6	24.0
7	30.8	30.1	29.4	28.7	28.0
8	35.2	34.4	33.6	32.8	32.0
9	39.6	38.7	37.8	36.9	36.0

	39	38	37	36	35
1	3.9	3.8	3.7	3.6	3.5
2	7.8	7.6	7.4	7.2	7.0
3	11.7	11.4	11.1	10.8	10.5
4	15.6	15.2	14.8	14.4	14.0
5	19.5	19.0	18.5	18.0	17.5
6	23.4	22.8	22.2	21.6	21.0
7	27.3	26.6	25.9	25.2	24.5
8	31.2	30.4	29.6	28.8	28.0
9	35.1	34.2	33.5	32.4	31.5

	34	33	32	31	30
1	3.4	3.3	3.2	3.1	3.0
2	6.8	6.6	6.4	6.2	6.0
3	10.2	9.9	9.6	9.3	9.0
4	13.6	13.2	12.8	12.4	12.0
5	17.0	16.5	16.0	15.5	15.0
6	20.4	19.8	19.2	18.6	18.0
7	23.8	23.1	22.4	21.7	21.0
8	27.2	26.4	25.6	24.8	24.0
9	30.6	29.7	28.8	27.9	27.0

[常用对数表说明]

1° 该表误差不超过0.00001。

2° 表中*号含义：例如主表中第三行

860　903　945　988　*030　*072　*115　*157　*199　*242

其中　988　表示尾数是　.00988

*030　表示尾数是　.01030

3° 插值部分的用法见1213页。

常用对数表

$\lg N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
140	14 613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
141	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198
142	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
144	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
145	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
146	435	465	495	524	554	584	613	613	673	702
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
149	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
151	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
152	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
154	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005
155	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
156	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
157	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
158	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
159	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160	20 412	439	466	493	520	548	575	602	629	656
161	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
162	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
163	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
165	21 748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
166	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
173	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030
174	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
175	24 304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503

插值部分

	31	30	29	28
1	3.1	3.0	2.9	2.8
2	6.2	6.0	5.8	5.6
3	9.3	9.0	8.7	8.4
4	12.4	12.0	11.6	11.2
5	15.5	15.0	14.5	14.0
6	18.6	18.0	17.4	16.8
7	21.7	21.0	20.3	19.6
8	24.8	24.0	23.2	22.4
9	27.9	27.0	26.1	25.2

	27	26	25	24
1	2.7	2.6	2.5	2.4
2	5.4	5.2	5.0	4.8
3	8.1	7.8	7.5	7.2
4	10.8	10.4	10.0	9.6
5	13.5	13.0	12.5	12.0
6	16.2	15.6	15.0	14.4
7	18.9	18.2	17.5	16.8
8	21.6	20.8	20.0	19.2
9	24.3	23.4	22.5	21.6

〔"插值部分"用法〕 当求一个具有四位有效数字的正数的常用对数时，不需要插值部分，只要查主表(左)的对数尾数就可以了．如果求一个具有五位有效数字的正数的常用对数，则需用插值部分的数值将从主表中查到的尾数加以修正．

例　已知 $N=176.37$，求 $\lg N$．

解　首先在主表(左)中，从列表头找到 **176**，从行表头找到 **3** 和 **4**，分别得到对应的尾数

24625　　　　　24650

则尾数之差为 25，它对应插值部分的行表头 **25**．

N 的第五位有效数字 **7** 对应插值部分的列表头 **7**．**7** 所在的行与 25 所在的列的交点数值为 **17.5**，这就是所需要的插值部分，因此 17637 对应的常用对数尾数为

$$24625+17.5=24642.5$$

于是得到

$$\lg 176.37\approx 2.246425$$

常用对数表

lg$N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
180	25 527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
182	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
183	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
185	26 717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
186	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161
187	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
188	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
189	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	27 875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
191	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
192	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
193	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
194	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
195	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
196	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
197	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
198	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
199	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298
201	320	341	363	384	406	428	449	471	492	514
202	535	557	578	600	621	643	664	685	707	728
203	750	771	792	814	835	856	878	899	920	942
204	963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154
205	31 175	197	218	239	260	281	302	323	345	366
206	387	408	429	450	471	492	513	534	555	576
207	597	618	639	660	681	702	723	744	765	785
208	806	827	848	869	890	911	931	952	973	994
209	32 015	035	056	077	098	118	139	160	181	201
210	32 222	243	263	284	305	325	346	366	387	408
211	428	449	469	490	510	531	552	572	593	613
212	634	654	675	695	715	736	756	777	797	818
213	838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021
214	33 041	062	082	102	122	143	163	183	203	224
215	33 244	264	284	304	325	345	365	385	405	425
216	445	465	486	506	526	546	566	586	606	626
217	646	666	686	706	726	746	766	786	806	826
218	846	866	885	905	925	945	965	985	*005	*025
219	34 044	064	084	104	124	143	163	183	203	223

插值部分

	25	24	23	22	21	20
1	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0
2	5.0	4.8	4.6	4.4	4.2	4.0
3	7.5	7.2	6.9	6.6	6.3	6.0
4	10.0	9.6	9.2	8.8	8.4	8.0
5	12.5	12.0	11.5	11.0	10.5	10.0
6	15.0	14.4	13.8	13.2	12.6	12.0
7	17.5	16.8	16.1	15.4	14.7	14.0
8	20.0	19.2	18.4	17.6	16.8	16.0
9	22.5	21.6	20.7	19.8	18.9	18.0

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
220	34 242	262	282	301	321	341	361	380	400	420
221	439	459	479	498	518	537	557	577	596	616
222	635	655	674	694	713	733	753	772	792	811
223	830	850	869	889	908	928	947	967	986	*005
224	35 025	044	064	083	102	122	141	160	180	199
225	35 218	238	257	276	295	315	334	353	372	392
226	411	430	449	468	488	507	526	545	564	583
227	603	622	641	660	679	698	717	736	755	774
228	793	813	832	851	870	889	908	927	946	965
229	984	*003	*021	*040	*059	*078	*097	*116	*135	*154
230	36 173	192	211	229	248	267	286	305	324	342
231	361	380	399	418	436	455	474	493	511	530
232	549	568	586	605	624	642	661	680	698	717
233	736	754	773	791	810	829	847	866	884	903
234	922	940	959	977	996	*014	*033	*051	*070	*088
235	37 107	125	144	162	181	199	218	236	254	273
236	291	310	328	346	365	383	401	420	438	457
237	475	493	511	530	548	566	585	603	621	639
238	658	676	694	712	731	749	767	785	803	822
239	840	858	876	894	912	931	949	967	985	*003
240	38 021	039	057	075	093	112	130	148	166	184
241	202	220	238	256	274	292	310	328	346	364
242	382	399	417	435	453	471	489	507	525	543
243	561	578	596	614	632	650	668	686	703	721
244	739	757	775	792	810	828	846	863	881	899
245	38 917	934	952	970	987	*005	*023	*041	*058	*076
246	39 094	111	129	146	164	182	199	217	235	252
247	270	287	305	322	340	358	375	393	410	428
248	445	463	480	498	515	533	550	568	585	602
249	620	637	655	672	690	707	724	742	759	777
250	39 794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
251	967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123
252	40 140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
253	312	329	346	364	381	398	415	432	449	466
254	483	500	518	535	552	569	586	603	620	637
255	40 654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
256	824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
257	993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145
258	41 162	179	196	212	229	246	263	280	296	313
259	330	347	363	380	397	414	430	447	464	481

插值部分

	20	19
1	2.0	1.9
2	4.0	3.8
3	6.0	5.7
4	8.0	7.6
5	10.0	9.5
6	12.0	11.4
7	14.0	13.3
8	16.0	15.2
9	18.0	17.1

	18	17
1	1.8	1.7
2	3.6	3.4
3	5.4	5.1
4	7.2	6.8
5	9.0	8.5
6	10.8	10.2
7	12.6	11.9
8	14.4	13.6
9	16.2	15.3

	16
1	1.6
2	3.2
3	4.8
4	6.4
5	8.0
6	9.6
7	11.2
8	12.8
9	14.4

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
260	41 497	514	531	547	564	581	597	614	631	647
261	664	681	697	714	731	747	764	780	797	814
262	830	847	863	880	896	913	929	946	963	979
263	996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144
264	42 160	177	193	210	226	243	259	275	292	308
265	42 325	341	357	374	390	406	423	439	455	472
266	488	504	521	537	553	570	586	602	619	635
267	651	667	684	700	716	732	749	765	781	797
268	813	830	846	862	878	894	911	927	943	959
269	975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120
270	43 136	152	169	185	201	217	233	249	265	281
271	297	313	329	345	361	377	393	409	425	441
272	457	473	489	505	521	537	553	569	584	600
273	616	632	648	664	680	696	712	727	743	759
274	775	791	807	823	838	854	870	886	902	917
275	43 933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075
276	44 091	107	122	138	154	170	185	201	217	232
277	248	264	279	295	311	326	342	358	373	389
278	404	420	436	451	467	483	498	514	529	545
279	560	576	592	607	623	638	654	669	685	700
280	44 716	731	747	762	778	793	809	824	840	855
281	871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010
282	45 025	040	056	071	086	102	117	133	148	163
283	179	194	209	225	240	255	271	286	301	317
284	332	347	362	378	393	408	423	439	454	469
285	45 484	500	515	530	545	561	576	591	606	621
286	637	652	667	682	697	712	728	743	758	773
287	788	803	818	834	849	864	879	894	909	924
288	939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075
289	46 090	105	120	135	150	165	180	195	210	225
290	46 240	255	270	285	300	315	330	345	359	374
291	389	404	419	434	449	464	479	494	509	523
292	538	553	568	583	598	613	627	642	657	672
293	687	702	716	731	746	761	776	790	805	820
294	835	850	864	879	894	909	923	938	953	967
295	46 982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114
296	47 129	144	159	173	188	202	217	232	246	261
297	276	290	305	319	334	349	363	378	392	407
298	422	436	451	465	480	494	509	524	538	553
299	567	582	596	611	625	640	654	669	683	698

插值部分

	18	17
1	1.8	1.7
2	3.6	3.4
3	5.4	5.1
4	7.2	6.8
5	9.0	8.5
6	10.8	10.2
7	12.6	11.9
8	14.4	13.6
9	16.2	15.3

	16	15
1	1.6	1.5
2	3.2	3.0
3	4.8	4.5
4	6.4	6.0
5	8.0	7.5
6	9.6	9.0
7	11.2	10.5
8	12.8	12.0
9	14.4	13.5

	14
1	1.4
2	2.8
3	4.2
4	5.6
5	7.0
6	8.4
7	9.8
8	11.2
9	12.6

$\lg e \approx 0.43429$

常用对数表

lg *N*

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47 712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
301	857	871	885	900	914	929	943	958	972	986
302	48 001	015	029	044	058	073	087	101	116	130
303	144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
304	287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
305	48 430	444	458	473	487	501	515	530	544	558
306	572	586	601	615	629	643	657	671	686	700
307	714	728	742	756	770	785	799	813	827	841
308	855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
309	996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122
310	49 136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
311	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313	554	568	582	596	610	624	638	651	665	679
314	693	707	721	734	748	762	776	790	803	817
315	49 831	845	859	872	886	900	914	927	941	955
316	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501
320	50 515	529	542	556	569	583	596	610	623	637
321	651	664	678	691	705	718	732	745	759	772
322	786	799	813	826	840	853	866	880	893	907
323	920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041
324	51 055	068	081	095	108	121	135	148	162	175
325	51 188	202	215	228	242	255	268	282	295	308
326	322	335	348	362	375	388	402	415	428	441
327	455	468	481	495	508	521	534	548	561	574
328	587	601	614	627	640	654	667	680	693	706
329	720	733	746	759	772	786	799	812	825	838
330	51 851	865	878	891	904	917	930	943	957	970
331	983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101
332	52 114	127	140	153	166	179	192	205	218	231
333	244	257	270	284	297	310	323	336	349	362
334	375	388	401	414	427	440	453	466	479	492
335	52 504	517	530	543	556	569	582	595	608	621
336	634	647	660	673	686	699	711	724	737	750
337	763	776	789	802	815	827	840	853	866	879
338	892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007
339	53 020	033	046	058	071	084	097	110	122	135

插值部分

	15	**14**
1	1.5	1.4
2	3.0	2.8
3	4.5	4.2
4	6.0	5.6
5	7.5	7.0
6	9.0	8.4
7	10.5	9.8
8	12.0	11.2
9	13.5	12.6

	13	**12**
1	1.3	1.2
2	2.6	2.4
3	3.9	3.6
4	5.2	4.8
5	6.5	6.0
6	7.8	7.2
7	9.1	8.4
8	10.4	9.6
9	11.7	10.8

$\lg \pi \approx 0.49715$

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
340	53 148	161	173	186	199	212	224	237	250	263
341	275	288	301	314	326	339	352	364	377	390
342	403	415	428	441	453	466	479	491	504	517
343	529	542	555	567	580	593	605	618	631	643
344	656	668	681	694	706	719	732	744	757	769
345	53 782	794	807	820	832	845	857	870	882	895
346	908	920	933	945	958	970	983	995	*008	*020
347	54 033	045	058	070	083	095	108	120	133	145
348	158	170	183	195	208	220	233	245	258	270
349	283	295	307	320	332	345	357	370	382	394
350	54 407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
351	531	543	555	568	580	593	605	617	630	642
352	654	667	679	691	704	716	728	741	753	765
353	777	790	802	814	827	839	851	864	876	888
354	900	913	925	937	949	962	974	986	998	*011
355	55 023	035	047	060	072	084	096	108	121	133
356	145	157	169	182	194	206	218	230	242	255
357	267	279	291	303	315	328	340	352	364	376
358	388	400	413	425	437	449	461	473	485	497
359	509	522	534	546	558	570	582	594	606	618
360	55 630	642	654	666	678	691	703	715	727	739
361	751	763	775	787	799	811	823	835	847	859
362	871	883	895	907	919	931	943	955	967	979
363	991	*003	*015	*027	*038	*050	*062	*074	*086	*098
364	56 110	122	134	146	158	170	182	194	205	217
365	56 229	241	253	265	277	289	301	312	324	336
366	348	360	372	384	396	407	419	431	443	455
367	467	478	490	502	514	526	538	549	561	573
368	585	597	608	620	632	644	656	667	679	691
369	703	714	726	738	750	761	773	785	797	808
370	56 820	832	844	855	867	879	891	902	914	926
371	937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*043
372	57 054	066	078	089	101	113	124	136	148	159
373	171	183	194	206	217	229	241	252	264	276
374	287	299	310	322	334	345	357	368	380	392
375	57 403	415	426	438	449	461	473	484	496	507
376	519	530	542	553	565	576	588	600	611	623
377	634	646	657	669	680	692	703	715	726	738
378	749	761	772	784	795	807	818	830	841	852
379	864	875	887	898	910	921	933	944	955	967

插值部分

	13
1	1.3
2	2.6
3	3.9
4	5.2
5	6.5
6	7.8
7	9.1
8	10.4
9	11.7

	12
1	1.2
2	2.4
3	3.6
4	4.8
5	6.0
6	7.2
7	8.4
8	9.6
9	10.8

	11
1	1.1
2	2.2
3	3.3
4	4.4
5	5.5
6	6.6
7	7.7
8	8.8
9	9.9

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
380	57978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081
381	58092	104	115	127	138	149	161	172	184	195
382	206	218	229	240	252	263	274	286	297	309
383	320	331	343	354	365	377	388	399	410	422
384	433	444	456	467	478	490	501	512	524	535
385	58546	557	569	580	591	602	614	625	636	647
386	659	670	681	692	704	715	726	737	749	760
387	771	782	794	805	816	827	838	850	861	872
388	883	894	906	917	928	939	950	961	973	984
389	995	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095
390	59106	118	129	140	151	162	173	184	195	207
391	218	229	240	251	262	273	284	295	306	318
392	329	340	351	362	373	384	395	406	417	428
393	439	450	461	472	483	494	506	517	528	539
394	550	561	572	583	594	605	616	627	638	649
395	59660	671	682	693	704	715	726	737	748	759
396	770	780	791	802	813	824	835	846	857	868
397	879	890	901	912	923	934	945	956	966	977
398	988	999	*010	*021	*032	*043	*054	*065	*076	*086
399	60097	108	119	130	141	152	163	173	184	195
400	60206	217	228	239	249	260	271	282	293	304
401	314	325	336	347	358	369	379	390	401	412
402	423	433	444	455	466	477	487	498	509	520
403	531	541	552	563	574	584	595	606	617	627
404	638	649	660	670	681	692	703	713	724	735
405	60746	756	767	778	788	799	810	821	831	842
406	853	863	874	885	895	906	917	927	938	949
407	959	970	981	991	*002	*013	*023	*034	*045	*055
408	61066	077	087	098	109	119	130	140	151	162
409	172	183	194	204	215	225	236	247	257	268
410	61278	289	300	310	321	331	342	352	363	374
411	384	395	405	416	426	437	448	458	469	479
412	490	500	511	521	532	542	553	563	574	584
413	595	606	616	627	637	648	658	669	679	690
414	700	711	721	731	742	752	763	773	784	794
415	61805	815	826	836	847	857	868	878	888	899
416	909	920	930	941	951	962	972	982	993	*003
417	62014	024	034	045	055	066	076	086	097	107
418	118	128	138	149	159	170	180	190	201	211
419	221	232	242	252	263	273	284	294	304	315

插值部分

	12
1	1.2
2	2.4
3	3.6
4	4.8
5	6.0
6	7.2
7	8.4
8	9.6
9	10.8

	11
1	1.1
2	2.2
3	3.3
4	4.4
5	5.5
6	6.6
7	7.7
8	8.8
9	9.9

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
420	62 325	335	346	356	366	377	387	397	408	418
421	428	439	449	459	469	480	490	500	511	521
422	531	542	552	562	572	583	593	603	613	624
423	634	644	655	665	675	685	696	706	716	726
424	737	747	757	767	778	788	798	808	818	829
425	62 839	849	859	870	880	890	900	910	921	931
426	941	951	961	972	982	992	*002	*012	*022	*033
427	63 043	053	063	073	083	094	104	114	124	134
428	144	155	165	175	185	195	205	215	225	236
429	246	256	266	276	286	296	306	317	327	337
430	63 347	357	367	377	387	397	407	417	428	438
431	448	458	468	478	488	498	508	518	528	538
432	548	558	568	579	589	599	609	619	629	639
433	649	659	669	679	689	699	709	719	729	739
434	749	759	769	779	789	799	809	819	829	839
435	63 849	859	869	879	889	899	909	919	929	939
436	949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038
437	64 048	058	068	078	088	098	108	118	128	137
438	147	157	167	177	187	197	207	217	227	237
439	246	256	266	276	286	296	306	316	326	335
440	64 345	355	365	375	385	395	404	414	424	434
441	444	454	464	473	483	493	503	513	523	532
442	542	552	562	572	582	591	601	611	621	631
443	640	650	660	670	680	689	699	709	719	729
444	738	748	758	768	777	787	797	807	816	826
445	64 836	846	856	865	875	885	895	904	914	924
446	933	943	953	963	972	982	992	*002	*011	*021
447	65 031	040	050	060	070	079	089	099	108	118
448	128	137	147	157	167	176	186	196	205	215
449	225	234	244	254	263	273	283	292	302	312
450	65 321	331	341	350	360	369	379	389	398	408
451	418	427	437	447	456	466	475	485	495	504
452	514	523	533	543	552	562	571	581	591	600
453	610	619	629	639	648	658	667	677	686	696
454	706	715	725	734	744	753	763	772	782	792
455	65 801	811	820	830	839	849	858	868	877	887
456	896	906	916	925	935	944	954	963	973	982
457	992	*001	*011	*020	*030	*039	*049	*058	*068	*077
458	66 087	096	105	115	124	134	143	153	162	172
459	181	191	200	210	219	229	238	247	257	266

插值部分

	11	10	9
1	1.1	1.0	0.9
2	2.2	2.0	1.8
3	3.3	3.0	2.7
4	4.4	4.0	3.6
5	5.5	5.0	4.5
6	6.6	6.0	5.4
7	7.7	7.0	6.3
8	8.8	8.0	7.2
9	9.9	9.0	8.1

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
460	66 276	285	295	304	314	323	332	342	351	361
461	370	380	389	398	408	417	427	436	445	455
462	464	474	483	492	502	511	521	530	539	549
463	558	567	577	586	596	605	614	624	633	642
464	652	661	671	680	689	699	708	717	727	736
465	66 745	755	764	773	783	792	801	811	820	829
466	839	848	857	867	876	885	894	904	913	922
467	932	941	950	960	969	978	987	997	*006	*015
468	67 025	034	043	052	062	071	080	089	099	108
469	117	127	136	145	154	164	173	182	191	201
470	67 210	219	228	237	247	256	265	274	284	293
471	302	311	321	330	339	348	357	367	376	385
472	394	403	413	422	431	440	449	459	468	477
473	486	495	504	514	523	532	541	550	560	569
474	578	587	596	605	614	624	633	642	651	660
475	67 669	679	688	697	706	715	724	733	742	752
476	761	770	779	788	797	806	815	825	834	843
477	852	861	870	879	888	897	906	916	925	934
478	943	952	961	970	979	988	997	*006	*015	*024
479	68 034	043	052	061	070	079	088	097	106	115
480	68 124	133	142	151	160	169	178	187	196	205
481	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296
482	305	314	323	332	341	350	359	368	377	386
483	395	404	413	422	431	440	449	458	467	476
484	485	494	502	511	520	529	538	547	556	565
485	68 574	583	592	601	610	619	628	637	646	655
486	664	673	681	690	699	708	717	726	735	744
487	753	762	771	780	789	797	806	815	824	833
488	842	851	860	869	878	886	895	904	913	922
489	931	940	949	958	966	975	984	993	*002	*011
490	69 020	028	037	046	055	064	073	082	090	099
491	108	117	126	135	144	152	161	170	179	188
492	197	205	214	223	232	241	249	258	267	276
493	285	294	302	311	320	329	338	346	355	364
494	373	381	390	399	408	417	425	434	443	452
495	69 461	469	478	487	496	504	513	522	531	539
496	548	557	566	574	583	592	601	609	618	627
497	636	644	653	662	671	679	688	697	705	714
498	723	732	740	749	758	767	775	784	793	801
499	810	819	827	836	845	854	862	871	880	888

插值部分

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69 897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
501	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
502	70 070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
503	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
504	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
505	70 329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
506	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
507	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
508	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
509	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	70 757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
511	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
512	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
513	71 012	020	029	037	046	054	063	071	079	088
514	096	105	113	122	130	139	147	155	164	172
515	71 181	189	198	206	214	223	231	240	248	257
516	265	273	282	290	299	307	315	324	332	341
517	349	357	366	374	383	391	399	408	416	425
518	433	441	450	458	466	475	483	492	500	508
519	517	525	533	542	550	559	567	575	584	592
520	71 600	609	617	625	634	642	650	659	667	675
521	684	692	700	709	717	725	734	742	750	759
522	767	775	784	792	800	809	817	825	834	842
523	850	858	867	875	883	892	900	908	917	925
524	933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008
525	72 016	024	032	041	049	057	066	074	082	090
526	099	107	115	123	132	140	148	156	165	173
527	181	189	198	206	214	222	230	239	247	255
528	263	272	280	288	296	304	313	321	329	337
529	346	354	362	370	378	387	395	403	411	419
530	72 428	436	444	452	460	469	477	485	493	501
531	509	518	526	534	542	550	558	567	575	583
532	591	599	607	616	624	632	640	648	656	665
533	673	681	689	697	705	713	722	730	738	746
534	754	762	770	779	787	795	803	811	819	827
535	72 835	843	852	860	868	876	884	892	900	908
536	916	925	933	941	949	957	965	973	981	989
537	997	*006	*014	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070
538	73 078	086	094	102	111	119	127	135	143	151
539	159	167	175	183	191	199	207	215	223	231

插值部分

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
540	73 239	247	255	263	272	280	288	296	304	312
541	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392
542	400	408	416	424	432	440	448	456	464	472
543	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552
544	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632
545	73 640	648	656	664	672	679	687	695	703	711
546	719	727	735	743	751	759	767	775	783	791
547	799	807	815	823	830	838	846	854	862	870
548	878	886	894	902	910	918	926	933	941	949
549	957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
551	115	123	131	139	147	155	162	170	178	186
552	194	202	210	218	225	233	241	249	257	265
553	273	280	288	296	304	312	320	327	335	343
554	351	359	367	374	382	390	398	406	414	421
555	74 429	437	445	453	461	468	476	484	492	500
556	507	515	523	531	539	547	554	562	570	578
557	586	593	601	609	617	624	632	640	648	656
558	663	671	679	687	695	702	710	718	725	733
559	741	749	757	764	772	780	788	796	803	811
560	74 819	827	834	842	850	858	865	873	881	889
561	896	904	912	920	927	935	943	950	958	966
562	974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*043
563	75 051	059	066	074	082	089	097	105	113	120
564	128	136	143	151	159	166	174	182	189	197
565	75 205	213	220	228	236	243	251	259	266	274
566	282	289	297	305	312	320	328	335	343	351
567	358	366	374	381	389	397	404	412	420	427
568	435	442	450	458	465	473	481	488	496	504
569	511	519	526	534	542	549	557	565	572	580
570	75 587	595	603	610	618	626	633	641	648	656
571	664	671	679	686	694	702	709	717	724	732
572	740	747	755	762	770	778	785	793	800	808
573	815	823	831	838	846	853	861	868	876	884
574	891	899	906	914	921	929	937	944	952	959
575	75 967	974	982	989	997	*005	*012	*020	*027	*035
576	76 042	050	057	065	072	080	087	095	103	110
577	118	125	133	140	148	155	163	170	178	185
578	193	200	208	215	223	230	238	245	253	260
579	268	275	283	290	298	305	313	320	328	335

插值部分

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
580	76343	350	358	365	373	380	388	395	403	410
581	418	425	433	440	448	455	462	470	477	485
582	492	500	507	515	522	530	537	545	552	559
583	567	574	582	589	597	604	612	619	626	634
584	641	649	656	664	671	678	686	693	701	708
585	76716	723	730	738	745	753	760	768	775	782
586	790	797	805	812	819	827	834	842	849	856
587	864	871	879	886	893	901	908	916	923	930
588	938	945	953	960	967	975	982	989	997	*004
589	77012	019	026	034	041	048	056	063	070	078
590	77085	093	100	107	115	122	129	137	144	151
591	159	166	173	181	188	195	203	210	217	225
592	232	240	247	254	262	269	276	283	291	298
593	305	313	320	327	335	342	349	357	364	371
594	379	386	393	401	408	415	422	430	437	444
595	77452	459	466	474	481	488	495	503	510	517
596	525	532	539	546	554	561	568	576	583	590
597	597	605	612	619	627	634	641	648	656	663
598	670	677	685	692	699	706	714	721	728	735
599	743	750	757	764	772	779	786	793	801	808
600	77815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
601	887	895	902	909	916	924	931	938	945	952
602	960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025
603	78032	039	046	053	061	068	075	082	089	097
604	104	111	118	125	132	140	147	154	161	168
605	78176	183	190	197	204	211	219	226	233	240
606	247	254	262	269	276	283	290	297	305	312
607	319	326	333	340	347	355	362	369	376	383
608	390	398	405	412	419	426	433	440	447	455
609	462	469	476	483	490	497	504	512	519	526
610	78533	540	547	554	561	569	576	583	590	597
611	604	611	618	625	633	640	647	654	661	668
612	675	682	689	696	704	711	718	725	732	739
613	746	753	760	767	774	781	789	796	803	810
614	817	824	831	838	845	852	859	866	873	880
615	78888	895	902	909	916	923	930	937	944	951
616	958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021
617	79029	036	043	050	057	064	071	078	085	092
618	099	106	113	120	127	134	141	148	155	162
619	169	176	183	190	197	204	211	218	225	232

插值部分

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
620	79 239	246	253	260	267	274	281	288	295	302
621	309	316	323	330	337	344	351	358	365	372
622	379	386	393	400	407	414	421	428	435	442
623	449	456	463	470	477	484	491	498	505	511
624	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581
625	79 588	595	602	609	616	623	630	637	644	650
626	657	664	671	678	685	692	699	706	713	720
627	727	734	741	748	754	761	768	775	782	789
628	796	803	810	817	824	831	837	844	851	858
629	865	872	879	886	893	900	906	913	920	927
630	79 934	941	948	955	962	969	975	982	989	996
631	80 003	010	017	024	030	037	044	051	058	065
632	072	079	085	092	099	106	113	120	127	134
633	140	147	154	161	168	175	182	188	195	202
634	209	216	223	229	236	243	250	257	264	271
635	80 277	284	291	298	305	312	318	325	332	339
636	346	353	359	366	373	380	387	393	400	407
637	414	421	428	434	441	448	455	462	468	475
638	482	489	496	502	509	516	523	530	536	543
639	550	557	564	570	577	584	591	598	604	611
640	80 618	625	632	638	645	652	659	665	672	679
641	686	693	699	706	713	720	726	733	740	747
642	754	760	767	774	781	787	794	801	808	814
643	821	828	835	841	848	855	862	868	875	882
644	889	895	902	909	916	922	929	936	943	949
645	80 956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017
646	81 023	030	037	043	050	057	064	070	077	084
647	090	097	104	111	117	124	131	137	144	151
648	158	164	171	178	184	191	198	204	211	218
649	224	231	238	245	251	258	265	271	278	285
650	81 291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
651	358	365	371	378	385	391	398	405	411	418
652	425	431	438	445	451	458	465	471	478	485
653	491	498	505	511	518	525	531	538	544	551
654	558	564	571	578	584	591	598	604	611	617
655	81 624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
656	690	697	704	710	717	723	730	737	743	750
657	757	763	770	776	783	790	796	803	809	816
658	823	829	836	842	849	856	862	869	875	882
659	889	895	902	908	915	921	928	935	941	948

插值部分

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
660	81 954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014
661	82 020	027	033	040	046	053	060	066	073	079
662	086	092	099	105	112	119	125	132	138	145
663	151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
664	217	223	230	236	243	249	256	263	269	276
665	82 282	289	295	302	308	315	321	328	334	341
666	347	354	360	367	373	380	387	393	400	406
667	413	419	426	432	439	445	452	458	465	471
668	478	484	491	497	504	510	517	523	530	536
669	543	549	556	562	569	575	532	588	595	601
670	82 607	614	620	627	633	640	616	653	659	666
671	672	679	685	692	698	705	711	718	724	730
672	737	743	750	756	763	769	776	782	739	795
673	802	868	814	821	827	834	840	847	853	860
674	866	872	879	885	892	898	905	911	918	924
675	82 930	937	943	950	956	963	969	975	982	988
676	995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052
677	83 059	065	072	078	085	091	097	104	110	117
678	123	129	136	142	149	155	161	168	174	181
679	187	193	200	206	213	219	225	232	238	245
680	83 251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
681	315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
682	378	385	391	398	404	410	417	423	429	436
683	442	448	455	461	467	474	480	487	493	499
684	506	512	518	525	531	537	544	550	556	563
685	83 569	575	582	588	594	601	607	613	620	626
686	632	639	645	651	658	664	670	677	683	639
687	696	702	708	715	721	727	734	740	746	753
688	759	765	771	778	784	790	797	803	809	816
689	822	828	835	841	847	853	860	866	872	879
690	83 885	891	897	904	910	916	923	929	935	942
691	948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004
692	84 011	017	023	029	036	042	048	055	061	067
693	073	080	086	092	098	105	111	117	123	130
694	136	142	148	155	161	167	173	180	186	192
695	84 198	205	211	217	223	235	236	242	248	255
696	261	267	273	280	286	292	298	305	311	317
697	323	330	336	342	348	354	361	367	373	379
698	386	392	398	404	410	417	423	429	435	442
699	448	454	460	466	473	479	485	491	497	504

插值部分

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84 510	516	522	528	535	541	547	553	559	566
701	572	578	584	590	597	603	609	615	621	628
702	634	640	646	652	658	665	671	677	683	689
703	696	702	708	714	720	726	733	739	745	751
704	757	763	770	776	782	788	794	800	807	813
705	84 819	825	831	837	844	850	856	862	868	874
706	880	887	893	899	905	911	917	924	930	936
707	942	948	954	960	967	973	979	985	991	997
708	85 003	009	016	022	028	034	040	046	052	058
709	065	071	077	083	089	095	101	107	114	120
710	85 126	132	138	144	150	156	163	169	175	181
711	187	193	199	205	211	217	224	230	236	242
712	248	254	260	266	272	278	285	291	297	303
713	309	315	321	327	333	339	345	352	358	364
714	370	376	382	388	394	400	406	412	418	425
715	85 431	437	443	449	455	461	467	473	479	485
716	491	497	503	509	516	522	528	534	540	546
717	552	558	564	570	576	582	588	594	600	606
718	612	618	625	631	637	643	649	655	661	667
719	673	679	685	691	697	703	709	715	721	727
720	85 733	739	745	751	757	763	769	775	781	788
721	794	800	806	812	818	824	830	836	842	848
722	854	860	866	872	878	884	890	896	902	908
723	914	920	926	932	938	944	950	956	962	968
724	974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028
725	86 034	040	046	052	058	064	070	076	082	088
726	094	100	106	112	118	124	130	136	141	147
727	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207
728	213	219	225	231	237	243	249	255	261	267
729	273	279	285	291	297	303	308	314	320	326
730	86 332	338	344	350	356	362	368	374	380	386
731	392	398	404	410	415	421	427	433	439	445
732	451	457	463	469	475	481	487	493	499	504
733	510	516	522	528	534	540	546	552	558	564
734	570	576	581	587	593	599	605	611	617	623
735	86 629	635	641	646	652	658	664	670	676	682
736	688	694	700	705	711	717	723	729	735	741
737	747	753	759	764	770	776	782	788	794	800
738	806	812	817	823	829	835	841	847	853	859
739	864	870	876	882	888	894	900	906	911	917

插值部分

	7	6	5
1	0.7	0.6	0.5
2	1.4	1.2	1.0
3	2.1	1.8	1.5
4	2.8	2.4	2.0
5	3.5	3.0	2.5
6	4.2	3.6	3.0
7	4.9	4.2	3.5
8	5.6	4.8	4.0
9	6.3	5.4	4.5

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
740	86 923	929	935	941	947	953	958	964	970	976
741	982	988	994	999	*005	*011	*017	*023	*029	*035
742	87 040	046	052	058	064	070	075	081	087	093
743	099	105	111	116	122	128	134	140	146	151
744	157	163	169	175	181	186	192	198	204	210
745	87 216	221	227	233	239	245	251	256	252	268
746	274	280	286	291	297	303	309	315	320	326
747	332	338	344	349	355	361	367	375	379	384
748	390	396	402	408	413	419	425	431	437	442
749	448	451	460	466	471	477	483	489	495	500
750	87 506	512	518	523	529	535	541	547	552	558
751	564	570	576	581	587	593	599	604	610	616
752	622	628	633	639	645	651	656	662	668	674
753	679	685	691	697	703	708	714	720	726	731
754	737	743	749	754	760	766	772	777	783	789
755	87 795	800	806	812	818	823	829	835	841	846
756	852	858	864	869	875	881	887	892	898	904
757	910	915	921	927	933	938	944	950	955	961
758	967	973	978	984	990	996	*001	*007	*013	*018
759	88 024	030	036	041	047	053	058	064	070	076
760	88 081	087	093	098	104	110	116	121	127	133
761	138	144	150	156	161	167	173	178	184	190
762	195	201	207	213	218	224	230	235	241	247
763	252	258	264	270	275	281	287	292	298	304
764	309	315	321	326	332	338	343	349	355	360
765	88 366	372	377	383	389	395	400	406	412	417
766	423	429	434	440	446	451	457	463	468	474
767	480	485	491	497	502	508	513	519	525	530
768	536	542	547	553	559	564	570	576	581	587
769	593	598	604	610	615	621	627	632	638	643
770	88 649	655	660	666	672	677	683	689	694	700
771	705	711	717	722	728	734	739	745	750	756
772	762	767	773	779	784	790	795	801	807	812
773	818	824	829	835	840	846	852	857	863	868
774	874	880	885	891	897	902	908	913	919	925
775	88 930	936	941	947	953	958	964	969	975	981
776	986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037
777	89 042	048	053	059	064	070	076	081	087	092
778	098	104	109	115	120	126	131	137	143	148
779	154	159	165	170	176	182	187	193	198	204

插值部分

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
780	89 209	215	221	226	232	237	243	248	254	260
781	265	271	276	282	287	293	298	304	310	315
782	321	326	332	337	343	348	354	360	365	371
783	376	382	387	393	398	404	409	415	421	426
784	432	437	443	448	454	459	465	470	476	481
785	89 487	492	498	504	509	515	520	526	531	537
786	542	548	553	559	564	570	575	581	586	592
787	597	603	609	614	620	625	631	636	642	647
788	653	658	664	669	675	680	686	691	697	702
789	708	713	719	724	730	735	741	746	752	757
790	89 763	768	774	779	785	790	796	801	807	812
791	818	823	829	834	840	845	851	856	862	867
792	873	878	883	889	894	900	905	911	916	922
793	927	933	938	944	949	955	960	966	971	977
794	982	988	993	998	*004	*009	*015	*020	*026	*031
795	90 037	042	048	053	059	064	069	075	080	086
796	091	097	102	108	113	119	124	129	135	140
797	146	151	157	162	168	173	179	184	189	195
798	200	206	211	217	222	227	233	238	244	249
799	255	260	266	271	276	282	287	293	298	304
800	90 309	314	320	325	331	336	342	347	352	358
801	363	369	374	380	385	390	396	401	407	412
802	417	423	428	434	439	445	450	455	461	466
803	472	477	482	488	493	499	504	509	515	520
804	526	531	536	542	547	553	558	563	569	574
805	90 580	585	590	596	601	607	612	617	623	628
806	634	639	644	650	655	660	666	671	677	682
807	687	693	698	703	709	714	720	725	730	736
808	741	747	752	757	763	768	773	779	784	789
809	795	800	806	811	816	822	827	832	838	843
810	90 849	854	859	865	870	875	881	886	891	897
811	902	907	913	918	924	929	934	940	945	950
812	956	961	966	972	977	982	988	993	998	*004
813	91 009	014	020	025	030	036	041	046	052	057
814	062	068	073	078	084	089	094	100	105	110
815	91 116	121	126	132	137	142	148	153	158	164
816	169	174	180	185	190	196	201	206	212	217
817	222	228	233	238	243	249	254	259	265	270
818	275	281	286	291	297	302	307	312	318	323
819	328	334	339	344	350	355	360	365	371	376

插值部分

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
820	91 381	387	392	397	403	408	413	418	424	429
821	434	440	445	450	455	461	466	471	477	482
822	487	492	498	503	508	514	519	524	529	535
823	540	545	551	556	561	566	572	577	582	587
824	593	598	603	609	614	619	624	630	635	640
825	91 645	651	656	661	666	672	677	682	687	693
826	698	703	709	714	719	724	730	735	740	745
827	751	756	761	766	772	777	782	787	793	798
828	803	808	814	819	824	829	834	840	845	850
829	855	861	866	871	876	882	887	892	897	903
830	91 908	913	918	924	929	934	939	944	950	955
831	960	965	971	976	981	986	991	997	*002	*007
832	92 012	018	023	028	033	038	044	049	054	059
833	065	070	075	080	085	091	096	101	106	111
834	117	122	127	132	137	143	148	153	158	163
835	92 169	174	179	184	189	195	200	205	210	215
836	221	226	231	236	241	247	252	257	262	267
837	273	278	283	288	293	298	304	309	314	319
838	324	330	335	340	345	350	355	361	366	371
839	376	381	387	392	397	402	407	412	418	423
840	92 428	433	438	443	449	454	459	464	469	474
841	480	485	490	495	500	505	511	516	521	526
842	531	536	542	547	552	557	562	567	572	578
843	583	588	593	598	603	609	614	619	624	629
844	634	639	645	650	655	660	665	670	675	681
845	92 686	691	696	701	706	711	716	722	727	732
846	737	742	747	752	758	763	768	773	778	783
847	788	793	799	804	809	814	819	824	829	834
848	840	845	850	855	860	865	870	875	881	886
849	891	896	901	906	911	916	921	927	932	937
850	92 942	947	952	957	962	967	973	978	983	988
851	993	998	*003	*008	*013	*018	*024	*029	*034	*039
852	93 044	049	054	059	064	069	075	080	085	090
853	095	100	105	110	115	120	125	131	136	141
854	146	151	156	161	166	171	176	181	186	192
855	93 197	202	207	212	217	222	227	232	237	242
856	247	252	258	263	268	273	278	283	288	293
857	298	303	308	313	318	323	328	334	339	344
858	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
859	399	404	409	414	420	425	430	435	440	445

插值部分

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
860	93 450	455	460	465	470	475	480	485	490	495
861	500	505	510	515	520	526	531	536	541	546
862	551	556	561	566	571	576	581	586	591	596
863	601	606	611	616	621	626	631	636	641	646
864	651	656	661	666	671	676	682	687	692	697
865	93 702	707	712	717	722	727	732	737	742	747
866	752	757	762	767	772	777	782	787	792	797
867	802	807	812	817	822	827	832	837	842	847
868	852	857	862	867	872	877	882	887	892	897
869	902	907	912	917	922	927	932	937	942	947
870	93 952	957	962	967	972	977	982	987	992	997
871	94 002	007	012	017	022	027	032	037	042	047
872	052	057	062	067	072	077	082	086	091	096
873	101	106	111	116	121	126	131	136	141	146
874	151	156	161	166	171	176	181	186	191	196
875	94 201	206	211	216	221	226	231	236	240	245
876	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295
877	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345
878	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
879	399	404	409	414	419	424	429	433	438	443
880	94 448	453	458	463	468	473	478	483	488	493
881	498	503	507	512	517	522	527	532	537	542
882	547	552	557	562	567	571	576	581	586	591
883	596	601	606	611	616	621	626	630	635	640
884	645	650	655	660	665	670	675	680	685	689
885	94 694	699	704	709	714	719	724	729	734	738
886	743	748	753	758	763	768	773	778	783	787
887	792	797	802	807	812	817	822	827	832	836
888	841	846	851	856	861	866	871	876	880	885
889	890	895	900	905	910	915	919	924	929	934
890	94 939	944	949	954	959	963	968	973	978	983
891	988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032
892	95 036	041	046	051	056	061	066	071	075	080
893	085	090	095	100	105	109	114	119	124	129
894	134	139	143	148	153	158	163	168	173	177
895	95 182	187	192	197	202	207	211	216	221	226
896	231	236	240	245	250	255	260	265	270	274
897	279	284	289	294	299	303	308	313	318	323
898	328	332	337	342	347	352	357	361	366	371
899	376	381	386	390	395	400	405	410	415	419

插值部分

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

常用对数表

lg$N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	95 424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
901	472	477	482	487	492	497	501	506	511	516
902	521	525	530	535	540	545	550	554	559	564
903	569	574	578	583	588	593	598	602	607	612
904	617	622	626	631	636	641	646	650	655	660
905	95 665	670	674	679	684	689	694	698	703	708
906	713	718	722	727	732	737	742	746	751	756
907	761	766	770	775	780	785	789	794	799	804
908	809	813	818	823	828	832	837	842	847	852
909	856	861	866	871	875	880	885	890	895	899
910	95 904	909	914	918	923	928	933	938	942	947
911	952	957	961	966	971	976	980	985	990	995
912	999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042
913	96 047	052	057	061	066	071	076	080	085	090
914	095	099	104	109	114	118	123	128	133	137
915	96 142	147	152	156	161	166	171	175	180	185
916	190	194	199	204	209	213	218	223	227	232
917	237	242	246	251	256	261	265	270	275	280
918	284	289	294	298	303	308	313	317	322	327
919	332	336	341	346	350	355	360	365	369	374
920	96 379	384	388	393	398	402	407	412	417	421
921	426	431	435	440	445	450	454	459	464	468
922	473	478	483	487	492	497	501	506	511	515
923	520	525	530	534	539	544	548	553	558	562
924	567	572	577	581	586	591	595	600	605	609
925	96 614	619	624	628	633	638	642	647	652	656
926	661	666	670	675	680	685	689	694	699	703
927	708	713	717	722	727	731	736	741	745	750
928	755	759	764	769	774	778	783	788	792	797
929	802	806	811	816	820	825	830	834	839	844
930	96 848	853	858	862	867	872	876	881	886	890
931	895	900	904	909	914	918	923	928	932	937
932	942	946	951	956	960	965	970	974	979	984
933	988	993	997	*002	*007	*011	*016	*021	*025	*030
934	97 035	039	044	049	053	058	063	067	072	077
935	97 081	086	090	095	100	104	109	114	118	123
936	128	132	137	142	146	151	155	160	165	169
937	174	179	183	188	192	197	202	206	211	216
938	220	225	230	234	239	243	248	253	257	262
939	267	271	276	280	285	290	294	299	304	308

插值部分

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
940	97 313	317	322	327	331	336	340	345	350	354
941	359	364	368	373	377	382	387	391	396	400
942	405	410	414	419	424	428	433	437	442	447
943	451	456	460	465	470	474	479	483	488	493
944	497	502	506	511	516	520	525	529	534	539
945	97 543	548	552	557	562	566	571	575	580	585
946	589	594	598	603	607	612	617	621	626	630
947	635	640	644	649	653	658	663	667	672	676
948	681	685	690	695	699	704	708	713	717	722
949	727	731	736	740	745	749	754	759	763	768
950	97 772	777	782	786	791	795	800	804	809	813
951	818	823	827	832	836	841	845	850	855	859
952	864	868	873	877	882	886	891	896	900	905
953	909	914	918	923	928	932	937	941	946	950
954	955	959	964	968	973	978	982	987	991	996
955	98 000	005	009	014	019	023	028	032	037	041
956	046	050	055	059	064	068	073	078	082	087
957	091	096	100	105	109	*114	118	123	127	132
958	137	141	146	150	155	159	164	168	173	177
959	182	186	191	195	200	204	209	214	218	223
960	98 227	232	236	241	245	250	254	259	263	268
961	272	277	281	286	290	295	299	304	308	313
962	318	322	327	331	336	340	345	349	354	358
963	363	367	372	376	381	385	390	394	399	403
964	408	412	417	421	426	430	435	439	444	448
965	98 453	457	462	466	471	475	480	484	489	493
966	498	502	507	511	516	520	525	529	534	538
967	543	547	552	556	561	565	570	574	579	583
968	588	592	597	601	605	610	614	619	623	628
969	632	637	641	646	650	655	659	664	668	673
970	98 677	682	686	691	695	700	704	709	713	717
971	722	726	731	735	740	744	749	753	758	762
972	767	771	776	780	784	789	793	798	802	807
973	811	816	820	825	829	834	838	843	847	851
974	856	860	865	869	874	878	883	887	892	896
975	98 900	905	909	914	918	923	927	932	936	941
976	945	949	954	958	963	967	972	976	981	985
977	989	934	998	*003	*007	*012	*016	*021	*025	*029
978	99 034	038	043	047	052	056	061	065	069	074
979	078	083	087	092	096	100	105	109	114	118

插值部分

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

常用对数表

lg N

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
980	99 123	127	131	136	140	145	149	154	158	162
981	167	171	176	180	185	189	193	198	202	207
982	211	216	220	224	229	233	238	242	247	251
983	255	260	264	269	273	277	282	286	291	295
984	300	304	308	313	317	322	326	330	335	339
985	99 344	348	352	357	361	366	370	374	379	383
986	388	392	396	401	405	410	414	419	423	427
987	432	436	441	445	449	454	458	463	467	471
988	476	480	484	489	493	498	502	50[illegible]	511	515
989	520	524	528	533	537	542	546	550	555	559
990	99 564	568	572	577	581	585	590	594	599	603
991	607	612	616	621	625	629	634	638	642	647
992	651	656	660	664	669	673	677	682	686	691
993	695	699	704	708	712	717	721	726	730	734
994	739	743	747	752	756	760	765	769	774	778
995	99 782	787	791	795	800	804	808	813	817	822
996	826	830	835	839	843	848	852	856	861	865
997	870	874	878	883	887	891	896	900	904	909
998	913	917	922	926	930	935	939	944	948	952
999	957	961	965	970	974	978	983	987	991	996

插值部分

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

$\ln N$

10. 自然对数表

N	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.00000	00995	01980	02956	03922	04879	05827	06766	07696	08618
1.1	09531	10436	11333	12222	13103	13976	14842	15700	16551	17395
1.2	18232	19062	19885	20701	21511	22314	23111	23902	24686	25464
1.3	26236	27003	27763	28518	29267	30011	30749	31481	32208	32930
1.4	33647	34359	35066	35767	36464	37156	37844	38526	39204	39878
1.5	0.40547	41211	41871	42527	43178	43826	44469	45108	45743	46373
1.6	47000	47623	48243	48858	49470	50078	50682	51282	51879	52473
1.7	53063	53649	54232	54812	55389	55962	56531	57098	57661	58222
1.8	58779	59333	59884	60432	60977	61519	62058	62594	63127	63658
1.9	64185	64710	65233	65752	66269	66783	6729$\bar{5}$	67803	68310	68813
2.0	0.6931$\bar{5}$	69814	70310	70804	7129$\bar{5}$	71784	72271	7275$\bar{5}$	73237	73716
2.1	74194	74669	75142	75612	76081	76547	77011	77473	77933	78390
2.2	78846	79299	79751	80200	80648	81093	81537	81978	82418	82855
2.3	83291	8372$\bar{5}$	84157	84587	85015	85442	85866	86289	86710	87129
2.4	87547	87963	88377	88789	89200	89609	90016	90422	90826	91228

n	$\ln 10^n$	$\ln 10^{-n}$
1	2.302585	0.697415−3
2	4.605170	0.394830−5
3	6.907755	0.092245−7
4	9.210340	0.789660−10
5	11.512926	0.487074−12
6	13.815511	0.184489−14
7	16.118096	0.881904−17
8	18.420681	0.579319−19
9	20.723266	0.276734−21
10	23.025851	0.974149−24

例 $\ln 1870 = \ln 1.87 + \ln 10^3$

$\approx 1.58309 + 6.90776 = 8.49085$

$\ln 0.00187 = \ln 1.87 + \ln 10^{-3}$

$\approx 1.58309 + 0.09225 - 7 = \bar{6}.67534$

(或 $\approx 1.58309 - 6.90776 = -5.32467$)

[注] 表中尾数$\bar{5}$表示这位数字不足5，它是由后面数字按四舍五入原则进位而成的.

ln*N*

自然对数表

N	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.5	0.91629	92028	92426	92822	93216	93609	94001	94391	94779	95166
2.6	95551	95935	96317	96698	97078	97456	97833	98208	98582	98954
2.7	99325	99695	*00063	*00430	*00796	*01160	*01523	*0188$\bar{5}$	*02245	*02604
2.8	1.02962	03319	03674	04028	04380	04732	05082	05431	05779	06126
2.9	06471	06815	07158	07500	07841	08181	08519	08856	09192	09527
3.0	1.09861	10194	10526	10856	11186	11514	11842	12168	12493	12817
3.1	13140	13462	13783	14103	14422	14740	15057	15373	15688	16002
3.2	16315	16627	16938	17248	17557	17866	18173	18479	18784	19089
3.3	19392	1969$\bar{5}$	19997	20297	20597	20896	21194	21491	21788	22083
3.4	22378	22671	22964	23256	23547	23837	24127	24416	24703	24990
3.5	1.25276	25562	25846	26130	26413	2669$\bar{5}$	26976	27257	27536	27815
3.6	28093	28371	28647	28923	29198	29473	29746	30019	30291	30563
3.7	30833	31103	31372	31641	31909	32176	32442	32708	32972	33237
3.8	33500	33763	34025	34287	34547	34807	35067	35326	35584	35841
3.9	36098	36354	36609	36864	37118	37372	37624	37877	38128	38379
4.0	1.38629	38879	39128	39377	3962$\bar{5}$	39872	40118	40364	40610	4085$\bar{5}$
4.1	41099	41342	41585	41828	42070	42311	42552	42792	43031	43270
4.2	43509	43746	43984	44220	44456	44692	44927	45161	45395	45629
4.3	45862	46094	46326	46557	46787	47018	4724$\bar{7}$	47476	4770$\bar{5}$	47933
4.4	48161	48388	48614	48840	49065	49290	4951$\bar{5}$	49739	49962	50185
4.5	1.50408	50630	50851	51072	51293	51513	51732	51951	52170	52388
4.6	52606	52823	53040	53256	53471	53687	53902	54116	54330	54543
4.7	54756	54969	55181	55393	55604	5581$\bar{5}$	5602$\bar{5}$	5623$\bar{5}$	56444	56653
4.8	56862	57070	57277	5748$\bar{5}$	57692	57898	58104	58309	5851$\bar{5}$	58719
4.9	58924	59127	59331	59534	59737	59939	60141	60342	60543	60744

5.0	1.60944	61144	61343	61542	61741	61939	62137	62334	62531	62728
5.1	62924	63120	63315	63511	63705	63900	64094	64287	64481	64673
5.2	64866	65058	65250	65441	65632	65823	66013	66203	66393	6658$\bar{2}$
5.3	66771	66959	67147	67335	67523	67710	6789$\bar{6}$	68083	68269	6845$\bar{5}$
5.4	68640	6882$\bar{5}$	69010	69194	69378	69562	6974$\bar{5}$	69928	70111	70293
5.5	1.7047$\bar{5}$	70657	70838	71019	71200	71380	71560	71740	71919	72098
5.6	72277	72455	72633	72811	72988	73166	73342	73519	73695	73871
5.7	74047	74222	74397	74572	74746	74920	7509$\bar{4}$	75267	75440	75613
5.8	75786	75958	76130	76302	76473	76644	7681$\bar{5}$	76986	77156	77326
5.9	77495	7766$\bar{5}$	77834	78002	78171	78339	78507	7867$\bar{5}$	78842	79009
6.0	1.79176	79343	79509	7967$\bar{5}$	79840	80006	80171	80336	80501	8066$\bar{5}$
6.1	80829	80993	81156	81320	81483	81645	81808	81970	82132	82294
6.2	8245$\bar{5}$	82616	82777	82938	83098	83258	83418	83578	83737	83896
6.3	8405$\bar{5}$	84214	84372	84530	84688	84846	85003	85160	85317	85473
6.4	85630	85786	85942	86098	86253	86408	86563	86718	86872	87026
6.5	1.87180	87334	87487	87641	87794	87947	88099	88251	88404	88555
6.6	88707	88858	89010	89161	89311	89462	89612	89762	89912	90061
6.7	90211	90360	90509	90658	90806	90954	91102	91250	91398	91545
6.8	91692	91839	91986	92133	92279	9242$\bar{5}$	92571	92716	92862	93007
6.9	93152	93297	93442	93586	93730	93874	94018	94162	9430$\bar{5}$	94448
7.0	1.94591	94734	94876	95019	95161	95303	9544$\bar{5}$	95586	95727	95869
7.1	96010	96150	96291	96431	96571	96711	96851	96991	97130	97269
7.2	97408	97547	97686	97824	97962	98100	98238	98376	98513	98650
7.3	98787	98924	99061	99198	99334	99470	99606	99742	99877	*00013
7.4	2.00148	00283	00418	00553	00687	00821	00956	01090	01223	01357

ln N

自然对数表

N	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.5	2.01490	01624	01757	01890	02022	0215$\bar{5}$	02287	02419	02551	02683
7.6	0281$\bar{5}$	02946	03078	03209	03340	03471	03601	03732	03862	03992
7.7	04122	04252	04381	04511	04640	04769	04898	05027	05156	05284
7.8	05412	05541	05669	05796	05924	06051	06179	06306	06433	06560
7.9	06686	06813	06939	07065	07191	07317	07443	07569	07694	07819
8.0	2.07944	08069	08194	08319	08443	08567	08691	08816	08939	09063
8.1	09186	09310	09433	09556	09679	09802	09924	10047	10169	10291
8.2	10413	10535	10657	10779	10900	11021	11143	11264	11384	1150$\bar{5}$
8.3	11626	11746	11866	11986	12106	12226	12346	12465	1258$\bar{5}$	12704
8.4	12823	12942	13061	13180	13298	13417	1353$\bar{5}$	13653	13771	13889
8.5	2.14007	14124	14242	14359	14476	14593	14710	14827	14943	15060
8.6	15176	15292	15409	1552$\bar{5}$	15640	15756	15872	15987	16102	16217
8.7	16332	16447	16562	16677	16791	16905	17020	17134	17248	17362
8.8	17475	17589	17702	17816	17929	18042	1815$\bar{5}$	18268	18380	18493
8.9	18605	18717	18830	18942	19054	19165	19277	19389	19500	19611
9.0	2.19723	19834	19944	20055	20166	20277	20387	20497	20607	20718
9.1	20827	20937	21047	21157	21266	21375	2148$\bar{5}$	21594	21703	21812
9.2	21920	22029	22138	22246	22354	22462	22570	22678	22786	22894
9.3	23001	23109	23216	23324	23431	23538	2364$\bar{5}$	23751	23858	2396$\bar{5}$
9.4	24071	24177	24284	24390	24496	24602	24707	24813	24918	25024
9.5	2.25129	25234	25340	2544$\bar{5}$	25549	25654	25759	25863	25968	26072
9.6	26176	26280	26384	26488	26592	26696	26799	26903	27006	27109
9.7	27213	27316	27419	27521	27624	27727	27829	27932	28034	28136
9.8	28238	28340	28442	28544	28646	28747	28849	28950	29051	29152
9.9	29254	29354	29455	29556	29657	29757	29858	29958	30058	30159

11. 三角函数对数表

正弦函数对数表

lg sin θ

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
0°00′		$\bar{4}$.46373	76476	94085	*06579	*16270	*24188	*30882	*36682	$\bar{3}$.41797	**50′**
10′	$\bar{3}$.46373	50512	54291	57767	60985	63982	66784	69417	71900	74218	**40′**
20′	76475	78594	80615	82545	84393	86166	87870	89509	91088	92612	**30′**
30′	94084	95508	96887	98223	99520	*00779	*02002	*03192	*04350	$\bar{2}$.05478	**20′**
40′	$\bar{2}$.06578	07650	08696	09718	10717	11693	12647	13581	14495	15391	**10′**
50′	16268	17128	17971	18798	19610	20407	21189	21958	22713	$\bar{2}$.23456	**89°00′**
1°00′	$\bar{2}$.24186	24903	25609	26304	26988	27661	28324	28977	29621	30255	**50′**
10′	30879	31495	32103	32702	33292	33875	34450	35018	35578	36131	**40′**
20′	36678	37217	37750	38276	38796	39310	39818	40320	40816	41307	**30′**
30′	41792	42272	42746	43216	43680	44139	44594	45044	45489	45930	**20′**
40′	46366	46799	47226	47650	48069	48485	48896	49304	49708	50108	**10′**
50′	50504	50897	51287	51673	52055	52434	52810	53183	53552	$\bar{2}$.53919	**88°00′**
2°00′	$\bar{2}$.54282	54642	54999	55354	55705	56054	56400	56743	57084	57421	**50′**
10′	57757	58089	58419	58747	59072	59395	59715	60033	60349	60662	**40′**
20′	60973	61282	61589	61894	62196	62497	62795	63091	63385	63678	**30′**
30′	63968	64256	64543	64827	65110	65391	65670	65947	66223	66497	**20′**
40′	66769	67039	67308	67575	67841	68104	68367	68627	68886	69144	**10′**
50′	69400	69654	69907	70159	70409	70658	70905	71151	71395	$\bar{2}$.71638	**87°00′**
3°00′	$\bar{2}$.71880	72120	72359	72597	72834	73069	73303	73535	73767	73997	**50′**
10′	74226	74454	74680	74906	75130	75353	75575	75795	76015	76234	**40′**
20′	76451	76667	76883	77097	77310	77522	77733	77943	78152	78360	**30′**
30′	78568	78774	78979	79183	79386	79588	79789	79990	80189	80388	**20′**
40′	80585	80782	80978	81173	81367	81560	81752	81944	82134	82324	**10′**
50′	82513	82701	82888	83075	83261	83446	83630	83813	83996	$\bar{2}$.84177	**86°00′**
	10′	**9′**	**8′**	**7′**	**6′**	**5′**	**4′**	**3′**	**2′**	**1′**	φ

余弦函数对数表

lg cos φ

lg sin θ

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
4°00′	$\bar{2}$.84358	84530	84718	84897	85075	85252	85429	85605	85780	85955	50′
10′	86128	86301	86474	86645	66816	86987	87156	87325	87494	87661	40′
20′	87829	87995	88161	88326	88490	88654	88817	88980	89142	89304	30′
30′	89464	89625	89784	89943	90102	90260	90417	90574	90730	90885	20′
40′	91040	91195	91349	91502	91655	91807	91959	92110	92261	92411	10′
50′	92561	92710	92859	93007	93154	93301	93448	93594	93740	$\bar{2}$.93885	85°00′
5°00′	$\bar{2}$.94030	94174	94317	94461	94603	94746	94887	95029	95170	95310	50′
10′	95450	95589	95728	95867	96005	96143	96280	96417	96553	96689	40′
20′	96825	96960	97095	97229	97363	97496	97629	97762	97894	98026	30′
30′	98157	98288	98419	98549	98679	98808	98937	99066	99194	99322	20′
40′	99450	99577	99704	99830	99956	*00082	*00207	*00332	*00456	$\bar{1}$.00581	10′
50′	$\bar{1}$.00704	00828	00951	01074	01196	01318	01440	01561	01682	$\bar{1}$.01803	84°00′
6°00′	$\bar{1}$.01923	02043	02163	02283	02402	02520	02639	02757	02874	02992	50′
10′	03109	03226	03342	03458	03574	03690	03805	03920	04034	04149	40′
20′	04262	04376	04490	04603	04715	04828	04940	05052	05164	05275	30′
30′	05386	05497	05607	05717	05827	05937	06046	06155	06264	06372	20′
40′	06481	06589	06696	06804	06911	07018	07124	07231	07337	07442	10′
50′	07548	07653	07758	07863	07968	08072	08176	08280	08383	$\bar{1}$.08486	83°00′
7°00′	$\bar{1}$.08589	08692	08795	08897	08999	09101	09202	09304	09405	09506	50′
10′	09606	09707	09807	09907	10006	10106	10205	10304	10402	10501	40′
20′	10599	10697	10795	10893	10990	11087	11184	11281	11377	11474	30′
30′	11570	11666	11761	11857	11952	12047	12142	12236	12331	12425	20′
40′	12519	12612	12706	12799	12892	12985	13078	13171	13263	13355	10′
50′	13447	13539	13630	13722	13813	13904	13994	14085	14175	$\bar{1}$.14266	82°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
8°00′	$\bar{1}$.14356	14445	14535	14624	14714	14803	14891	14980	15069	15157	50′
10′	15245	15333	15421	15508	15596	15683	15770	15857	15944	16030	40′
20′	16116	16203	16289	16374	16460	16545	16631	16716	16801	16886	30′
30′	16970	17055	17139	17223	17307	17391	17474	17558	17641	17724	20′
40′	17807	17890	17973	18055	18137	18220	18302	18383	18465	18547	10′
50′	18628	18709	18790	18871	18952	19033	19113	19193	19273	$\bar{1}$.19353	81°00′
9°00′	$\bar{1}$.19433	19513	19592	19672	19751	19830	19909	19988	20067	20145	50′
10′	20223	20302	20380	20458	20535	20613	20691	20768	20845	20922	40′
20′	20999	21076	21153	21229	21306	21382	21458	21534	21610	21685	30′
30′	21761	21836	21912	21987	22062	22137	22211	22286	22361	22435	20′
40′	22509	22583	22657	22731	22805	22878	22952	23025	23098	23171	10′
50′	23244	23317	23390	23462	23535	23607	23679	23752	23823	$\bar{1}$.23895	80°00′
10°00′	$\bar{1}$.23967	24039	24110	24181	24253	24324	24395	24466	24536	24607	50′
10′	24677	24748	24818	24888	24958	25028	25098	25168	25237	25307	40′
20′	25376	25445	25514	25583	25652	25721	25790	25858	25927	25995	30′
30′	26063	26131	26199	26267	26335	26403	26470	26538	26605	26672	20′
40′	26739	26806	26873	26940	27007	27073	27140	27206	27273	27339	10′
50′	27405	27471	27537	27602	27668	27734	27799	27864	27930	$\bar{1}$.27995	79°00′
11°00′	$\bar{1}$.28060	28125	28190	28254	28319	28384	28448	28512	28577	28641	50′
10′	28705	28769	28833	28896	28960	29024	29087	29150	29214	29277	40′
20′	29340	29403	29466	29529	29591	29654	29716	29779	29841	29903	30′
30′	29966	30028	30090	30151	30213	30275	30336	30398	30459	30521	20′
40′	30582	30643	30704	30765	30826	30887	30947	31008	31068	31129	10′
50′	31189	31250	31310	31370	31430	31490	31549	31609	31669	$\bar{1}$.31728	78°00′

余弦函数对数表 $\lg\cos\varphi$

$\lg \sin\theta$

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
12°00′	$\bar{1}$.31788	31847	31907	31966	32025	32084	32143	32202	32261	32319	50′
10′	32378	32437	32495	32553	32612	32670	32728	32786	32844	32902	40′
20′	32960	33018	33075	33133	33190	33248	33305	33362	33420	33477	30′
30′	33534	33591	33647	33704	33761	33818	33874	33931	33987	34043	20′
40′	34100	34156	34212	34268	34324	34380	34436	34491	34547	34602	10′
50′	34658	34713	34769	34824	34879	34934	34989	35044	35099	$\bar{1}$.35154	77°00′
13°00′	$\bar{1}$.35209	35263	35318	35373	35427	35481	35536	35590	35644	35698	50′
10′	35752	35806	35860	35914	35968	36022	36075	36129	36182	36236	40′
20′	36289	36342	36395	36449	36502	36555	36608	36660	36713	36766	30′
30′	36819	36871	36924	36976	37028	37081	37133	37185	37237	37289	20′
40′	37341	37393	37445	37497	37549	37600	37652	37703	37755	37806	10′
50′	37858	37909	37960	38011	38062	38113	38164	38215	38266	$\bar{1}$.38317	76°00′
14°00′	$\bar{1}$.38368	38418	38469	38519	38570	38620	38670	38721	38771	38821	50′
10′	38871	38921	38971	39021	39071	39121	39170	39220	39270	39319	40′
20′	39369	39418	39467	39517	39566	39615	39664	39713	39762	39811	30′
30′	39860	39909	39958	40006	40055	40103	40152	40200	40249	40297	20′
40′	40346	40394	40442	40490	40538	40586	40634	40682	40730	40778	10′
50′	40825	40873	40921	40968	41016	41063	41111	41158	41205	$\bar{1}$.41252	75°00′
15°00′	$\bar{1}$.41300	41347	41394	41441	41488	41535	41582	41628	41675	41722	50′
10′	41768	41815	41861	41908	41954	42001	42047	42093	42140	42186	40′
20′	42232	42278	42324	42370	42416	42461	42507	42553	42599	42644	30′
30′	42690	42735	42781	42826	42872	42917	42962	43008	43053	43098	20′
40′	43143	43188	43233	43278	43323	43367	43412	43457	43502	43546	10′
50′	43591	43635	43680	43724	43769	43813	43857	43901	43946	$\bar{1}$.43990	74°00′

余弦函数对数表 $\lg \cos \varphi$

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
16°00′	$\bar{1}$.44034	44078	44122	44166	44210	44253	44297	44341	44385	44423	50′
10′	44472	44516	44559	44602	44646	44689	44733	44776	44819	44862	40′
20′	44905	44948	44992	45035	45077	45120	45163	45206	45249	45292	30′
30′	45334	45377	45419	45462	45504	45547	45589	45632	45674	45716	20′
40′	45758	45801	45843	45885	45927	45969	46011	46053	46095	46136	10′
50′	46178	46220	46262	46303	46345	46386	46428	46469	46511	$\bar{1}$.46552	73°00′
17°00′	$\bar{1}$.46594	46635	46676	46717	46758	46800	46841	46882	46923	46964	50′
10′	47005	47045	47086	47127	47168	47209	47249	47290	47330	47371	40′
20′	47411	47452	47492	47533	47573	47613	47654	47694	47734	47774	30′
30′	47814	47854	47894	47934	47974	48014	48054	48094	48133	48173	20′
40′	48213	48252	48292	48332	48371	48411	48450	48490	48529	48568	10′
50′	48607	48547	48686	48725	48764	48803	48842	48881	48920	$\bar{1}$.48959	72°00′
18°00′	$\bar{1}$.48998	49037	49076	49115	49153	49192	49231	49269	49308	49347	50′
10′	49385	49424	49462	49500	49539	49577	49615	49654	49692	49730	40′
20′	49768	49806	49844	49882	49920	49958	49996	50034	50072	50110	30′
30′	50148	50185	50223	50261	50298	50336	50374	50411	50449	50486	20′
40′	50523	50561	50598	50635	50673	50710	50747	50784	50821	50858	10′
50′	50896	50933	50970	51007	51043	51080	51117	51154	51191	$\bar{1}$.51227	71°00′
19°00′	$\bar{1}$.51264	51301	51338	51374	51411	51447	51484	51520	51557	51593	50′
10′	51629	51666	51702	51738	51774	51811	51847	51883	51919	51955	40′
20′	51991	52027	52063	52099	52135	52171	52207	52242	52278	52314	30′
30′	52350	52385	52421	52456	52492	52527	52563	52598	52634	52669	20′
40′	52705	52740	52775	52811	52846	52881	52916	52951	52986	53021	10′
50′	53056	53092	53126	53161	53196	53231	53266	53301	53336	$\bar{1}$.53370	70°00′

13

乙

lg sin θ

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
20°00′	$\bar{1}$.53405	53440	53475	53509	53544	53578	53613	53647	53682	53716	50′
10′	53751	53785	53819	53854	53888	53922	53957	53991	54025	54059	40′
20′	54093	54127	54161	54195	54229	54263	54297	54331	54365	54399	30′
30′	54433	54466	54500	54534	54567	54601	54635	54668	54702	54735	20′
40′	54769	54802	54836	54869	54903	54936	54969	55003	55036	55069	10′
50′	55102	55136	55169	55202	55235	55268	55301	55334	55367	$\bar{1}$.55400	69°00′
21°00′	$\bar{1}$.55433	55466	55499	55532	55564	55597	55630	55663	55695	55728	50′
10′	55761	55793	55826	55858	55891	55923	55956	55988	56021	56053	40′
20′	56085	56118	56150	56182	56215	56247	56279	56311	56343	56375	30′
30′	56408	56440	56472	56504	56536	56568	56599	56631	56663	56695	20′
40′	56727	56759	56790	56822	56854	56886	56917	56949	56980	57012	10′
50′	57044	57075	57107	57138	57169	57201	57232	57264	57295	$\bar{1}$.57326	68°00′
22°00′	$\bar{1}$.57358	57389	57420	57451	57482	57514	57545	57576	57607	57638	50′
10′	57669	57700	57731	57762	57793	57824	57855	57885	57916	57947	40′
20′	57978	58008	58039	58070	58101	58131	58162	58192	58223	58253	30′
30′	58284	58314	58345	58375	58406	58436	58467	58497	58527	58557	20′
40′	58588	58618	58648	58678	58709	58739	58769	58799	58829	58859	10′
50′	58889	58919	58949	58979	59009	59039	59069	59098	59128	$\bar{1}$.59158	67°00′
23°00′	$\bar{1}$.59188	59218	59247	59277	59307	59336	59366	59396	59425	59455	50′
10′	59484	59514	59543	59573	59602	59632	59661	59690	59720	59749	40′
20′	59778	59808	59837	59866	59895	59924	59954	59983	60012	60041	30′
30′	60070	60099	60128	60157	60186	60215	60244	60273	60302	60331	20′
40′	60359	60388	60417	60446	60474	60503	60532	60561	60589	60618	10′
50′	60646	60675	60704	60732	60761	60789	60818	60846	60875	$\bar{1}$.60903	66°00′

φ	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
24°00′	$\bar{1}$.60931	60960	60988	61016	61045	61073	61101	61129	61158	61186	50′
10′	61214	61242	61270	61298	61326	61354	61382	61411	61438	61466	40′
20′	61494	61522	61550	61578	61606	61634	61662	61689	61717	61745	30′
30′	61773	61800	61828	61856	61883	61911	61939	61966	61994	62021	20′
40′	62049	62076	62104	62131	62159	62186	62214	62241	62268	62296	10′
50′	62323	62350	62377	62405	62432	62459	62486	62513	62541	$\bar{1}$.62568	65°00′
25°00′	$\bar{1}$.62595	62622	62649	62676	62703	62730	62757	62784	62811	62838	50′
10′	62865	62892	62918	62945	62972	62999	63026	63052	63079	63106	40′
20′	63133	63159	63186	63213	63239	63266	63292	63319	63345	63372	30′
30′	63398	63425	63451	63478	63504	63531	63557	63583	63610	63636	20′
40′	63662	63689	63715	63741	63767	63794	63820	63846	63872	63898	10′
50′	63924	63950	63976	64002	64028	64054	64080	64106	64132	$\bar{1}$.64158	64°00′
26°00′	$\bar{1}$.64184	64210	64236	64262	64288	64313	64339	64365	64391	64417	50′
10′	64442	64468	64494	64519	64545	64571	64596	64622	64647	64673	40′
20′	64698	64724	64749	64775	64800	64826	64851	64877	64902	64927	30′
30′	64953	64978	65003	65029	65054	65079	65104	65130	65155	65180	20′
40′	65205	65230	65255	65281	65306	65331	65356	65381	65406	65431	10′
50′	65456	65481	65506	65531	65556	65580	65605	65630	65655	$\bar{1}$.65680	63°00′
27°00′	$\bar{1}$.65705	65729	65754	65779	65804	65828	65853	65878	65902	65927	50′
10′	65952	65976	66001	66025	66050	66075	66099	66124	66148	66173	40′
20′	66197	66221	66246	66270	66295	66319	66343	66368	66392	66416	30′
30′	66441	66465	66489	66513	66537	66562	66586	66610	66634	66658	20′
40′	66682	66706	66731	66755	66779	66803	66827	66851	66875	66899	10′
50′	66922	66946	66970	66994	67018	67042	67066	67090	67113	$\bar{1}$.67137	62°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数对数表 lg cos φ

lg sin θ

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
28°00′	$\bar{1}$.67161	67185	67208	67232	67256	67280	67303	67327	67350	67374	50′
10′	67398	67421	67445	67468	67492	67515	67539	67562	67586	67609	40′
20′	67636	67656	67680	67703	67726	67750	67773	67796	67820	67843	30′
30′	67866	67890	67913	67936	67959	67982	68006	68029	68052	68075	20′
40′	68098	68121	68144	68167	68190	68213	68237	68260	68283	68305	10′
50′	68328	68351	68374	68397	68420	68443	68466	68489	68512	1.68534	61°00′
29°00′	$\bar{1}$.68557	68580	68603	68625	68648	68671	68694	68716	68739	68762	50′
10′	68784	68807	68829	68852	68875	68897	68920	68942	68965	68987	40′
20′	69010	69032	69055	69077	69100	69122	69144	69167	69189	69212	30′
30′	69234	69256	69279	69301	69323	69345	69368	69390	69412	69434	20′
40′	69456	69479	69501	69523	69545	69567	69589	69611	69633	69655	10′
50′	69677	69699	69721	69743	69765	69787	69809	69831	69853	$\bar{1}$.69875	60°00′
30°00′	$\bar{1}$.69897	69919	69941	69963	69984	70006	70028	70050	70072	70093	50′
10′	70115	70137	70159	70180	70202	70224	70245	70267	70288	70310	40′
20′	70332	70353	70375	70396	70418	70439	70461	70482	70504	70525	30′
30′	70547	70568	70590	70611	70633	70654	70675	70697	70718	70739	20′
40′	70761	70782	70803	70824	70846	70867	70888	70909	70931	70952	10′
50′	70973	70994	71015	71036	71058	71079	71100	71121	71142	$\bar{1}$.71163	59°00′
31°00′	$\bar{1}$.71184	71205	71226	71247	71268	71289	71310	71331	71352	71373	50′
10′	71393	71414	71435	71456	71477	71498	71519	71539	71560	71581	40′
20′	71602	71622	71643	71664	71685	71705	71726	71747	71767	71788	30′
30′	71809	71829	71850	71870	71891	71911	71932	71952	71973	71994	20′
40′	72014	72034	72055	72075	72096	72116	72137	72157	72177	72198	10′
50′	72218	72238	72259	72279	72299	72320	72340	72360	72381	$\bar{1}$.72401	58°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
32°00′	$\bar{1}$.72421	72441	72461	72482	72502	72522	72542	72562	72582	72602	50′
10′	72622	72643	72663	72683	72703	72723	72743	72763	72783	72803	40′
20′	72823	72843	72863	72883	72902	72922	72942	72962	72982	73002	30′
30′	73022	73041	73061	73081	73101	73121	73140	73160	73180	73200	20′
40′	73219	73239	73259	73278	73298	73318	73337	73357	73377	73396	10′
50′	73416	73435	73455	73474	73494	73513	73533	73552	73572	$\bar{1}$.73591	57°00′
33°00′	$\bar{1}$.73611	73630	73650	73669	73689	73708	73727	73747	73766	73785	50′
10′	73805	73824	73843	73863	73882	73901	73921	73940	73959	73978	40′
20′	73997	74017	74036	74055	74074	74093	74113	74132	74151	74170	30′
30′	74189	74208	74227	74246	74265	74284	74303	74322	74341	74360	20′
40′	74379	74398	74417	74436	74455	74474	74493	74512	74531	74549	10′
50′	74568	74587	74606	74625	74644	74662	74681	74700	74719	$\bar{1}$.74737	56°00′
34°00′	$\bar{1}$.74756	74775	74794	74812	74831	74850	74868	74887	74906	74924	50′
10′	74943	74961	74980	74999	75017	75036	75054	75073	75091	75110	40′
20′	75128	75147	75165	75184	75202	75221	75239	75258	75276	75294	30′
30′	75313	75331	75350	75368	75386	75405	75423	75441	75459	75478	20′
40′	75496	75514	75533	75551	75569	75587	75605	75624	75642	75660	10′
50′	75678	75696	75714	75733	75751	75769	75787	75805	75823	$\bar{1}$.75841	55°00′
35°00′	$\bar{1}$.75859	75877	75895	75913	75931	75949	75967	75985	76003	76021	50′
10′	76039	76057	76075	76093	76111	76129	76146	76164	76182	76200	40′
20′	76218	76236	76253	76271	76289	76307	76324	76342	76360	76378	30′
30′	76395	76413	76431	76448	76466	76484	76501	76519	76537	76554	20′
40′	76572	76590	76607	76625	76642	76660	76677	76695	76712	76730	10′
50′	76747	76765	76782	76800	76817	76835	76852	76870	76887	$\bar{1}$.76904	54°00′

余弦函数对数表 $\lg\cos\varphi$

lg sin θ

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
36°00′	$\bar{1}$.76922	76939	76957	76974	76991	77009	77026	77043	77061	77078	50′
10′	77095	77112	77130	77147	77164	77181	77199	77216	77233	77250	40′
20′	77268	77285	77302	77319	77336	77353	77370	77387	77405	77422	30′
30′	77439	77456	77473	77490	77507	77524	77541	77558	77575	77592	20′
40′	77609	77626	77643	77660	77677	77694	77711	77728	77744	77761	10′
50′	77778	77795	77812	77829	77846	77862	77879	77896	77913	$\bar{1}$.77930	53°00′
37°00′	$\bar{1}$.77946	77963	77980	77997	78013	78030	78047	78063	78080	78097	50′
10′	78113	78130	78147	78163	78180	78197	78213	78230	78246	78263	40′
20′	78280	78296	78313	78329	78346	78362	78379	78395	78412	78428	30′
30′	78445	78461	78478	78494	78510	78527	78543	78560	78576	78592	20′
40′	78609	78625	78642	78658	78674	78691	78707	78723	78739	78756	10′
50′	78773	78788	78805	78821	78837	78853	78869	78886	78902	$\bar{1}$.78918	52°00′
38°00′	$\bar{1}$.78934	78950	78967	78983	78999	79015	79031	79047	79063	79079	50′
10′	79095	79111	79128	79144	79160	79176	79192	79208	79224	79240	40′
20′	79256	79272	79288	79304	79319	79335	79351	79367	79383	79399	30′
30′	79415	79431	79447	79463	79478	79494	79510	79526	79542	79558	20′
40′	79573	79589	79605	79621	79636	79652	79668	79684	79699	79715	10′
50′	79731	79746	79762	79778	79793	79809	79825	79840	79856	$\bar{1}$.79872	51°00′
39°00′	$\bar{1}$.79887	79903	79918	79934	79950	79965	79981	79996	80012	80027	50′
10′	80043	80058	80074	80089	80105	80120	80136	80151	80166	80182	40′
20′	80197	80213	80228	80244	80259	80274	80290	80305	80320	80336	30′
30′	80351	80366	80382	80397	80412	80428	80443	80458	80473	80489	20′
40′	80504	80519	80534	80550	80565	80580	80595	80610	80625	80641	10′
50′	80656	80671	80686	80701	80716	80731	80746	80762	80777	$\bar{1}$.80792	50°00′

余弦函数对数表 lg cos φ

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
40°00′	$\bar{1}$.80807	80822	80837	80852	80867	80882	80897	80912	80927	80942	50′
10′	80957	80972	80987	81002	81017	81032	81047	81061	81076	81091	40′
20′	81106	81121	81136	81151	81166	81180	81195	81210	81225	81240	30′
30′	81254	81269	81284	81299	81314	81328	81343	81358	81372	81387	20′
40′	81402	81417	81431	81446	81461	81475	81490	81505	81519	81534	10′
50′	81549	81563	81578	81592	81607	81622	81636	81651	81665	$\bar{1}$.81680	49°00′
41°00′	$\bar{1}$.81694	81709	81723	81738	81752	81767	81781	81796	81810	81825	50′
10′	81839	81854	81868	81882	81897	81911	81926	81940	81955	81969	40′
20′	81983	81998	82012	82026	82041	82055	82069	82084	82098	82112	30′
30′	82126	82141	82155	82169	82184	82198	82212	82226	82240	82255	20′
40′	82269	82283	82297	82311	82326	82340	82354	82368	82382	82396	10′
50′	82410	82424	82439	82453	82467	82481	82495	82509	82523	$\bar{1}$.82537	48°00′
42°00′	$\bar{1}$.82551	82565	82579	82593	82607	82621	82635	82649	82663	82677	50′
10′	82691	82705	82719	82733	82747	82761	82775	82788	82802	82816	40′
20′	82830	82844	82858	82875	82885	82899	82913	82927	82941	82955	30′
30′	82968	82982	82996	83010	83023	83037	83051	83065	83078	83092	20′
40′	83106	83120	83133	83147	83161	83174	83188	83202	83215	83229	10′
50′	83242	83256	83270	83283	83297	83310	83324	83338	83351	$\bar{1}$.83365	47°00′
43°00′	$\bar{1}$.83378	83392	83405	83419	83432	83446	83459	83473	83486	83500	50′
10′	83513	83527	83540	83554	83567	83581	83594	83608	83621	83634	40′
20′	83648	83661	83674	83688	83701	83715	83728	83741	83755	83768	30′
30′	83781	83795	83808	83821	83834	83848	83861	83874	83887	83901	20′
40′	83914	83927	83940	83954	83967	83980	83993	84006	84020	84033	10′
50′	84046	84059	84072	84085	84098	84112	84125	84138	84151	$\bar{1}$.84164	46°00′

lg sin θ

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
44°00′	1̄.84177	84190	84203	84216	84229	84242	84255	84269	84282	84295	50′
10′	84308	84321	84334	84347	84360	84373	84385	84398	84411	84424	40′
20′	84437	84450	84463	84476	84489	84502	84515	84528	84540	84553	30′
30′	84566	84579	84592	84605	84618	84630	84643	84656	84669	84682	20′
40′	84694	84707	84720	84733	84745	84758	84771	84784	84796	84809	10′
50′	84822	84835	84847	84860	84873	84885	84898	84911	84923	1̄.84936	45°00′
45°00′	1̄.84949	84961	84974	84986	84999	85012	85024	85037	85049	85062	50′
10′	85074	85087	85100	85112	85125	85137	85150	85162	85175	85187	40′
20′	85200	85212	85225	85237	85250	85262	85274	85287	85299	85312	30′
30′	85324	85337	85349	85361	85374	85386	85399	85411	85423	85436	20′
40′	85448	85460	85473	85485	85497	85510	85522	85534	85547	85559	10′
50′	85571	85583	85596	85608	85620	85632	85645	85657	85669	1̄.85681	44°00′
46°00′	1̄.85693	85706	85718	85730	85742	85754	85766	85779	85791	85803	50′
10′	85815	85827	85839	85851	85864	85876	85888	85900	85912	85924	40′
20′	85936	85948	85960	85972	85984	85996	86008	86020	86032	86044	30′
20′	86056	86068	86080	86092	86104	86116	86128	86140	86152	86164	20′
40′	86176	86188	86200	86211	86223	86235	86247	86259	86271	86283	10′
50′	86295	86306	86318	86330	86342	86354	86366	86377	86389	1̄.86401	43°00′
47°00′	1̄.86413	86425	86436	86448	86460	86472	86483	86495	86507	86518	50′
10′	86530	86542	86554	86565	86577	86589	86600	86612	86624	86635	40′
20′	86647	86659	86670	86682	86694	86705	86717	86728	86740	86752	30′
30′	86763	86775	86786	86798	86809	86821	86832	86844	86855	86867	20′
40′	86879	86890	86902	86913	86924	86936	86947	86959	86970	86982	10′
50′	86993	87005	87016	87028	87039	87050	87062	87073	87085	1̄.87096	42°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
48°00′	1̄.87107	87119	87130	87141	87153	87164	87175	87187	87198	87209	50′
10′	87221	87232	87243	87255	87266	87277	87288	87300	87311	87322	40′
20′	87334	87345	87356	87367	87378	87390	87401	87412	87423	87434	30′
30′	87446	87457	87468	87479	87490	87501	87513	87524	87535	87546	20′
40′	87557	87568	87579	87590	87601	87613	87624	87635	87646	87657	10′
50′	87668	87679	87690	87701	87712	87723	87734	87745	87756	1̄.87767	41°00′
49°00′	1̄.87778	87789	87800	87811	87822	87833	87844	87855	87866	87877	50′
10′	87887	87898	87909	87920	87931	87942	87953	87964	87975	87985	40′
20′	87996	88007	88018	88029	88040	88051	88061	88072	88083	88094	30′
30′	88105	88115	88126	88137	88148	88158	88169	88180	88191	88201	20′
40′	88212	88223	88234	88244	88255	88266	88276	88287	88298	88308	10′
50′	88319	88330	88340	88351	88362	88372	88383	88394	88404	1̄.88415	40°00′
50°00′	1̄.88425	88436	88447	88457	88468	88478	88489	88499	88510	88521	50′
10′	88531	88542	88552	88563	88573	88584	88594	88605	88615	88626	40′
20′	88636	88647	88657	88668	88678	88688	88699	88709	88720	88730	30′
30′	88741	88751	88761	88772	88782	88793	88803	88817	88824	88834	20′
40′	88844	88855	88865	88875	88886	88896	88906	88917	88927	88937	10′
50′	88048	88958	88968	88978	88989	88099	89009	89020	89030	1̄.89040	39°00′
51°00′	1̄.89050	89060	89071	89081	89091	89101	89112	89122	89132	89142	50′
10′	89152	89162	89173	89183	89193	89203	89213	89223	89233	89244	40′
20′	89254	89264	89274	89284	89294	89304	89314	89324	89334	89344	30′
30′	89354	89364	89375	89385	89395	89405	89415	89425	89435	89445	20′
40′	89455	89465	89475	89485	89495	89504	89514	89524	89534	89544	10′
50′	89554	89564	89574	89584	89594	89604	89614	89624	89633	1̄.89643	38°00′

余弦函数对数表 $\lg \cos \varphi$

lg sin θ

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
52°00′	$\bar{1}$.89653	89663	89673	89683	89693	89702	89712	89722	89732	89742	50′
10′	89752	89761	89771	89781	89791	89801	89810	89820	89830	89840	40′
20′	89849	89859	89869	89879	89888	89898	89908	89918	89927	89937	30′
30′	89947	89956	89966	89976	89985	89995	90005	90014	90024	90034	20′
40′	90043	90053	90063	90072	90082	90091	90101	90111	90120	90130	10′
50′	90139	90149	90159	90168	90178	90187	90197	90206	90216	$\bar{1}$.90225	37°00′
53°00′	$\bar{1}$.90235	90244	90254	90263	90273	90282	90292	90301	90311	90320	50′
10′	90330	90339	90349	90358	90368	90377	90386	90396	90405	90415	40′
20′	90424	90434	90443	90452	90462	90471	90480	90490	90499	90509	30′
30′	90518	90527	90537	90546	90555	90565	90574	90583	90592	90602	20′
40′	90611	90620	90630	90639	90648	90657	90667	90676	90685	90694	10′
50′	90704	90713	90722	90731	90741	90750	90759	90768	90777	$\bar{1}$.90787	36°00′
54°00′	$\bar{1}$.90796	90805	90814	90823	90832	90842	90851	90860	90869	90878	50′
10′	90887	90896	90906	90915	90924	90933	90942	90951	90960	90969	40′
20′	90978	90987	90996	91005	91014	91023	91033	91042	91051	91060	30′
30′	91069	91078	91087	91096	91105	91114	91123	91132	91141	91149	20′
40′	91158	91167	91176	91185	91194	91203	91212	91221	91230	91239	10′
50′	91248	91257	91266	91274	91283	91292	91301	91310	91319	$\bar{1}$.91328	35°00′
55°00′	$\bar{1}$.91336	91345	91354	91363	91372	91381	91389	91398	91407	91416	50′
10′	91425	91433	91442	91451	91460	91469	91477	91486	91495	91504	40′
20′	91512	91521	91530	91538	91547	91556	91565	91573	91582	91591	30′
30′	91599	91608	91617	91625	91634	91643	91651	91660	91669	91677	20′
40′	91686	91695	91703	91712	91720	91729	91738	91746	91755	91763	10′
50′	91772	91781	91789	91798	91806	91815	91823	91832	91840	$\bar{1}$.91849	34°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
56°00′	$\bar{1}$.91857	91866	91874	91883	91891	91900	91908	91917	91925	91934	50′
10′	91942	91951	91959	91968	91976	91985	91993	92002	92010	92018	40′
20′	92027	92035	92044	92052	92060	92069	92077	92086	92094	92102	30′
30′	92111	92119	92127	92136	92144	92152	92161	92169	92177	92186	20′
40′	92194	92202	92211	92219	92227	92235	92244	92252	92260	92269	10′
50′	92277	92285	92293	92302	92310	92318	92326	92335	92343	$\bar{1}$.92351	33°00′
57°00′	$\bar{1}$.92359	92367	92376	92384	92392	92400	92408	92416	92425	92433	50′
10′	92441	92449	92457	92465	92473	92482	92490	92498	92506	92514	40′
20′	92522	92530	92538	92546	92555	92563	92571	92579	92587	92595	30′
30′	92603	92611	92619	92627	92635	92643	92651	92659	92667	92675	20′
40′	92683	92691	92699	92707	92715	92723	92731	92739	92747	92755	10′
50′	92763	92771	92779	92787	92795	92803	92810	92818	92826	$\bar{1}$.92834	32°00′
58°00′	$\bar{1}$.92842	92850	92858	92866	92874	92881	92889	92897	92905	92913	50′
10′	92921	92929	92936	92944	92952	92960	92968	92976	92983	92991	40′
20′	92999	93007	93014	93022	93030	93038	93046	93053	93061	93069	30′
30′	93077	93084	93092	93100	93108	93115	93123	93131	93138	93146	20′
40′	93154	93161	93169	93177	93184	93192	93200	93207	93215	93223	10′
50′	93230	93238	93246	93253	93261	93269	93276	93284	93291	$\bar{1}$.93299	31°00′
59°00′	$\bar{1}$.93307	93314	93322	93329	93337	93344	93352	93360	93367	93375	50′
10′	93382	93390	93397	93405	93412	93420	93427	93435	93442	93450	40′
20′	93457	93465	93472	93480	93487	93495	93502	93510	93517	93525	30′
30′	93532	93539	93547	93554	93562	93569	93577	93584	93591	93599	20′
40′	93606	93614	93621	93628	93636	93643	93650	93658	93665	93673	10′
50′	93680	93687	93695	93702	93709	93717	93724	93731	93738	$\bar{1}$.93746	30°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数对数表 $\lg\cos\varphi$

lg sin θ

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
60°00′	$\bar{1}$.93753	93760	93768	93775	93782	93789	93797	93804	93811	93819	50′
10′	93826	93833	93840	93847	93855	93862	93869	93876	93884	93891	40′
20′	93898	93905	93912	93920	93927	93934	93941	93948	93955	93963	30′
30′	93970	93977	93984	93991	93998	94005	94012	94020	94027	94034	20′
40′	94041	94048	94055	94062	94069	94076	94083	94090	94098	94105	10′
50′	94112	94119	94126	94133	94140	94147	94154	94161	94168	$\bar{1}$.94175	29°00′
61°00′	$\bar{1}$.94182	94189	94196	94203	94210	94217	94224	94231	94238	94245	50′
10′	94252	94259	94266	94273	94279	94286	94293	94300	94307	94314	40′
20′	94321	94328	94335	94342	94349	94355	94362	94369	94376	94383	30′
30′	94390	94397	94404	94410	94417	94424	94431	94438	94445	94451	20′
40′	94458	94465	94472	94479	94485	94492	94499	94506	94513	94519	10′
50′	94526	94533	94540	94546	94553	94560	94567	94573	94580	$\bar{1}$.94587	28°00′
62°00′	$\bar{1}$.94593	94600	94607	94614	94620	94627	94634	94640	94647	94654	50′
10′	94660	94667	94674	94680	94687	94694	94700	94707	94714	94720	40′
20′	94727	94734	94740	94747	94753	94760	94767	94773	94780	94786	30′
30′	94793	94799	94806	94813	94819	94826	94832	94839	94845	94852	20′
40′	94858	94865	94871	94878	94885	94891	94898	94904	94911	94977	10′
50′	94923	94930	94936	94943	94949	94956	94962	94969	94975	$\bar{1}$.94982	27°00′
63°00′	$\bar{1}$.94988	94995	95001	95007	95014	95020	95027	95033	95039	95046	50′
10′	95052	95059	95065	95071	95078	95084	95090	95097	95103	95110	40′
20′	95116	95122	95129	95135	95141	95148	95154	95160	95167	95173	30′
30′	95179	95185	95192	95198	95204	95211	95217	95223	95229	95236	20′
40′	95242	95248	95254	95261	95267	95273	95279	95286	95292	95298	10′
50′	95304	95310	95317	95323	95329	95335	95341	95348	94351	$\bar{1}$.95360	26°00′

64°00′	Ī.95366	95372	95378	95384	95391	95397	95403	95409	95415	95421	50′
10′	95427	95434	95440	95446	95452	95458	95464	95470	95476	95482	40′
20′	95488	95494	95500	95507	95513	95519	95525	95531	95537	95543	30′
30′	95549	95555	95561	95567	95573	95579	95585	95591	95597	95603	20′
40′	95609	95615	95621	95627	95633	95639	95645	95651	95657	95663	10′
50′	95668	95674	95680	95686	95692	95698	95704	95710	95716	Ī.95722	25°00′
65°00′	Ī.95728	95733	95739	95745	95751	95757	95763	95769	95775	95780	50′
10′	95786	95792	95798	95804	95810	95815	95821	95827	95833	95839	40′
20′	95844	95850	95856	95862	95868	95873	95879	95885	95891	95897	30′
30′	95902	95908	95914	95920	95925	95931	95937	95942	95948	95954	20′
40′	95960	95965	95971	95977	95982	95988	95994	96000	96005	96011	10′
50′	96017	96022	96028	96034	96039	96045	96050	96056	96062	Ī.96067	24°00′
66°00′	Ī.96073	96079	96084	96090	96095	96101	96107	96112	96118	96123	50′
10′	96129	96135	96140	96146	96151	96157	96162	96168	96174	96179	40′
20′	96185	96190	96196	96201	96207	96212	96218	96223	96229	96234	30′
30′	96240	96245	96251	96256	96262	96267	96273	96278	96284	96289	20′
40′	96294	96300	96305	96311	96316	96322	96327	96333	96338	96343	10′
50′	96349	96354	96360	96365	96370	96376	96381	96387	96392	Ī.96397	23°00′
67°00′	Ī.96403	96408	96413	96419	96424	96429	96435	96440	96445	96451	50′
10′	96456	96461	96467	96472	96477	96483	96488	96493	96498	96504	40′
20′	96509	96514	96520	96525	96530	96535	96541	96546	96551	96556	30′
30′	96562	96567	96572	96577	96582	96588	96593	96598	96603	96608	20′
40′	96614	96619	96624	96629	96634	96640	96645	96650	96655	96660	10′
50′	96665	96670	96676	96681	96686	96691	96696	96701	96706	Ī.96711	22°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余弦函数对数表 $\lg\cos\varphi$

lg sin θ

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
68°00′	1̄.96717	96722	96727	96732	96737	96742	96747	96752	96757	96762	50′
10′	96767	96772	96778	96783	96788	96793	96798	96803	96808	96813	40′
20′	96818	96823	96828	96833	96838	96843	96848	96853	96858	96863	30′
30′	96868	96873	96878	96883	96888	96893	96898	96903	96907	96912	20′
40′	96917	96922	96927	96932	96937	96942	96947	96952	96957	96962	10′
50′	96966	96971	96976	96981	96986	96991	96996	97001	97005	1̄.97010	21°00′
69°00′	1̄.97015	97020	97025	97030	97035	97039	97044	97049	97054	97059	50′
10′	97063	97068	97073	97078	97083	97087	97092	97097	97102	97107	40′
20′	97111	97116	97121	97126	97130	97135	97140	97145	97149	97154	30′
30′	97159	97163	97168	97173	97178	97182	97187	97192	97196	97201	20′
40′	97206	97210	97215	97220	97224	97229	97234	97238	97243	97248	10′
50′	97252	97257	97262	97266	97271	97276	97280	97285	97289	1̄.97294	20°00′
70°00′	1̄.97299	97303	97308	97312	97317	97322	97326	97331	97335	97340	50′
10′	97344	97349	97353	97358	97363	97367	97372	97376	97381	97385	40′
20′	97390	97394	97399	97403	97408	97412	97417	97421	97426	97430	30′
30′	97435	97439	97444	97448	97453	97457	97461	97466	97470	97475	20′
40′	97479	97484	97488	97492	97497	97501	97506	97510	97515	97519	10′
50′	97523	97528	97532	97536	97541	97545	97550	97554	97558	1̄.97563	19°00′
71°00′	1̄.97567	97571	97576	97580	97584	97589	97593	97597	97602	97606	50′
10′	97610	97615	97619	97623	97628	97632	97636	97640	97645	97649	40′
20′	97653	97657	97662	97666	97670	97674	97679	97683	97687	97691	30′
30′	97696	97700	97704	97708	97713	97717	97721	97725	97729	97734	20′
40′	97738	97742	97746	97750	97754	97759	97763	97767	97771	97775	10′
50′	97779	97784	97788	97792	97796	97800	97804	97808	97812	1̄.97817	18°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
72°00′	Ī.97821	97825	97829	97833	97837	97841	97845	97849	97853	97857	50′
10′	97861	97866	97870	97874	97878	97882	97886	97890	97894	97898	40′
20′	97902	97906	97910	97914	97918	97922	97926	97930	97934	97938	30′
30′	97942	97946	97950	97954	97958	97962	97966	97970	97974	97978	20′
40′	97982	97986	97989	97993	97997	98001	98005	98009	98013	98017	10′
50′	98021	98025	98029	98032	98036	98040	98044	98048	98052	Ī.98056	17°00′
73°00′	Ī.98060	98063	98067	98071	98075	98079	98083	98087	98090	98094	50′
10′	98098	98102	98106	98110	98113	98117	98121	98125	98129	98132	40′
20′	98136	98140	98144	98147	98151	98155	98159	98162	98166	98170	30′
30′	98174	98177	98181	98185	98189	98192	98196	98200	98204	98207	20′
40′	98211	98215	98218	98222	98226	98229	98233	98237	98240	98244	10′
50′	98248	98251	98255	98259	98262	98266	98270	98273	98277	Ī.98281	16°00′
74°00′	Ī.98284	98288	98291	98295	98299	98302	98306	98309	98313	98317	50′
10′	98320	98324	98327	98331	98334	98338	98342	98345	98349	98352	40′
20′	98356	98359	98363	98366	98370	98373	98377	98381	98384	98388	30′
30′	98391	98395	98398	98402	98405	98409	98412	98415	98419	98422	20′
40′	98426	98429	98433	98436	98440	98443	98447	98450	98453	98457	10′
50′	98460	98464	98467	98471	98474	98477	98481	98484	98488	Ī.98491	15°00′
75°00′	Ī.98494	98498	98501	98505	98508	98511	98515	98518	98521	98525	50′
10′	98528	98531	98535	98538	98541	98545	98548	98551	98555	98558	40′
20′	98561	98565	98568	98571	98574	98578	98581	98584	98588	98591	30′
30′	98594	98597	98601	98604	98607	98610	98614	98617	98620	98623	20′
40′	98627	98630	98633	98636	98640	98643	98646	98649	98652	98656	10′
50′	98659	98662	98665	98668	98671	98675	98678	98681	98684	Ī.98687	14°00′

余弦函数对数表 lg cos φ

lg sin θ

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
76°00′	$\bar{1}$.98690	98694	98697	98700	98703	98706	98709	98712	98715	98719	50′
10′	98722	98725	98728	98731	98734	98737	98740	98743	98746	98750	40′
20′	98753	98756	98759	98762	98765	98768	98771	98774	98777	98780	30′
30′	98783	98786	98789	98792	98795	98798	98801	98804	98807	98810	20′
40′	98813	98816	98819	98822	98825	98828	98831	98834	98837	98840	10′
50′	98843	98846	98849	98852	98855	98858	98861	98864	98867	$\bar{1}$.98869	13°00′
77°00′	$\bar{1}$.98872	98875	98878	98881	98884	98887	98890	98893	98896	98898	50′
10′	98901	98904	98907	98910	98913	98916	98919	98921	98924	98927	40′
20′	98930	98933	98936	98938	98941	98944	98947	98950	98953	98955	30′
30′	98958	98961	98964	98967	98969	98972	98975	98978	98980	98983	20′
40′	98986	98989	98991	98994	98997	99000	99002	99005	99008	99011	10′
50′	99013	98016	99019	99022	99024	99027	99030	99032	99035	$\bar{1}$.99038	12°00′
78°00′	$\bar{1}$.99040	99043	99046	99048	99051	99054	99056	99059	99062	99064	50′
10′	99067	99070	99072	99075	99078	99080	99083	99086	99088	99091	40′
20′	99093	99096	99099	99101	99104	99106	99109	99112	99114	99117	30′
30′	99119	99122	99124	99127	99130	99132	99135	99137	99140	99142	20′
40′	99145	99147	99150	99152	99155	99157	99160	99162	99165	99167	10′
50′	99170	99172	99175	99177	99180	99182	99185	99187	99190	$\bar{1}$.99192	11°00′
79°00′	$\bar{1}$.99195	99197	99200	99202	99204	99207	99209	99212	99214	99217	50′
10′	99219	99221	99224	99226	99229	99231	99233	99236	99238	99241	40′
20′	99243	99245	99248	99250	99252	99255	99257	99260	99262	99264	30′
30′	99267	99269	99271	99274	99276	99278	99281	99283	99285	99288	20′
40′	99290	99292	99294	99297	99299	99301	99304	99306	99308	99310	10′
50′	99313	99315	99317	99319	99322	99324	99326	99328	99331	$\bar{1}$.99333	10°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
80°00′	$\bar{1}$.99335	99337	99340	99342	99344	99346	99348	99351	99353	99355	50′
10′	99357	99359	99362	99364	99366	99368	99370	99372	99375	99377	40′
20′	99379	99381	99383	99385	99388	99390	99392	99394	99396	99398	30′
30′	99400	99402	99404	99407	99409	99411	99413	99415	99417	99419	20′
40′	99421	99423	99425	99427	99429	99432	99434	99436	99438	99440	10′
50′	99442	99444	99446	99448	99450	99452	99454	99456	99458	$\bar{1}$.99460	9°00′
81°00′	$\bar{1}$.99462	99464	99466	99468	99470	99472	99474	99476	99478	99480	50′
10′	99482	99484	99486	99488	99490	99492	99494	99495	99497	99499	40′
20′	99501	99503	99505	99507	99509	99511	99513	99515	99517	99518	30′
30′	99520	99522	99524	99526	99528	99530	99532	99533	99535	99537	20′
40′	99539	99541	99543	99545	99546	99548	99550	99552	99554	99556	10′
50′	99557	99559	99561	99563	99565	99566	99568	99570	99572	$\bar{1}$.99574	8°00′
82°00′	$\bar{1}$.99575	99577	99579	99581	99582	99584	99586	99588	99589	99591	50′
10′	99593	99595	99596	99598	99600	99601	99603	99605	99607	99608	40′
20′	99610	99612	99613	99615	99617	99618	99620	99622	99624	99625	30′
30′	99627	99629	99630	99632	99633	99635	99637	99638	99640	99642	20′
40′	99643	99645	99647	99648	99650	99651	99653	99655	99656	99658	10′
50′	99659	99661	99663	99664	99666	99667	99669	99670	99672	$\bar{1}$.99674	7°00′
83°00′	$\bar{1}$.99675	99677	99678	99680	99681	99683	99684	99686	99687	99689	50′
10′	99690	99692	99693	99695	99696	99698	99699	99701	99702	99704	40′
20′	99705	99707	99708	99710	99711	99713	99714	99716	99717	99718	30′
30′	99720	99721	99723	99724	99726	99727	99728	99730	99731	99733	20′
40′	99734	99736	99737	99738	99740	99741	99742	99744	99745	99747	10′
50′	99748	99749	99751	99752	99753	99755	99756	99757	99759	$\bar{1}$.99760	6°00′

余弦函数对数表 $\lg\cos\varphi$

lg sin θ

正弦函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
84°00′	Ī.99761	99763	99764	99765	99767	99768	99769	99771	99772	99773	50′
10′	99775	99776	99777	99778	99780	99781	99782	99783	99785	99786	40′
20′	99787	99788	99790	99791	99792	99793	99795	99796	99797	99798	30′
30′	99800	99801	99802	99803	99804	99806	99807	99808	99809	99810	20′
40′	99812	99813	99814	99815	99816	99817	99819	99820	99821	99822	10′
50′	99823	99824	99825	99827	99828	99829	99830	99831	99832	Ī.99833	5°00′
85°00′	Ī.99834	99836	99837	99838	99839	99840	99841	99842	99843	99844	50′
10′	99845	99846	99847	99848	99850	99851	99852	99853	99854	99855	40′
20′	99856	99857	99858	99859	99860	99861	99862	99863	99864	99865	30′
30′	99866	99867	99868	99869	99870	99871	99872	99873	99874	99875	20′
40′	99876	99877	99878	99879	99879	99880	99881	99882	99883	99884	10′
50′	99885	99886	99887	99888	99889	99890	99891	99891	99892	Ī.99893	4°00′
86°00′	Ī.99894	99895	99896	99897	99898	99898	99899	99900	99901	99902	50′
10′	99903	99904	99904	99905	99906	99907	99908	99909	99909	99910	40′
20′	99911	99912	99913	99913	99914	99915	99916	99917	99917	99918	30′
30′	99919	99920	99920	99921	99922	99923	99923	99924	99925	99926	20′
40′	99926	99927	99928	99929	99929	99930	99931	99932	99932	99933	10′
50′	99934	99934	99935	99936	99936	99937	99938	99938	99939	Ī.99940	3°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
87°00′	$\bar{1}$.99940	99941	99942	99942	99943	99944	99944	99945	99946	99946	50′
10′	99947	99948	99948	99949	99949	99950	99951	99951	99952	99952	40′
20′	99953	99954	99954	99955	99955	99956	99956	99957	99958	99958	30′
30′	99959	99959	99960	99960	99961	99961	99962	99962	99963	99963	20′
40′	99964	99964	99965	99966	99966	99967	99967	99967	99968	99968	10′
50′	99969	99969	99970	99970	99971	99971	99972	99972	99973	$\bar{1}$.99973	2°00′
88°00′	$\bar{1}$.99974	99974	99974	99975	99975	99976	99976	99977	99977	99977	50′
10′	99978	99978	99979	99979	99979	99980	99980	99981	99981	99981	40′
20′	99982	99982	99982	99983	99983	99983	99984	99984	99984	99985	30′
30′	99985	99985	99986	99986	99986	99987	99987	99987	99988	99988	20′
40′	99988	99989	99989	99989	99989	99990	99990	99990	99990	99991	10′
50′	99991	99991	99992	99992	99992	99992	99992	99993	99993	$\bar{1}$.99993	1°00′
89°00′	$\bar{1}$.99993	99994	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995	99995	50′
10′	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997	99997	40′
20′	99997	99997	99997	99997	99998	99998	99998	99998	99998	99998	30′
30′	99998	99998	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	20′
40′	99999	99999	99999	99999	*00000	*00000	*00000	*00000	*00000	0.00000	10′
50′	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.00000	0°00′

余弦函数对数表 $\lg \cos \varphi$

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
0°00′		$\bar{4}$.46373	76476	94085	*06579	*16270	*24188	*30882	*36682	$\bar{3}$.41797	50′
10′	$\bar{3}$.46373	60512	54291	57767	60986	63982	66785	69418	71900	74248	40′
20′	76476	78595	80615	82546	84394	86167	87871	89510	91089	92613	30′
30′	94086	95510	96889	98225	99552	*00781	*02004	*03194	*04353	$\bar{2}$.05481	20′
40′	$\bar{2}$.06581	07653	08700	09722	10720	11696	12651	13585	14500	15395	10′
50′	16273	17133	17976	18804	19616	20413	21195	21964	22720	$\bar{2}$.23462	89°00′
1°00′	$\bar{2}$.24192	24910	25616	26312	26996	27669	28332	28986	29629	30263	50′
10′	30888	31505	32112	32711	33302	33886	34461	35029	35590	36143	40′
20′	36689	37229	37762	38289	38809	39323	39832	40334	40830	41321	30′
30′	41807	42287	42762	43232	43696	44156	44611	45061	45507	45948	20′
40′	46385	46817	47245	47669	48089	48505	48917	49325	49729	50130	10′
50′	50527	50920	51310	51696	52079	52459	52835	53208	53578	$\bar{2}$.53945	88°00′
2°00′	$\bar{2}$.54308	54669	55027	55382	55734	56083	56429	56773	57114	57452	50′
10′	57788	58121	58451	58779	59105	59428	59749	60068	60384	60698	40′
20′	61009	61319	61626	61931	62234	62535	62834	63131	63426	63718	30′
30′	64009	64298	64585	64870	65154	65435	65715	65993	66269	66543	20′
40′	66816	67087	67356	67624	67890	68154	68417	68678	68938	69196	10′
50′	69453	69708	69962	70214	70465	70714	70962	71208	71453	$\bar{2}$.71697	87°00′
3°00′	$\bar{2}$.71940	72181	72420	72659	72896	73132	73366	73600	73832	74063	50′
10′	74292	74521	74748	74974	75199	75423	75645	75867	76087	76306	40′
20′	76525	76742	76958	77173	77387	77600	77811	78022	78232	78441	30′
30′	78649	78855	79061	79266	79470	79673	79875	80076	80277	80476	20′
40′	80674	80872	81068	81264	81459	81653	81846	82038	82230	82420	10′
50′	82610	82799	82987	83175	83361	83547	83732	83916	84100	$\bar{2}$.84282	86°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	
4°00′	$\bar{2}$.84464	84646	84826	85006	85185	85363	85540	85717	85893	86069	50′
10′	86243	86417	86591	86763	86935	87106	87277	87447	87616	87785	40′
20′	87953	88120	88287	88453	88618	88783	88948	89111	89274	89437	30′
30′	89598	89760	89920	90080	90240	90399	90557	90715	90872	91029	20′
40′	91185	91340	91495	91650	91803	91957	92110	92262	92414	92565	10′
50′	92716	92866	93016	93165	93313	93462	93609	93756	93903	$\bar{2}$.94049	85°00′
5°00′	$\bar{2}$.94195	94340	94485	94630	94773	94917	95060	95202	95344	95486	50′
10′	95627	95767	95908	96047	96187	96325	96464	96602	96739	96877	40′
20′	97013	97150	97286	97421	97556	97691	97825	97959	98092	98225	30′
30′	98358	98490	98622	98753	98884	99015	99145	99275	99405	99534	20′
40′	99662	99791	99919	00046	*00174	*00301	*00427	*00553	*00679	$\bar{1}$.00805	10′
50′	$\bar{1}$.00930	01055	01179	01303	01427	01550	01673	01796	01918	$\bar{1}$.02040	84°00′
6°00′	$\bar{1}$.02162	02283	02404	02525	02645	02766	02885	03005	03124	03242	50′
10′	03361	03479	03597	03714	03832	03948	04065	04181	04297	04413	40′
20′	04528	04643	04758	04873	04987	05101	05214	05328	05441	05553	30′
30′	05666	05778	05890	06002	06113	06224	06335	06445	06556	06666	20′
40′	06775	06885	06994	07103	07211	07320	07428	07536	07643	07751	10′
50′	07858	07964	08071	08177	08283	08389	08495	08600	08705	$\bar{1}$.08810	83°00′
7°00′	$\bar{1}$.08914	09019	09123	09227	09330	09434	09537	09640	09742	09845	50′
10′	09947	10049	10150	10252	10353	10454	10555	10656	10756	10856	40′
20′	10956	11056	11155	11254	11353	11452	11551	11649	11747	11845	30′
30′	11943	12040	12138	12235	12332	12428	12525	12621	12717	12813	20′
40′	12909	13004	13099	13194	13289	13384	13478	13573	13667	13761	10′
50′	13854	13948	14041	14134	14227	14320	14412	14504	14597	$\bar{1}$.14688	82°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数对数表　　$\lg \operatorname{ctg} \varphi$

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
8°00′	$\bar{1}$.14780	14872	14963	15054	15145	15236	15327	15417	15508	15598	50′
10′	15688	15777	15867	15956	16046	16135	16224	16312	16401	16489	40′
20′	16577	16665	16753	16841	16928	17016	17103	17190	17277	17363	30′
30′	17450	17536	17622	17708	17794	17880	17965	18051	18136	18221	20′
40′	18306	18391	18475	18560	18644	18728	18812	18896	18979	19063	10′
50′	19146	19229	19312	19395	19478	19561	19643	19725	19807	$\bar{1}$.19889	81°00′
9°00′	$\bar{1}$.19971	20053	20134	20216	20297	20378	20459	20540	20621	20701	50′
10′	20782	20862	20942	21022	21102	21182	21261	21341	21420	21499	40′
20′	21578	21657	21736	21814	21893	21971	22049	22127	22205	22283	30′
30′	22361	22438	22516	22593	22670	22747	22824	22901	22977	23054	20′
40′	23130	23206	23283	23359	23435	23510	23586	23661	23737	23812	10′
50′	23887	23962	24037	24112	24186	24261	24335	24410	24484	$\bar{1}$.24558	80°00′
10°00′	$\bar{1}$.24632	24706	24779	24853	24926	25000	25073	25146	25219	25292	50′
10′	25365	25437	25510	25582	25655	25727	25799	25871	25943	26015	40′
20′	26086	26158	26229	26301	26372	26443	26514	26585	26655	26726	30′
30′	26797	26867	26937	27003	27078	27148	27218	27288	27357	27427	20′
40′	27496	27566	27635	27704	27773	27842	27911	27980	28049	28117	10′
50′	28186	28254	28323	28391	28459	28527	28595	28662	28730	$\bar{1}$.28798	79°00′
11°00′	$\bar{1}$.28865	28933	29000	29067	29134	29201	29268	29335	29402	29468	50′
10′	29535	29601	29668	29734	29800	29866	29932	29998	30064	30130	40′
20′	30195	30261	30326	30391	30457	30522	30587	30652	30717	30782	30′
30′	30846	30911	30975	31040	31104	31168	31233	31297	31361	31425	20′
40′	31489	31552	31616	31679	31743	31806	31870	31933	31996	32059	10′
50′	32122	32185	32248	32311	32373	32436	32498	32561	32623	$\bar{1}$.32685	78°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
12°00′	$\bar{1}$.32747	32810	32872	32933	32995	33057	33119	33180	33242	33303	50′
10′	33365	33426	33487	33548	33609	33670	33731	33792	33853	33913	40′
20′	33974	34034	34095	34155	34215	34276	34336	34396	34456	34516	30′
30′	34576	34635	34695	34755	34814	34874	34933	34992	35051	35111	20′
40′	35170	35229	35288	35347	35405	35464	35523	35581	35640	35698	10′
50′	35757	35815	35873	35931	35989	36047	36105	36163	36221	$\bar{1}$.36279	77°00′
13°00′	$\bar{1}$.36336	36394	36452	36509	36566	36624	36681	36738	36795	36852	50′
10′	36909	36966	37023	37080	37137	37193	37250	37306	37363	37419	40′
20′	37476	37532	37588	37644	37700	37756	37812	37868	37924	37980	30′
30′	38035	38091	38147	38202	38257	38313	38368	38423	38479	38534	20′
40′	38589	38644	38699	38754	38808	38863	38918	38972	39027	39082	10′
50′	39136	39190	39245	39299	39353	39407	39461	39515	39569	$\bar{1}$.39623	76°00′
14°00′	$\bar{1}$.39677	39731	39785	39838	39892	39945	39999	40052	40106	40159	50′
10′	40212	40266	40319	40372	40425	40478	40531	40584	40636	40689	40′
20′	40742	40795	40847	40900	40952	41005	41057	41109	41161	41214	30′
30′	41266	41318	41370	41422	41474	41526	41578	41629	41681	41733	20′
40′	41784	41836	41887	41939	41990	42041	42093	42144	42195	42246	10′
50′	42297	42348	42399	42450	42501	42552	42603	42653	42704	$\bar{1}$.42755	75°00′
15°00′	$\bar{1}$.42805	42856	42906	42957	43007	43057	43108	43158	43208	43258	50′
10′	43308	43358	43408	43458	43508	43558	43607	43657	43707	43756	40′
20′	43806	43855	43905	43954	44004	44053	44102	44151	44201	44250	30′
30′	44299	44348	44397	44446	44495	44544	44592	44641	44690	44738	20′
40′	44787	44836	44884	44933	44981	45029	45078	45126	45174	45222	10′
50′	45271	45319	45367	45415	45463	45511	45559	45606	45654	$\bar{1}$.45702	74°00′

余切函數对数表 lg ctg φ

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
16°00′	$\bar{1}$.45750	45797	45845	45892	45940	45987	46035	46082	46130	46177	50′
10′	46224	46271	46319	46366	46413	46460	46507	46554	46601	46648	40′
20′	46694	46741	46788	46835	46881	46928	46975	47021	47068	47114	30′
30′	47160	47207	47253	47299	47346	47392	47438	47481	47530	47576	20′
40′	47622	47668	47714	47760	47806	47852	47897	47943	47989	48035	10′
50′	48080	48126	48171	48217	48262	48307	48353	48398	48443	$\bar{1}$.48489	73°00′
17°00′	$\bar{1}$.48534	48579	48624	48669	48714	48759	48804	48849	48894	48939	50′
10′	48984	49029	49073	49118	49163	49207	49252	49296	49341	49385	40′
20′	49430	49474	49519	49563	49607	49652	49696	49740	49784	49828	30′
30′	49872	49916	49960	50004	50048	50092	50136	50180	50223	50267	20′
40′	50311	50355	50398	50442	50485	50529	50572	50516	50659	50703	10′
50′	50746	50789	50833	50876	50919	50962	51005	51048	51092	$\bar{1}$.51135	72°00′
18°00′	$\bar{1}$.51178	51221	51264	51306	51349	51392	51435	51478	51520	51563	50′
10′	51606	51648	51691	51734	51776	51819	51861	51903	51946	51988	40′
20′	52031	52073	52115	52157	52200	52242	52284	52326	52368	52410	30′
30′	52452	52494	52536	52578	52620	52661	52703	52745	52787	52829	20′
40′	52870	52912	52953	52995	53037	53078	53120	53161	53202	53244	10′
50′	53285	53327	53368	53409	53450	53492	53533	53574	53615	$\bar{1}$.53656	71°00′
19°00′	$\bar{1}$.53697	53738	53779	53820	53861	53902	53943	53984	54025	54065	50′
10′	54106	54147	54187	54228	54269	54309	54350	54390	54431	54471	40′
20′	54512	54552	54593	54633	54673	54714	54754	54794	54835	54875	30′
30′	54915	54955	54995	55035	55075	55115	55155	55195	55235	55275	20′
40′	55315	55355	55395	55434	55474	55514	55554	55593	55633	55673	10′
50′	55712	55752	55791	55831	55870	55910	55949	55989	56028	$\bar{1}$.56067	70°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
20°00′	$\bar{1}$.56107	56146	56185	56224	56264	56303	56342	56381	56420	56459	50′
10′	56498	56537	56576	56615	56654	56693	56732	56771	56810	56849	40′
20′	56887	56926	56965	57004	57042	57081	57120	57158	57197	57235	30′
30′	57274	57312	57351	57389	57428	57466	57504	57543	57581	57619	20′
40′	57658	57696	57734	57772	57810	57849	57887	57925	57963	58001	10′
50′	58039	58077	58115	58153	58191	58229	58267	58304	58342	$\bar{1}$.58380	69°00′
21°00′	$\bar{1}$.58418	58455	58493	58531	58569	58606	58644	58681	58719	58757	50′
10′	58794	58832	58869	58907	58944	58981	59019	59056	59094	59131	40′
20′	59168	59205	59243	59280	59317	59354	59391	59429	59466	59503	30′
30′	59540	59577	59614	59651	59688	59725	59762	59799	59835	59872	20′
40′	59909	59946	59983	60019	60056	60093	60130	60166	60203	60240	10′
50′	60276	60313	60349	60386	60422	60459	60495	60532	60568	$\bar{1}$.60605	68°00′
22°00′	$\bar{1}$.60641	60677	60714	60750	60786	60823	60859	60895	60931	60967	50′
10′	61004	61040	61076	61112	61148	61184	61220	61256	61292	61328	40′
20′	61364	61400	61436	61472	61508	61544	61579	61615	61651	61687	30′
30′	61722	61758	61794	61830	61865	61901	61936	61972	62008	62043	20′
40′	62079	62114	62150	62185	62221	62256	62292	62327	62362	62398	10′
50′	62433	62468	62504	62539	62574	62609	62645	62680	62715	$\bar{1}$.62750	67°00′
23°00′	$\bar{1}$.62785	62820	62855	62890	62926	62961	62996	63031	63066	63101	50′
10′	63135	63170	63205	63240	63275	63310	63345	63379	63414	63449	40′
20′	63484	63519	63553	63588	63623	63657	63692	63726	63761	63796	30′
30′	63830	63865	63899	63934	63968	64003	64037	64072	64106	64140	20′
40′	64175	64209	64243	64278	64312	64346	64381	64415	64449	64483	10′
50′	64517	64552	64586	64620	64654	64688	64722	64756	64790	$\bar{1}$.64824	66°00′

余切函数对数表 lg ctg φ

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
24°00′	$\bar{1}$.64858	64892	64926	64960	64994	65028	65062	65096	65130	65164	50′
10′	65197	65231	65265	65299	65333	65366	65400	65434	65467	65501	40′
20′	65535	65568	65602	65636	65669	65703	65736	65770	65803	65837	30′
20′	65870	65904	65937	65971	66004	66038	66071	66104	66138	66171	20′
40′	66204	66238	66271	66304	66337	66371	66404	66437	66470	66503	10′
50′	66537	66570	66603	66636	66669	66702	66735	66768	66801	$\bar{1}$.66834	65°00′
25°00′	$\bar{1}$.66867	66900	66933	66966	66999	67032	67065	67098	67131	67163	50′
10′	67196	67229	67262	67295	67327	67360	67393	67426	67458	67491	40′
20′	67524	67556	67589	67622	67654	67687	67719	67752	67785	67817	30′
30′	67850	67882	67915	67947	67980	68012	68044	68077	68109	68142	20′
40′	68174	68206	68239	68271	68303	68336	68368	68400	68432	68465	10′
50′	68497	68529	68561	68593	68626	68658	68690	68722	68754	$\bar{1}$.68786	64°00′
26°00′	$\bar{1}$.68818	68850	68882	68914	68946	68978	69010	69042	69074	69106	50′
10′	69138	69170	69202	69234	69266	69298	69329	69361	69393	69425	40′
20′	69457	69488	69520	69552	69584	69615	69647	69679	69710	69742	30′
30′	69774	69805	69837	69868	69900	69932	69963	69995	70026	70058	20′
40′	70089	70121	70152	70184	70215	70247	70278	70309	70341	70372	10′
50′	70404	70435	70466	70498	70529	70560	70592	70623	70654	$\bar{1}$.70685	63°00′
27°00′	$\bar{1}$.70717	70748	70779	70810	70841	70873	70904	70935	70966	70997	50′
10′	71028	71059	71090	71121	71153	71184	71215	71246	71277	71308	40′
20′	71339	71370	71401	71431	71462	71493	71524	71555	71586	71617	30′
20′	71648	71679	71709	71740	71771	71802	71833	71863	71894	71925	20′
40′	71955	71986	72017	72048	72078	72109	72140	72170	72201	72231	10′
50′	72262	72293	72323	72354	72384	72415	72445	72476	72506	$\bar{1}$.72537	62°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
28°00′	$\bar{1}$.72567	72598	72628	72659	72689	72720	72750	72780	72811	72841	50′
10′	72872	72902	72932	72963	72993	73023	73054	73084	73114	73144	40′
20′	73175	73205	73235	73265	73295	73326	73356	73386	73416	73446	30′
30′	73476	73507	73537	73567	73597	73627	73657	73687	73717	73747	20′
40′	73777	73807	73837	73867	73897	73927	73957	73987	74017	74047	10′
50′	74077	74107	74137	74166	74196	74226	74256	74286	74316	$\bar{1}$.74345	61°00′
29°00′	$\bar{1}$.74375	74405	74435	74465	74494	74524	74554	74583	74613	74643	50′
10′	74673	74702	74732	74762	74791	74821	74851	74880	74910	74939	40′
20′	74969	74998	75028	75058	75087	75117	75146	75176	75205	75235	30′
30′	75264	75294	75323	75353	75382	75411	75441	75470	75500	75529	20′
40′	75558	75588	75617	75647	75676	75705	75735	75764	75793	75822	10′
50′	75852	75881	75910	75939	75969	75998	76027	76056	76086	$\bar{1}$.76115	60°00′
30°00′	$\bar{1}$.76144	76173	76202	76231	76261	76290	76319	76348	76377	76406	50′
10′	76435	76464	76493	76522	76551	76580	76609	76639	76668	76697	40′
20′	76725	76754	76783	76812	76841	76870	76899	76928	76957	76986	30′
30′	77015	77044	77073	77101	77130	77159	77188	77217	77246	77274	20′
40′	77303	77332	77361	77390	77418	77447	77476	77505	77533	77562	10′
50′	77591	77619	77648	77677	77706	77734	77763	77791	77820	$\bar{1}$.77849	59°00′
31°00′	$\bar{1}$.77877	77906	77935	77963	77992	78020	78049	78077	78106	78135	50′
10′	78163	78192	78220	78249	78277	78306	78334	78363	78391	78419	40′
20′	78448	78476	78505	78533	78562	78590	78618	78647	78675	78704	30′
30′	78732	78760	78789	78817	78845	78874	78902	78930	78959	78987	20′
40′	79015	79043	79072	79100	79128	79156	79185	79213	79241	79269	10′
50′	79297	79326	79354	79382	79410	79438	79466	79495	79523	$\bar{1}$.79551	58°00′

余切函数对数表 lg ctg φ

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
32°00′	1̄.79579	79607	79635	79663	79691	79719	79747	79776	79804	79832	50′
10′	79860	79888	79916	79944	79972	80000	80028	80056	80084	80112	40′
20′	80140	80168	80195	80223	80251	80279	80307	80335	80363	80391	30′
30′	80419	80447	80474	80502	80530	80558	80586	80614	80642	80669	20′
40′	80697	80725	80753	80781	80808	80836	80864	80892	80919	80947	10′
50′	80975	81003	81030	81058	81086	81113	81141	81169	81196	1̄.81224	57°00′
33°00′	1̄.81252	81279	81307	81335	81362	81390	81418	81445	81473	81500	50′
10′	81528	81556	81583	81611	81638	81666	81693	81721	81748	81776	40′
20′	81803	81831	81858	81886	81913	81941	81968	81996	82023	82051	30′
30′	82078	82106	82133	82161	82188	82215	82243	82270	82298	82325	20′
40′	82352	82380	82407	82435	82462	82489	82517	82544	82571	82599	10′
50′	82626	82653	82681	82708	82735	82762	82790	82817	82844	1̄.82871	56°00′
34°00′	1̄.82899	82926	82953	82980	83008	83035	83062	83089	83117	83144	50′
10′	83171	83198	83225	83252	83280	83307	83334	83361	83388	83415	40′
20′	83442	83470	83497	83524	83551	83578	83605	83632	83659	83686	30′
30′	83713	83740	83768	83795	83822	83849	83876	83903	83930	83957	20′
40′	83984	84011	84038	84065	84092	84119	84146	84173	84200	84227	10′
50′	84254	84280	84307	84334	84361	84388	84415	84442	84469	1̄.84496	55°00′
35°00′	1̄.84523	84550	84576	84603	84630	84657	84684	84711	84738	84764	50′
10′	84791	84818	84845	84872	84899	84925	84952	84979	85006	85033	40′
20′	85059	85086	85113	85140	85166	85193	85220	85247	85273	85300	30′
30′	85327	85354	85380	85407	85434	85460	85487	85514	85540	85567	20′
40′	85594	85620	85647	85674	85700	85727	85754	85780	85807	85834	10′
50′	85860	85887	85913	85940	85967	85993	86020	86046	86073	1̄.86100	54°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
36°00′	$\bar{1}$.86126	86153	86179	86206	86232	86259	86285	86312	86338	86365	50′
10′	86392	86418	86445	86471	86498	86524	86551	86577	86603	86630	40′
20′	86656	86683	86709	86736	86762	86789	86815	86842	86868	86894	30′
30′	86921	86947	86974	87000	87027	87053	87079	87106	87132	87158	20′
40′	87185	87211	87238	87264	87290	87317	87343	87369	87396	87422	10′
50′	87448	87475	87501	87527	87554	87580	87606	87633	87659	$\bar{1}$.87685	53°00′
37°00′	$\bar{1}$.87711	87738	87764	87790	87817	87843	87869	87895	87922	87948	50′
10′	87974	88000	88027	88053	88079	88105	88131	88158	88184	88210	40′
20′	88236	88262	88289	88315	88341	88367	88393	88420	88446	88472	30′
30′	88498	88524	88550	88577	88603	88629	88655	88681	88707	88733	20′
40′	88759	88786	88812	88838	88864	88890	88916	88942	88968	88994	10′
50′	89020	89046	89073	89099	89125	89151	89177	89203	89229	$\bar{1}$.89255	52°00′
38°00′	$\bar{1}$.89281	89307	89333	89359	89385	89411	89437	89463	89489	89515	50′
10′	89541	89567	89593	89619	89645	89671	89697	89723	89749	89775	40′
20′	89801	89827	89853	89879	89905	89931	89957	89983	90009	90035	30′
30′	90061	90086	90112	90138	90164	90190	90216	90242	90268	90294	20′
40′	90320	90346	90371	90397	90423	90449	90475	90501	90527	90553	10′
50′	90578	90604	90630	90656	90682	90708	90734	90759	90785	$\bar{1}$.90811	51°00′
39°00′	$\bar{1}$.90837	90863	90889	90914	90940	90966	90992	91018	91043	91069	50′
10′	91095	91121	91147	91172	91198	91224	91250	91276	91301	91327	40′
20′	91353	91379	91404	91430	91456	91482	91507	91533	91559	91585	30′
30′	91610	91636	91662	91688	91713	91739	91765	91791	91816	91842	20′
40′	91868	91893	91919	91945	91971	91996	92022	92048	92073	92099	10′
50′	92125	92150	92176	92202	92227	92253	92279	92304	92330	$\bar{1}$.92356	50°00′

余切函数对数表 lg ctg φ

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
40°00′	Ī.92381	92407	92433	92458	92484	92510	92635	92561	92587	92612	50′
10′	92638	92663	92689	92715	92740	92766	92792	92817	92843	92868	40′
20′	92894	92920	92945	92971	92996	93022	93048	93073	93099	93124	30′
30′	93150	93175	93201	93227	93252	93278	93303	93329	93354	93380	20′
40′	93406	93431	93457	93482	93508	93533	93559	93584	93610	93636	10′
50′	93661	93687	93712	93738	93763	93789	93814	93840	93865	Ī.93891	49°00′
41°00′	Ī.93916	93942	93967	93993	94018	94044	94069	94095	94120	94146	50′
10′	94171	94197	94222	94248	94273	94299	94324	94350	94375	94401	40′
20′	94426	94452	94477	94503	94528	94554	94579	94604	94630	94655	30′
30′	94681	94706	94732	94757	94783	94808	94834	94859	94884	94910	20′
40′	94935	94961	94986	95012	95037	95062	95088	95113	95139	95164	10′
50′	95190	95215	95240	95266	95291	95317	95342	95368	95393	Ī.95418	48°00′
42°00′	Ī.95444	95469	95495	95520	95545	95571	95596	95622	95647	95672	50′
10′	95698	95723	95748	95774	95799	95825	95850	95875	95901	95926	40′
20′	95952	95977	96002	96028	96053	96078	96104	96129	96155	96180	30′
30′	96205	96231	96256	96281	96307	96332	96357	96383	96408	96433	20′
40′	96459	96484	96510	96535	96560	96586	96611	96636	96662	96687	10′
50′	96712	96738	96763	96788	96814	96839	96864	96890	96915	Ī.96940	47°00′
43°00′	Ī.96966	96991	97016	97042	97067	97092	97118	97143	97168	97193	50′
10′	97219	97244	97269	97295	97320	97345	97371	97396	97421	97447	40′
20′	97472	97497	97523	97548	97573	97598	97624	97649	97674	97700	30′
30′	97725	97750	97776	97801	97826	97851	97877	97902	97927	97953	20′
40′	97978	98003	98029	98054	98079	98104	98130	98155	98180	98206	10′
50′	98231	98256	98281	98307	98332	98357	98383	98408	98433	Ī.98458	46°00′

44°00′	Ī.98484	98509	98534	98560	98585	98610	98635	98661	98686	98711	50′
10′	98737	98762	98787	98812	98838	98863	98888	98913	98939	98964	40′
20′	98989	99015	99040	99065	99090	99116	99141	99166	99191	99217	30′
30′	99242	99267	99293	99318	99343	99368	99394	99419	99444	99469	20′
40′	99495	99520	99545	99570	99596	99621	99646	99672	99697	99722	10′
50′	99747	99773	99798	99823	99848	99874	99899	99924	99949	Ī.99975	45°00′
45°00′	0.00000	00025	00051	00076	00101	00126	00152	00177	00202	00227	50′
10′	00253	00278	00303	00328	00354	00379	00404	00430	00455	00480	40′
20′	00505	00531	00556	00581	00606	00632	00657	00682	00707	00733	30′
30′	00758	00783	00809	00834	00859	00884	00910	00935	00960	00985	20′
40′	01011	01036	01061	01087	01112	01137	01162	01188	01213	01238	10′
50′	01263	01289	01314	01339	01365	01390	01415	01440	01466	0.01491	44°00′
46°00′	0.01516	01542	01567	01592	01617	01643	01668	01693	01719	01744	50′
10′	01769	01794	01820	01845	01870	01896	01921	01946	01971	01997	40′
20′	02022	02047	02073	02098	02123	02149	02174	02199	02224	02250	30′
30′	02275	02300	02326	02351	02376	02402	02427	02452	02477	02503	20′
40′	02528	02553	02579	02604	02629	02655	02680	02705	02731	02756	10′
50′	02781	02807	02832	02857	02882	02908	02933	02958	02984	0.03009	43°00′
47°00′	0.03034	03060	03085	03110	03136	03161	03186	03212	03237	03262	50′
10′	03288	03313	03338	03364	03389	03414	03440	03465	03490	03516	40′
20′	03541	03567	03592	03617	03643	03668	03693	03719	03744	03769	30′
30′	03795	03820	03845	03871	03896	03922	03947	03972	03998	04023	20′
40′	04048	04074	04099	04125	04150	04175	04201	04226	04252	04277	10′
50′	04302	04328	04353	04378	04404	04429	04455	04480	04505	0.04531	42°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数对数表 lg ctg φ

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
48°00′	0.04556	04582	04607	04632	04656	04683	04709	04734	04760	04785	50′
10′	04810	04836	04861	04887	04912	04938	04963	04988	05014	05039	40′
20′	05065	05090	05116	05141	05166	05192	05217	05243	05268	05294	30′
30′	05319	05345	05370	05496	05421	05446	05472	05497	05528	05548	20′
40′	05574	05599	05625	05650	05676	05701	05727	05752	05778	05803	10′
50′	05829	05854	05880	05905	05931	05956	05982	06007	06033	0.06058	41°00′
49°00′	0.06084	06109	06135	06160	06186	06211	06237	06262	06288	06313	50′
10′	06339	06364	06390	06416	06441	06467	06492	06518	06543	06569	40′
20′	06594	06620	06646	06671	06697	06722	06748	06773	06799	06825	30′
30′	06850	06876	06901	06927	06952	06978	07004	07029	07055	07080	20′
40′	07106	07132	07157	07183	07208	07234	07260	07285	07311	07337	10′
50′	07362	07388	07413	07439	07465	07490	07516	07542	07567	0.07593	40°00′
50°00′	0.07619	07644	07670	07696	07721	07747	07773	07798	07824	07850	50′
10′	07875	07901	07927	07952	07978	08004	08029	08055	08081	08107	40′
20′	08132	08158	08184	08209	08235	08261	08287	08312	08338	08364	30′
30′	08390	08415	08441	08467	08493	08518	08544	08570	08596	08621	20′
40′	08647	08673	08699	08724	08750	08776	08802	08828	08853	08879	10′
50′	08905	08931	08957	08982	09008	09034	09060	09086	09111	0.09137	39°00′
51°00′	0.09163	09189	09215	09241	09266	09292	09318	09344	09370	09396	50′
10′	09422	09447	09473	09499	09525	09551	09577	09603	09629	09654	40′
20′	09680	09706	09732	09758	09784	09810	09836	09862	09888	09914	30′
30′	09939	09965	09991	10017	10043	10069	10095	10121	10147	10173	20′
40′	10199	10225	10251	10277	10303	10329	10355	10381	10407	10433	10′
50′	10459	10485	10511	10537	10563	10589	10615	10641	10667	0.10693	38°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
52°00′	0.10719	10745	10771	10797	10823	10849	10875	10901	10927	10954	50′
10′	10980	11006	11032	11058	11084	11110	11136	11162	11188	11214	40′
20′	11241	11267	11293	11319	11345	11371	11397	11423	11450	11476	30′
30′	11502	11528	11554	11580	11607	11633	11659	11685	11711	11738	20′
40′	11764	11790	11816	11842	11869	11895	11921	11947	11973	12000	10′
50′	12026	12052	12078	12105	12131	12157	12183	12210	12236	0.12262	37°00′
53°00′	0.12289	12315	12341	12367	12394	12420	12446	12473	12499	12525	50′
10′	12552	12578	12604	12631	12657	12683	12710	12736	12762	12789	40′
20′	12815	12842	12868	12894	12921	12947	12973	13000	13026	13053	30′
30′	13079	13106	13132	13158	13185	13211	13238	13264	13291	13317	20′
40′	13344	13370	13397	13423	13449	13476	13502	13529	13555	13582	10′
50′	13608	13635	13662	13688	13715	13741	13768	13794	13821	0.13847	36°00′
54°00′	0.13874	13900	13927	13954	13980	14007	14033	14060	14087	14113	50′
10′	14140	14166	14193	14220	14246	14273	14300	14326	14353	14380	40′
20′	14406	14433	14460	14486	14513	14540	14566	14593	14620	14646	30′
30′	14673	14700	14727	14753	14780	14807	14834	14860	14887	14914	20′
40′	14941	14967	14994	15021	15048	15075	15101	15128	15155	15182	10′
50′	15209	15236	15262	15289	15316	15343	15370	15397	15424	0.15450	35°00′
55°00′	0.15477	15504	15531	15558	15585	15612	15639	15666	15693	15720	50′
10′	15746	15773	15800	15827	15854	15881	15908	15935	15962	15989	40′
20′	16016	16043	16070	16097	16124	16151	16178	16205	16232	16260	30′
30′	16287	16314	16341	16368	16395	16422	16449	16476	16503	16530	20′
40′	16558	16585	16612	16639	16666	16693	16720	16748	16775	16802	10′
50′	16829	16856	16883	16911	16938	16965	16992	17020	17047	0.17074	34°00′

余切函数对数表 lg ctg φ

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
56°00′	0.17101	17129	17156	17183	17210	17238	17265	17292	17319	17347	50′
10′	17374	17401	17429	17456	17483	17511	17538	17565	17593	17620	40′
20′	17648	17675	17702	17730	17757	17785	17812	17839	17867	17894	30′
30′	17922	17949	17977	18004	18032	18059	18087	18114	18142	18169	20′
40′	18197	18224	18252	18279	18307	18334	18362	18389	18417	18444	10′
50′	18472	18500	18527	18555	18582	18610	18638	18665	18693	0.18721	33°00′
57°00′	0.18748	18776	18804	18831	18859	18887	18914	18942	18970	18997	50′
10′	19025	19053	19081	19108	19136	19164	19192	19219	19247	19275	40′
20′	19303	19331	19358	19386	19414	19442	19470	19498	19526	19553	30′
30′	19581	19609	19637	19665	19693	19721	19749	19777	19805	19832	20′
40′	19860	19888	19916	19944	19972	20000	20028	20056	20084	20112	10′
50′	20140	20168	20196	20224	20253	20281	20309	20337	20365	0.20393	32°00′
58°00′	0.20421	20449	20477	20505	20534	20562	20590	20618	20646	20674	50′
10′	20703	20731	20759	20787	20815	20844	20872	20900	20928	20957	40′
20′	20985	21013	21041	21070	21098	21126	21155	21183	21211	21240	30′
30′	21268	21296	21325	21353	21382	21410	21438	21467	21495	21524	20′
40′	21552	21581	21609	21637	21666	21694	21723	21751	21780	21808	10′
50′	21837	21865	21894	21923	21951	21980	22008	22037	22065	0.22094	31°00′
59°00′	0.22123	22151	22180	22209	22237	22266	22294	22323	22352	22381	50′
10′	22409	22438	22467	22495	22524	22553	22582	22610	22639	22668	40′
20′	22697	22726	22754	22783	22812	22841	22870	22899	22927	22956	30′
30′	22985	23014	23043	23072	23101	23130	23159	23188	23217	23246	20′
40′	23275	23303	23332	23361	23391	23420	23449	23478	23507	23536	10′
50′	23565	23594	23623	23652	23681	23710	23739	23769	23798	0.23827	30°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
60°00′	0.23856	23885	23914	23944	23973	24002	24031	24061	24090	24119	50′
10′	24148	24178	24207	24236	24265	24295	24324	24353	24383	24412	40′
20′	24442	24471	24500	24530	24559	24589	24618	24647	24677	24706	30′
30′	24736	24765	24795	24824	24854	24883	24913	24942	24972	25002	20′
40′	25031	25061	25090	25120	25149	25179	25209	25238	25268	25298	10′
50′	25327	25357	25387	25417	25446	25476	25506	25535	25565	0.25595	29°00′
61°00′	0.25625	25655	25684	25714	25744	25774	25804	25834	25863	25893	50′
10′	25923	25953	25983	26013	26043	26073	26103	26133	26163	26193	40′
20′	26223	26253	26283	26313	26343	26373	26403	26433	26463	25493	30′
30′	26524	26554	26584	26614	26644	26674	26705	26735	26765	26795	20′
40′	26825	26856	26886	26916	26946	26977	27007	27037	27068	27098	10′
50′	27128	27159	27189	27220	27250	27280	27311	27341	27372	0.27402	28°00′
62°00′	0.27433	27463	27494	27524	27555	27585	27616	27646	27677	27707	50′
10′	27738	27769	27799	27830	27860	27891	27922	27952	27983	28014	40′
20′	28045	28075	28106	28137	28167	28198	28229	28260	28291	28321	30′
30′	28352	28383	28414	28445	28476	28507	28538	28569	28599	28630	20′
40′	28661	28692	28723	28754	28785	28816	28847	28879	28910	28941	10′
50′	28972	29003	29034	29065	29096	29127	29159	29190	29221	0.29252	27°00′
63°00′	0.29283	29315	29346	29377	29408	29440	29471	29502	29534	29565	50′
10′	29596	29628	29659	29691	29722	29753	29785	29816	29848	29879	40′
20′	29911	29942	29974	30005	30037	30068	30100	30132	30163	30195	30′
30′	30226	30258	30290	30321	30353	30385	30416	30448	30480	30512	20′
40′	30543	30575	30607	30639	30671	30702	30734	30766	30798	30830	10′
50′	30862	30894	30926	30958	30990	31022	31054	31086	31118	0.31150	26°00′

余切函数对数表 lg ctg φ

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
64°00′	0.31182	31214	31246	31278	31310	31342	31374	31407	31439	31471	50′
10′	31503	31535	31568	31600	31632	31664	31697	31729	31761	31794	40′
20′	31826	31858	31891	31923	31956	31988	32020	32053	32085	32118	30′
30′	32150	32183	32215	32248	32281	32313	32346	32378	32411	32444	20′
40′	32476	32509	32542	32574	32607	32640	32673	32705	32738	32771	10′
50′	32804	32837	32869	32902	32935	32968	33001	33034	33067	0.33100	25°00′
65°00′	0.33133	33166	33199	33232	33265	33298	33331	33364	33397	33430	50′
10′	33463	33497	33530	33563	33596	33629	33663	33696	33729	33762	40′
20′	33796	33829	33862	33896	33929	33962	33996	34029	34063	34096	30′
30′	34130	34163	34197	34230	34264	34297	34331	34364	34398	34432	20′
40′	34465	34499	34533	34566	34600	34634	34667	34701	34735	34769	10′
50′	34803	34836	34870	34904	34938	34972	35006	35040	35074	0.35108	24°00′
66°00′	0.35142	35176	35210	35244	35278	35312	35346	35380	35414	35448	50′
10′	35483	35517	35551	35585	35619	35654	35688	35722	35757	35791	40′
20′	35825	35860	35894	35928	35963	35997	36032	36066	36101	36135	30′
30′	36170	36204	36239	36274	36308	36343	36377	36412	36447	36481	20′
40′	36516	36551	36586	36621	36655	36690	36725	36760	36795	36830	10′
50′	36865	36899	36934	36969	37004	37039	37074	37110	37145	0.37180	23°00′
67°00′	0.37215	37250	37285	37320	37355	37391	37426	37461	37496	37532	50′
10′	37567	37602	37638	37673	37708	37744	37779	37815	37850	37886	40′
20′	37921	37957	37992	38028	38064	38099	38135	38170	38206	38242	30′
30′	38278	38313	38349	38385	38421	38456	38492	38528	38564	38600	20′
40′	38636	38672	38708	38744	38780	38816	38852	38888	38924	38960	10′
50′	38996	39033	39069	39105	39141	39177	39214	39250	39286	0.39323	22°00′

φ	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
68°00′	0.39359	39395	39432	39468	39505	39541	39578	39614	39651	39687	50′
10′	39724	39760	39797	39834	39870	39907	39944	39981	40017	40054	40′
20′	40091	40128	40165	40201	40238	40275	40312	40349	40386	40423	30′
30′	40460	40497	40534	40571	40609	40646	40683	40720	40757	40795	20′
40′	40832	40869	40906	40944	40981	41019	41056	41093	41131	41168	10′
50′	41206	41243	41281	41319	41356	41394	41431	41469	41507	0.41545	21°00′
69°00′	0.41582	41620	41658	41696	41733	41771	41809	41847	41885	41923	50′
10′	41961	41999	42037	42075	42113	42151	42190	42228	42266	42304	40′
20′	42342	42381	42419	42457	42496	42534	42572	42611	42649	42688	30′
30′	42726	42765	42803	42842	42880	42919	42958	42996	43035	43074	20′
40′	43113	43151	43190	43229	43268	43307	43346	43385	43424	43463	10′
50′	43502	43541	43580	43619	43658	43697	43736	43776	43815	0.43854	20°00′
70°00′	0.43893	43933	43972	44011	44051	44090	44130	44169	44209	44248	50′
10′	44288	44327	44367	44407	44446	44486	44526	44566	44605	44645	40′
20′	44685	44725	44765	44805	44845	44885	44925	44965	45005	45045	30′
30′	45085	45125	45165	45206	45246	45286	45327	45367	45407	45448	20′
40′	45488	45529	45569	45610	45650	45691	45731	45772	45813	45853	10′
50′	45894	45935	45975	46016	46057	46098	46139	46180	46221	0.46262	19°00′
71°00′	0.46303	46344	46385	46426	46467	46508	46550	46591	46632	46673	50′
10′	46715	46756	46798	46839	46880	46922	46963	47005	47047	47088	40′
20′	47130	47171	47213	47255	47297	47339	47380	47422	47464	47506	30′
30′	47548	47590	47632	47674	47716	47758	47800	47843	47885	47927	20′
40′	47969	48012	48054	48097	48139	48181	48224	48266	48309	48352	10′
50′	48394	48437	48480	48522	48565	48608	48651	48694	48736	0.48779	18°00′

余切函数对数表 lg ctg φ

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
72°00′	0.48822	48865	48908	48952	48995	49038	49081	49124	49167	49211	50′
10′	49254	49297	49341	49384	49428	49471	49515	49558	49602	49645	40′
20′	49689	49733	49777	49820	49864	49908	49952	49996	50040	50084	30′
30′	50128	50172	50216	50260	50304	50348	50393	50437	50481	50526	20′
40′	50570	50615	50659	50704	50748	50793	50837	50882	50927	50971	10′
50′	51016	51061	51106	51151	51196	51241	51286	51331	51376	0.51421	17°00′
73°00′	0.51466	51511	51557	51602	51647	51693	51738	51783	51829	51874	50′
10′	51920	51965	52011	52057	52103	52148	52194	52240	52286	52232	40′
20′	52378	52424	52470	52516	52562	52608	52654	52701	52747	52793	30′
30′	52840	52886	52932	52979	53025	53072	53119	53165	53212	53259	20′
40′	53306	53352	53399	53446	53493	53540	53587	53634	53681	53729	10′
50′	53776	53823	53870	53918	53965	54013	54060	54108	54155	0.54203	16°00′
74°00′	0.54250	54298	54346	54394	54441	54489	54537	54585	54633	54681	50′
10′	54729	54778	54826	54874	54922	54971	55019	55067	55116	55164	40′
20′	55213	55262	55310	55359	55408	55456	55505	55554	55603	55652	30′
30′	55701	55750	55799	55849	55898	55947	55996	56046	56095	56145	20′
40′	56194	56244	56293	56343	56393	56442	56492	56542	56592	56642	10′
50′	56692	56742	56792	56842	56892	56943	56993	57043	57094	0.57144	15°00′
75°00′	0.57195	57245	57296	57347	57397	57448	57499	57550	57601	57652	50′
10′	57703	57754	57805	57856	57907	57959	58010	58061	58113	58164	40′
20′	58216	58267	58319	58371	58422	58474	58526	58578	58630	58682	30′
30′	58734	58786	58839	58891	58943	58995	59048	59100	59153	59205	20′
40′	59258	59311	59364	59416	59469	59522	59575	59628	59681	59734	10′
50′	59788	59841	59894	59948	60001	60055	60108	60162	60215	0.60269	14°00′

76°00′	0.60323	60377	60431	60485	60539	60593	60647	60701	60755	60810	50′
10′	60864	60918	60973	61028	61082	61137	61192	61246	61301	61356	40′
20′	61411	61466	61521	61577	61632	61687	61743	61798	61853	61909	30′
30′	61965	62020	62076	62132	62188	62244	62300	62356	62412	62468	20′
40′	62524	62581	62637	62694	62750	62807	62863	62920	62977	63034	10′
50′	63091	63148	63205	63262	63319	63376	63434	63491	63548	0.63606	13°00′
77°00′	0.63664	63721	63779	63837	63895	63953	64011	64069	64127	64185	50′
10′	64243	64302	64360	64419	64477	64536	64595	64653	64712	64771	40′
20′	64830	64889	64949	65008	65067	65126	65186	65245	65305	65365	30′
30′	65424	65484	65544	65604	65664	65724	65785	65845	65905	65966	20′
40′	66026	66087	66147	66208	66269	66330	66391	66452	66513	66574	10′
50′	66635	66697	66758	66820	66881	66943	67005	67067	67128	0.67190	12°00′
78°00′	0.67253	67315	67377	67439	67502	67564	67627	67689	67752	67815	50′
10′	67878	67941	68004	68067	68130	68194	68257	68321	68384	68448	40′
20′	68511	68575	68639	68703	68767	68832	68896	68960	69025	69089	30′
30′	69154	69218	69283	69348	69413	69478	69543	69609	69674	69739	20′
40′	69805	69870	69936	70002	70068	70134	70200	70266	70332	70399	10′
50′	70465	70532	70598	70665	70732	70799	70866	70933	71000	0.71067	11°00′
79°00′	0.71135	71202	71270	71338	71405	71473	71541	71609	71677	71740	50′
10′	71814	71883	71951	72020	72089	72158	72227	72296	72365	72434	40′
20′	72504	72573	72643	72712	72782	72852	72922	72992	73063	73133	30′
30′	73203	73274	73345	73415	73486	73557	73628	73699	73771	73842	20′
40′	73914	73985	74057	74129	74201	74273	74345	74418	74490	74563	10′
50′	74635	74708	74781	74854	74927	75000	75074	75147	75221	0.75294	10°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数对数表 $\lg \operatorname{ctg} \varphi$

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
80°00′	0.75368	75442	75516	75590	75665	75739	75814	75888	75963	76038	50′
10′	76113	76188	76263	76339	76414	76490	76565	76641	76717	76794	40′
20′	76870	76946	77023	77099	77176	77253	77330	77407	77484	77562	30′
30′	77639	77717	77795	77873	77951	78029	78107	78186	78264	78343	20′
40′	78422	78501	78580	78659	78739	78818	78898	78978	79058	79138	10′
50′	79218	79299	79379	79460	79541	79622	79703	79784	79866	0.79947	9°00′
81°00′	0.80029	80111	80193	80275	80357	80439	80522	80605	80688	80771	50′
10′	80854	80937	81021	81104	81188	81272	81356	81440	81525	81609	40′
20′	81694	81779	81864	81949	82035	82120	82206	82292	82378	82464	30′
30′	82550	82637	82723	82810	82897	82984	83072	83159	83247	83335	20′
40′	83423	83511	83599	83688	83776	83865	83954	84044	84133	84223	10′
50′	84312	84402	84492	84583	84673	84764	84855	84946	85037	0.85128	8°00′
82°00′	0.85220	85312	85403	85496	85588	85680	85773	85866	85959	86052	50′
10′	86146	86239	86333	86427	86522	86616	86711	86806	86901	86996	40′
20′	87091	87187	87283	87379	87475	87572	87668	87765	87862	87960	30′
30′	88057	88155	88253	88351	88449	88548	88647	88746	88845	88944	20′
40′	89044	89144	89244	89344	89445	89546	89647	89748	89850	89951	10′
50′	90053	90155	90258	90360	90463	90566	90670	90773	90877	0.90981	7°00′
83°00′	0.91086	91190	91295	91400	91505	91611	91717	91823	91929	92036	50′
10′	92142	92249	92357	92464	92572	92680	92789	92897	93006	93115	40′
20′	93225	93334	93444	93555	93665	93776	93887	93998	94110	94222	30′
30′	94334	94447	94559	94672	94786	94899	95013	95127	95242	95357	20′
40′	95472	95587	95703	95819	95935	96052	96168	96286	96403	96521	10′
50′	96639	96758	96876	96995	97115	97234	97355	97475	97596	0.97717	6°00′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ
84°00′	0.97838	97960	98082	98204	98327	98450	98573	98697	98821	98945	50′
10′	99070	99195	99321	99447	99573	99699	99826	99954	*00081	1.00209	40′
20′	1.00338	00466	00595	00725	00855	00985	01116	01247	01378	01510	30′
30′	01642	01775	01908	02041	02175	02309	02444	02579	02715	02850	20′
40′	02987	03123	03261	03398	03536	03675	03813	03953	04092	04233	10′
50′	04373	04514	04656	04798	04940	05083	05227	05370	05515	1.05660	5°00′
85°00′	1.05805	05951	06097	06244	06391	06538	06687	06835	06984	07134	50′
10′	07284	07435	07586	07738	07890	08043	08197	08350	08505	08660	40′
20′	08815	08971	09128	09285	09443	09601	09760	09920	10080	10240	30′
30′	10402	10563	10726	10889	11052	11217	11382	11547	11713	11880	20′
40′	12047	12215	12384	12553	12723	12894	13065	13237	13409	13583	10′
50′	13757	13931	14107	14283	14460	14637	14815	14994	15174	1.15354	4°00′
86°00′	1.15536	15718	15900	16084	16268	16453	16639	16825	17013	17201	50′
10′	17390	17580	17770	17962	18154	18347	18541	18736	18932	19128	40′
20′	19326	19524	19723	19924	20125	20327	20530	20734	20939	21145	30′
30′	21351	21559	21768	21978	22189	22400	22613	22827	23042	23258	20′
40′	23475	23694	23913	24133	24355	24577	24801	25026	25252	25479	10′
50′	25708	25937	26168	26400	26634	26868	27104	27341	27580	1.27819	3°00′

余切函数对数表　　lg ctg φ

lg tg θ

正切函数对数表

θ	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	
87°00′	1.28060	28303	28547	28792	29038	29286	29535	29786	30038	30292	50′
10′	30547	30804	31062	31322	31583	31846	32110	32376	32644	32913	40′
20′	33184	33457	33731	34007	34285	34565	34846	35130	35415	35702	30′
30′	35991	36282	36574	36869	37160	37465	37766	38069	38374	38681	20′
40′	38991	39302	39616	39932	40251	40572	40895	41221	41549	41879	10′
50′	42212	42548	42886	43227	43571	43917	44266	44618	44973	1.45331	2°00′
88°00′	1.45692	46055	46422	46792	47165	47541	47921	48304	48690	49080	50′
10′	49473	49870	50271	50675	51083	51495	51911	52331	52755	53183	40′
20′	53615	54052	54493	54939	55389	55844	56304	56768	57238	57713	30′
30′	58193	58679	59170	59666	60168	60677	61191	61711	62238	62771	20′
40′	63311	63857	64410	64971	65539	66114	66698	67289	67888	68495	10′
50′	69112	69737	70371	71014	71668	72331	73004	73688	74384	1.75090	1°00′
89°00′	1.75808	76538	77280	78036	78805	79587	80384	81196	82024	82867	50′
10′	83727	84605	85500	86415	87349	88304	89280	90278	91300	92347	40′
20′	93419	94519	95647	96806	97996	99219	*00478	*01775	*03111	2.04490	30′
30′	2.05914	07387	08911	10490	12129	13833	15606	17454	19385	21405	20′
40′	23524	25752	28100	30582	33215	36018	39014	42233	45709	49488	10′
50′	53627	58203	63318	69118	75812	83730	93421	*05915	*23524	3.53627	0°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	φ

余切函数对数表

lg ctg φ

12. 角度化弧度换算表

角度	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°
0°	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157
1°	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332
2°	0.0349	0.0367	0.0384	0.0401	0.0419	0.0436	0.0454	0.0471	0.0489	0.0506
3°	0.0524	0.0541	0.0559	0.0576	0.0593	0.0611	0.0628	0.0646	0.0663	0.0681
4°	0.0698	0.0716	0.0733	0.0750	0.0768	0.0785	0.0803	0.0820	0.0838	0.0855
5°	0.0873	0.0890	0.0908	0.0925	0.0942	0.0960	0.0977	0.0995	0.1012	0.1030
6°	0.1047	0.1065	0.1082	0.1100	0.1117	0.1134	0.1152	0.1169	0.1187	0.1204
7°	0.1222	0.1239	0.1257	0.1274	0.1292	0.1309	0.1326	0.1344	0.1361	0.1379
8°	0.1396	0.1414	0.1431	0.1449	0.1466	0.1484	0.1501	0.1518	0.1536	0.1553
9°	0.1571	0.1588	0.1606	0.1623	0.1641	0.1658	0.1676	0.1693	0.1710	0.1728
10°	0.1745	0.1763	0.1780	0.1798	0.1815	0.1833	0.1850	0.1868	0.1885	0.1902
11°	0.1920	0.1937	0.1955	0.1972	0.1990	0.2007	0.2025	0.2042	0.2059	0.2077
12°	0.2094	0.2112	0.2129	0.2147	0.2164	0.2182	0.2199	0.2217	0.2234	0.2251
13°	0.2269	0.2286	0.2304	0.2321	0.2339	0.2356	0.2374	0.2391	0.2409	0.2426
14°	0.2443	0.2461	0.2478	0.2496	0.2513	0.2531	0.2548	0.2566	0.2583	0.2601
15°	0.2618	0.2635	0.2653	0.2670	0.2688	0.2705	0.2723	0.2740	0.2758	0.2775
16°	0.2793	0.2810	0.2827	0.2845	0.2862	0.2880	0.2897	0.2915	0.2932	0.2950
17°	0.2967	0.2985	0.3002	0.3019	0.3037	0.3054	0.3072	0.3089	0.3107	0.3124
18°	0.3142	0.3159	0.3176	0.3194	0.3211	0.3229	0.3246	0.3264	0.3281	0.3299
19°	0.3316	0.3334	0.3351	0.3368	0.3386	0.3403	0.3421	0.3438	0.3456	0.3473
20°	0.3491	0.3508	0.3526	0.3543	0.3560	0.3578	0.3595	0.3613	0.3630	0.3648
21°	0.3665	0.3683	0.3700	0.3718	0.3735	0.3752	0.3770	0.3787	0.3805	0.3822
22°	0.3840	0.3857	0.3875	0.3892	0.3910	0.3927	0.3944	0.3962	0.3979	0.3997
23°	0.4014	0.4032	0.4049	0.4067	0.4084	0.4102	0.4119	0.4136	0.4154	0.4171
24°	0.4189	0.4206	0.4224	0.4241	0.4259	0.4276	0.4294	0.4311	0.4328	0.4346
25°	0.4363	0.4381	0.4398	0.4416	0.4433	0.4451	0.4468	0.4485	0.4503	0.4520
26°	0.4538	0.4555	0.4573	0.4590	0.4608	0.4625	0.4643	0.4660	0.4677	0.4695
27°	0.4712	0.4730	0.4747	0.4765	0.4782	0.4800	0.4817	0.4835	0.4852	0.4869
28°	0.4887	0.4904	0.4922	0.4939	0.4957	0.4974	0.4992	0.5009	0.5027	0.5044
29°	0.5061	0.5079	0.5096	0.5114	0.5131	0.5149	0.5166	0.5184	0.5201	0.5219
角度	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′

角度化弧度换算表

角度	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°
30°	0.5236	0.5253	0.5271	0.5288	0.5306	0.5323	0.5341	0.5358	0.5376	0.5393
31°	0.5411	0.5428	0.5445	0.5463	0.5480	0.5498	0.5515	0.5533	0.5550	0.5568
32°	0.5585	0.5603	0.5620	0.5637	0.5655	0.5672	0.5690	0.5707	0.5725	0.5742
33°	0.5760	0.5777	0.5794	0.5812	0.5829	0.5847	0.5864	0.5882	0.5899	0.5917
34°	0.5934	0.5952	0.5969	0.5986	0.6004	0.6021	0.6039	0.6056	0.6074	0.6091
35°	0.6109	0.6126	0.6144	0.6161	0.6178	0.6196	0.6213	0.6231	0.6248	0.6266
36°	0.6283	0.6301	0.6318	0.6336	0.6353	0.6370	0.6388	0.6405	0.6423	0.6440
37°	0.6458	0.6475	0.6493	0.6510	0.6528	0.6545	0.6562	0.6580	0.6597	0.6615
38°	0.6632	0.6650	0.6667	0.6685	0.6702	0.6720	0.6737	0.6754	0.6772	0.6789
39°	0.6807	0.6824	0.6842	0.6859	0.6877	0.6894	0.6912	0.6929	0.6946	0.6964
40°	0.6981	0.6999	0.7016	0.7034	0.7051	0.7069	0.7086	0.7103	0.7121	0.7138
41°	0.7156	0.7173	0.7191	0.7208	0.7226	0.7243	0.7261	0.7278	0.7295	0.7313
42°	0.7330	0.7348	0.7365	0.7383	0.7400	0.7418	0.7435	0.7453	0.7470	0.7487
43°	0.7505	0.7522	0.7540	0.7557	0.7575	0.7592	0.7610	0.7627	0.7645	0.7662
44°	0.7679	0.7697	0.7714	0.7732	0.7749	0.7767	0.7784	0.7802	0.7819	0.7837
45°	0.7854	0.7871	0.7889	0.7906	0.7924	0.7941	0.7959	0.7976	0.7994	0.8011
46°	0.8029	0.8046	0.8063	0.8081	0.8098	0.8116	0.8133	0.8151	0.8168	0.8186
47°	0.8203	0.8221	0.8238	0.8255	0.8273	0.8290	0.8308	0.8325	0.8343	0.8360
48°	0.8378	0.8395	0.8412	0.8430	0.8447	0.8465	0.8482	0.8500	0.8517	0.8535
49°	0.8552	0.8570	0.8587	0.8604	0.8622	0.8639	0.8657	0.8674	0.8692	0.8709
50°	0.8727	0.8744	0.8762	0.8779	0.8796	0.8814	0.8831	0.8849	0.8866	0.8884
51°	0.8901	0.8919	0.8936	0.8954	0.8971	0.8988	0.9006	0.9023	0.9041	0.9058
52°	0.9076	0.9093	0.9111	0.9128	0.9146	0.9163	0.9180	0.9198	0.9215	0.9233
53°	0.9250	0.9268	0.9285	0.9303	0.9320	0.9338	0.9355	0.9372	0.9390	0.9407
54°	0.9425	0.9442	0.9460	0.9477	0.9495	0.9512	0.9529	0.9547	0.9564	0.9582
55°	0.9599	0.9617	0.9634	0.9652	0.9669	0.9687	0.9704	0.9721	0.9739	0.9756
56°	0.9774	0.9791	0.9809	0.9826	0.9844	0.9861	0.9879	0.9896	0.9913	0.9931
57°	0.9948	0.9966	0.9983	1.0001	1.0018	1.0036	1.0053	1.0071	1.0088	1.0105
58°	1.0123	1.0140	1.0158	1.0175	1.0193	1.0210	1.0228	1.0245	1.0263	1.0280
59°	1.0297	1.0315	1.0332	1.0350	1.0367	1.0385	1.0402	1.0420	1.0437	1.0455
角度	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′

角度化弧度换算表

角度	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°
60°	1.0472	1.0489	1.0507	1.0524	1.0542	1.0559	1.0577	1.0594	1.0612	1.0629
61°	1.0647	1.0664	1.0681	1.0699	1.0716	1.0734	1.0751	1.0769	1.0786	1.0804
62°	1.0821	1.0838	1.0856	1.0873	1.0891	1.0908	1.0926	1.0943	1.0961	1.0978
63°	1.0996	1.1013	1.1030	1.1048	1.1065	1.1083	1.1100	1.1118	1.1135	1.1153
64°	1.1170	1.1188	1.1205	1.1222	1.1240	1.1257	1.1275	1.1292	1.1310	1.1327
65°	1.1345	1.1362	1.1380	1.1397	1.1414	1.1432	1.1449	1.1467	1.1484	1.1502
66°	1.1519	1.1537	1.1554	1.1572	1.1589	1.1606	1.1624	1.1641	1.1659	1.1676
67°	1.1694	1.1711	1.1729	1.1746	1.1764	1.1781	1.1798	1.1816	1.1833	1.1851
68°	1.1868	1.1886	1.1903	1.1921	1.1938	1.1956	1.1973	1.1990	1.2008	1.2025
69°	1.2043	1.2060	1.2078	1.2095	1.2113	1.2130	1.2147	1.2165	1.2182	1.2200
70°	1.2217	1.2235	1.2252	1.2270	1.2287	1.2305	1.2322	1.2339	1.2357	1.2374
71°	1.2392	1.2409	1.2427	1.2444	1.2462	1.2479	1.2497	1.2514	1.2531	1.2549
72°	1.2566	1.2584	1.2601	1.2619	1.2636	1.2654	1.2671	1.2689	1.2706	1.2723
73°	1.2741	1.2758	1.2776	1.2793	1.2811	1.2828	1.2846	1.2863	1.2881	1.2898
74°	1.2915	1.2933	1.2950	1.2968	1.2985	1.3003	1.3020	1.3038	1.3055	1.3073
75°	1.3090	1.3107	1.3125	1.3142	1.3160	1.3177	1.3195	1.3212	1.3230	1.3247
76°	1.3265	1.3282	1.3299	1.3317	1.3334	1.3352	1.3369	1.3387	1.3404	1.3422
77°	1.3439	1.3456	1.3474	1.3491	1.3509	1.3526	1.3544	1.3561	1.3579	1.3596
78°	1.3614	1.3631	1.3648	1.3666	1.3683	1.3701	1.3718	1.3736	1.3753	1.3771
79°	1.3788	1.3806	1.3823	1.3840	1.3858	1.3875	1.3893	1.3910	1.3928	1.3945
80°	1.3963	1.3980	1.3998	1.4015	1.4032	1.4050	1.4067	1.4085	1.4102	1.4120
81°	1.4137	1.4155	1.4172	1.4190	1.4207	1.4224	1.4242	1.4259	1.4277	1.4294
82°	1.4312	1.4329	1.4347	1.4364	1.4382	1.4399	1.4416	1.4434	1.4451	1.4469
83°	1.4486	1.4504	1.4521	1.4539	1.4556	1.4573	1.4591	1.4608	1.4626	1.4643
84°	1.4661	1.4678	1.4696	1.4713	1.4731	1.4748	1.4765	1.4783	1.4800	1.4818
85°	1.4835	1.4853	1.4870	1.4888	1.4905	1.4923	1.4940	1.4957	1.4975	1.4992
86°	1.5010	1.5027	1.5045	1.5062	1.5080	1.5097	1.5115	1.5132	1.5149	1.5167
87°	1.5184	1.5202	1.5219	1.5237	1.5254	1.5272	1.5289	1.5307	1.5324	1.5341
88°	1.5359	1.5376	1.5394	1.5411	1.5429	1.5446	1.5464	1.5481	1.5499	1.5516
89°	1.5533	1.5551	1.5568	1.5586	1.5603	1.5621	1.5638	1.5656	1.5673	1.5691
90°	1.5708	1.5725	1.5743	1.5760	1.5778	1.5795	1.5813	1.5830	1.5848	1.5865
角度	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′

角度(秒)化弧度

秒	0″	1″	2″	3″	4″	5″	6″	7″	8″	9″
0″	0	5	10	15	19	24	29	34	39	44
10″	48	53	58	63	67	72	77	82	87	92
20″	97	102	107	112	116	121	126	131	136	141
30″	145	150	155	160	164	169	174	179	184	189
40″	194	199	204	209	213	218	223	228	233	238
50″	242	247	252	257	261	266	271	276	281	286

表中数字 $\times 10^{-6}$ 为所化成的弧度数.

角度(分)化弧度

分	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0′	0	291	582	873	1164	1454	1745	2036	2327	2618
10′	2909	3200	3491	3782	4073	4363	4654	4945	5236	5527
20′	5818	6109	6400	6691	6982	7272	7563	7854	8145	8436
30′	8727	9018	9309	9600	9891	10181	10472	10763	11054	11345
40′	11636	11927	12218	12509	12800	13090	13381	13672	13963	14254
50′	14544	14835	15126	15417	15708	15998	16289	16580	16871	17162

表中数字 $\times 10^{-6}$ 为所化成的弧度数.

角度(度)化弧度

度	弧度	度	弧度	度	弧度	度	弧度
1°	0.017453	16°	0.279253	31°	0.541052	70°	1.221730
2°	0.034907	17°	0.296706	32°	0.558505	75°	1.308997
3°	0.052360	18°	0.314159	33°	0.575959	80°	1.396263
4°	0.069813	19°	0.331613	34°	0.593412	85°	1.483530
5°	0.087266	20°	0.349066	35°	0.610865	90°	1.570796
6°	0.104720	21°	0.366519	36°	0.628319	100°	1.745329
7°	0.122173	22°	0.383972	37°	0.645772	120°	2.094395
8°	0.139626	23°	0.401426	38°	0.663225	150°	2.617994
9°	0.157080	24°	0.418879	39°	0.680678	180°	3.141593
10°	0.174533	25°	0.436332	40°	0.698132	200°	3.490659
11°	0.191986	26°	0.453786	45°	0.785398	250°	4.363323
12°	0.209440	27°	0.471239	50°	0.872665	270°	4.712389
13°	0.226893	28°	0.488692	55°	0.959931	300°	5.235988
14°	0.244346	29°	0.506145	60°	1.047198	360°	6.283185
15°	0.261799	30°	0.523599	65°	1.134464	400°	6.981317

例1 52°37′23″＝0.918447 弧度

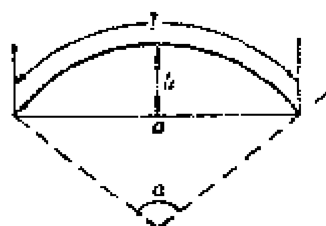
$$
\begin{array}{lr}
50^\circ & =0.872665 \\
2^\circ & =0.034907 \\
37' & =0.010763 \\
23'' & =0.000112 \quad + \\
\hline
 & 0.918447
\end{array}
$$

例2 5.645 弧度 ＝323°26′5″

$$
\begin{array}{lr}
5.645 & \\
-5.235988 & =300^\circ \\
\hline
0.409012 & \\
-0.401426 & =23^\circ \\
\hline
0.007586 & \\
-0.007563 & =26' \\
\hline
0.000023 & =5''
\end{array}
$$

13．弦长为1的弓形的弧长与面积表

$\frac{h}{a}$	弧长 l	弓形面积 S	$\frac{h}{a}$	弧长 l	弓形面积 S
0.01	1.0003	0.0067	0.26	1.1715	0.1824
0.02	1.0011	0.0133	0.27	1.1843	0.1901
0.03	1.0024	0.0200	0.28	1.1975	0.1979
0.04	1.0043	0.0267	0.29	1.2110	0.2058
0.05	1.0067	0.0334	0.30	1.2250	0.2137
0.06	1.0096	0.0401	0.31	1.2393	0.2218
0.07	1.0130	0.0468	0.32	1.2539	0.2299
0.08	1.0170	0.0536	0.33	1.2689	0.2381
0.09	1.0215	0.0604	0.34	1.2843	0.2464
0.10	1.0265	0.0672	0.35	1.3000	0.2548
0.11	1.0320	0.0740	0.36	1.3160	0.2633
0.12	1.0380	0.0809	0.37	1.3323	0.2719
0.13	1.0445	0.0878	0.38	1.3490	0.2806
0.14	1.0515	0.0948	0.39	1.3660	0.2893
0.15	1.0590	0.1018	0.40	1.3832	0.2982
0.16	1.0669	0.1088	0.41	1.4008	0.3072
0.17	1.0754	0.1159	0.42	1.4186	0.3162
0.18	1.0843	0.1231	0.43	1.4367	0.3254
0.19	1.0936	0.1303	0.44	1.4551	0.3347
0.20	1.1035	0.1375	0.45	1.4738	0.3441
0.21	1.1137	0.1448	0.46	1.4927	0.3536
0.22	1.1244	0.1522	0.47	1.5118	0.3632
0.23	1.1356	0.1596	0.48	1.5313	0.3729
0.24	1.1471	0.1671	0.49	1.5509	0.3828
0.25	1.1591	0.1747	0.50	1.5708	0.3927



14. 半径为1的弓形的弧长、拱高、弦长与面积表

圆心角 θ	弧长 l	拱高 h	$\frac{l}{h}$	弦长 a	$\frac{a}{h}$	弓形面积 S
1°	0.0175	0.0000	458.37	0.0175	458.36	0.00000
2°	0.0349	0.0002	229.19	0.0349	229.18	0.00000
3°	0.0524	0.0003	152.80	0.0524	152.78	0.00001
4°	0.0698	0.0006	114.60	0.0698	114.58	0.00003
5°	0.0873	0.0010	91.69	0.0872	91.66	0.00006
6°	0.1047	0.0014	76.41	0.1047	76.38	0.00010
7°	0.1222	0.0019	65.50	0.1221	65.46	0.00015
8°	0.1396	0.0024	57.32	0.1395	57.27	0.00023
9°	0.1571	0.0031	50.96	0.1569	50.90	0.00032
10°	0.1745	0.0038	45.87	0.1743	45.81	0.00044
11°	0.1920	0.0046	41.70	0.1917	41.64	0.00059
12°	0.2094	0.0055	38.23	0.2091	38.16	0.00076
13°	0.2269	0.0064	35.30	0.2264	35.22	0.00097
14°	0.2443	0.0075	32.78	0.2437	32.70	0.00121
15°	0.2618	0.0086	30.60	0.2611	30.51	0.00149
16°	0.2793	0.0097	28.69	0.2783	28.60	0.00181
17°	0.2967	0.0110	27.01	0.2956	26.91	0.00217
18°	0.3142	0.0123	25.52	0.3129	25.41	0.00257
19°	0.3316	0.0137	24.18	0.3301	24.07	0.00302
20°	0.3491	0.0152	22.98	0.3473	22.86	0.00352
21°	0.3665	0.0167	21.89	0.3645	21.77	0.00408
22°	0.3840	0.0184	20.90	0.3816	20.77	0.00468
23°	0.4014	0.0201	20.00	0.3987	19.86	0.00535
24°	0.4189	0.0219	19.17	0.4158	19.03	0.00607
25°	0.4363	0.0237	18.41	0.4329	18.26	0.00686
26°	0.4538	0.0256	17.71	0.4499	17.55	0.00771
27°	0.4712	0.0276	17.06	0.4669	16.90	0.00862
28°	0.4887	0.0297	16.45	0.4838	16.29	0.00961
29°	0.5061	0.0319	15.89	0.5008	15.72	0.01067
30°	0.5236	0.0341	15.37	0.5176	15.19	0.01180

半径为1的弓形的弧长、拱高、弦长与面积表

圆心角 θ	弧长 l	拱高 h	$\frac{l}{h}$	弦长 a	$\frac{a}{h}$	弓形面积 S
31°	0.5411	0.0364	14.88	0.5345	14.70	0.01301
32°	0.5585	0.0387	14.42	0.5513	14.23	0.01429
33°	0.5760	0.0412	13.99	0.5680	13.79	0.01566
34°	0.5934	0.0437	13.58	0.5847	13.38	0.01711
35°	0.6109	0.0463	13.20	0.6014	12.99	0.01854
36°	0.6283	0.0489	12.84	0.6180	12.63	0.02027
37°	0.6458	0.0517	12.50	0.6346	12.28	0.02198
38°	0.6632	0.0545	12.17	0.6511	11.95	0.02378
39°	0.6807	0.0574	11.87	0.6676	11.64	0.02568
40°	0.6981	0.0603	11.58	0.6840	11.34	0.02767
41°	0.7156	0.0633	11.30	0.7004	11.06	0.02976
42°	0.7330	0.0664	11.04	0.7167	10.79	0.03195
43°	0.7505	0.0696	10.79	0.7330	10.53	0.03425
44°	0.7679	0.0728	10.55	0.7492	10.29	0.03664
45°	0.7854	0.0761	10.32	0.7654	10.05	0.03915
46°	0.8029	0.0795	10.10	0.7815	9.83	0.04176
47°	0.8203	0.0829	9.89	0.7975	9.62	0.04448
48°	0.8378	0.0865	9.69	0.8135	9.41	0.04731
49°	0.8552	0.0900	9.50	0.8294	9.21	0.05025
50°	0.8727	0.0937	9.31	0.8452	9.02	0.05331
51°	0.8901	0.0974	9.14	0.8610	8.84	0.05649
52°	0.9076	0.1012	8.97	0.8767	8.66	0.05978
53°	0.9250	0.1051	8.80	0.8924	8.49	0.06319
54°	0.9425	0.1090	8.65	0.9080	8.33	0.06673
55°	0.9599	0.1130	8.50	0.9235	8.17	0.07039
56°	0.9774	0.1171	8.35	0.9389	8.02	0.07417
57°	0.9948	0.1212	8.21	0.9543	7.88	0.07808
58°	1.0123	0.1254	8.07	0.9696	7.73	0.08212
59°	1.0297	0.1296	7.94	0.9848	7.60	0.08629
60°	1.0472	0.1340	7.82	1.0000	7.46	0.09059

半径为 1 的弓形的弧长、拱高、弦长与面积表

圆心角 θ	弧长 l	拱高 h	$\frac{l}{h}$	弦长 a	$\frac{a}{h}$	弓形面积 S
61°	1.0647	0.1384	7.69	1.0151	7.34	0.09502
62°	1.0821	0.1428	7.58	1.0301	7.21	0.09958
63°	1.0996	0.1474	7.46	1.0450	7.09	0.10428
64°	1.1170	0.1520	7.35	1.0598	6.97	0.10911
65°	1.1345	0.1566	7.24	1.0746	6.86	0.11408
66°	1.1519	0.1613	7.14	1.0893	6.75	0.11919
67°	1.1694	0.1661	7.04	1.1039	6.65	0.12443
68°	1.1868	0.1710	6.94	1.1184	6.54	0.12982
69°	1.2043	0.1759	6.85	1.1328	6.44	0.13535
70°	1.2217	0.1808	6.76	1.1472	6.34	0.14102
71°	1.2392	0.1859	6.67	1.1614	6.25	0.14683
72°	1.2566	0.1910	6.58	1.1756	6.16	0.15279
73°	1.2741	0.1961	6.50	1.1896	6.07	0.15889
74°	1.2915	0.2014	6.41	1.2036	5.98	0.16514
75°	1.3090	0.2066	6.33	1.2175	5.89	0.17154
76°	1.3265	0.2120	6.26	1.2313	5.81	0.17808
77°	1.3439	0.2174	6.18	1.2450	5.73	0.18477
78°	1.3614	0.2229	6.11	1.2586	5.65	0.19160
79°	1.3788	0.2284	6.04	1.2722	5.57	0.19859
80°	1.3963	0.2340	5.97	1.2856	5.49	0.20573
81°	1.4137	0.2396	5.90	1.2989	5.42	0.21301
82°	1.4312	0.2453	5.83	1.3121	5.35	0.22045
83°	1.4486	0.2510	5.77	1.3252	5.28	0.22804
84°	1.4661	0.2569	5.71	1.3383	5.21	0.23578
85°	1.4835	0.2627	5.65	1.3512	5.14	0.24367
86°	1.5010	0.2686	5.59	1.3640	5.08	0.25171
87°	1.5184	0.2746	5.53	1.3767	5.01	0.25990
88°	1.5359	0.2807	5.47	1.3893	4.95	0.26825
89°	1.5533	0.2867	5.42	1.4018	4.89	0.27675
90°	1.5708	0.2929	5.36	1.4142	4.83	0.28540

半径为1的弓形的弧长、拱高、弦长与面积表

圆心角 θ	弧长 l	拱高 h	$\frac{l}{h}$	弦长 a	$\frac{a}{h}$	弓形面积 S
91°	1.5882	0.2991	5.31	1.4265	4.77	0.29420
92°	1.6057	0.3053	5.26	1.4387	4.71	0.30316
93°	1.6232	0.3116	5.21	1.4507	4.66	0.31226
94°	1.6406	0.3180	5.16	1.4627	4.60	0.32152
95°	1.6581	0.3244	5.11	1.4746	4.55	0.33093
96°	1.6755	0.3309	5.06	1.4863	4.49	0.34050
97°	1.6930	0.3374	5.02	1.4979	4.44	0.35021
98°	1.7104	0.3439	4.97	1.5094	4.39	0.36008
99°	1.7279	0.3506	4.93	1.5208	4.34	0.37009
100°	1.7453	0.3572	4.89	1.5321	4.29	0.38026
101°	1.7628	0.3639	4.84	1.5432	4.24	0.39058
102°	1.7802	0.3707	4.80	1.5543	4.19	0.40104
103°	1.7977	0.3775	4.76	1.5652	4.15	0.41166
104°	1.8151	0.3843	4.72	1.5760	4.10	0.42242
105°	1.8326	0.3912	4.68	1.5867	4.06	0.43333
106°	1.8500	0.3982	4.65	1.5973	4.01	0.44439
107°	1.8675	0.4052	4.61	1.6077	3.97	0.45560
108°	1.8850	0.4122	4.57	1.6180	3.93	0.46695
109°	1.9024	0.4193	4.54	1.6282	3.88	0.47845
110°	1.9199	0.4264	4.50	1.6383	3.84	0.49008
111°	1.9373	0.4336	4.47	1.6483	3.80	0.50187
112°	1.9548	0.4408	4.43	1.6581	3.76	0.51379
113°	1.9722	0.4481	4.40	1.6678	3.72	0.52586
114°	1.9897	0.4554	4.37	1.6773	3.68	0.53806
115°	2.0071	0.4627	4.34	1.6868	3.65	0.55041
116°	2.0246	0.4701	4.31	1.6961	3.61	0.56289
117°	2.0420	0.4775	4.28	1.7053	3.57	0.57551
118°	2.0595	0.4850	4.25	1.7143	3.53	0.58827
119°	2.0769	0.4925	4.22	1.7233	3.50	0.60116
120°	2.0944	0.5000	4.19	1.7321	3.46	0.61418

半径为1的弓形的弧长、拱高、弦长与面积表

圆心角 θ	弧长 l	拱高 h	$\frac{l}{h}$	弦长 a	$\frac{a}{h}$	弓形面积 S
121°	2.1118	0.5076	4.16	1.7407	3.43	0.62734
122°	2.1293	0.5152	4.13	1.7492	3.40	0.64063
123°	2.1468	0.5228	4.11	1.7576	3.36	0.65404
124°	2.1642	0.5305	4.08	1.7659	3.33	0.66759
125°	2.1817	0.5383	4.05	1.7740	3.30	0.68125
126°	2.1991	0.5460	4.03	1.7820	3.26	0.69505
127°	2.2166	0.5538	4.00	1.7899	3.23	0.70897
128°	2.2340	0.5616	3.98	1.7976	3.20	0.72301
129°	2.2515	0.5695	3.95	1.8052	3.17	0.73716
130°	2.2689	0.5774	3.93	1.8126	3.14	0.75144
131°	2.2864	0.5853	3.91	1.8199	3.11	0.76584
132°	2.3038	0.5933	3.88	1.8271	3.08	0.78034
133°	2.3213	0.6013	3.86	1.8341	3.05	0.79497
134°	2.3387	0.6093	3.84	1.8410	3.02	0.80970
135°	2.3562	0.6173	3.82	1.8478	2.99	0.82454
136°	2.3736	0.6254	3.80	1.8544	2.97	0.83949
137°	2.3911	0.6335	3.77	1.8608	2.94	0.85455
138°	2.4086	0.6416	3.75	1.8672	2.91	0.86971
139°	2.4260	0.6498	3.73	1.8733	2.88	0.88497
140°	2.4435	0.6580	3.71	1.8794	2.86	0.90034
141°	2.4609	0.6662	3.69	1.8853	2.83	0.91580
142°	2.4784	0.6744	3.67	1.8910	2.80	0.93135
143°	2.4958	0.6827	3.66	1.8966	2.78	0.94700
144°	2.5133	0.6910	3.64	1.9021	2.75	0.96274
145°	2.5307	0.6993	3.62	1.9074	2.73	0.97858
146°	2.5482	0.7076	3.60	1.9126	2.70	0.99449
147°	2.5656	0.7160	3.58	1.9176	2.68	1.01050
148°	2.5831	0.7244	3.57	1.9225	2.65	1.02658
149°	2.6005	0.7328	3.55	1.9273	2.63	1.04275
150°	2.6180	0.7412	3.53	1.9319	2.61	1.05900

半径为1的弓形的弧长、拱高、弦长与面积表

圆心角 θ	弧长 l	拱高 h	$\frac{l}{h}$	弦长 a	$\frac{a}{h}$	弓形面积 S
151°	2.6354	0.7496	3.52	1.9363	2.58	1.07532
152°	2.6529	0.7581	3.50	1.9406	2.56	1.09171
153°	2.6704	0.7666	3.48	1.9447	2.54	1.10818
154°	2.6878	0.7750	3.47	1.9487	2.51	1.12472
155°	2.7053	0.7836	3.45	1.9526	2.49	1.14132
156°	2.7227	0.7921	3.44	1.9563	2.47	1.15799
157°	2.7402	0.8006	3.42	1.9598	2.45	1.17472
158°	2.7576	0.8092	3.41	1.9633	2.43	1.19151
159°	2.7751	0.8178	3.39	1.9665	2.40	1.20835
160°	2.7925	0.8264	3.38	1.9696	2.38	1.22525
161°	2.8100	0.8350	3.37	1.9726	2.36	1.24221
162°	2.8274	0.8436	3.35	1.9754	2.34	1.25921
163°	2.8449	0.8522	3.34	1.9780	2.32	1.27626
164°	2.8623	0.8608	3.33	1.9805	2.30	1.29335
165°	2.8798	0.8695	3.31	1.9829	2.28	1.31049
166°	2.8972	0.8781	3.30	1.9851	2.26	1.32766
167°	2.9147	0.8868	3.29	1.9871	2.24	1.34487
168°	2.9322	0.8955	3.27	1.9890	2.22	1.36212
169°	2.9496	0.9042	3.26	1.9908	2.20	1.37940
170°	2.9671	0.9128	3.25	1.9924	2.18	1.39671
171°	2.9845	0.9215	3.24	1.9938	2.16	1.41404
172°	3.0020	0.9302	3.23	1.9951	2.14	1.43140
173°	3.0194	0.9390	3.22	1.9963	2.13	1.44878
174°	3.0369	0.9477	3.20	1.9973	2.11	1.46617
175°	3.0543	0.9564	3.19	1.9981	2.09	1.48359
176°	3.0718	0.9651	3.18	1.9988	2.07	1.50101
177°	3.0892	0.9738	3.17	1.9993	2.05	1.51845
178°	3.1067	0.9825	3.16	1.9997	2.04	1.53589
179°	3.1241	0.9913	3.15	1.9999	2.02	1.55334
180°	3.1416	1.0000	3.14	2.0000	2.00	1.57080

$L=\pi d$

15. 直径为 d 的圆周长表

d	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	3.142	3.173	3.204	3.236	3.267	3.299	3.330	3.362	3.393	3.424
1.1	3.456	3.487	3.519	3.550	3.581	3.613	3.644	3.676	3.707	3.738
1.2	3.770	3.801	3.833	3.864	3.896	3.927	3.958	3.990	4.021	4.053
1.3	4.084	4.115	4.147	4.178	4.210	4.241	4.273	4.304	4.335	4.367
1.4	4.398	4.430	4.461	4.492	4.524	4.555	4.587	4.618	4.650	4.681
1.5	4.712	4.744	4.775	4.807	4.838	4.869	4.901	4.932	4.964	4.995
1.6	5.027	5.058	5.089	5.121	5.152	5.184	5.215	5.246	5.278	5.309
1.7	5.341	5.372	5.404	5.435	5.466	5.498	5.529	5.561	5.592	5.623
1.8	5.655	5.686	5.718	5.749	5.781	5.812	5.843	5.875	5.906	5.938
1.9	5.969	6.000	6.032	6.063	6.095	6.126	6.158	6.189	6.220	6.252
2.0	6.283	6.315	6.346	6.377	6.409	6.440	6.472	6.503	6.535	6.566
2.1	6.597	6.629	6.660	6.692	6.723	6.754	6.786	6.817	6.849	6.880
2.2	6.912	6.943	6.974	7.006	7.037	7.069	7.100	7.131	7.163	7.194
2.3	7.226	7.257	7.288	7.320	7.351	7.383	7.414	7.446	7.477	7.508
2.4	7.540	7.571	7.603	7.634	7.665	7.697	7.728	7.760	7.791	7.823
2.5	7.854	7.885	7.917	7.948	7.980	8.011	8.042	8.074	8.105	8.137
2.6	8.168	8.200	8.231	8.262	8.294	8.325	8.357	8.388	8.419	8.451
2.7	8.482	8.514	8.545	8.577	8.608	8.639	8.671	8.702	8.734	8.765
2.8	8.796	8.828	8.859	8.891	8.922	8.954	8.985	9.016	9.048	9.079
2.9	9.111	9.142	9.173	9.205	9.236	9.268	9.299	9.331	9.362	9.393
3.0	9.425	9.456	9.488	9.519	9.550	9.582	9.613	9.645	9.676	9.708
3.1	9.739	9.770	9.802	9.833	9.865	9.896	9.927	9.959	9.990	10.02
3.2	10.05	10.08	10.12	10.15	10.18	10.21	10.24	10.27	10.30	10.34
3.3	10.37	10.40	10.43	10.46	10.49	10.52	10.56	10.59	10.62	10.65
3.4	10.68	10.71	10.74	10.78	10.81	10.84	10.87	10.90	10.93	10.96
3.5	11.00	11.03	11.06	11.09	11.12	11.15	11.18	11.22	11.25	11.28
3.6	11.31	11.34	11.37	11.40	11.44	11.47	11.50	11.53	11.56	11.59
3.7	11.62	11.66	11.69	11.72	11.75	11.78	11.81	11.84	11.88	11.91
3.8	11.94	11.97	12.00	12.03	12.06	12.10	12.13	12.16	12.19	12.22
3.9	12.25	12.28	12.32	12.35	12.38	12.41	12.44	12.47	12.50	12.53

$L=\pi d$

直径为 d 的圆周长表

d	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
4.0	12.57	12.60	12.63	12.66	12.69	12.72	12.75	12.79	12.82	12.85
4.1	12.88	12.91	12.94	12.97	13.01	13.04	13.07	13.10	13.13	13.16
4.2	13.19	13.23	13.26	13.29	13.32	13.35	13.38	13.41	13.45	13.48
4.3	13.51	13.54	13.57	13.60	13.63	13.67	13.70	13.73	13.76	13.79
4.4	13.82	13.85	13.89	13.92	13.95	13.98	14.01	14.04	14.07	14.11
4.5	14.14	14.17	14.20	14.23	14.26	14.29	14.33	14.36	14.39	14.42
4.6	14.45	14.48	14.51	14.55	14.58	14.61	14.64	14.67	14.70	14.73
4.7	14.77	14.80	14.83	14.86	14.89	14.92	14.95	14.99	15.02	15.05
4.8	15.08	15.11	15.14	15.17	15.21	15.24	15.27	15.30	15.33	15.36
4.9	15.39	15.43	15.46	15.49	15.52	15.55	15.58	15.61	15.65	15.68
5.0	15.71	15.74	15.77	15.80	15.83	15.87	15.90	15.93	15.96	15.99
5.1	16.02	16.05	16.08	16.12	16.15	16.18	16.21	16.24	16.27	16.30
5.2	16.34	16.37	16.40	16.43	16.46	16.49	16.52	16.56	16.59	16.62
5.3	16.65	16.68	16.71	16.74	16.78	16.81	16.84	16.87	16.90	16.93
5.4	16.96	17.00	17.03	17.06	17.09	17.12	17.15	17.18	17.22	17.25
5.5	17.28	17.31	17.34	17.37	17.40	17.44	17.47	17.50	17.53	17.56
5.6	17.59	17.62	17.66	17.69	17.72	17.75	17.78	17.81	17.84	17.88
5.7	17.91	17.94	17.97	18.00	18.03	18.06	18.10	18.13	18.16	18.19
5.8	18.22	18.25	18.28	18.32	18.35	18.38	18.41	18.44	18.47	18.50
5.9	18.54	18.57	18.60	18.63	18.66	18.69	18.72	18.76	18.79	18.82
6.0	18.85	18.88	18.91	18.94	18.98	19.01	19.04	19.07	19.10	19.13
6.1	19.16	19.20	19.23	19.26	19.29	19.32	19.35	19.38	19.42	19.45
6.2	19.48	19.51	19.54	19.57	19.60	19.63	19.67	19.70	19.73	19.76
6.3	19.79	19.82	19.85	19.89	19.92	19.95	19.98	20.01	20.04	20.07
6.4	20.11	20.14	20.17	20.20	20.23	20.26	20.29	20.33	20.36	20.39
6.5	20.42	20.45	20.48	20.51	20.55	20.58	20.61	20.64	20.67	20.70
6.6	20.73	20.77	20.80	20.83	20.86	20.89	20.92	20.95	20.99	21.02
6.7	21.05	21.08	21.11	21.14	21.17	21.21	21.24	21.27	21.30	21.33
6.8	21.36	21.39	21.43	21.46	21.49	21.52	21.55	21.58	21.61	21.65
6.9	21.68	21.71	21.74	21.77	21.80	21.83	21.87	21.90	21.93	21.96

$L=\pi d$

直径为 d 的圆周长表

d	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.0	21.99	22.02	22.05	22.09	22.12	22.15	22.18	22.21	22.24	22.27
7.1	22.31	22.34	22.37	22.40	22.43	22.46	22.49	22.53	22.56	22.59
7.2	22.62	22.65	22.68	22.71	22.75	22.78	22.81	22.84	22.87	22.90
7.3	22.93	22.97	23.00	23.03	23.06	23.09	23.12	23.15	23.19	23.22
7.4	23.25	23.28	23.31	23.34	23.37	23.40	23.44	23.47	23.50	23.53
7.5	23.56	23.59	23.62	23.66	23.69	23.72	23.75	23.78	23.81	23.84
7.6	23.88	23.91	23.94	23.97	24.00	24.03	24.06	24.10	24.13	24.16
7.7	24.19	24.22	24.25	24.28	24.32	24.35	24.38	24.41	24.44	24.47
7.8	24.50	24.54	24.57	24.60	24.63	24.66	24.69	24.72	24.76	24.79
7.9	24.82	24.85	24.88	24.91	24.94	24.98	25.01	25.04	25.07	25.10
8.0	25.13	25.16	25.20	25.23	25.26	25.29	25.32	25.35	25.38	25.42
8.1	25.45	25.48	25.51	25.54	25.57	25.60	25.64	25.67	25.70	25.73
8.2	25.76	25.79	25.82	25.86	25.89	25.92	25.95	25.98	26.01	26.04
8.3	26.08	26.11	26.14	26.17	26.20	26.23	26.26	26.30	26.33	26.36
8.4	26.39	26.42	26.45	26.48	26.52	26.55	26.58	26.61	26.64	26.67
8.5	26.70	26.73	26.77	26.80	26.83	26.86	26.89	26.92	26.95	26.99
8.6	27.02	27.05	27.08	27.11	27.14	27.17	27.21	27.24	27.27	27.30
8.7	27.33	27.36	27.39	27.43	27.46	27.49	27.52	27.55	27.58	27.61
8.8	27.65	27.68	27.71	27.74	27.77	27.80	27.83	27.87	27.90	27.93
8.9	27.96	27.99	28.02	28.05	28.09	28.12	28.15	28.18	28.21	28.24
9.0	28.27	28.31	28.34	28.37	28.40	28.43	28.46	28.49	28.53	28.56
9.1	28.59	28.62	28.65	28.68	28.71	28.75	28.78	28.81	28.84	28.87
9.2	28.90	28.93	28.97	29.00	29.03	29.06	29.09	29.12	29.15	29.19
9.3	29.22	29.25	29.28	29.31	29.34	29.37	29.41	29.44	29.47	29.50
9.4	29.53	29.56	29.59	29.63	29.66	29.69	29.72	29.75	29.78	29.81
9.5	29.85	29.88	29.91	29.94	29.97	30.00	30.03	30.07	30.10	30.13
9.6	30.16	30.19	30.22	30.25	30.28	30.32	30.35	30.38	30.41	30.44
9.7	30.47	30.50	30.54	30.57	30.60	30.63	30.66	30.69	30.72	30.76
9.8	30.79	30.82	30.85	30.88	30.91	30.94	30.98	31.01	31.04	31.07
9.9	31.10	31.13	31.16	31.20	31.23	31.26	31.29	31.32	31.35	31.38

$S=\frac{\pi d^2}{4}$

16. 直径为 d 的圆面积表

d	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.7854	0.8012	0.8171	0.8332	0.8495	0.8659	0.8825	0.8992	0.9161	0.9331
1.1	0.9503	0.9677	0.9852	1.003	1.021	1.039	1.057	1.075	1.094	1.112
1.2	1.131	1.150	1.169	1.188	1.208	1.227	1.247	1.267	1.287	1.307
1.3	1.327	1.348	1.368	1.389	1.410	1.431	1.453	1.474	1.496	1.517
1.4	1.539	1.561	1.584	1.606	1.629	1.651	1.674	1.697	1.720	1.744
1.5	1.767	1.791	1.815	1.839	1.863	1.887	1.911	1.936	1.961	1.986
1.6	2.011	2.036	2.061	2.087	2.112	2.138	2.164	2.190	2.217	2.243
1.7	2.270	2.297	2.324	2.351	2.378	2.405	2.433	2.461	2.488	2.516
1.8	2.545	2.573	2.602	2.630	2.659	2.688	2.717	2.746	2.776	2.806
1.9	2.835	2.865	2.895	2.926	2.956	2.986	3.017	3.048	3.079	3.110
2.0	3.142	3.173	3.205	3.237	3.269	3.301	3.333	3.365	3.398	3.431
2.1	3.464	3.497	3.530	3.563	3.597	3.631	3.664	3.698	3.733	3.767
2.2	3.801	3.836	3.871	3.906	3.941	3.976	4.011	4.047	4.083	4.119
2.3	4.155	4.191	4.227	4.264	4.301	4.337	4.374	4.412	4.449	4.486
2.4	4.524	4.562	4.600	4.638	4.676	4.714	4.753	4.792	4.831	4.870
2.5	4.909	4.948	4.988	5.027	5.067	5.107	5.147	5.187	5.228	5.269
2.6	5.309	5.350	5.391	5.433	5.474	5.515	5.557	5.599	5.641	5.683
2.7	5.726	5.768	5.811	5.853	5.896	5.940	5.983	6.026	6.070	6.114
2.8	6.158	6.202	6.246	6.290	6.335	6.379	6.424	6.469	6.514	6.560
2.9	6.605	6.651	6.697	6.743	6.789	6.835	6.881	6.928	6.975	7.022
3.0	7.069	7.116	7.163	7.211	7.258	7.306	7.354	7.402	7.451	7.499
3.1	7.548	7.596	7.645	7.694	7.744	7.793	7.843	7.892	7.942	7.992
3.2	8.042	8.093	8.143	8.194	8.245	8.296	8.347	8.398	8.450	8.501
3.3	8.553	8.605	8.657	8.709	8.762	8.814	8.867	8.920	8.973	9.026
3.4	9.079	9.133	9.186	9.240	9.294	9.348	9.402	9.457	9.511	9.566
3.5	9.621	9.676	9.731	9.787	9.842	9.898	9.954	10.01	10.07	10.12
3.6	10.18	10.24	10.29	10.35	10.41	10.46	10.52	10.58	10.64	10.69
3.7	10.75	10.81	10.87	10.93	10.99	11.04	11.10	11.16	11.22	11.28
3.8	11.34	11.40	11.46	11.52	11.58	11.64	11.70	11.76	11.82	11.88
3.9	11.95	12.01	12.07	12.13	12.19	12.25	12.32	12.38	12.44	12.50

$S=\frac{\pi d^2}{4}$

直径为 d 的圆面积表

d	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
4.0	12.57	12.63	12.69	12.76	12.82	12.88	12.95	13.01	13.07	13.14
4.1	13.20	13.27	13.33	13.40	13.46	13.53	13.59	13.66	13.72	13.79
4.2	13.85	13.92	13.99	14.05	14.12	14.19	14.25	14.32	14.39	14.45
4.3	14.52	14.59	14.66	14.73	14.79	14.86	14.93	15.00	15.07	15.14
4.4	15.21	15.27	15.34	15.41	15.48	15.55	15.62	15.69	15.76	15.83
4.5	15.90	15.98	16.05	16.12	16.19	16.26	16.33	16.40	16.47	16.55
4.6	16.62	16.69	16.76	16.84	16.91	16.98	17.06	17.13	17.20	17.28
4.7	17.35	17.42	17.50	17.57	17.65	17.72	17.80	17.87	17.95	18.02
4.8	18.10	18.17	18.25	18.32	18.40	18.47	18.55	18.63	18.70	18.78
4.9	18.86	18.93	19.01	19.09	19.17	19.24	19.32	19.40	19.48	19.56
5.0	19.63	19.71	19.79	19.87	19.95	20.03	20.11	20.19	20.27	20.35
5.1	20.43	20.51	20.59	20.67	20.75	20.83	20.91	20.99	21.07	21.16
5.2	21.24	21.32	21.40	21.48	21.57	21.65	21.73	21.81	21.90	21.98
5.3	22.06	22.15	22.23	22.31	22.40	22.48	22.56	22.65	22.73	22.82
5.4	22.90	22.99	23.07	23.16	23.24	23.33	23.41	23.50	23.59	23.67
5.5	23.76	23.84	23.93	24.02	24.11	24.19	24.28	24.37	24.45	24.54
5.6	24.63	24.72	24.81	24.89	24.98	25.07	25.16	25.25	25.34	25.43
5.7	25.52	25.61	25.70	25.79	25.88	25.97	26.06	26.15	26.24	26.33
5.8	26.42	26.51	26.60	26.69	26.79	26.88	26.97	27.06	27.15	27.25
5.9	27.34	27.43	27.53	27.62	27.71	27.81	27.90	27.99	28.09	28.18
6.0	28.27	28.37	28.46	28.56	28.65	28.75	28.84	28.94	29.03	29.13
6.1	29.22	29.32	29.42	29.51	29.61	29.71	29.80	29.90	30.00	30.09
6.2	30.19	30.29	30.39	30.48	30.58	30.68	30.78	30.88	30.97	31.07
6.3	31.17	31.27	31.37	31.47	31.57	31.67	31.77	31.87	31.97	32.07
6.4	32.17	32.27	32.37	32.47	32.57	32.67	32.78	32.88	32.98	33.08
6.5	33.18	33.29	33.39	33.49	33.59	33.70	33.80	33.90	34.00	34.11
6.6	34.21	34.32	34.42	34.52	34.63	34.73	34.84	34.94	35.05	35.15
6.7	35.26	35.36	35.47	35.57	35.68	35.78	35.89	36.00	36.10	36.21
6.8	36.32	36.42	36.53	36.64	36.75	36.85	36.96	37.07	37.18	37.28
6.9	37.39	37.50	37.61	37.72	37.83	37.94	38.05	38.16	38.25	38.37

$S=\frac{\pi d^2}{4}$

直径为 d 的圆面积表

d	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.0	38.48	38.59	38.70	38.82	38.93	39.04	39.15	39.26	39.37	39.48
7.1	39.59	30.70	39.82	39.93	40.04	40.15	40.26	40.38	40.49	40.60
7.2	40.72	40.83	40.94	41.06	41.17	41.28	41.40	41.51	41.62	41.74
7.3	41.85	41.97	42.08	42.20	42.31	42.43	42.54	42.66	42.78	42.89
7.4	43.01	43.12	43.24	43.36	43.47	43.59	43.71	43.83	43.94	44.06
7.5	44.18	44.30	44.41	44.53	44.65	44.77	44.89	45.01	45.13	45.25
7.6	45.36	45.48	45.60	45.72	45.84	45.96	46.08	46.20	46.32	46.45
7.7	46.57	46.69	46.81	46.93	47.05	47.17	47.29	47.42	47.54	47.66
7.8	47.78	47.91	48.03	48.15	48.27	48.40	48.52	48.65	48.77	48.89
7.9	49.02	49.14	49.27	49.39	49.51	49.64	49.76	49.89	50.01	50.14
8.0	50.27	50.39	50.52	50.64	50.77	50.90	51.02	51.15	51.28	51.40
8.1	51.53	51.66	51.78	51.91	52.04	52.17	52.30	52.42	52.55	52.68
8.2	52.81	52.94	53.07	53.20	53.33	53.46	53.59	53.72	53.85	53.98
8.3	54.11	54.24	54.37	54.50	54.63	54.76	54.89	55.02	55.15	55.29
8.4	55.42	55.55	55.68	55.81	55.95	56.08	56.21	56.35	56.48	56.61
8.5	56.75	56.88	57.01	57.15	57.28	57.41	57.55	57.68	57.82	57.95
8.6	58.09	58.22	58.36	58.49	58.63	58.77	58.90	59.04	59.17	59.31
8.7	59.45	59.58	59.72	59.86	59.99	60.13	60.27	60.41	60.55	60.68
8.8	60.82	60.96	61.10	61.24	61.38	61.51	61.65	61.79	61.93	62.07
8.9	62.21	62.35	62.49	62.63	62.77	62.91	63.05	63.19	63.33	63.48
9.0	63.62	63.76	63.90	64.04	64.18	64.33	64.47	64.61	64.75	64.90
9.1	65.04	65.18	65.33	65.47	65.61	65.76	65.90	66.04	66.19	66.33
9.2	66.48	66.62	66.77	66.91	67.06	67.20	67.35	67.49	67.64	67.78
9.3	67.93	68.08	68.22	68.37	68.51	68.66	68.81	68.96	69.10	69.25
9.4	69.40	69.55	69.69	69.84	69.99	70.14	70.29	70.44	70.58	70.73
9.5	70.88	71.03	71.18	71.33	71.48	71.63	71.78	71.93	72.08	72.23
9.6	72.38	72.53	72.68	72.84	72.99	73.14	73.29	73.44	73.59	73.75
9.7	73.90	74.05	74.20	74.36	74.51	74.66	74.82	74.97	75.12	75.28
9.8	75.43	75.58	75.74	75.89	76.05	76.20	76.36	76.51	76.67	76.82
9.9	76.98	77.13	77.29	77.44	77.60	77.76	77.91	78.07	78.23	78.38

17. 双曲函数表

sh x 双曲正弦函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0600	0.0701	0.0801	0.0901
0.1	0.1002	0.1102	0.1203	0.1304	0.1405	0.1506	0.1607	0.1708	0.1810	0.1911
0.2	0.2013	0.2115	0.2218	0.2320	0.2423	0.2526	0.2629	0.2733	0.2837	0.2941
0.3	0.3045	0.3150	0.3255	0.3360	0.3466	0.3572	0.3678	0.3785	0.3892	0.4000
0.4	0.4108	0.4216	0.4325	0.4434	0.4543	0.4653	0.4764	0.4875	0.4986	0.5098
0.5	0.5211	0.5324	0.5438	0.5552	0.5666	0.5782	0.5897	0.6014	0.6131	0.6248
0.6	0.6367	0.6485	0.6605	0.6725	0.6846	0.6967	0.7090	0.7213	0.7336	0.7461
0.7	0.7586	0.7712	0.7838	0.7966	0.8094	0.8223	0.8353	0.8484	0.8615	0.8748
0.8	0.8881	0.9015	0.9150	0.9286	0.9423	0.9561	0.9700	0.9840	0.9981	1.0122
0.9	1.0265	1.0409	1.0554	1.0700	1.0847	1.0995	1.1144	1.1294	1.1446	1.1598
1.0	1.1752	1.1907	1.2063	1.2220	1.2379	1.2539	1.2700	1.2862	1.3025	1.3190
1.1	1.3356	1.3524	1.3693	1.3863	1.4035	1.4208	1.4382	1.4558	1.4735	1.4914
1.2	1.5095	1.5276	1.5460	1.5645	1.5831	1.6019	1.6209	1.6400	1.6593	1.6788
1.3	1.6984	1.7182	1.7381	1.7583	1.7786	1.7991	1.8198	1.8406	1.8617	1.8829
1.4	1.9043	1.9259	1.9477	1.9697	1.9919	2.0143	2.0369	2.0597	2.0827	2.1059
1.5	2.1293	2.1529	2.1768	2.2008	2.2251	2.2496	2.2743	2.2993	2.3245	2.3499
1.6	2.3756	2.4015	2.4276	2.4540	2.4806	2.5075	2.5346	2.5620	2.5896	2.6175
1.7	2.6456	2.6740	2.7027	2.7317	2.7609	2.7904	2.8202	2.8503	2.8806	2.9112
1.8	2.9422	2.9734	3.0049	3.0367	3.0689	3.1013	3.1340	3.1671	3.2005	3.2341
1.9	3.2682	3.3025	3.3372	3.3722	3.4075	3.4432	3.4792	3.5156	3.5523	3.5894
2.0	3.6269	3.6647	3.7028	3.7414	3.7803	3.8196	3.8593	3.8993	3.9398	3.9806
2.1	4.0219	4.0635	4.1056	4.1480	4.1909	4.2342	4.2779	4.3221	4.3666	4.4117
2.2	4.4571	4.5030	4.5494	4.5962	4.6434	4.6912	4.7394	4.7880	4.8372	4.8868
2.3	4.9370	4.9876	5.0387	5.0903	5.1425	5.1951	5.2483	5.3020	5.3562	5.4109
2.4	5.4662	5.5221	5.5785	5.6354	5.6929	5.7510	5.8097	5.8689	5.9288	5.9892
2.5	6.0502	6.1118	6.1741	6.2369	6.3004	6.3645	6.4293	6.4946	6.5607	6.6274
2.6	6.6947	6.7628	6.8315	6.9009	6.9709	7.0417	7.1132	7.1854	7.2583	7.3319
2.7	7.4063	7.4814	7.5572	7.6338	7.7112	7.7894	7.8683	7.9480	8.0285	8.1098
2.8	8.1919	8.2749	8.3586	8.4432	8.5287	8.6150	8.7021	8.7902	8.8791	8.9689
2.9	9.0596	9.1512	9.2437	9.3371	9.4315	9.5268	9.6231	9.7203	9.8185	9.9177

sh x

双曲正弦函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.0	10.018	10.119	10.221	10.324	10.429	10.534	10.640	10.748	10.856	10.966
3.1	11.076	11.188	11.301	11.415	11.530	11.647	11.764	11.883	12.003	12.124
3.2	12.246	12.369	12.494	12.620	12.747	12.876	13.006	13.137	13.269	13.403
3.3	13.538	13.674	13.812	13.951	14.092	14.234	14.377	14.522	14.668	14.816
3.4	14.965	15.116	15.268	15.422	15.577	15.734	15.893	16.053	16.215	16.378
3.5	16.543	16.709	16.877	17.047	17.219	17.392	17.567	17.744	17.923	18.103
3.6	18.286	18.470	18.655	18.843	19.033	19.224	19.418	19.613	19.811	20.010
3.7	20.211	20.415	20.620	20.828	21.037	21.249	21.463	21.679	21.897	22.117
3.8	22.339	22.564	22.791	23.020	23.252	23.486	23.722	23.961	24.202	24.445
3.9	24.691	24.939	25.190	25.444	25.700	25.958	26.219	26.483	26.749	27.018
4.0	27.290	27.564	27.842	28.122	28.404	28.690	28.979	29.270	29.564	29.862
4.1	30.162	30.465	30.772	31.081	31.393	31.709	32.028	32.350	32.675	33.004
4.2	33.336	33.671	34.009	34.351	34.697	35.046	35.398	35.754	36.113	36.476
4.3	36.843	37.214	37.588	37.965	38.347	38.733	39.122	39.515	39.913	40.314
4.4	40.719	41.129	41.542	41.960	42.382	42.808	43.238	43.673	44.112	44.555
4.5	45.003	45.455	45.912	46.374	46.840	47.311	47.787	48.267	48.752	49.242
4.6	49.737	50.237	50.742	51.252	51.767	52.288	52.813	53.344	53.880	54.422
4.7	54.969	55.522	56.080	56.643	57.213	57.788	58.369	58.955	59.548	60.147
4.8	60.751	61.362	51.979	62.601	63.231	63.866	64.508	65.157	65.812	66.473
4.9	67.141	67.816	58.498	69.186	69.882	70.584	71.293	72.010	72.734	73.465
5.0	74.203	74.949	75.702	76.463	77.232	78.008	78.792	79.584	80.384	81.192
5.1	82.008	82.832	83.665	84.506	85.355	86.213	87.079	87.955	88.839	89.732
5.2	90.633	91.544	92.464	93.394	94.332	95.281	96.238	97.205	98.182	99.169
5.3	100.17	101.17	102.19	103.22	101.25	105.30	106.36	107.43	108.51	109.60
5.4	110.70	111.81	112.94	114.07	115.22	116.38	117.55	118.73	119.92	121.13
5.5	122.34	123.57	124.82	126.07	127.34	128.62	129.91	131.22	132.53	133.87
5.6	135.21	136.57	137.94	139.33	140.73	142.14	143.57	145.02	146.47	147.95
5.7	149.43	150.93	152.45	153.98	155.53	157.09	158.67	160.27	161.88	163.51
5.8	165.15	166.81	168.48	170.18	171.89	173.62	175.36	177.12	178.90	180.70
5.9	182.52	184.35	186.20	188.08	189.97	191.88	193.80	195.75	197.72	199.71

ch x

双曲余弦函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.0000	1.0001	1.0002	1.0005	1.0008	1.0013	1.0018	1.0025	1.0032	1.0041
0.1	1.0050	1.0061	1.0072	1.0085	1.0098	1.0113	1.0128	1.0145	1.0162	1.0181
0.2	1.0201	1.0221	1.0243	1.0266	1.0289	1.0314	1.0340	1.0367	1.0395	1.0423
0.3	1.0453	1.0484	1.0516	1.0549	1.0584	1.0619	1.0655	1.0692	1.0731	1.0770
0.4	1.0811	1.0852	1.0895	1.0939	1.0984	1.1030	1.1077	1.1125	1.1174	1.1225
0.5	1.1276	1.1329	1.1383	1.1438	1.1494	1.1551	1.1609	1.1669	1.1730	1.1792
0.6	1.1855	1.1919	1.1984	1.2051	1.2119	1.2188	1.2258	1.2330	1.2402	1.2476
0.7	1.2552	1.2628	1.2706	1.2785	1.2865	1.2947	1.3030	1.3114	1.3199	1.3286
0.8	1.3374	1.3464	1.3555	1.3647	1.3740	1.3835	1.3932	1.4029	1.4128	1.4229
0.9	1.4331	1.4434	1.4539	1.4646	1.4753	1.4862	1.4973	1.5085	1.5199	1.5314
1.0	1.5431	1.5549	1.5669	1.5790	1.5913	1.6038	1.6164	1.6292	1.6421	1.6552
1.1	1.6685	1.6820	1.6956	1.7093	1.7233	1.7374	1.7517	1.7662	1.7808	1.7957
1.2	1.8107	1.8258	1.8412	1.8568	1.8725	1.8884	1.9045	1.9208	1.9373	1.9540
1.3	1.9709	1.9880	2.0053	2.0228	2.0404	2.0583	2.0764	2.0947	2.1132	2.1320
1.4	2.1509	2.1700	2.1894	2.2090	2.2288	2.2488	2.2691	2.2896	2.3103	2.3312
1.5	2.3524	2.3738	2.3955	2.4174	2.4395	2.4619	2.4845	2.5074	2.5305	2.5538
1.6	2.5775	2.6013	2.6255	2.6499	2.6746	2.6995	2.7247	2.7502	2.7760	2.8020
1.7	2.8283	2.8549	2.8818	2.9090	2.9364	2.9642	2.9922	3.0206	3.0493	3.0782
1.8	3.1075	3.1371	3.1669	3.1972	3.2277	3.2585	3.2897	3.3212	3.3530	3.3852
1.9	3.4177	3.4506	3.4838	3.5173	3.5512	3.5855	3.6201	3.6551	3.6904	3.7261
2.0	3.7622	3.7987	3.8355	3.8727	3.9103	3.9483	3.9867	4.0255	4.0647	4.1043
2.1	4.1443	4.1847	4.2256	4.2669	4.3085	4.3507	4.3932	4.4362	4.4797	4.5236
2.2	4.5679	4.6127	4.6580	4.7037	4.7499	4.7966	4.8437	4.8914	4.9395	4.9881
2.3	5.0372	5.0868	5.1370	5.1876	5.2388	5.2905	5.3427	5.3954	5.4487	5.5026
2.4	5.5569	5.6119	5.6674	5.7235	5.7801	5.8373	5.8951	5.9535	6.0125	6.0721
2.5	6.1323	6.1931	6.2545	6.3166	6.3793	6.4426	6.5066	6.5712	6.6365	6.7024
2.6	6.7690	6.8363	6.9043	6.9729	7.0423	7.1123	7.1831	7.2546	7.3268	7.3998
2.7	7.4735	7.5479	7.6231	7.6991	7.7758	7.8533	7.9316	8.0106	8.0905	8.1712
2.8	8.2527	8.3351	8.4182	8.5022	8.5871	8.6728	8.7594	8.8469	8.9352	9.0244
2.9	9.1146	9.2056	9.2976	9.3905	9.4844	9.5792	9.6749	9.7716	9.8693	9.9680

ch x

双曲余弦函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.0	10.068	10.168	10.270	10.373	10.476	10.581	10.687	10.794	10.902	11.011
3.1	11.121	11.233	11.345	11.459	11.574	11.690	11.806	11.925	12.044	12.165
3.2	12.287	12.410	12.534	12.660	12.786	12.915	13.044	13.175	13.307	13.440
3.3	13.575	13.711	13.848	13.987	14.127	14.269	14.412	14.556	14.702	14.850
3.4	14.999	15.149	15.301	15.455	15.610	15.766	15.924	16.084	16.245	16.408
3.5	16.573	16.739	16.907	17.077	17.248	17.421	17.506	17.772	17.951	18.131
3.6	18.313	18.497	18.682	18.870	19.059	19.250	19.444	19.639	19.836	20.035
3.7	20.236	20.439	20.644	20.852	21.061	21.272	21.486	21.702	21.919	22.139
3.8	22.362	22.586	22.813	23.042	23.273	23.507	23.743	23.982	24.222	24.466
3.9	24.711	24.959	25.210	25.463	25.719	25.977	26.238	26.502	26.768	27.037
4.0	27.308	27.583	27.860	28.139	28.422	28.707	28.996	29.287	29.581	29.878
4.1	30.178	30.482	30.788	31.097	31.409	31.725	32.044	32.365	32.691	33.019
4.2	33.351	33.686	34.024	34.366	34.711	35.060	35.412	35.768	36.127	36.490
4.3	36.857	37.227	37.601	37.979	38.360	38.746	39.135	39.528	39.925	40.326
4.4	40.732	41.141	41.554	41.972	42.393	42.819	43.250	43.684	44.123	44.566
4.5	45.014	45.466	45.923	46.385	46.851	47.321	47.797	48.277	48.762	49.252
4.6	49.747	50.247	50.752	51.262	51.777	52.297	52.823	53.354	53.890	54.431
4.7	54.978	55.531	56.089	56.652	57.221	57.796	58.377	58.964	59.556	60.155
4.8	60.759	61.370	61.987	62.609	63.239	63.874	64.516	65.164	65.819	66.481
4.9	67.149	67.823	68.505	69.193	69.889	70.591	71.300	72.017	72.741	73.472
5.0	74.210	74.956	75.709	76.470	77.238	78.014	78.798	79.590	80.390	81.198
5.1	82.014	82.838	83.671	84.512	85.361	86.219	87.085	87.960	88.844	89.737
5.2	93.639	91.550	92.470	93.399	94.338	95.286	96.243	97.211	98.188	99.174
5.3	100.17	101.18	102.19	103.22	104.26	105.31	106.67	107.43	108.51	109.60
5.4	110.71	111.82	112.94	114.08	115.22	116.38	117.55	118.73	119.93	121.13
5.5	122.35	123.58	124.82	126.07	127.34	128.62	129.91	131.22	132.54	133.87
5.6	135.22	136.57	137.95	139.33	140.73	142.15	143.58	145.02	146.48	147.95
5.7	149.44	150.94	152.45	153.99	155.53	157.10	158.68	160.27	161.88	163.51
5.8	165.15	166.81	168.49	170.18	171.89	173.62	175.36	177.13	178.91	180.70
5.9	182.52	184.35	186.21	188.08	189.97	191.88	193.81	195.75	197.72	199.71

th x 双曲正切函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0599	0.0699	0.0798	0.0898
0.1	0.0997	0.1096	0.1194	0.1293	0.1391	0.1489	0.1587	0.1684	0.1781	0.1878
0.2	0.1974	0.2070	0.2165	0.2260	0.2355	0.2449	0.2543	0.2636	0.2729	0.2821
0.3	0.2913	0.3004	0.3095	0.3185	0.3275	0.3364	0.3452	0.3540	0.3627	0.3714
0.4	0.3800	0.3885	0.3969	0.4053	0.4136	0.4219	0.4301	0.4382	0.4462	0.4542
0.5	0.4621	0.4700	0.4777	0.4854	0.4930	0.5005	0.5080	0.5154	0.5227	0.5299
0.6	0.5370	0.5441	0.5511	0.5581	0.5649	0.5717	0.5784	0.5850	0.5915	0.5980
0.7	0.6044	0.6107	0.6169	0.6231	0.6292	0.6352	0.6411	0.6469	0.6527	0.6584
0.8	0.6640	0.6696	0.6751	0.6805	0.6858	0.6911	0.6963	0.7014	0.7064	0.7114
0.9	0.7163	0.7211	0.7259	0.7306	0.7352	0.7398	0.7443	0.7487	0.7531	0.7574
1.0	0.7616	0.7658	0.7699	0.7739	0.7779	0.7818	0.7857	0.7895	0.7932	0.7969
1.1	0.8005	0.8041	0.8076	0.8110	0.8144	0.8178	0.8210	0.8243	0.8275	0.8306
1.2	0.8337	0.8367	0.8397	0.8426	0.8455	0.8483	0.8511	0.8538	0.8565	0.8591
1.3	0.8617	0.8643	0.8668	0.8693	0.8717	0.8741	0.8764	0.8787	0.8810	0.8832
1.4	0.8854	0.8875	0.8896	0.8917	0.8937	0.8957	0.8977	0.8996	0.9015	0.9033
1.5	0.9052	0.9069	0.9087	0.9104	0.9121	0.9138	0.9154	0.9170	0.9186	0.9202
1.6	0.9217	0.9232	0.9246	0.9261	0.9275	0.9289	0.9302	0.9316	0.9329	0.9342
1.7	0.9354	0.9367	0.9379	0.9391	0.9402	0.9414	0.9425	0.9436	0.9447	0.9458
1.8	0.9468	0.9478	0.9488	0.9498	0.9508	0.9518	0.9527	0.9536	0.9545	0.9554
1.9	0.9562	0.9571	0.9579	0.9587	0.9595	0.9603	0.9611	0.9619	0.9626	0.9633
2.0	0.9640	0.9647	0.9654	0.9661	0.9668	0.9674	0.9680	0.9686	0.9693	0.9699
2.1	0.9705	0.9710	0.9716	0.9722	0.9727	0.9732	0.9738	0.9743	0.9748	0.9752
2.2	0.9757	0.9762	0.9767	0.9771	0.9776	0.9780	0.9785	0.9789	0.9793	0.9797
2.3	0.9801	0.9805	0.9809	0.9812	0.9816	0.9820	0.9823	0.9827	0.9830	0.9834
2.4	0.9837	0.9840	0.9843	0.9846	0.9849	0.9852	0.9855	0.9858	0.9861	0.9864
2.5	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0.9876	0.9879	0.9881	0.9884	0.9886	0.9888
2.6	0.9890	0.9892	0.9895	0.9897	0.9899	0.9901	0.9903	0.9905	0.9906	0.9908
2.7	0.9910	0.9912	0.9914	0.9915	0.9917	0.9919	0.9920	0.9922	0.9923	0.9925
2.8	0.9926	0.9928	0.9929	0.9931	0.9932	0.9933	0.9935	0.9936	0.9937	0.9938
2.9	0.9940	0.9941	0.9942	0.9943	0.9944	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9950

th x

双曲正切函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.0	0.9951	0.9952	0.9953	0.9953	0.9954	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9959
3.1	0.9960	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9963	0.9964	0.9965	0.9966	0.9966
3.2	0.9967	0.9968	0.9968	0.9969	0.9969	0.9970	0.9971	0.9971	0.9972	0.9972
3.3	0.9973	0.9973	0.9974	0.9974	0.9975	0.9975	0.9976	0.9976	0.9977	0.9977
3.4	0.9978	0.9978	0.9979	0.9979	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981	0.9981	0.9981
3.5	0.9982	0.9982	0.9983	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985
3.6	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986	0.9986	0.9987	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988
3.7	0.9988	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.8	0.9990	0.9990	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992
3.9	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993	0.9993	0.9993	0.9993
4.0	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994
4.1	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995
4.2	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996
4.3	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997
4.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
4.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
4.6	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
4.7	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
4.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
4.9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
5.0	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
5.1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
5.2	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5.3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5.4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5.6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5.7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5.8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

18. 双曲函数对数表

双曲正弦函数对数表

lg sh x

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	$-\infty$	$\bar{2}.00001$	$\bar{2}.30106$	$\bar{2}.47719$	$\bar{2}.60218$	$\bar{2}.69915$	$\bar{2}.77841$	$\bar{2}.84545$	$\bar{2}.90355$	$\bar{2}.95483$
0.1	$\bar{1}.00072$	04227	08022	11517	14755	17772	20597	23254	25762	$\bar{1}.28136$
0.2	30392	32541	34592	36555	38437	40245	41986	43663	45282	46847
0.3	48362	49830	51254	52637	53981	55290	56564	57807	59019	60202
0.4	61358	62488	63594	64677	65738	66777	67797	68797	69779	70744
0.5	$\bar{1}.71692$	72624	73540	74442	75330	76204	77065	77914	78751	$\bar{1}.79576$
0.6	80390	81194	81987	82770	83543	84308	85063	85809	86548	87278
0.7	88000	88715	89423	90123	90817	91504	92185	92859	93527	94190
0.8	$\bar{1}.94846$	$\bar{1}.95498$	$\bar{1}.96144$	$\bar{1}.96784$	$\bar{1}.97420$	$\bar{1}.98051$	$\bar{1}.98677$	$\bar{1}.99299$	$\bar{1}.99916$	0.00528
0.9	0.01137	01741	02341	02937	03530	04119	04704	05286	05864	06439
1.0	0.07011	07580	08146	08708	09268	09825	10379	10930	11479	0.12025
1.1	12569	13111	13649	14186	14720	15253	15783	16311	16836	17360
1.2	17882	18402	18920	19437	19951	20464	20975	21485	21993	22499
1.3	23004	23507	24009	24509	25008	25505	26002	26496	26990	27482
1.4	27974	28464	28952	29440	29926	30412	30896	31379	31862	32343
1.5	0.32823	33303	33781	34258	34735	35211	35686	36160	36633	0.37105
1.6	37577	38048	38518	38987	39456	39923	40391	40857	41323	41788
1.7	42253	42717	43180	43643	44105	44567	45028	45488	45948	46408
1.8	46867	47325	47783	48241	48698	49154	49610	50066	50521	50976
1.9	51430	51884	52338	52791	53244	53696	54148	54600	55051	55502

lg sh x

双曲正弦函数对数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.55953	56403	56853	57303	57753	58202	58650	59099	59547	0.59995
2.1	60443	60890	61337	61784	62231	62677	63123	63569	64015	64460
2.2	64905	65350	65795	66240	66684	67128	67572	68016	68459	68903
2.3	69346	69789	70232	70675	71117	71559	72002	72444	72885	73327
2.4	73769	74210	74652	75093	75534	75975	76415	76856	77296	77737
2.5	0.78177	78617	79057	79497	79937	80377	80816	81256	81695	0.82134
2.6	82573	83012	83451	83890	84329	84768	85206	85645	86083	86522
2.7	86960	87398	87836	88274	88712	89150	89588	90026	90463	90901
2.8	91339	91776	92213	92651	93088	93525	93963	94400	94837	95274
2.9	95711	96148	96584	97021	97458	97895	98331	98768	99205	99641

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3	1.00078	04440	08799	13155	17509	21860	26211	30559	34907	1.39254
4	43600	47946	52291	56636	60980	65324	69668	74012	78355	82699
5	1.87042	1.91389	1.95729	1.00074	1.04415	1.08758	1.13101	1.17444	1.21787	2.26130
6	2.30473					2.52188				
7	2.73903					2.95618				
8	3.17333					3.39047				
9	3.60762					3.82477				
10	4.04191									

lg ch x 双曲余弦函数对数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00000	00002	00009	00020	00035	00054	00078	00106	00139	0.00176
0.1	00217	00262	00312	00366	00424	00487	00554	00625	00700	00779
0.2	00863	00951	01043	01139	01239	01343	01452	01564	01681	01801
0.3	01926	02054	02187	02323	02463	02607	02755	02907	03063	03222
0.4	03385	03552	03723	03897	04075	04256	04441	04630	04822	05018
0.5	0.05217	05419	05625	05834	06046	06262	06481	06703	06929	0.07157
0.6	07389	07624	07861	08102	08346	08593	08843	09095	09351	09609
0.7	09870	10134	10401	10670	10942	11216	11493	11773	12055	12340
0.8	12627	12917	13209	13503	13800	14099	14400	14704	15009	15317
0.9	15627	15939	16254	16570	16888	17208	17531	17855	18181	18509
1.0	0.18839	19171	19504	19839	20176	20515	20855	21197	21541	0.21886
1.1	22233	22582	22931	23283	23636	23990	24346	24703	25062	25422
1.2	25784	26146	26510	26876	27242	27610	27979	28349	28721	29093
1.3	29467	29842	30217	30594	30972	31352	31732	32113	32495	32878
1.4	33262	33647	34033	34420	34807	35196	35585	35976	36367	36759
1.5	0.37151	37545	37939	38334	38730	39126	39524	39921	40320	0.40719
1.6	41119	41520	41921	42323	42725	43129	43532	43937	44341	44747
1.7	45153	45559	45966	46374	46782	47191	47600	48009	48419	48830
1.8	49241	49652	50064	50476	50889	51302	51716	52130	52544	52959
1.9	53374	53789	54205	54621	55038	55455	55872	56290	56707	57126

lg ch x

双曲余弦函数对数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.57544	57963	58382	58802	59221	59641	60061	60482	60903	0.61324
2.1	61745	62167	62589	63011	63433	63856	64278	64701	65125	65548
2.2	65972	66396	66820	67244	67668	68093	68518	68943	69368	69794
2.3	70219	70645	71071	71497	71923	72349	72776	73203	73630	74056
2.4	74484	74911	75338	75766	76194	76621	77049	77477	77906	78334
2.5	0.78762	79191	79619	80048	80477	80906	81335	81764	82194	0.82623
2.6	83052	83482	83912	84341	84771	85201	85631	86061	86492	86922
2.7	87352	87783	88213	88644	89074	89505	89936	90367	90798	91229
2.8	91660	92091	92522	92953	93385	93816	94247	94679	95110	95542
2.9	95974	96405	96837	97269	97701	98133	98565	98997	99429	99861

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3	1.00293	04616	08943	13273	17605	21940	26275	30612	34951	1.39290
4	43629	47970	52310	56652	60993	65335	69677	74019	78361	82704
5	87046	91389	95731	*00074	*04417	*08760	*13103	*17445	*21788	2.26131
6	2.30474					52139				
7	73903					95618				
8	3.17333					39047				
9	60762					82477				
10	4.04191									

e^x

19. 指数函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.0000	1.0101	1.0202	1.0305	1.0408	1.0513	1.0618	1.0725	1.0833	1.0942
0.1	1.1052	1.1163	1.1275	1.1388	1.1503	1.1618	1.1735	1.1853	1.1972	1.2093
0.2	1.2214	1.2337	1.2461	1.2586	1.2712	1.2840	1.2969	1.3100	1.3231	1.3364
0.3	1.3499	1.3634	1.3771	1.3910	1.4049	1.4191	1.4333	1.4477	1.4623	1.4770
0.4	1.4918	1.5068	1.5220	1.5373	1.5527	1.5683	1.5841	1.6000	1.6161	1.6323
0.5	1.6487	1.6653	1.6820	1.6989	1.7160	1.7333	1.7507	1.7683	1.7860	1.8040
0.6	1.8221	1.8404	1.8589	1.8776	1.8965	1.9155	1.9348	1.9542	1.9739	1.9937
0.7	2.0138	2.0340	2.0544	2.0751	2.0959	2.1170	2.1383	2.1598	2.1815	2.2034
0.8	2.2255	2.2479	2.2705	2.2933	2.3164	2.3396	2.3632	2.3869	2.4109	2.4351
0.9	2.4596	2.4843	2.5093	2.5345	2.5600	2.5857	2.6117	2.6379	2.6645	2.6912
1.0	2.7183	2.7456	2.7732	2.8011	2.8292	2.8577	2.8864	2.9154	2.9447	2.9743
1.1	3.0042	3.0344	3.0649	3.0957	3.1268	3.1582	3.1899	3.2220	3.2544	3.2871
1.2	3.3201	3.3535	3.3872	3.4212	3.4556	3.4903	3.5254	3.5609	3.5966	3.6328
1.3	3.6693	3.7062	3.7434	3.7810	3.8190	3.8574	3.8962	3.9354	3.9749	4.0149
1.4	4.0552	4.0960	4.1371	4.1787	4.2207	4.2631	4.3060	4.3492	4.3929	4.4371
1.5	4.4817	4.5267	4.5722	4.6182	4.6646	4.7115	4.7588	4.8066	4.8550	4.9037
1.6	4.9530	5.0028	5.0531	5.1039	5.1552	5.2070	5.2593	5.3122	5.3656	5.4195
1.7	5.4739	5.5290	5.5845	5.6407	5.6973	5.7546	5.8124	5.8709	5.9299	5.9895
1.8	6.0496	6.1104	6.1719	6.2339	6.2965	6.3598	6.4237	6.4883	6.5535	6.6194
1.9	6.6859	6.7531	6.8210	6.8895	6.9588	7.0287	7.0993	7.1707	7.2427	7.3155
2.0	7.3891	7.4633	7.5383	7.6141	7.6906	7.7679	7.8460	7.9248	8.0045	8.0849
2.1	8.1662	8.2482	8.3311	8.4149	8.4994	8.5849	8.6711	8.7583	8.8463	8.9352
2.2	9.0250	9.1157	9.2073	9.2999	9.3933	9.4877	9.5831	9.6794	9.7767	9.8749
2.3	9.9742	10.074	10.176	10.278	10.381	10.486	10.591	10.697	10.805	10.913
2.4	11.023	11.134	11.246	11.359	11.473	11.588	11.705	11.822	11.941	12.061
2.5	12.182	12.305	12.429	12.554	12.680	12.807	12.936	13.066	13.197	13.330
2.6	13.464	13.599	13.736	13.874	14.013	14.154	14.296	14.440	14.585	14.732
2.7	14.880	15.029	15.180	15.333	15.487	15.643	15.800	15.959	16.119	16.281
2.8	16.445	16.610	16.777	16.945	17.116	17.288	17.462	17.637	17.814	17.993
2.9	18.174	18.357	18.541	18.728	18.916	19.106	19.298	19.492	19.688	19.886
3.0	20.086	20.287	20.491	20.697	20.905	21.115	21.328	21.542	21.758	21.977
3.1	22.198	22.421	22.646	22.874	23.104	23.336	23.571	23.807	24.047	24.288
3.2	24.533	24.779	25.028	25.280	25.534	25.790	26.050	26.311	26.576	26.843
3.3	27.113	27.385	27.660	27.938	28.219	28.503	28.789	29.079	29.371	29.666
3.4	29.964	30.265	30.569	30.877	31.187	31.500	31.817	32.137	32.460	32.786

e^x

指数函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	33.115	33.448	33.784	34.124	34.467	34.813	35.163	35.517	35.874	36.234
3.6	36.598	36.966	37.338	37.713	38.092	38.475	38.861	39.252	39.646	40.045
3.7	40.447	40.854	41.264	41.679	42.098	42.521	42.948	43.380	43.816	44.256
3.8	44.701	45.150	45.604	46.063	46.525	46.993	47.465	47.942	48.424	48.911
3.9	49.402	49.899	50.400	50.907	51.419	51.935	52.457	52.985	53.517	54.055
4.0	54.598	55.147	55.701	56.261	56.826	57.397	57.974	58.557	59.145	59.740
4.1	60.340	60.947	61.559	62.178	62.803	63.434	64.072	64.715	65.366	66.023
4.2	66.686	67.357	68.033	68.717	69.408	70.105	70.810	71.522	72.240	72.966
4.3	73.700	74.440	75.189	75.944	76.708	77.478	78.257	79.044	79.838	80.640
4.4	81.451	82.269	83.096	83.931	84.775	85.627	86.488	87.357	88.235	89.121
4.5	90.017	90.922	91.836	92.759	93.691	94.632	95.583	96.544	97.514	98.494
4.6	99.484	100.48	101.49	102.51	103.54	104.58	105.64	106.70	107.77	108.85
4.7	109.95	111.05	112.17	113.30	114.43	115.58	116.75	117.92	119.10	120.30
4.8	121.51	122.73	123.97	125.21	126.47	127.74	129.02	130.32	131.63	132.95
4.9	134.29	135.64	137.00	138.38	139.77	141.17	142.59	144.03	145.47	146.94
5.0	148.41	149.90	151.41	152.93	154.47	156.02	157.59	159.17	160.77	162.39
5.1	164.02	165.67	167.34	169.02	170.72	172.43	174.16	175.91	177.68	179.47
5.2	181.27	183.09	184.93	186.79	188.67	190.57	192.48	194.42	196.37	198.34
5.3	200.34	202.35	204.38	206.44	208.51	210.61	212.72	214.86	217.02	219.20
5.4	221.41	223.63	225.88	228.15	230.44	232.76	235.10	237.46	239.85	242.26
5.5	244.69	247.15	249.64	252.14	254.68	257.24	259.82	262.43	265.07	267.74
5.6	270.43	273.14	275.89	278.66	281.46	284.29	287.15	290.03	292.95	295.89
5.7	298.87	301.87	304.90	307.97	311.06	314.19	317.35	320.54	323.76	327.01
5.8	330.30	333.62	336.97	340.36	343.78	347.23	350.72	354.25	357.81	361.41
5.9	365.04	368.71	372.41	376.15	379.93	383.75	387.61	391.51	395.44	399.41

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
6	403.43	445.86	492.75	544.57	601.85	665.14	735.10	812.41	897.85	992.27
7	1096.6	1212.0	1339.4	1480.3	1636.0	1808.0	1998.2	2208.3	2440.6	2697.3
8	2981.0	3294.5	3641.0	4023.9	4447.1	4914.8	5431.7	6002.9	6634.2	7332.0
9	8103.1	8955.3	9897.1	10938	12088	13360	14765	16318	18034	19930
10	22026									

e^{-x}

指数函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.0000	9900	9802	9704	9608	9512	9418	9324	9231	0.9139
0.1	0.9048	8958	8869	8781	8694	8607	8521	8437	8353	8270
0.2	8187	8106	8025	7945	7866	7788	7711	7634	7558	7483
0.3	7408	7334	7261	7189	7118	7047	6977	6907	6839	6771
0.4	6703	6637	6570	6505	6440	6376	6313	6250	6188	6126
0.5	0.6065	6005	5945	5886	5827	5769	5712	5655	5599	0.5543
0.6	5488	5434	5379	5326	5273	5220	5169	5117	5066	5016
0.7	4966	4916	4868	4819	4771	4724	4677	4630	4584	4538
0.8	4493	4449	4404	4360	4317	4274	4232	4190	4148	4107
0.9	4066	4025	3985	3946	3906	3867	3829	3791	3753	3716
1.0	0.3679	3642	3606	3570	3535	3499	3465	3430	3396	0.3362
1.1	3329	3296	3263	3230	3198	3166	3135	3104	3073	3042
1.2	3012	2982	2952	2923	2894	2865	2837	2808	2780	2753
1.3	2725	2698	2671	2645	2618	2592	2567	2541	2516	2491
1.4	2466	2441	2417	2393	2369	2346	2322	2299	2276	2254
1.5	0.2231	2209	2187	2165	2144	2122	2101	2080	2060	0.2039
1.6	2019	1999	1979	1959	1940	1920	1901	1882	1864	1845
1.7	1827	1809	1791	1773	1755	1738	1720	1703	1686	1670
1.8	1653	1637	1620	1604	1588	1572	1557	1541	1526	1511
1.9	1496	1481	1466	1451	1437	1423	1409	1395	1381	1367
2.0	0.1353	1340	1327	1313	1300	1287	1275	1262	1249	0.1237
2.1	1225	1212	1200	1188	1177	1165	1153	1142	1130	1119
2.2	1108	1097	1086	1075	1065	1054	1044	1033	1023	1013
2.3	0.1003	*9926	*9827	*9730	*9633	*9537	*9442	*9348	*9255	0.09163
2.4	0.09072	8982	8892	8804	8716	8629	8543	8458	8374	8291
2.5	0.08208	8127	8046	7966	7887	7808	7730	7654	7577	0.07502
2.6	7427	7353	7280	7208	7136	7065	6995	6925	6856	6788
2.7	6721	6654	6587	6522	6457	6393	6329	6266	6204	6142
2.8	6081	6020	5961	5901	5843	5784	5727	5670	5613	5558
2.9	5502	5448	5393	5340	5287	5234	5182	5130	5079	5029
3.0	0.04979	4929	4880	4832	4783	4736	4689	4642	4596	0.04550
3.1	4505	4460	4416	4372	4328	4285	4243	4200	4159	4117
3.2	4076	4036	3996	3956	3916	3877	3839	3801	3763	3725
3.3	3688	3652	3615	3579	3544	3508	3474	3439	3405	3371
3.4	3337	3304	3271	3239	3206	3175	3143	3112	3081	3050

e^{-x}

指数函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	0.03020	2990	2960	2930	2901	2872	2844	2816	2788	0.02760
3.6	2732	2705	2678	2652	2625	2599	2573	2548	2522	2497
3.7	2472	2448	2423	2399	2375	2352	2328	2305	2282	2260
3.8	2237	2215	2193	2171	2149	2128	2107	2086	2065	2045
3.9	2024	2004	1984	1964	1945	1925	1906	1887	1869	1850
4.0	0.0183	181	180	178	176	174	172	171	169	0.0167
4.1	166	164	162	161	159	158	156	155	153	151
4.2	150	148	147	146	144	143	141	140	138	137
4.3	136	134	133	132	130	129	128	127	125	124
4.4	123	122	120	119	118	117	116	114	113	112
4.5	0.0111	110	109	108	107	106	105	104	103	0.0102
4.6	101	100	099	098	097	096	095	094	093	092
4.7	091	090	089	088	087	087	086	085	084	083
4.8	082	081	081	080	079	078	078	077	076	075
4.9	074	074	073	072	072	071	070	069	069	068
5.0	0.0067	067	066	065	065	064	063	063	062	0.0062
5.1	061	060	060	059	059	058	057	057	056	056
5.2	055	055	054	054	053	052	052	051	051	050
5.3	050	049	049	048	048	047	047	047	046	046
5.4	045	045	044	044	043	043	043	042	042	041
5.5	0.0041	040	040	040	039	039	038	038	038	0.0037
5.6	037	037	036	036	036	035	035	034	034	034
5.7	033	033	033	032	032	032	032	031	031	031
5.8	030	030	030	029	029	029	029	028	028	028
5.9	027	027	027	027	026	026	026	026	025	025

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
6	0.002479	2243	2029	1836	1662	1503	1360	1231	1114	1008
7	0912	0825	0747	0676	0611	0553	0500	0453	0410	0371
8	0335	0304	0275	0249	0225	0203	0184	0167	0151	0136
9	0123	0112	0101	0091	0083	0075	0068	0061	0055	0050
10	0045									

$\Gamma(x)$ 20. 伽马函数表

x	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
1.00	1.0000	0.9994	9988	9983	9977	9971	9966	9960	9954	9949
1.01	0.9943	9938	9932	9927	9921	9916	9910	9905	9899	9894
1.02	9888	9883	9878	9872	9867	9862	9856	9851	9846	9841
1.03	9835	9830	9825	9820	9815	9810	9805	9800	9794	9789
1.04	9784	9779	9774	9769	9764	9759	9755	9750	9745	9740
1.05	0.9735	9730	9725	9721	9716	9711	9706	9702	9697	9692
1.06	9687	9683	9678	9673	9669	9664	9660	9655	9651	9646
1.07	9642	9637	9633	9628	9624	9619	9615	9610	9606	9602
1.08	9597	9593	9589	9584	9580	9576	9571	9567	9563	9559
1.09	9555	9550	9546	9542	9538	9534	9530	9526	9522	9518
1.10	0.9514	9509	9505	9501	9498	9494	9490	9486	9482	9478
1.11	9474	9470	9466	9462	9459	9455	9451	9447	9443	9440
1.12	9436	9432	9428	9425	9421	9417	9414	9410	9407	9403
1.13	9399	9396	9392	9389	9385	9382	9378	9375	9371	9368
1.14	9364	9361	9357	9354	9350	9347	9344	9340	9337	9334
1.15	0.9330	9327	9324	9321	9317	9314	9311	9308	9304	9301
1.16	9298	9295	9292	9289	9285	9282	9279	9276	9273	9270
1.17	9267	9264	9261	9258	9255	9252	9249	9246	9243	9240
1.18	9237	9234	9231	9229	9226	9223	9220	9217	9214	9212
1.19	9209	9206	9203	9201	9198	9195	9192	9190	9187	9184
1.20	0.9182	9179	9176	9174	9171	9169	9166	9163	9161	9158
1.21	9156	9153	9151	9148	9146	9143	9141	9138	9136	9133
1.22	9131	9129	9126	9124	9122	9119	9117	9114	9112	9110
1.23	9108	9105	9103	9101	9098	9096	9094	9092	9090	9087
1.24	9085	9083	9081	9079	9077	9074	9072	9070	9068	9066
1.25	0.9064	9062	9060	9058	9056	9054	9052	9050	9048	9046
1.26	9044	9042	9040	9038	9036	9034	9032	9031	9029	9027
1.27	9025	9023	9021	9020	9018	9016	9014	9012	9011	9009
1.28	9007	9005	9004	9002	9000	8999	8997	8995	8994	8992
1.29	8990	8989	8987	8986	8984	8982	8981	8979	8978	8976
1.30	0.8975	8973	8972	8970	8969	8967	8966	8964	8963	8961
1.31	8960	8959	8957	8956	8954	8953	8952	8950	8949	8948
1.32	8946	8945	8944	8943	8941	8940	8939	8937	8936	8935
1.33	8934	8933	8931	8930	8929	8928	8927	8926	8924	8923
1.34	8922	8921	8920	8919	8918	8917	8916	8915	8914	8913
1.35	0.8912	8911	8910	8909	8908	8907	8906	8905	8904	8903
1.36	8902	8901	8900	8899	8898	8897	8897	8896	8895	8894
1.37	8893	8892	8892	8891	8890	8889	8888	8888	8887	8886
1.38	8885	8885	8884	8883	8883	8882	8881	8880	8880	8879
1.39	8879	8878	8877	8877	8876	8875	8875	8874	8874	8873

$\Gamma(x)$

伽马函数表

x	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
1.40	0.8873	8872	8872	8871	8871	8870	8870	8869	8869	8868
1.41	8868	8867	8867	8866	8866	8865	8865	8865	8864	8864
1.42	8864	8863	8863	8863	8862	8862	8862	8861	8861	8861
1.43	8860	8860	8860	8860	8859	8859	8859	8859	8858	8858
1.44	8858	8858	8858	8858	8857	8857	8857	8857	8857	8857
1.45	0.8857	8857	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856
1.46	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856	8856
1.47	8856	8856	8856	8857	8857	8857	8857	8857	8857	8857
1.48	8857	8858	8858	8858	8858	8858	8859	8859	8859	8859
1.49	8859	8860	8860	8860	8860	8861	8861	8861	8862	8862
1.50	0.8862	8863	8863	8863	8864	8864	8864	8865	8865	8866
1.51	8866	8866	8867	8867	8868	8868	8869	8869	8869	8870
1.52	8870	8871	8871	8872	8872	8873	8873	8874	8875	8875
1.53	8876	8876	8877	8877	8878	8879	8879	8880	8880	8881
1.54	8882	8882	8883	8884	8884	8885	8886	8887	8887	8888
1.55	0.8889	8889	8890	8891	8892	8892	8893	8894	8895	8896
1.56	8896	8897	8898	8899	8900	8901	8901	8902	8903	8904
1.57	8905	8906	8907	8908	8909	8909	8910	8911	8912	8913
1.58	8914	8915	8916	8917	8918	8919	8920	8921	8922	8923
1.59	8924	8925	8926	8927	8929	8930	8931	8932	8933	8934
1.60	0.8935	8936	8937	8939	8940	8941	8942	8943	8944	8946
1.61	8947	8948	8949	8950	8952	8953	8954	8955	8957	8958
1.62	8959	8961	8962	8963	8964	8966	8967	8968	8970	8971
1.63	8972	8974	8975	8977	8978	8979	8981	8982	8984	8985
1.64	8986	8988	8989	8991	8992	8994	8995	8997	8998	9000
1.65	0.9001	9003	9004	9006	9007	9009	9010	9012	9014	9015
1.66	9017	9018	9020	9021	9023	9025	9026	9028	9030	9031
1.67	9033	9035	9036	9038	9040	9041	9043	9045	9047	9048
1.68	9050	9052	9054	9055	9057	9059	9061	9062	9064	9066
1.69	9068	9070	9071	9073	9075	9077	9079	9081	9083	9084
1.70	0.9086	9088	9090	9092	9094	9096	9098	9100	9102	9104
1.71	9106	9108	9110	9112	9114	9116	9118	9120	9122	9124
1.72	9126	9128	9130	9132	9134	9136	9138	9140	9142	9145
1.73	9147	9149	9151	9153	9155	9157	9160	9162	9164	9166
1.74	9168	9170	9173	9175	9177	9179	9182	9184	9186	9188
1.75	0.9191	9193	9195	9197	9200	9202	9204	9207	9209	9211
1.76	9214	9216	9218	9221	9223	9226	9228	9230	9233	9235
1.77	9238	9240	9242	9245	9247	9250	9252	9255	9257	9260
1.78	9262	9265	9267	9270	9272	9275	9277	9280	9283	9285
1.79	9288	9290	9293	9295	9298	9301	9303	9306	9309	9311

$\Gamma(x)$

伽马函数表

x	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
1.80	0.9314	9316	9319	9322	9325	9327	9330	9333	9335	9338
1.81	9341	9343	9346	9349	9352	9355	9357	9360	9363	9366
1.82	9368	9371	9374	9377	9380	9383	9385	9388	9391	9394
1.83	9397	9400	9403	9406	9408	9411	9414	9417	9420	9423
1.84	9426	9429	9432	9435	9438	9441	9444	9447	9450	9453
1.85	0.9456	9459	9462	9465	9468	9471	9474	9478	9481	9484
1.86	9487	9490	9493	9496	9499	9503	9506	9509	9512	9515
1.87	9518	9522	9525	9528	9531	9534	9538	9541	9544	9547
1.88	9551	9554	9557	9561	9564	9567	9570	9574	9577	9580
1.89	9584	9587	9591	9594	9597	9601	9604	9607	9611	9614
1.90	0.9618	9621	9625	9628	9631	9635	9638	9642	9645	9649
1.91	9652	9656	9659	9663	9666	9670	9673	9677	9681	9684
1.92	9688	9691	9695	9699	9702	9706	9709	9713	9717	9720
1.93	9724	9728	9731	9735	9739	9742	9746	9750	9754	9757
1.94	9761	9765	9768	9772	9776	9780	9784	9787	9791	9795
1.95	0.9799	9803	9806	9810	9814	9818	9822	9826	9830	9834
1.96	9837	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9873
1.97	9877	9881	9885	9889	9893	9897	9901	9905	9909	9913
1.98	9917	9921	9925	9929	9933	9938	9942	9946	9950	9954
1.99	9958	9962	9966	9971	9975	9979	9983	9987	9992	9996

对 $x<1$ 或 $x>2$ 的伽马函数值，可以利用下式算出：

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x},\quad \Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$$

例 (1) $\Gamma(0.8)=\frac{\Gamma(1.8)}{0.8}=\frac{0.9314}{0.8}=1.164$

(2) $\Gamma(2.5)=1.5\times\Gamma(1.5)=1.5\times0.8862=1.329$

erf x

21. 概率积分(或误差函数)表

erf 0.5=0.5205

x	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
0.00	0.0000	0011	0023	0034	0045	0056	0068	0079	0090	0102
0.01	0113	0124	0135	0147	0158	0169	0181	0192	0203	0214
0.02	0226	0237	0248	0260	0271	0282	0293	0305	0316	0327
0.03	0338	0350	0361	0372	0384	0395	0406	0417	0429	0440
0.04	0451	0462	0474	0485	0496	0507	0519	0530	0541	0553
0.05	0.0564	0575	0586	0598	0609	0620	0631	0643	0654	0665
0.06	0676	0688	0699	0710	0721	0732	0744	0755	0766	0777
0.07	0789	0800	0811	0822	0834	0845	0856	0867	0878	0890
0.08	0901	0912	0923	0934	0946	0957	0968	0979	0990	1002
0.09	1013	1024	1035	1046	1058	1069	1080	1091	1102	1113
0.10	0.1125	1136	1147	1158	1169	1180	1192	1203	1214	1225
0.11	1236	1247	1259	1270	1281	1292	1303	1314	1325	1336
0.12	1348	1359	1370	1381	1392	1403	1414	1425	1436	1448
0.13	1459	1470	1481	1492	1503	1514	1525	1536	1547	1558
0.14	1569	1581	1592	1603	1614	1625	1636	1647	1658	1669
0.15	0.1680	1691	1702	1713	1724	1735	1746	1757	1768	1779
0.16	1790	1801	1812	1823	1834	1845	1856	1867	1878	1889
0.17	1900	1911	1922	1933	1944	1955	1966	1977	1988	1998
0.18	2009	2020	2031	2042	2053	2064	2075	2086	2097	2108
0.19	2118	2129	2140	2151	2162	2173	2184	2194	2205	2216
0.20	0.2227	2238	2249	2260	2270	2281	2292	2303	2314	2324
0.21	2335	2346	2357	2368	2378	2389	2400	2411	2421	2432
0.22	2443	2454	2464	2475	2486	2497	2507	2518	2529	2540
0.23	2550	2561	2572	2582	2593	2604	2614	2625	2636	2646
0.24	2657	2668	2678	2689	2700	2710	2721	2731	2742	2753

erf x

概率积分(或误差函数)表

erf 0.5=0.5205

x	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
0.25	0.2763	2774	2784	2795	2806	2816	2827	2837	2848	2858
0.26	2869	2880	2890	2901	2911	2922	2932	2943	2953	2964
0.27	2974	2985	2995	3006	3016	3027	3037	3047	3058	3068
0.28	3079	3089	3100	3110	3120	3131	3141	3152	3162	3172
0.29	3183	3193	3204	3214	3224	3235	3245	3255	3266	3276
0.30	0.3286	3297	3307	3317	3327	3338	3348	3358	3369	3379
0.31	3389	3399	3410	3420	3430	3440	3450	3461	3471	3481
0.32	3491	3501	3512	3522	3532	3542	3552	3562	3573	3583
0.33	3593	3603	3613	3623	3633	3643	3653	3663	3674	3684
0.34	3694	3704	3714	3724	3734	3744	3754	3764	3774	3784
0.35	0.3794	3804	3814	3824	3834	3844	3854	3864	3873	3883
0.36	3893	3903	3913	3923	3933	3943	3953	3963	3972	3982
0.37	3992	4002	4012	4022	4031	4041	4051	4061	4071	4080
0.38	4090	4100	4110	4119	4129	4139	4149	4158	4168	4178
0.39	4187	4197	4207	4216	4226	4236	4245	4255	4265	4274
0.40	0.4284	4294	4303	4313	4322	4332	4341	4351	4361	4370
0.41	4380	4389	4399	4408	4418	4427	4437	4446	4456	4465
0.42	4475	4484	4494	4503	4512	4522	4531	4541	4550	4559
0.43	4569	4578	4588	4597	4606	4616	4625	4634	4644	4653
0.44	4662	4672	4681	4690	4699	4709	4718	4727	4736	4746
0.45	0.4755	4764	4773	4782	4792	4801	4810	4819	4828	4837
0.46	4847	4856	4865	4874	4883	4892	4901	4910	4919	4928
0.47	4937	4946	4956	4965	4974	4983	4992	5001	5010	5019
0.48	5027	5036	5045	5054	5063	5072	5081	5090	5099	5108
0.49	5117	5126	5134	5143	5152	5161	5170	5179	5187	5196

22. 正弦积分表

$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin u}{u}du$

$\mathrm{Si}(25)=1.5315$
$\mathrm{Si}(50)=1.5516$

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.0000	0.0999	0.1996	0.2985	0.3965	0.4931	0.5881	0.6812	0.7721	0.8605
1	0.9461	1.0287	1.1081	1.1840	1.2562	1.3247	1.3892	1.4496	1.5058	1.5578
2	1.6054	1.6487	1.6876	1.7222	1.7525	1.7785	1.8004	1.8182	1.8321	1.8422
3	1.8487	1.8517	1.8514	1.8481	1.8419	1.8331	1.8220	1.8086	1.7933	1.7765
4	1.7582	1.7387	1.7184	1.6973	1.6758	1.6541	1.6325	1.6110	1.5900	1.5696
5	1.5499	1.5313	1.5137	1.4973	1.4823	1.4687	1.4567	1.4462	1.4374	1.4302
6	1.4247	1.4209	1.4187	1.4182	1.4192	1.4218	1.4258	1.4312	1.4379	1.4457
7	1.4546	1.4644	1.4751	1.4864	1.4983	1.5107	1.5233	1.5361	1.5489	1.5617
8	1.5742	1.5864	1.5981	1.6093	1.6198	1.6296	1.6386	1.6467	1.6538	1.6599
9	1.6650	1.6691	1.6721	1.6739	1.6747	1.6745	1.6732	1.6708	1.6676	1.6634
10	1.6584	1.6525	1.6460	1.6388	1.6311	1.6229	1.6144	1.6056	1.5965	1.5874
11	1.5783	1.5693	1.5604	1.5518	1.5436	1.5357	1.5284	1.5216	1.5154	1.5098
12	1.5050	1.5009	1.4976	1.4950	1.4933	1.4923	1.4922	1.4929	1.4943	1.4965
13	1.4994	1.5029	1.5071	1.5119	1.5172	1.5229	1.5291	1.5335	1.5423	1.5492
14	1.5562	1.5633	1.5704	1.5773	1.5841	1.5907	1.5970	1.6030	1.6085	1.6136
15	1.6182	1.6223	1.6258	1.6287	1.6309	1.6326	1.6336	1.6340	1.6337	1.6328
16	1.6313	1.6292	1.6266	1.6234	1.6197	1.6156	1.6111	1.6063	1.6011	1.5957
17	1.5901	1.5844	1.5787	1.5729	1.5671	1.5615	1.5560	1.5507	1.5457	1.5410
18	1.5366	1.5326	1.5291	1.5260	1.5234	1.5213	1.5197	1.5186	1.5181	1.5181
19	1.5186	1.5197	1.5212	1.5232	1.5257	1.5286	1.5319	1.5336	1.5395	1.5438
20	1.5482	1.5529	1.5577	1.5625	1.5674	1.5723	1.5771	1.5819	1.5864	1.5908
21	1.5949	1.5987	1.6023	1.6054	1.6082	1.6106	1.6126	1.6142	1.6153	1.6159
22	1.6161	1.6158	1.6151	1.6140	1.6124	1.6104	1.6081	1.6054	1.6023	1.5990
23	1.5955	1.5917	1.5877	1.5836	1.5795	1.5752	1.5710	1.5668	1.5626	1.5586
24	1.5547	1.5511	1.5476	1.5444	1.5415	1.5390	1.5367	1.5348	1.5333	1.5322

23. 余弦积分表

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} du$$

$\mathrm{Ci}(25) = -0.0069$
$\mathrm{Ci}(50) = -0.0057$

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	−∞	−1.7279	−1.0423	−0.6492	−0.3788	−0.1779	−0.0223	●0.1005	0.1982	0.2760
1	0.3374	0.3848	0.4204	0.4458	0.4620	0.4704	0.4717	★0.4669	0.4568	0.4420
2	0.4229	0.4004	0.3751	0.3471	0.3173	0.2859	0.2533	0.2201	0.1864	0.1529
3	0.1196	0.0870	0.0553	0.0246	●−0.0045	−0.0321	−0.0540	−0.0820	−0.1038	−0.1235
4	−0.1410	−0.1562	−0.1690	−0.1796	−0.1877	−0.1935	−0.1970	−0.1984	★−0.1976	−0.1948
5	−0.1901	−0.1835	−0.1752	−0.1655	−0.1544	−0.1421	−0.1287	−0.1144	−0.0994	−0.0839
6	−0.0680	−0.0520	−0.0359	−0.0200	−0.0042	●0.0111	0.0258	0.0398	0.0530	0.0653
7	0.0767	0.0869	0.0960	0.1038	0.1104	0.1156	0.1195	0.1222	0.1235	★0.1237
8	0.1224	0.1200	0.1164	0.1118	0.1060	0.0994	0.0920	0.0836	0.0748	0.0653
9	0.0553	0.0451	0.0345	0.0239	0.0132	0.0027	●−0.0077	−0.0188	−0.0275	−0.0368
10	−0.0455	−0.0545	−0.0609	−0.0673	−0.0733	−0.0783	−0.0824	−0.0855	−0.0878	−0.0891
11	−0.0896	★−0.0890	−0.0877	−0.0855	−0.0624	−0.0785	−0.0741	−0.0688	−0.0630	−0.0566
12	−0.0498	−0.0426	−0.0350	−0.0273	−0.0194	−0.0115	−0.0035	●0.0044	0.0122	0.0196
13	0.0268	0.0335	0.0399	0.0458	0.0511	0.0558	0.0598	0.0633	0.0660	0.0681
14	0.0694	0.0700	★0.0700	0.0691	0.0676	0.0656	0.0627	0.0595	0.0555	0.0511
15	0.0463	0.0410	0.0354	0.0296	0.0235	0.0172	0.0109	0.0045	●−0.0019	−0.0082
16	−0.0142	−0.0201	−0.0257	−0.0309	−0.0358	−0.0403	−0.0444	−0.0479	−0.0509	−0.0534
17	−0.0553	−0.0566	−0.0574	−0.0575	★−0.0571	−0.0561	−0.0546	−0.0525	−0.0500	−0.0470
18	−0.0435	−0.0397	−0.0354	−0.0309	−0.0261	−0.0211	−0.0159	−0.0108	−0.0054	−0.0001
19	●0.0051	0.0103	0.0152	0.0200	0.0246	0.0288	0.0327	0.0362	0.0394	0.0421
20	0.0444	0.0462	0.0475	0.0483	0.0487	★0.0485	0.0479	0.0468	0.0453	0.0433
21	0.0408	0.0381	0.0349	0.0314	0.0277	0.0237	0.0195	0.0151	0.0107	0.0062
22	0.0017	●−0.0029	−0.0074	−0.0117	−0.0159	−0.0199	−0.0236	−0.0271	−0.0297	−0.0331
23	−0.0357	−0.0378	−0.0395	−0.0408	−0.0417	−0.0422	−0.0422	★−0.0419	−0.0411	−0.0390
24	−0.0383	−0.0364	−0.0341	−0.0315	−0.0286	−0.0254	−0.0220	−0.0184	−0.0146	−0.0108

24. 指数积分表

$$\mathrm{Ei}(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$\mathrm{Ei}(-5) = -0.001148$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	−∞	−4.038	−3.355	−2.959	−2.681	−2.468	−2.295	−2.151	−2.027	−1.919
0.1	−1.823	−1.737	−1.660	−1.589	−1.524	−1.464	−1.409	−1.358	−1.310	−1.265
0.2	−1.223	−1.183	−1.145	−1.110	−1.076	−1.044	−1.014	*9849	*9573	*9309
0.3	−0.9057	8815	8583	8361	8147	7942	7745	7554	7371	7194
0.4	7024	6859	6700	6546	6397	6253	6114	5979	5848	5721
0.5	−0.5598	5478	5362	5250	5140	5034	4930	4830	4732	4636
0.6	4544	4454	4366	4280	4197	4115	4036	3959	3883	3810
0.7	3738	3668	3599	3532	3467	3403	3341	3280	3221	3163
0.8	3106	3050	2996	2943	2891	2840	2790	2742	2694	2647
0.9	2602	2557	2513	2470	2429	2387	2347	2308	2269	2231
1.0	−0.2194	2157	2122	2087	2052	2019	1986	1953	1922	1890
1.1	1860	1830	1801	1772	1743	1716	1688	1662	1635	1609
1.2	1584	1559	1535	1511	1487	1464	1441	1419	1397	1376
1.3	1355	1334	1313	1293	1274	1254	1235	1216	1198	1180
1.4	1162	1145	1128	1111	1094	1078	1062	1046	1030	1015
1.5	−0.1000	*9854	*9709	*9567	*9420	*9288	*9152	*9019	*8887	*8758
1.6	−0.08631	8506	8383	8261	8142	8025	7909	7796	7684	7574
1.7	7465	7359	7254	7151	7049	6949	6850	6753	6658	6564
1.8	6471	6380	6290	6202	6115	6029	5945	5862	5780	5700
1.9	5620	5542	5465	5390	5315	5241	5169	5098	5027	4958
2.0	−0.04890	4823	4757	4692	4627	4564	4502	4440	4380	4320
2.1	4261	4204	4147	4090	4035	3980	3927	3874	3821	3770
2.2	3719	3669	3620	3571	3523	3476	3430	3384	3339	3294
2.3	3250	3207	3164	3122	3081	3040	3000	2960	2921	2882
2.4	2844	2806	2769	2733	2697	2662	2627	2592	2558	2525

指数积分表

$\mathrm{Ei}(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$ $\mathrm{Ei}(-5) = -0.001148$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.5	−0.02491	2459	2427	2395	2364	2333	2303	2273	2243	2214
2.6	2185	2157	2129	2101	2074	2047	2021	1994	1969	1943
2.7	1918	1893	1869	1845	1821	1798	1775	1752	1730	1707
2.8	1686	1664	1643	1622	1601	1581	1560	1540	1521	1502
2.9	1482	1464	1445	1427	1409	1391	1373	1356	1338	1322
3.0	−0.01305	1288	1272	1256	1240	1225	1209	1194	1179	1164
3.1	1149	1135	1121	1107	1093	1079	1066	1052	1039	1026
3.2	1013	1001	*9882	*9758	*9637	*9517	*9398	*9281	*9166	*9052
3.3	−0.008939	8828	8718	8610	8503	8398	8294	8191	8090	7990
3.4	7891	7793	7697	7602	7508	7416	7324	7234	7145	7057
3.5	−0.006970	6884	6800	6716	6634	6552	6472	6393	6314	6237
3.6	6160	6085	6011	5937	5864	5793	5722	5652	5583	5515
3.7	5448	5381	5316	5251	5187	5124	5062	5000	4939	4879
3.8	4820	4762	4704	4647	4591	4535	4480	4426	4372	4319
3.9	4267	4216	4165	4114	4065	4016	3967	3919	3872	3825
4.0	−0.003779	3734	3689	3645	3601	3557	3515	3472	3431	3390
4.1	3349	3309	3269	3230	3191	3153	3115	3078	3041	3005
4.2	2969	2933	2898	2864	2829	2796	2762	2729	2697	2665
4.3	2633	2602	2571	2540	2510	2480	2450	2421	2393	2364
4.4	2336	2308	2281	2254	2227	2201	2175	2149	2123	2098
4.5	−0.002073	2049	2025	2001	1977	1954	1931	1908	1885	1863
4.6	1841	1819	1798	1777	1756	1735	1715	1694	1674	1655
4.7	1635	1616	1597	1578	1560	1541	1523	1505	1488	1470
4.8	1453	1436	1419	1402	1386	1370	1354	1338	1322	1307
4.9	1291	1276	1261	1247	1232	1218	1204	1189	1176	1162

25. 椭圆积分表

$F(k,\varphi)$, $k=\sin\theta$ 第一类椭圆积分表

φ \ θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10°	0.1745	0.1746	0.1746	0.1748	0.1749	0.1751	0.1752	0.1753	0.1754	0.1754
20°	0.3491	0.3493	0.3499	0.3508	0.3520	0.3533	0.3545	0.3555	0.3561	0.3564
30°	0.5236	0.5243	0.5263	0.5294	0.5334	0.5379	0.5422	0.5459	0.5484	0.5493
40°	0.6981	0.6997	0.7043	0.7116	0.7273	0.7323	0.7436	0.7535	0.7604	0.7629
50°	0.8727	0.8756	0.8842	0.8982	0.9173	0.9401	0.9647	0.9875	1.0044	1.0107
60°	1.0472	1.0519	1.0660	1.0896	1.1226	1.1643	1.2126	1.2619	1.3014	1.3170
70°	1.2217	1.2286	1.2495	1.2853	1.3372	1.4065	1.4944	1.5959	1.6918	1.7354
80°	1.3963	1.4056	1.4344	1.4846	1.5597	1.6660	1.8125	2.0119	2.2653	2.4362
90°	1.5708	1.5828	1.6200	1.6858	1.7868	1.9356	2.1565	2.5046	3.1534	∞

$E(k,\varphi)$, $k=\sin\theta$ 第二类椭圆积分表

φ \ θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10°	0.1745	0.1745	0.1744	0.1743	0.1742	0.1740	0.1739	0.1738	0.1737	0.1736
20°	0.3491	0.3489	0.3483	0.3473	0.3462	0.3450	0.3438	0.3429	0.3422	0.3420
30°	0.5236	0.5229	0.5209	0.5179	0.5141	0.5100	0.5061	0.5029	0.5007	0.5000
40°	0.6981	0.6966	0.6921	0.6851	0.6763	0.6667	0.6575	0.6497	0.6446	0.6428
50°	0.8727	0.8698	0.8614	0.8483	0.8317	0.8134	0.7954	0.7801	0.7697	0.7660
60°	1.0472	1.0426	1.0290	1.0076	0.9801	0.9493	0.9184	0.8914	0.8728	0.8660
70°	1.2217	1.2149	1.1949	1.1632	1.1221	1.0750	1.0266	0.9830	0.9514	0.9397
80°	1.3963	1.3870	1.3597	1.3161	1.2590	1.1926	1.1225	1.0565	1.0054	0.9848
90°	1.5708	1.5589	1.5238	1.4675	1.3931	1.3055	1.2111	1.1184	1.0401	1.0000

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=\int_0^{\sin\varphi}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}}$$

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi=\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}du$$

$$K=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}}$$

$$E=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}du$$

($k=\sin\theta$)

完全椭圆积分表

θ	K	E	θ	K	E	θ	K	E
0°	1.5708	1.5708	25°	1.6490	1.4981	50°	1.9356	1.3055
1°	1.5709	1.5707	26°	1.6557	1.4924	51°	1.9539	1.2963
2°	1.5713	1.5703	27°	1.6627	1.4864	52°	1.9729	1.2870
3°	1.5719	1.5697	28°	1.6701	1.4803	53°	1.9927	1.2776
4°	1.5727	1.5689	29°	1.6777	1.4740	54°	2.0133	1.2681
5°	1.5738	1.5678	30°	1.6858	1.4675	55°	2.0347	1.2587
6°	1.5751	1.5665	31°	1.6941	1.4608	56°	2.0571	1.2492
7°	1.5767	1.5649	32°	1.7028	1.4539	57°	2.0804	1.2397
8°	1.5785	1.5632	33°	1.7119	1.4469	58°	2.1047	1.2301
9°	1.5805	1.5611	34°	1.7214	1.4397	59°	2.1300	1.2206
10°	1.5828	1.5589	35°	1.7312	1.4323	60°	2.1565	1.2111
11°	1.5854	1.5564	36°	1.7415	1.4248	61°	2.1842	1.2015
12°	1.5882	1.5537	37°	1.7522	1.4171	62°	2.2132	1.1920
13°	1.5913	1.5507	38°	1.7633	1.4092	63°	2.2435	1.1826
14°	1.5946	1.5476	39°	1.7748	1.4013	64°	2.2754	1.1732
15°	1.5981	1.5442	40°	1.7868	1.3931	65.0°	2.3088	1.1638
16°	1.6020	1.5405	41°	1.7992	1.3849	65.5°	2.3261	1.1592
17°	1.6061	1.5367	42°	1.8122	1.3765	66.0°	2.3439	1.1545
18°	1.6105	1.5326	43°	1.8256	1.3680	66.5°	2.3622	1.1499
19°	1.6151	1.5283	44°	1.8396	1.3594	67.0°	2.3809	1.1453
20°	1.6200	1.5238	45°	1.8541	1.3506	67.5°	2.4001	1.1408
21°	1.6252	1.5191	46°	1.8691	1.3418	68.0°	2.4198	1.1362
22°	1.6307	1.5141	47°	1.8848	1.3329	68.5°	2.4401	1.1317
23°	1.6365	1.5090	48°	1.9011	1.3238	69.0°	2.4610	1.1272
24°	1.6426	1.5037	49°	1.9180	1.3147	69.5°	2.4825	1.1228

($k=\sin\theta$)

完全椭圆积分表

θ	K	E	θ	K	E	θ	K	E
70.0°	2.5046	1.1184	**81.0°**	3.2553	1.0338	**86.0°**	4.0528	1.0086
70.5°	2.5273	1.1140	**81.2°**	3.2771	1.0326	**86.2°**	4.1037	1.0079
71.0°	2.5507	1.1096	**81.4°**	3.2995	1.0314	**86.4°**	4.1574	1.0072
71.5°	2.5749	1.1053	**81.6°**	3.3223	1.0302	**86.6°**	4.2142	1.0065
72.0°	2.5998	1.1011	**81.8°**	3.3458	1.0290	**86.8°**	4.2744	1.0059
72.5°	2.6256	1.0968	**82.0°**	3.3699	1.0278	**87.0°**	4.3387	1.0053
73.0°	2.6521	1.0927	**82.2°**	3.3946	1.0267	**87.2°**	4.4073	1.0047
73.5°	2.6796	1.0885	**82.4°**	3.4199	1.0256	**87.4°**	4.4811	1.0041
74.0°	2.7081	1.0844	**82.6°**	3.4460	1.0245	**87.6°**	4.5609	1.0036
74.5°	2.7375	1.0804	**82.8°**	3.4728	1.0234	**87.8°**	4.6477	1.0031
75.0°	2.7681	1.0764	**83.0°**	3.5004	1.0223	**88.0°**	4.7427	1.0026
75.5°	2.7998	1.0725	**83.2°**	3.5288	1.0213	**88.2°**	4.8478	1.0021
76.0°	2.8327	1.0686	**83.4°**	3.5581	1.0202	**88.4°**	4.9654	1.0017
76.5°	2.8669	1.0648	**83.6°**	3.5884	1.0192	**88.6°**	5.0988	1.0014
77.0°	2.9026	1.0611	**83.8°**	3.6196	1.0182	**88.8°**	5.2527	1.0010
77.5°	2.9397	1.0574	**84.0°**	3.6519	1.0172	**89.0°**	5.4349	1.0008
78.0°	2.9786	1.0538	**84.2°**	3.6852	1.0163	**89.1°**	5.5402	1.0006
78.5°	3.0192	1.0502	**84.4°**	3.7198	1.0153	**89.2°**	5.6579	1.0005
79.0°	3.0617	1.0468	**84.6°**	3.7557	1.0144	**89.3°**	5.7914	1.0004
79.5°	3.1064	1.0434	**84.8°**	3.7930	1.0135	**89.4°**	5.9455	1.0003
80.0°	3.1534	1.0401	**85.0°**	3.8317	1.0127	**89.5°**	6.1278	1.0002
80.2°	3.1729	1.0388	**85.2°**	3.8721	1.0118	**89.6°**	6.3509	1.0001
80.4°	3.1928	1.0375	**85.4°**	3.9142	1.0110	**89.7°**	6.6385	1.0001
80.6°	3.2132	1.0363	**85.6°**	3.9583	1.0102	**89.8°**	7.0440	1.0000
80.8°	3.2340	1.0350	**85.8°**	4.0044	1.0094	**89.9°**	7.7371	1.0000

26. 勒让德多项式表

x	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	x	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$
0.00	−0.5000	0.0000	0.3750	0.0000	−0.3125	0.50	−0.1250	−0.4375	−0.2891	+0.0898	+0.3232
0.01	−4998	−0150	3746	0187	−3118	0.51	−1098	−4334	−3044	0673	3166
0.02	−4994	−0300	3735	0374	−3099	0.52	−0944	−4285	−3191	0441	3080
0.03	−4986	−0440	3716	0560	−3066	0.53	−0786	−4228	−3332	+0204	2975
0.04	−4976	−0598	3690	0744	−3021	0.54	−0626	−4163	−3465	−0037	2851
0.05	−4962	−0747	3657	0927	−2962	0.55	−0462	−4091	−3590	−0282	2708
0.06	−4946	−0895	3616	1106	−2891	0.56	−0296	−4010	−3707	−0529	2546
0.07	−4926	−1041	3567	1283	−2808	0.57	−0126	−3920	−3815	−0779	2366
0.08	−4904	−1187	3512	1455	−2713	0.58	+0046	−3822	−3914	−1028	2168
0.09	−4878	−1332	3449	1624	−2606	0.59	0222	−3716	−4002	−1278	1953
0.10	−4850	−1475	3379	1788	−2488	0.60	0400	−3600	−4080	−1526	1721
0.11	−4818	−1617	3303	1947	−2360	0.61	0582	−3475	−4146	−1772	1473
0.12	−4784	−1757	3219	2101	−2220	0.62	0766	−3342	−4200	−2014	1211
0.13	−4746	−1895	3129	2248	−2071	0.63	0954	−3199	−4242	−2251	0935
0.14	−4706	−2031	3032	2389	−1913	0.64	1144	−3046	−4270	−2482	0648
0.15	−4662	−2166	2928	2523	−1746	0.65	1338	−2884	−4284	−2705	0347
0.16	−4616	−2298	2810	2650	−1572	0.66	1534	−2713	−4284	−2919	+0038
0.17	−4566	−2427	2703	2769	−1389	0.67	1734	−2531	−4268	−3122	−0278
0.18	−4514	−2554	2581	2880	−1201	0.68	1936	−2339	−4236	−3313	−0601
0.19	−4458	−2679	2453	2982	−1006	0.69	2142	−2137	−4187	−3490	−0926
0.20	−4400	−2800	2320	3075	−0806	0.70	2350	−1925	−4121	−3652	−1253
0.21	−4338	−2918	2181	3159	−0601	0.71	2562	−1702	−4036	−3796	−1578
0.22	−4274	−3034	2037	3234	−0394	0.72	2776	−1469	−3933	−3922	−1899
0.23	−4206	−3146	1889	3299	−0183	0.73	2994	−1225	−3810	−4026	−2214
0.24	−4136	−3254	1735	3353	+0029	0.74	3214	−0969	−3666	−4107	−2518

0.25	−4062	−3359	1577	3397	0243	**0.75**	3438	−0703	−3501	−4164	−2808
0.26	−3986	−3461	1415	3431	0456	**0.76**	3664	−0426	−3314	−4193	−3081
0.27	−3906	−3558	1249	3453	0669	**0.77**	3894	−0137	−3104	−4193	−3333
0.28	−3824	−3651	1079	3465	0879	**0.78**	4136	+0164	−2871	−4162	−3559
0.29	−3738	−3740	0906	3465	1087	**0.79**	4362	0476	−2613	−4097	−3756
0.30	−3650	−3825	0729	3454	1292	**0.80**	4600	0800	−2330	−3995	−3918
0.31	−3558	−3905	0550	3431	1492	**0.81**	4842	1136	−2021	−3855	−4041
0.32	−3464	−3981	0369	3397	1686	**0.82**	5086	1484	−1685	−3674	−4119
0.33	−3366	−4052	0185	3351	1873	**0.83**	5334	1845	−1321	−3449	−4147
0.34	−3266	−4117	−0000	3294	2053	**0.84**	5584	2218	−0928	−3177	−4120
0.35	−3162	−4178	−0187	3225	2225	**0.85**	5838	2603	−0506	−2857	−4030
0.36	−3056	−4234	−0375	3144	2388	**0.86**	6094	3001	−0053	−2484	−3872
0.37	−2946	−4284	−0564	3051	2540	**0.87**	6354	3413	+0431	−2056	−3638
0.38	−2834	−4328	−0753	2948	2681	**0.88**	6616	3837	0947	−1570	−3332
0.39	−2718	−4367	−0942	2833	2810	**0.89**	6882	4274	1496	−1023	−2916
0.40	−2600	−4400	−1130	2706	2926	**0.90**	7150	4725	2079	−0411	−2412
0.41	−2478	−4427	−1317	2569	3029	**0.91**	7422	5189	2696	+0268	−1802
0.42	−2354	−4448	−1504	2421	3118	**0.92**	7696	5667	3352	1017	−1077
0.43	−2226	−4462	−1688	2263	3191	**0.93**	7974	6159	4044	1842	−0229
0.44	−2096	−4470	−1870	2095	3249	**0.94**	8254	6665	4773	2744	+0751
0.45	−1962	−4472	−2050	1917	3290	**0.95**	8538	7184	5541	3727	1875
0.46	−1826	−4467	−2226	1730	3314	**0.96**	8824	7718	6349	4796	3151
0.47	−1686	−4434	−2399	1534	3321	**0.97**	9114	8267	7198	5954	4590
0.48	−1544	−4435	−2568	1330	3310	**0.98**	9406	8830	8089	7204	6204
0.49	−1398	−4409	−2732	1118	3280	**0.99**	9702	9407	9022	8552	8003
						1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

27. 贝塞耳函数表

$J_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	+1.0000	1.0000	0.9999	9998	9996	9994	9991	9988	9984	9980
0.1	+0.9975	9970	9964	9958	9951	9944	9936	9928	9919	9910
0.2	9900	9890	9879	9868	9857	9844	9832	9819	9805	9791
0.3	9776	9761	9746	9730	9713	9696	9679	9661	9642	9623
0.4	9604	9584	9564	9543	9522	9500	9478	9455	9432	9409
0.5	9385	9360	9335	9310	9284	9258	9231	9204	9177	9149
0.6	9120	9091	9062	9032	9002	8971	8940	8909	8877	8845
0.7	8812	8779	8745	8711	8677	8642	8607	8572	8536	8500
0.8	8463	8426	8388	8350	8312	8274	8235	8195	8156	8115
0.9	8075	8034	7993	7952	7910	7868	7825	7783	7739	7696
1.0	7652	7608	7563	7519	7473	7428	7382	7336	7290	7243
1.1	7196	7149	7101	7054	7006	6957	6909	6860	6810	6761
1.2	6711	6661	6611	6561	6510	6459	6408	6356	6305	6253
1.3	6201	6149	6096	6043	5990	5937	5884	5830	5777	5723
1.4	5669	5614	5560	5505	5450	5395	5340	5285	5230	5174
1.5	5118	5062	5006	4950	4894	4838	4781	4725	4668	4611
1.6	4554	4497	4440	4383	4325	4268	4210	4153	4095	4038
1.7	3980	3922	3864	3806	3748	3690	3632	3574	3516	3458
1.8	3400	3342	3284	3225	3167	3109	3051	2993	2934	2876
1.9	2818	2760	2702	2644	2586	2528	2470	2412	2354	2297
2.0	2239	2181	2124	2066	2009	1951	1894	1837	1780	1723
2.1	1666	1609	1553	1496	1440	1383	1327	1271	1215	1159
2.2	1104	1048	0993	0937	0882	0827	0773	0718	0664	0609
2.3	0555	0502	0448	0394	0341	0288	0235	0182	0130	0077
2.4	+0025	*0027	*0079	*0130	*0181	*0232	*0283	*0334	*0384	*0434
2.5	−0484	0533	0583	0632	0681	0729	0778	0826	0873	0921
2.6	−0968	1015	1062	1108	1154	1200	1245	1291	1336	1380
2.7	−1424	1469	1512	1556	1599	1641	1684	1726	1768	1809
2.8	−1850	1891	1932	1972	2012	2051	2090	2129	2167	2205
2.9	−2243	2280	2317	2354	2390	2426	2462	2497	2532	2566
3.0	−2601	2634	2668	2701	2733	2765	2797	2829	2860	2890
3.1	−2921	2951	2980	3009	3038	3066	3094	3122	3149	3176
3.2	−3202	3228	3253	3278	3303	3328	3351	3375	3398	3421
3.3	−3443	3465	3486	3507	3528	3548	3568	3587	3606	3625
3.4	−3643	3661	3678	3695	3711	3727	3743	3758	3773	3787

$J_0(x)$的零点 $x=$ 2.4048, 5.5201, 8.6537, 11.7915, 14.9309, 18.0711, 21.2116, 24.3525.

贝塞耳函数表

$J_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	−0.3801	3815	3828	3841	3853	3865	3876	3887	3898	3908
3.6	−3918	3927	3936	3944	3953	3960	3967	3974	3981	3987
3.7	−3992	3997	4002	4007	4011	4014	4017	4020	4022	4024
3.8	−4026	4027	4027	4028	4027	4027	4026	4025	4023	4021
3.9	−4018	4015	4012	4008	4004	4000	3995	3990	3984	3978
4.0	−3971	3965	3958	3950	3942	3934	3925	3916	3907	3897
4.1	−3887	3876	3865	3854	3842	3831	3818	3806	3793	3779
4.2	−3766	3752	3737	3722	3707	3692	3676	3660	3644	3627
4.3	−3610	3593	3575	3557	3539	3520	3501	3482	3463	3443
4.4	−3423	3402	3381	3360	3339	3318	3296	3274	3251	3228
4.5	−3205	3182	3159	3135	3111	3087	3062	3037	3012	2987
4.6	−2961	2936	2910	2883	2857	2830	2803	2776	2749	2721
4.7	−2693	2665	2637	2609	2580	2551	2522	2493	2464	2434
4.8	−2404	2374	2344	2314	2283	2253	2222	2191	2160	2129
4.9	−2097	2066	2034	2002	1970	1938	1906	1874	1841	1809
5.0	−1776	1743	1710	1677	1644	1611	1578	1544	1511	1477
5.1	−1443	1410	1376	1342	1308	1274	1240	1206	1171	1137
5.2	−1103	1069	1034	1000	0965	0931	0896	0862	0827	0793
5.3	−0758	0723	0689	0654	0620	0585	0550	0516	0481	0447
5.4	−0412	0378	0343	0309	0274	0240	0205	0171	0137	0103
5.5	−0068	0034	0000	*0034	*0068	*0102	*0135	*0169	*0203	*0236
5.6	+0270	0303	0336	0370	0403	0436	0469	0501	0534	0567
5.7	0599	0632	0664	0696	0728	0760	0792	0823	0855	0886
5.8	0917	0948	0979	1010	1040	1071	1101	1131	1161	1191
5.9	1220	1250	1279	1308	1337	1366	1394	1423	1451	1479
6.0	1506	1534	1561	1589	1616	1642	1669	1695	1721	1747
6.1	1773	1798	1824	1849	1873	1898	1922	1947	1970	1994
6.2	2017	2041	2064	2086	2109	2131	2153	2175	2196	2217
6.3	2238	2259	2279	2299	2319	2339	2358	2377	2396	2415
6.4	2433	2451	2469	2486	2504	2521	2537	2554	2570	2585
6.5	2601	2616	2631	2646	2660	2674	2688	2702	2715	2728
6.6	2740	2753	2765	2777	2788	2799	2810	2821	2831	2841
6.7	2851	2860	2869	2878	2886	2895	2902	2910	2917	2924
6.8	2931	2937	2943	2949	2955	2960	2965	2969	2973	2977
6.9	2981	2984	2987	2990	2993	2995	2997	2998	2999	3000
7.0	3001	3001	3001	3001	3000	2999	2998	2997	2995	2993
7.1	2991	2988	2985	2982	2978	2974	2970	2966	2961	2956
7.2	2951	2945	2939	2933	2927	2920	2913	2906	2898	2890
7.3	2882	2874	2865	2856	2847	2837	2828	2818	2807	2797
7.4	2786	2775	2764	2752	2740	2728	2715	2703	2690	2677

贝塞耳函数表

$J_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.5	0.2663	2650	2636	2622	2607	2593	2578	2563	2547	2532
7.6	2516	2500	2484	2467	2451	2434	2416	2399	2381	2364
7.7	2346	2327	2309	2290	2271	2252	2233	2214	2194	2174
7.8	2154	2134	2113	2093	2072	2051	2030	2009	1987	1965
7.9	1944	1922	1899	1877	1855	1832	1809	1786	1763	1740
8.0	1717	1693	1669	1645	1622	1597	1573	1549	1524	1500
8.1	1475	1450	1425	1400	1375	1350	1325	1299	1274	1248
8.2	1222	1196	1170	1144	1118	1092	1066	1039	1013	0987
8.3	0960	0934	0907	0880	0853	0826	0800	0773	0745	0719
8.4	0692	0665	0637	0610	0583	0556	0529	0501	0474	0447
8.5	0419	0392	0365	0337	0310	0283	0255	0228	0201	0174
8.6	+0146	0119	0092	0065	0037	0010	*0017	*0044	*0071	*0100
8.7	−0125	0152	0179	0206	0233	0260	0286	0313	0339	0366
8.8	−0392	0419	0445	0471	0497	0524	0549	0575	0601	0627
8.9	−0653	0678	0704	0729	0754	0779	0804	0829	0854	0879
9.0	−0903	0928	0952	0976	1000	1024	1048	1072	1096	1119
9.1	−1142	1166	1189	1211	1234	1257	1279	1302	1324	1346
9.2	−1367	1389	1411	1432	1453	1474	1495	1516	1536	1556
9.3	−1577	1597	1616	1636	1655	1674	1694	1712	1731	1749
9.4	−1768	1786	1804	1821	1839	1856	1873	1890	1907	1923
9.5	−1939	1955	1971	1987	2002	2017	2032	2047	2061	2076
9.6	−2090	2104	2117	2131	2144	2157	2169	2182	2194	2206
9.7	−2218	2230	2241	2252	2263	2273	2284	2294	2304	2313
9.8	−2323	2332	2341	2350	2358	2366	2374	2382	2389	2396
9.9	−2403	2410	2417	2423	2429	2434	2440	2445	2450	2455
10.0	−2459	2464	2468	2471	2475	2478	2481	2484	2486	2488
10.1	−2490	2492	2493	2495	2496	2496	2497	2497	2497	2497
10.2	−2496	2495	2494	2493	2492	2490	2488	2485	2483	2480
10.3	−2477	2474	2470	2467	2463	2458	2454	2449	2444	2439
10.4	−2434	2428	2422	2416	2410	2403	2396	2389	2382	2374
10.5	−2366	2358	2350	2342	2333	2324	2315	2306	2296	2286
10.6	−2276	2266	2256	2245	2234	2223	2212	2200	2188	2177
10.7	−2164	2152	2140	2127	2114	2101	2087	2074	2060	2046
10.8	−2032	2018	2003	1989	1974	1959	1943	1928	1912	1897
10.9	−1881	1865	1848	1832	1815	1798	1781	1764	1747	1730
11.0	−1712	1694	1676	1658	1640	1622	1603	1584	1566	1547
11.1	−1528	1508	1489	1470	1450	1430	1411	1391	1370	1350
11.2	−1330	1309	1289	1268	1247	1227	1206	1185	1163	1142
11.3	−1121	1099	1078	1056	1034	1012	0991	0969	0946	0924
11.4	−0902	0880	0858	0835	0813	0790	0767	0745	0722	0699

贝塞耳函数表

$J_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
11.5	−0.0677	0654	0631	0608	0585	0562	0539	0516	0493	0469
11.6	−0446	0423	0400	0376	0353	0330	0307	0283	0260	0237
11.7	−0213	0190	0167	0143	0120	0097	0073	0050	0027	0004
11.8	+0020	0043	0066	0089	0112	0135	0159	0182	0205	0228
11.9	0250	0273	0296	0319	0342	0364	0387	0410	0432	0455
12.0	0477	0499	0521	0544	0566	0588	0610	0632	0653	0675
12.1	0697	0718	0740	0761	0782	0803	0824	0845	0866	0887
12.2	0908	0928	0949	0969	0989	1009	1029	1049	1069	1088
12.3	1108	1127	1147	1166	1185	1203	1222	1241	1259	1277
12.4	1296	1314	1331	1349	1367	1384	1401	1418	1435	1452
12.5	1469	1485	1502	1518	1534	1550	1565	1581	1596	1611
12.6	1626	1641	1655	1670	1684	1698	1712	1726	1739	1753
12.7	1766	1779	1792	1804	1817	1829	1841	1853	1864	1876
12.8	1887	1898	1909	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1979
12.9	1988	1997	2006	2015	2023	2031	2039	2047	2055	2062
13.0	2069	2076	2083	2089	2096	2102	2108	2113	2119	2124
13.1	2129	2134	2138	2143	2147	2151	2154	2158	2161	2164
13.2	2167	2169	2172	2174	2176	2178	2179	2180	2182	2182
13.3	2183	2183	2184	2184	2183	2183	2182	2181	2180	2179
13.4	2177	2175	2173	2171	2169	2166	2163	2160	2157	2154
13.5	2150	2146	2142	2138	2133	2128	2123	2118	2113	2107
13.6	2101	2095	2089	2083	2076	2069	2062	2055	2048	2040
13.7	2032	2024	2016	2008	1999	1990	1981	1972	1963	1953
13.8	1943	1933	1923	1913	1903	1892	1881	1870	1859	1847
13.9	1836	1824	1812	1800	1788	1775	1763	1750	1737	1724
14.0	1711	1697	1684	1670	1656	1642	1628	1613	1599	1584
14.1	1570	1555	1539	1524	1509	1493	1478	1462	1446	1430
14.2	1414	1397	1381	1364	1348	1331	1314	1297	1280	1262
14.3	1245	1227	1210	1192	1174	1156	1138	1120	1102	1083
14.4	1065	1046	1028	1009	0990	0971	0952	0933	0914	0895
14.5	0875	0856	0837	0817	0798	0778	0758	0738	0719	0699
14.6	0679	0659	0639	0618	0598	0578	0558	0538	0517	0497
14.7	0476	0456	0436	0415	0394	0374	0353	0333	0312	0291
14.8	0271	0250	0229	0209	0188	0167	0147	0126	0105	0085
14.9	+0064	0043	0023	+0002	−0019	−0039	−0060	−0081	−0101	−0122

贝塞耳函数表

$J_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	+0.00000	00500	01000	01500	02000	02499	02999	03498	03997	04495
0.1	0.04994	05492	05989	06486	06983	07479	07974	08469	08964	09457
0.2	0.09950	10442	1093	1142	1191	1240	1289	1338	1386	1435
0.3	0.1483	1531	1580	1628	1676	1723	1771	1819	1866	1913
0.4	1960	2007	2054	2101	2147	2194	2240	2286	2332	2377
0.5	2423	2468	2513	2558	2603	2647	2692	2736	2780	2823
0.6	2867	2910	2953	2996	3039	3081	3124	3166	3207	3249
0.7	3290	3331	3372	3412	3452	3492	3532	3572	3611	3650
0.8	3688	3727	3765	3803	3840	3878	3915	3951	3988	4024
0.9	4059	4095	4130	4165	4200	4234	4268	4302	4335	4368
1.0	4401	4433	4465	4497	4528	4559	4590	4620	4650	4680
1.1	4709	4738	4767	4795	4823	4850	4878	4904	4931	4957
1.2	4983	5008	5033	5058	5082	5106	5130	5153	5176	5198
1.3	5220	5242	5263	5284	5305	5325	5344	5364	5383	5401
1.4	5419	5437	5455	5472	5488	5504	5520	5536	5551	5565
1.5	5579	5593	5607	5620	5632	5644	5656	5667	5678	5689
1.6	5699	5709	5718	5727	5735	5743	5751	5758	5765	5772
1.7	5778	5783	5788	5793	5798	5802	5805	5808	5811	5813
1.8	5815	5817	5818	5818	5819	5818	5818	5817	5816	5814
1.9	5812	5809	5806	5803	5799	5794	5790	5785	5779	5773
2.0	5767	5761	5754	5746	5738	5730	5721	5712	5703	5693
2.1	5683	5672	5661	5650	5638	5626	5614	5601	5587	5574
2.2	5560	5545	5530	5515	5500	5484	5468	5451	5434	5416
2.3	5399	5381	5362	5343	5324	5305	5285	5265	5244	5223
2.4	5202	5180	5158	5136	5113	5091	5067	5044	5020	4996
2.5	4971	4946	4921	4895	4870	4843	4817	4790	4763	4736
2.6	4708	4680	4652	4624	4595	4566	4536	4507	4477	4446
2.7	4416	4385	4354	4323	4291	4260	4228	4195	4163	4130
2.8	4097	4064	4030	3997	3963	3928	3894	3859	3825	3790
2.9	3754	3719	3683	3647	3611	3575	3538	3502	3465	3428
3.0	3391	3353	3316	3278	3240	3202	3164	3125	3087	3048
3.1	3009	2970	2931	2892	2852	2813	2773	2733	2694	2654
3.2	2613	2573	2533	2492	2452	2411	2370	2330	2289	2248
3.3	2207	2165	2124	2083	2042	2000	1959	1917	1876	1834
3.4	1792	1751	1709	1667	1625	1583	1541	1500	1458	1416

$J_1(x)$的零点 $x=1$, 3.8317, 7.0156, 10.1735, 13.3237, 16.4706, 19.6159, 22.7601, 25.9037.

十四乙

贝塞耳函数表

$J_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	+0.1374	1332	1290	1248	1206	1164	1122	1080	1038	0996
3.6	0955	0913	0871	0829	07876	0746	0704	0663	0621	0580
3.7	0538	0497	0456	04145	0373	0332	0291	0250	0210	0169
3.8	+0128	0088	0047	00069	*0033	*0074	*0114	*0153	*0193	*0233
3.9	−0272	0312	0351	0390	0429	0468	0507	0546	0584	0622
4.0	−0660	0698	0736	0774	0811	0849	0886	0923	0960	0996
4.1	−1033	1069	1105	1141	1177	1212	1247	1282	1317	1352
4.2	−1386	1421	1455	1489	1522	1556	1589	1622	1654	1687
4.3	−1719	1751	1783	1814	1845	1876	1907	1938	1968	1998
4.4	−2028	2057	2086	2115	2144	2173	2201	2229	2256	2284
4.5	−2311	2337	2364	2390	2416	2442	2467	2492	2517	2541
4.6	−2566	2589	2613	2636	2659	2682	2704	2726	2748	2770
4.7	−2791	2812	2832	2852	2872	2892	2911	2930	2949	2967
4.8	−2985	3003	3020	3037	3054	3070	3086	3102	3117	3132
4.9	−3147	3161	3175	3189	3202	3216	3228	3241	3253	3264
5.0	−3276	3287	3298	3308	3318	3328	3337	3346	3355	3363
5.1	−3371	3379	3386	3393	3400	3406	3412	3417	3423	3428
5.2	−3432	3436	3440	3414	3417	3450	3453	3455	3457	3458
5.3	−3460	3460	3461	3461	3461	3461	3460	3459	3457	3456
5.4	−3453	3451	3448	3445	3442	3438	3434	3430	3425	3420
5.5	−3414	3409	3403	3396	3390	3383	3376	3368	3360	3352
5.6	−3343	3335	3325	3316	3306	3296	3286	3275	3264	3253
5.7	−3241	3230	3218	3205	3192	3179	3166	3153	3139	3125
5.8	−3110	3096	3081	3065	3050	3034	3018	3002	2985	2969
5.9	−2951	2934	2917	2899	2881	2862	2844	2825	2806	2786
6.0	−2767	2747	2727	2707	2686	2666	2645	2623	2502	2580
6.1	−2559	2537	2514	2492	2469	2446	2423	2400	2377	2353
6.2	−2329	2305	2281	2257	2232	2207	2182	2157	2132	2106
6.3	−2081	2055	2029	2003	1977	1950	1924	1897	1870	1843
6.4	−1816	1789	1762	1734	1707	1679	1651	1623	1595	1567
6.5	−1538	1510	1481	1453	1424	1395	1366	1337	1308	1279
6.6	−1250	1220	1191	1162	1132	1102	1073	1043	1013	0983
6.7	−0953	0923	0893	0863	0833	0803	0773	0743	0713	0682
6.8	−0652	0622	0592	0561	0531	0501	0470	0440	0410	0379
6.9	−0349	0319	0288	0258	0228	0198	0167	0137	0107	0077
7.0	−0047	0017	*0013	*0043	*0073	*0103	*0133	*0163	*0192	*0222
7.1	+0251	0282	0310	0340	0369	0398	0428	0457	0486	0514
7.2	0543	0572	0601	0629	0658	0686	0714	0742	0770	0798
7.3	0826	0853	0881	0908	0935	0963	0990	1016	1043	1070
7.4	1096	1123	1149	1175	1201	1226	1252	1277	1302	1328

贝塞耳函数表

$J_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.5	+0.1352	1377	1402	1426	1450	1475	1498	1522	1546	1569
7.6	1592	1615	1638	1660	1683	1705	1727	1749	1771	1792
7.7	1813	1834	1855	1875	1896	1916	1936	1956	1975	1994
7.8	2014	2032	2051	2069	2088	2106	2123	2141	2158	2175
7.9	2192	2208	2225	2241	2257	2272	2287	2303	2317	2332
8.0	2346	2360	2374	2388	2401	2414	2427	2440	2452	2464
8.1	2476	2488	2499	2510	2521	2531	2542	2552	2561	2571
8.2	2580	2589	2598	2606	2614	2622	2630	2637	2644	2651
8.3	2657	2664	2670	2675	2681	2686	2691	2696	2700	2704
8.4	2708	2711	2715	2718	2720	2723	2725	2727	2729	2730
8.5	2731	2732	2733	2733	2733	2733	2732	2731	2730	2729
8.6	2728	2726	2724	2721	2719	2716	2713	2709	2705	2701
8.7	2697	2693	2688	2683	2678	2672	2666	2660	2654	2648
8.8	2641	2634	2626	2619	2611	2603	2595	2586	2577	2568
8.9	2559	2550	2540	2530	2519	2509	2498	2487	2476	2465
9.0	2453	2441	2429	2417	2404	2391	2378	2365	2352	2338
9.1	2324	2310	2296	2281	2267	2252	2237	2221	2206	2190
9.2	2174	2158	2142	2125	2108	2091	2074	2057	2040	2022
9.3	2004	1986	1968	1950	1931	1912	1893	1874	1855	1836
9.4	1816	1797	1777	1757	1737	1716	1696	1675	1655	1634
9.5	1613	1591	1570	1549	1527	1506	1484	1462	1440	1418
9.6	1395	1373	1350	1328	1305	1282	1259	1236	1213	1190
9.7	1166	1143	1119	1096	1072	1048	1025	10006	0977	0953
9.8	0928	0904	0880	0856	0831	0807	0782	0758	0733	0708
9.9	0681	0659	0634	0609	0585	0560	0535	0510	0485	0460
10.0	0435	0410	0385	0360	0334	0309	0284	0259	0234	0209
10.1	+0184	0159	0134	0109	0084	0059	0034	0009	*0016	*0041
10.2	−0065	0091	0116	0141	0165	0190	0215	0240	0264	0289
10.3	−0313	0338	0362	0386	0411	0435	0459	0483	0507	0531
10.4	−0555	0578	0602	0626	0649	0673	0696	0719	0742	0766
10.5	−0789	0811	0834	0857	0879	0902	0924	0946	0968	0990
10.6	−1012	1034	1056	1077	1099	1120	1141	1162	1183	1203
10.7	−1224	1244	1265	1285	1305	1325	1344	1364	1383	1403
10.8	−1422	1441	1459	1478	1496	1515	1533	1551	1568	1586
10.9	−1603	1621	1638	1655	1671	1688	1704	1720	1736	1752
11.0	−1768	1783	1798	1814	1828	1843	1857	1872	1886	1900
11.1	−1913	1927	1940	1953	1966	1979	1991	2003	2015	2027
11.2	−2039	2050	2061	2072	2083	2093	2104	2114	2123	2133
11.3	−2143	2152	2161	2169	2178	2186	2194	2202	2210	2217
11.4	−2225	2231	2238	2245	2251	2257	2263	2268	2274	2279

$J_1(x)$

贝塞耳函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
11.5	−0.2284	2288	2293	2297	2301	2305	2308	2312	2315	2317
11.6	−2320	2322	2324	2326	2328	2329	2331	2332	2332	2333
11.7	−2333	2333	2333	2332	2332	2331	2330	2328	2327	2325
11.8	−2323	2321	2318	2315	2312	2309	2306	2302	2298	2294
11.9	−2290	2285	2281	2276	2270	2265	2259	2253	2247	2241
12.0	−2234	2228	2221	2214	2206	2199	2191	2183	2175	2166
12.1	−2157	2149	2140	2130	2121	2111	2101	2091	2081	2070
12.2	−2060	2049	2038	2027	2015	2004	1992	1980	1968	1955
12.3	−1943	1930	1917	1904	1891	1877	1863	1850	1836	1821
12.4	−1807	1793	1778	1763	1748	1733	1718	1702	1687	1671
12.5	−1655	1639	1623	1606	1590	1573	1556	1539	1522	1505
12.6	−1487	1470	1452	1435	1417	1399	1380	1362	1344	1325
12.7	−1307	1288	1269	1250	1231	1212	1192	1173	1154	1134
12.8	−1114	1095	1075	1055	1035	1014	0994	0974	0954	0933
12.9	−0912	0892	0871	0850	0830	0809	0788	0767	0746	0724
13.0	−0703	0682	0661	0639	0618	0596	0575	0553	0532	0510
13.1	−0489	0467	0445	0423	0402	0380	0358	0336	0314	0293
13.2	−0271	0249	0227	0205	0183	0161	0139	0117	0096	0074
13.3	−0052	0030	0008	*0014	*0036	*0057	*0079	*0101	*0123	*0144
13.4	+0166	0188	0209	0231	0252	0274	0295	0317	0338	0359
13.5	0380	0402	0423	0444	0465	0486	0507	0528	0548	0569
13.6	0590	0610	0631	0651	0671	0692	0712	0732	0752	0772
13.7	0791	0811	0831	0850	0870	0889	0908	0927	0946	0965
13.8	0984	1003	1021	1040	1058	1076	1094	1112	1130	1148
13.9	1165	1183	1200	1217	1234	1251	1268	1285	1301	1318
14.0	1334	1350	1366	1382	1397	1413	1428	1443	1458	1473
14.1	1488	1502	1517	1531	1545	1559	1573	1586	1600	1613
14.2	1626	1639	1652	1664	1677	1689	1701	1713	1724	1736
14.3	1747	1758	1769	1780	1791	1801	1811	1821	1831	1841
14.4	1850	1860	1869	1878	1886	1895	1903	1911	1919	1927
14.5	1934	1942	1949	1956	1962	1969	1975	1981	1987	1993
14.6	1999	2004	2009	2014	2019	2023	2027	2031	2035	2039
14.7	2043	2046	2049	2052	2054	2057	2059	2061	2063	2065
14.8	2066	2067	2068	2069	2070	2070	2070	2070	2070	2069
14.9	+2069	2068	2067	2066	2064	2062	2061	2058	2056	2054

$N_0(x)$

贝塞耳函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	$-\infty$	3.005	2.564	2.305	2.122	1.979	1.863	1.764	1.678	1.602
0.1	−1.534	1.473	1.416	1.364	1.316	1.271	1.228	1.189	1.151	1.115
0.2	−1.081	1.049	1.0175	0.9877	0.9591	0.9316	0.9050	0.8794	0.8546	0.8306
0.3	−0.8073	7847	7627	7414	7206	7003	6806	6613	6424	6240
0.4	−6060	5884	5712	5542	5377	5214	5055	4898	4745	4594
0.5	−4445	4299	4156	4015	3876	3739	3604	3472	3341	3212
0.6	−3085	2960	2837	2715	2595	2476	2359	2244	2130	2018
0.7	−1907	1797	1689	1582	1476	1372	1269	1167	1066	0966
0.8	−0868	0771	0675	0580	0486	0393	0301	0210	0120	0032
0.9	+0056	0143	0229	0314	0398	0481	0563	0644	0725	0804
1.0	0883	0960	1037	1113	1188	1262	1336	1409	1480	1551
1.1	1622	1691	1760	1828	1895	1961	2026	2091	2155	2218
1.2	2281	2343	2404	2464	2523	2582	2640	2698	2754	2810
1.3	2865	2920	2974	3027	3079	3131	3182	3232	3282	3331
1.4	3379	3427	3473	3520	3565	3610	3654	3698	3741	3783
1.5	3824	3865	3906	3945	3984	4022	4060	4097	4133	4169
1.6	4204	4239	4273	4306	4338	4370	4401	4432	4462	4491
1.7	4520	4548	4576	4603	4629	4655	4680	4705	4728	4752
1.8	4774	4796	4818	4839	4859	4879	4898	4916	4934	4951
1.9	4968	4984	5000	5015	5029	5043	5056	5069	5081	5093
2.0	5104	5114	5124	5133	5142	5150	5158	5165	5172	5177
2.1	5183	5188	5192	5196	5199	5202	5204	5206	5207	5208
2.2	5208	5207	5207	5205	5203	5201	5198	5194	5190	5186
2.3	5181	5175	5169	5163	5156	5148	5141	5132	5123	5114
2.4	5104	5094	5083	5072	5060	5048	5036	5022	5009	4995
2.5	4981	4966	4951	4935	4919	4902	4885	4868	4850	4832
2.6	4813	4794	4775	4755	4735	4714	4693	4672	4650	4628
2.7	4605	4582	4559	4535	4511	4487	4462	4437	4411	4385
2.8	4359	4333	4306	4279	4251	4223	4195	4167	4138	4109
2.9	4079	4049	4019	3989	3958	3927	3896	3865	3833	3801
3.0	3769	3736	3703	3670	3637	3603	3569	3535	3500	3466
3.1	3431	3396	3361	3325	3289	3253	3217	3181	3144	3108
3.2	3071	3033	2996	2958	2921	2883	2845	2807	2768	2730
3.3	2691	2652	2613	2574	2535	2495	2456	2416	2376	2336
3.4	2296	2256	2216	2175	2135	2094	2054	2013	1972	1931

$N_0(x)$的零点x = 0.8936, 3.9577, 7.0861, 10.2223, 13.3611, 16.5009, 19.6413, 22.7820.

贝塞耳函数表

$N_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	+0.1890	1849	1808	1767	1726	1684	1643	1602	1560	1519
3.6	1477	1436	1394	1352	1311	1269	1227	1186	1144	1102
3.7	1061	1019	0977	0936	0894	0853	0811	0769	0728	0686
3.8	0645	0604	0562	0521	0480	0439	0397	0356	0315	0275
3.9	+0234	0193	0152	0112	0071	0031	*0009	*0050	*0090	*0130
4.0	−0169	0209	0249	0288	0328	0367	0406	0445	0484	0522
4.1	−0561	0599	0638	0676	0714	0751	0789	0826	0864	0901
4.2	−0938	0974	1011	1047	1083	1119	1155	1191	1226	1261
4.3	−1296	1331	1365	1400	1434	1467	1501	1535	1568	1601
4.4	−1633	1666	1698	1730	1762	1793	1825	1856	1886	1917
4.5	−1947	1977	2007	2036	2065	2094	2123	2151	2179	2207
4.6	−2235	2262	2289	2315	2342	2368	2394	2419	2444	2469
4.7	−2494	2518	2542	2566	2589	2612	2635	2658	2680	2702
4.8	−2723	2744	2765	2786	2806	2826	2845	2865	2884	2902
4.9	−2921	2939	2956	2973	2990	3007	3023	3039	3055	3070
5.0	−3085	3100	3114	3128	3142	3155	3168	3180	3193	3204
5.1	−3216	3227	3238	3249	3259	3269	3278	3287	3296	3304
5.2	−3313	3320	3328	3335	3341	3348	3354	3359	3365	3370
5.3	−3374	3379	3383	3386	3389	3392	3395	3397	3399	3400
5.4	−3402	3403	3403	3403	3403	3402	3402	3400	3399	3397
5.5	−3395	3392	3389	3386	3383	3379	3375	3370	3365	3360
5.6	−3354	3349	3342	3336	3329	3322	3315	3307	3299	3290
5.7	−3282	3273	3263	3254	3244	3233	3223	3212	3201	3189
5.8	−3177	3165	3153	3140	3127	3114	3101	3087	3073	3058
5.9	−3044	3029	3013	2998	2982	2966	2950	2933	2916	2899
6.0	−2882	2864	2846	2828	2810	2791	2772	2753	2734	2714
6.1	−2694	2674	2654	2633	2613	2592	2570	2549	2527	2505
6.2	−2483	2461	2438	2415	2393	2369	2346	2322	2299	2275
6.3	−2251	2226	2202	2177	2152	2127	2102	2077	2051	2025
6.4	−1999	1973	1947	1921	1894	1868	1841	1814	1787	1760
6.5	−1732	1705	1677	1650	1622	1594	1566	1538	1509	1481
6.6	−1452	1424	1395	1366	1337	1308	1279	1250	1221	1191
6.7	−1162	1132	1103	1073	1044	1014	0984	0954	0924	0894
6.8	−0864	0834	0804	0774	0744	0714	0684	0653	0623	0593
6.9	−0563	0532	0502	0472	0441	0411	0381	0350	0320	0290
7.0	−0259	0229	0199	0169	0139	0108	0078	0048	0018	*0012
7.1	+0042	0072	0102	0131	0161	0191	0221	0250	0280	0309
7.2	0339	0368	0397	0426	0455	0484	0513	0542	0571	0599
7.3	0628	0656	0684	0713	0741	0769	0797	0824	0852	0879
7.4	0907	0934	0961	0988	1015	1042	1068	1095	1121	1147

贝塞耳函数表

$N_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.5	+0.1173	1199	1225	1250	1276	1301	1326	1351	1375	1400
7.6	1424	1448	1472	1496	1520	1543	1567	1590	1613	1635
7.7	1658	1680	1702	1724	1746	1768	1789	1810	1831	1852
7.8	1872	1893	1913	1932	1952	1972	1991	2010	2028	2047
7.9	2065	2083	2101	2119	2136	2153	2170	2187	2203	2219
8.0	2235	2251	2266	2282	2296	2311	2326	2340	2354	2367
8.1	2381	2394	2407	2420	2432	2444	2456	2468	2479	2490
8.2	2501	2512	2522	2532	2542	2551	2561	2570	2578	2587
8.3	2595	2603	2611	2618	2625	2632	2639	2645	2651	2657
8.4	2662	2667	2672	2677	2681	2686	2689	2693	2696	2699
8.5	2702	2705	2707	2709	2710	2712	2713	2714	2714	2715
8.6	2715	2714	2714	2713	2712	2711	2709	2707	2705	2703
8.7	2700	2697	2694	2690	2687	2683	2678	2674	2669	2664
8.8	2659	2653	2647	2641	2635	2628	2621	2614	2607	2599
8.9	2592	2583	2575	2566	2558	2549	2539	2530	2520	2510
9.0	2499	2489	2478	2467	2456	2444	2433	2421	2408	2396
9.1	2383	2371	2357	2344	2331	2317	2303	2289	2274	2260
9.2	2245	2230	2215	2199	2184	2168	2152	2136	2119	2103
9.3	2086	2069	2052	2034	2017	1999	1981	1963	1945	1926
9.4	1907	1889	1870	1851	1831	1812	1792	1772	1752	1732
9.5	1712	1692	1671	1650	1630	1609	1588	1566	1545	1523
9.6	1502	1480	1458	1436	1414	1392	1369	1347	1324	1302
9.7	1279	1256	1233	1210	1186	1163	1140	1116	1093	1069
9.8	1045	1021	0998	0974	0949	0925	0901	0877	0853	0828
9.9	0804	0779	0755	0730	0705	0681	0656	0631	0606	0582
10.0	0557	0532	0507	0482	0457	0432	0407	0382	0357	0332
10.1	0307	0281	0256	0231	0206	0181	0156	0131	0106	0081
10.2	+0056	0031	0006	*0019	*0044	*0069	*0094	*0119	*0143	*0168
10.3	−0193	0218	0242	0267	0291	0316	0340	0365	0389	0413
10.4	−0437	0462	0486	0510	0534	0557	0581	0605	0628	0652
10.5	−0675	0699	0722	0745	0768	0791	0814	0837	0859	0882
10.6	−0904	0926	0949	0971	0993	1015	1036	1058	1079	1101
10.7	−1122	1143	1164	1185	1205	1226	1246	1267	1287	1307
10.8	−1326	1346	1366	1385	1404	1423	1442	1461	1479	1498
10.9	−1516	1534	1552	1569	1587	1604	1622	1639	1655	1672
11.0	−1688	1705	1721	1737	1752	1768	1783	1798	1813	1828
11.1	−1843	1857	1871	1885	1899	1913	1926	1939	1952	1965
11.2	−1977	1990	2002	2014	2025	2037	2048	2059	2070	2081
11.3	−2091	2101	2111	2121	2130	2140	2149	2158	2166	2175
11.4	−2183	2191	2199	2206	2213	2220	2227	2234	2240	2246

贝塞耳函数表

$N_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
11.5	−0.2252	2258	2263	2269	2274	2278	2283	2287	2291	2295
11.6	−2299	2302	2305	2308	2311	2313	2315	2317	2319	2321
11.7	−2322	2323	2324	2324	2325	2325	2324	2324	2324	2323
11.8	−2322	2320	2319	2317	2315	2313	2310	2308	2305	2302
11.9	−2298	2295	2291	2287	2283	2278	2273	2269	2263	2258
12.0	−2252	2247	2241	2234	2228	2221	2214	2207	2200	2192
12.1	−2184	2176	2168	2160	2151	2142	2133	2124	2115	2105
12.2	−2095	2085	2075	2064	2054	2043	2032	2021	2009	1998
12.3	−1986	1974	1962	1949	1937	1924	1911	1898	1885	1871
12.4	−1858	1844	1830	1816	1802	1787	1772	1758	1743	1727
12.5	−1712	1697	1681	1665	1649	1633	1617	1601	1584	1567
12.6	−1551	1534	1517	1499	1482	1464	1447	1429	1411	1393
12.7	−1375	1357	1338	1320	1301	1282	1264	1245	1226	1206
12.8	−1187	1168	1148	1129	1109	1089	1069	1049	1029	1009
12.9	−0989	0968	0948	0927	0907	0886	0866	0845	0824	0803
13.0	−0782	0761	0740	0719	0698	0676	0655	0634	0612	0591
13.1	−0569	0548	0526	0505	0483	0461	0439	0418	0396	0374
13.2	−0352	0331	0309	0287	0265	0243	0221	0199	0177	0156
13.3	−0134	0112	0090	0068	0046	0024	0002	*0019	*0041	*0063
13.4	+0085	0107	0128	0150	0172	0193	0215	0236	0258	0279
13.5	0301	0322	0343	0365	0386	0407	0428	0449	0470	0491
13.6	0512	0533	0554	0574	0595	0615	0636	0656	0677	0697
13.7	0717	0737	0757	0777	0796	0816	0836	0855	0875	0894
13.8	0913	0932	0951	0970	0989	1007	1026	1044	1062	1081
13.9	1099	1117	1134	1152	1169	1187	1204	1221	1238	1255
14.0	1272	1289	1305	1321	1337	1353	1369	1385	1401	1416
14.1	1431	1446	1461	1476	1491	1505	1520	1534	1548	1562
14.2	1575	1589	1602	1615	1628	1641	1654	1666	1679	1691
14.3	1703	1715	1726	1738	1749	1760	1771	1781	1792	1802
14.4	1812	1822	1832	1842	1851	1860	1869	1878	1886	1895
14.5	1903	1911	1919	1926	1934	1941	1948	1955	1962	1968
14.6	1974	1980	1986	1992	1997	2002	2007	2012	2017	2021
14.7	2025	2029	2033	2036	2040	2043	2046	2049	2051	2054
14.8	2056	2058	2059	2061	2062	2063	2064	2065	2065	2065
14.9	+2065	2065	2065	2064	2064	2063	2061	2060	2058	2057

$N_1(x)$

贝塞耳函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	$-\infty$	63.68	31.86	21.26	15.96	12.79	10.68	9.167	8.038	7.160
0.1	−6.459	5.886	5.409	5.007	4.662	4.364	4.103	3.873	3.670	3.487
0.2	−3.324	3.176	3.042	2.919	2.807	2.704	2.609	2.521	2.440	2.364
0.3	−2.293	2.227	2.165	2.107	2.052	2.000	1.952	1.906	1.862	1.820
0.4	−1.781	1.743	1.708	1.673	1.641	1.610	1.580	1.551	1.523	1.497
0.5	−1.471	1.447	1.423	1.401	1.378	1.357	1.337	1.317	1.297	1.279
0.6	−1.260	1.243	1.226	1.209	1.193	1.177	1.161	1.146	1.132	1.117
0.7	−1.103	1.090	1.076	1.063	1.050	1.038	1.025	1.013	1.0013	*9896
0.8	−0.9731	9669	9558	9449	9342	9236	9132	9030	8929	8829
0.9	−8731	8634	8539	8444	8351	8258	8167	8077	7988	7900
1.0	−7812	7726	7640	7555	7471	7388	7305	7223	7142	7061
1.1	−6981	6902	6823	6745	6667	6590	6513	6437	6361	6286
1.2	−6211	6137	6063	5990	5916	5844	5771	5699	5628	5556
1.3	−5485	5415	5344	5274	5204	5135	5066	4997	4928	4860
1.4	−4791	4724	4656	4589	4521	4454	4388	4321	4255	4189
1.5	−4123	4057	3992	3927	3862	3797	3732	3668	3604	3540
1.6	−3476	3412	3349	3285	3222	3159	3096	3034	2972	2909
1.7	−2847	2785	2724	2662	2601	2540	2479	2418	2357	2297
1.8	−2237	2177	2117	2057	1997	1938	1879	1820	1761	1702
1.9	−1644	1586	1528	1470	1412	1355	1297	1240	1184	1127
2.0	−1070	1014	0958	0902	0846	0791	0736	0681	0626	0571
2.1	−0517	0463	0409	0355	0301	0248	0195	0142	0090	0037
2.2	+0015	0067	0118	0170	0221	0272	0323	0373	0423	0473
2.3	0523	0572	0621	0670	0719	0767	0815	0863	0911	0958
2.4	1005	1052	1098	1144	1190	1236	1281	1326	1371	1415
2.5	1459	1503	1547	1590	1633	1675	1718	1760	1801	1843
2.6	1884	1924	1965	2005	2045	2084	2123	2162	2200	2239
2.7	2276	2314	2351	2388	2424	2460	2496	2531	2566	2601
2.8	2635	2669	2703	2736	2769	2802	2834	2866	2897	2929
2.9	2959	2990	3020	3050	3079	3108	3136	3164	3192	3220
3.0	3247	3273	3300	3326	3351	3376	3401	3425	3449	3473
3.1	3496	3519	3542	3564	3585	3607	3627	3648	3668	3688
3.2	3707	3726	3745	3763	3780	3798	3815	3831	3847	3863
3.3	3879	3893	3908	3922	3936	3949	3962	3975	3987	3999
3.4	4010	4021	4032	4042	4052	4061	4070	4079	4087	4095

$N_1(x)$的零点$x=$ 2.1971, 5.4297, 8.5960, 11.7492, 14.8974, 18.0434, 21.1881, 24.3319.

贝塞耳函数表

$N_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	+0.4102	4109	4115	4122	4127	4133	4138	4142	4147	4150
3.6	4154	4157	4160	4162	4164	4165	4166	4167	4167	4167
3.7	4167	4166	4165	4163	4161	4159	4156	4153	4149	4145
3.8	4141	4137	4132	4126	4120	4114	4108	4101	4094	4086
3.9	4078	4070	4061	4052	4043	4033	4023	4013	4002	3991
4.0	3979	3967	3955	3943	3930	3917	3903	3889	3875	3861
4.1	3846	3831	3815	3800	3783	3767	3750	3733	3716	3698
4.2	3680	3662	3643	3624	3605	3586	3566	3546	3525	3505
4.3	3484	3463	3441	3420	3397	3375	3353	3330	3307	3283
4.4	3260	3236	3212	3187	3163	3138	3113	3087	3062	3036
4.5	3010	2984	2957	2930	2904	2876	2849	2821	2794	2766
4.6	2737	2709	2680	2652	2623	2594	2564	2535	2505	2475
4.7	2445	2415	2384	2354	2323	2292	2261	2230	2199	2167
4.8	2136	2104	2072	2040	2008	1976	1943	1911	1878	1845
4.9	1812	1780	1746	1713	1680	1642	1613	1580	1546	1512
5.0	1479	1445	1411	1377	1343	1309	1275	1240	1206	1172
5.1	1137	1103	1069	1034	1000	0965	0930	0896	0861	0827
5.2	0792	0757	0723	0688	0653	0619	0584	0549	0515	0480
5.3	0445	0411	0376	0342	0307	0273	0238	0204	0170	0136
5.4	+0101	0067	0033	*0001	*0035	*0069	*0103	*0137	*0170	*0204
5.5	−0238	0271	0304	0338	0371	0404	0437	0470	0503	0535
5.6	−0568	0601	0633	0665	0697	0729	0761	0793	0824	0856
5.7	−0887	0918	0949	0980	1011	1042	1072	1102	1133	1163
5.8	−1192	1222	1251	1281	1310	1339	1368	1396	1425	1453
5.9	−1481	1509	1536	1564	1591	1618	1645	1671	1698	1724
6.0	−1750	1776	1801	1827	1852	1877	1902	1926	1950	1974
6.1	−1998	2022	2045	2068	2091	2114	2136	2158	2180	2201
6.2	−2223	2244	2265	2285	2306	2325	2346	2365	2385	2404
6.3	−2422	2441	2459	2477	2495	2512	2530	2547	2563	2580
6.4	−2596	2611	2627	2642	2657	2672	2686	2700	2714	2728
6.5	−2741	2754	2767	2779	2791	2803	2814	2826	2836	2847
6.6	−2857	2868	2877	2887	2896	2905	2913	2922	2930	2937
6.7	−2945	2952	2958	2965	2971	2977	2983	2988	2993	2997
6.8	−3002	3006	3010	3013	3016	3019	3022	3024	3026	3028
6.9	−3029	3030	3031	3032	3032	3032	3031	3031	3030	3028
7.0	−3027	3025	3023	3020	3017	3014	3011	3007	3003	2999
7.1	−2995	2990	2985	2980	2974	2968	2962	2955	2949	2942
7.2	−2934	2927	2919	2911	2902	2893	2885	2875	2866	2856
7.3	−2846	2836	2825	2814	2803	2792	2780	2768	2756	2744
7.4	−2731	2718	2705	2692	2678	2664	2650	2636	2621	2606

贝塞耳函数表

$N_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.5	−0.2591	2576	2560	2545	2529	2512	2496	2479	2462	2445
7.6	−2428	2410	2393	2375	2357	2338	2320	2301	2282	2263
7.7	−2243	2224	2204	2184	2164	2143	2123	2102	2081	2060
7.8	−2039	2017	1996	1974	1952	1930	1908	1885	1863	1840
7.9	−1817	1794	1771	1748	1724	1701	1677	1653	1629	1605
8.0	−1581	1556	1532	1507	1482	1457	1432	1407	1382	1357
8.1	−1331	1306	1280	1255	1229	1203	1177	1151	1125	1099
8.2	−1072	1046	1020	0993	0967	0940	0913	0887	0860	0833
8.3	−0806	0779	0752	0725	0698	0671	0644	0617	0589	0562
8.4	−0535	0508	0480	0453	0426	0398	0371	0344	0316	0289
8.5	−0262	0234	0207	0180	0152	0125	0098	0071	0043	0016
8.6	+0011	0038	0065	0092	0119	0146	0173	0200	0227	0253
8.7	0280	0307	0333	0360	0386	0413	0439	0465	0491	0518
8.8	0544	0569	0595	0621	0647	0672	0698	0723	0748	0774
8.9	0799	0824	0849	0873	0898	0922	0947	0971	0995	1019
9.0	1043	1067	1091	1114	1137	1161	1184	1207	1229	1252
9.1	1275	1297	1319	1341	1363	1385	1406	1428	1449	1470
9.2	1491	1512	1532	1553	1573	1593	1613	1633	1652	1671
9.3	1691	1710	1728	1747	1765	1783	1801	1819	1837	1854
9.4	1871	1888	1905	1922	1938	1954	1970	1986	2001	2017
9.5	2032	2047	2061	2076	2090	2104	2118	2131	2145	2158
9.6	2171	2183	2196	2208	2220	2232	2243	2254	2265	2276
9.7	2287	2297	2307	2317	2326	2336	2345	2354	2362	2371
9.8	2379	2387	2394	2402	2409	2416	2423	2429	2435	2441
9.9	2447	2452	2458	2463	2467	2472	2476	2480	2484	2487
10.0	2490	2493	2496	2498	2500	2502	2504	2506	2507	2508
10.1	2508	2509	2509	2509	2509	2508	2507	2506	2505	2504
10.2	2502	2500	2498	2495	2492	2489	2486	2483	2479	2475
10.3	2471	2466	2462	2457	2451	2446	2440	2435	2428	2422
10.4	2416	2409	2402	2394	2387	2379	2371	2363	2355	2346
10.5	2337	2328	2319	2309	2299	2289	2279	2269	2258	2247
10.6	2236	2225	2214	2202	2190	2178	2166	2153	2140	2128
10.7	2114	2101	2088	2074	2060	2046	2032	2017	2003	1988
10.8	1973	1958	1942	1927	1911	1895	1879	1863	1846	1830
10.9	1813	1796	1779	1762	1745	1727	1709	1692	1674	1655
11.0	1637	1619	1600	1581	1562	1543	1524	1505	1486	1466
11.1	1446	1427	1407	1387	1366	1346	1326	1305	1285	1264
11.2	1243	1222	1201	1180	1159	1137	1116	1095	1073	1051
11.3	1029	1008	0986	0964	0941	0919	0897	0875	0852	0830
11.4	0807	0785	0762	0740	0717	0694	0671	0648	0625	0602

贝塞耳函数表

$N_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
11.5	+0.0579	0556	0533	0510	0487	0464	0441	0417	0394	0371
11.6	0348	0324	0301	0278	0254	0231	0208	0184	0161	0138
11.7	0114	0091	0068	0045	0021	*0002	*0025	*0048	*0072	*0095
11.8	−0118	0141	0164	0187	0210	0233	0256	0279	0302	0324
11.9	−0347	0370	0392	0415	0437	0460	0482	0505	0527	0549
12.0	−0571	0593	0615	0637	0659	0681	0702	0723	0745	0766
12.1	−0787	0809	0830	0851	0871	0892	0913	0933	0954	0974
12.2	−0994	1014	1034	1054	1074	1093	1113	1132	1151	1171
12.3	−1189	1208	1227	1246	1264	1282	1300	1318	1336	1354
12.4	−1371	1389	1406	1423	1440	1457	1474	1490	1506	1522
12.5	−1538	1554	1570	1585	1601	1616	1631	1645	1660	1675
12.6	−1689	1703	1717	1730	1744	1757	1771	1783	1796	1809
12.7	−1821	1834	1846	1857	1869	1880	1892	1903	1914	1924
12.8	−1935	1945	1955	1965	1975	1984	1993	2002	2011	2020
12.9	−2028	2036	2044	2052	2060	2067	2074	2081	2088	2095
13.0	−2101	2107	2113	2118	2124	2129	2134	2139	2144	2148
13.1	−2152	2156	2160	2163	2167	2170	2172	2175	2178	2180
13.2	−2182	2183	2185	2186	2187	2188	2189	2189	2190	2190
13.3	−2190	2189	2188	2188	2187	2185	2184	2182	2180	2178
13.4	−2176	2173	2170	2167	2164	2161	2157	2153	2149	2145
13.5	−2140	2136	2131	2126	2120	2115	2109	2103	2097	2090
13.6	−2084	2077	2070	2063	2056	2048	2040	2032	2024	2016
13.7	−2007	1999	1990	1981	1971	1962	1952	1942	1932	1922
13.8	−1912	1901	1890	1879	1868	1857	1845	1834	1822	1810
13.9	−1798	1785	1773	1760	1747	1734	1721	1707	1694	1680
14.0	−1666	1652	1638	1624	1610	1595	1580	1565	1550	1535
14.1	−1520	1504	1489	1473	1457	1441	1425	1409	1392	1376
14.2	−1359	1342	1325	1308	1291	1274	1257	1239	1222	1204
14.3	−1186	1168	1150	1132	1114	1096	1077	1059	1040	1021
14.4	−1003	0984	0965	0946	0927	0907	0888	0869	0849	0830
14.5	−0810	0791	0771	0751	0732	0712	0692	0672	0652	0632
14.6	−0612	0591	0571	0551	0531	0510	0490	0469	0449	0428
14.7	−0408	0387	0367	0346	0326	0305	0284	0264	0243	0222
14.8	−0202	0181	0160	0140	0119	0098	0077	0057	0036	0015
14.9	+0005	0026	0047	0067	0088	0108	0129	0149	0170	0190

贝塞耳函数表

$I_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.001	1.001	1.001	1.002	1.002
0.1	1.003	1.003	1.004	1.004	1.005	1.006	1.006	1.007	1.008	1.009
0.2	1.010	1.011	1.012	1.013	1.014	1.016	1.017	1.018	1.020	1.021
0.3	1.023	1.024	1.026	1.027	1.029	1.031	1.033	1.035	1.036	1.038
0.4	1.040	1.042	1.045	1.047	1.049	1.051	1.054	1.056	1.058	1.061
0.5	1.063	1.066	1.069	1.071	1.074	1.077	1.080	1.083	1.086	1.089
0.6	1.092	1.095	1.098	1.102	1.105	1.108	1.112	1.115	1.119	1.123
0.7	1.126	1.130	1.134	1.138	1.142	1.146	1.150	1.154	1.158	1.162
0.8	1.167	1.171	1.175	1.180	1.184	1.189	1.194	1.198	1.203	1.208
0.9	1.213	1.218	1.223	1.228	1.233	1.239	1.244	1.249	1.255	1.260
1.0	1.266	1.272	1.278	1.283	1.289	1.295	1.301	1.307	1.314	1.320
1.1	1.326	1.333	1.339	1.346	1.352	1.359	1.366	1.373	1.380	1.387
1.2	1.394	1.401	1.408	1.416	1.423	1.430	1.438	1.446	1.454	1.461
1.3	1.469	1.477	1.485	1.494	1.502	1.510	1.519	1.527	1.536	1.545
1.4	1.553	1.562	1.571	1.580	1.590	1.599	1.608	1.618	1.627	1.637
1.5	1.647	1.657	1.667	1.677	1.687	1.697	1.707	1.718	1.728	1.739
1.6	1.750	1.761	1.772	1.783	1.794	1.806	1.817	1.829	1.840	1.852
1.7	1.864	1.876	1.888	1.900	1.913	1.925	1.938	1.951	1.963	1.976
1.8	1.990	2.003	2.016	2.030	2.043	2.057	2.071	2.085	2.099	2.113
1.9	2.128	2.142	2.157	2.172	2.187	2.202	2.217	2.233	2.248	2.264
2.0	2.280	2.296	2.312	2.328	2.344	2.361	2.378	2.395	2.412	2.429
2.1	2.446	2.464	2.482	2.499	2.517	2.536	2.554	2.573	2.591	2.610
2.2	2.629	2.648	2.668	2.687	2.707	2.727	2.747	2.768	2.788	2.809
2.3	2.830	2.851	2.872	2.893	2.915	2.937	2.959	2.981	3.004	3.026
2.4	3.049	3.072	3.096	3.119	3.143	3.167	3.191	3.215	3.240	3.265
2.5	3.290	3.315	3.341	3.366	3.392	3.419	3.445	3.472	3.499	3.526
2.6	3.553	3.581	3.609	3.637	3.666	3.694	3.723	3.752	3.782	3.812
2.7	3.842	3.872	3.903	3.933	3.965	3.996	4.028	4.060	4.092	4.124
2.8	4.157	4.190	4.224	4.258	4.292	4.326	4.361	4.396	4.431	4.467
2.9	4.503	4.539	4.576	4.613	4.650	4.688	4.725	4.764	4.802	4.841
3.0	4.881	4.921	4.961	5.001	5.042	5.083	5.125	5.166	5.209	5.251
3.1	5.294	5.338	5.382	5.426	5.471	5.516	5.561	5.607	5.653	5.700
3.2	5.747	5.795	5.843	5.891	5.940	5.989	6.039	6.089	6.140	6.191
3.3	6.243	6.295	6.347	6.400	6.454	6.508	6.562	6.617	6.672	6.728
3.4	6.785	6.842	6.899	6.957	7.016	7.075	7.134	7.195	7.255	7.316

贝塞耳函数表

$I_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	7.378	7.441	7.503	7.567	7.631	7.696	7.761	7.827	7.893	7.960
3.6	8.028	8.096	8.165	8.234	8.304	8.375	8.447	8.519	8.591	8.665
3.7	8.739	8.813	8.889	8.965	9.041	9.119	9.197	9.276	9.356	9.436
3.8	9.517	9.599	9.681	9.764	9.848	9.933	10.02	10.11	10.19	10.28
3.9	10.37	10.46	10.55	10.64	10.73	10.82	10.92	11.01	11.11	11.20
4.0	11.30	11.40	11.50	11.60	11.70	11.80	11.90	12.01	12.11	12.22
4.1	12.32	12.43	12.54	12.65	12.76	12.87	12.98	13.10	13.21	13.33
4.2	13.44	13.56	13.68	13.80	13.92	14.04	14.16	14.29	14.41	14.54
4.3	14.67	14.80	14.93	15.06	15.19	15.32	15.46	15.59	15.73	15.87
4.4	16.01	16.15	16.29	16.44	16.58	16.73	16.88	17.03	17.18	17.33
4.5	17.48	17.64	17.79	17.95	18.11	18.27	18.43	18.59	18.76	18.92
4.6	19.09	19.26	19.43	19.61	19.78	19.96	20.13	20.31	20.49	20.67
4.7	20.86	21.04	21.23	21.42	21.61	21.80	22.00	22.19	22.39	22.59
4.8	22.79	23.00	23.20	23.41	23.62	23.83	24.04	24.26	24.47	24.69
4.9	24.91	25.14	25.36	25.59	25.82	26.05	26.28	26.52	26.76	27.00
5.0	27.24	27.48	27.73	27.98	28.23	28.49	28.74	29.00	29.26	29.52
5.1	29.79	30.06	30.33	30.60	30.88	31.15	31.43	31.72	32.00	32.29
5.2	32.58	32.88	33.17	33.47	33.78	34.08	34.39	34.70	35.01	35.33
5.3	35.65	35.97	36.30	36.62	36.96	37.29	37.63	37.97	38.31	38.66
5.4	39.01	39.36	39.72	40.08	40.44	40.81	41.18	41.55	41.93	42.31
5.5	42.69	43.08	43.47	43.87	44.27	44.67	45.08	45.49	45.90	46.32
5.6	46.74	47.16	47.59	48.03	48.46	48.90	49.35	49.80	50.25	50.71
5.7	51.17	51.64	52.11	52.59	53.06	53.55	54.04	54.53	55.03	55.53
5.8	56.04	56.55	57.07	57.59	58.11	58.65	59.18	59.72	60.27	60.82
5.9	61.38	61.94	62.51	63.08	63.65	64.24	64.83	65.42	66.02	66.62
6.0	67.23	67.85	68.47	69.10	69.73	70.37	71.02	71.67	72.33	72.99
6.1	73.66	74.34	75.02	75.71	76.41	77.11	77.82	78.53	79.25	79.98
6.2	80.72	81.46	82.21	82.97	83.73	84.50	85.28	86.06	86.85	87.65
6.3	88.46	89.28	90.10	90.93	91.77	92.61	93.47	94.33	95.20	96.08
6.4	96.96	97.86	98.76	99.67	100.6	101.5	102.5	103.4	104.4	105.3
6.5	106.3	107.3	108.3	109.3	110.3	111.3	112.3	113.4	114.4	115.5
6.6	116.5	117.6	118.7	119.8	120.9	122.0	123.2	124.3	125.5	126.6
6.7	127.8	129.0	130.2	131.4	132.6	133.8	135.1	136.3	137.6	138.8
6.8	140.1	141.4	142.7	144.1	145.4	146.8	148.1	149.5	150.9	152.3
6.9	153.7	155.1	156.6	158.0	159.5	161.0	162.5	164.0	165.5	167.0

贝塞耳函数表

$I_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.0	168.6	170.2	171.7	173.3	175.0	176.6	178.2	179.9	181.6	183.2
7.1	185.0	186.7	188.4	190.2	191.9	193.7	195.5	197.4	199.2	201.0
7.2	202.9	204.8	206.7	208.6	210.6	212.6	214.5	216.5	218.6	220.6
7.3	222.7	224.7	226.8	229.0	231.1	233.2	235.4	237.6	239.8	242.1
7.4	244.3	246.6	248.9	251.3	253.6	256.0	258.4	260.8	263.2	265.7
7.5	268.2	270.7	273.2	275.8	278.3	280.9	283.6	286.2	288.9	291.6
7.6	294.3	297.1	299.9	302.7	305.5	308.4	311.3	314.2	317.1	320.1
7.7	323.1	326.1	329.2	332.3	335.4	338.5	341.7	344.9	348.1	351.4
7.8	354.7	358.0	361.4	364.8	368.2	371.6	375.1	378.6	382.2	385.8
7.9	339.4	393.1	396.8	400.5	404.2	408.0	411.9	415.7	419.6	423.6
8.0	427.6	431.6	435.6	439.7	443.9	443.0	452.2	456.5	460.8	465.1
8.1	469.5	473.9	478.4	482.9	487.4	492.0	496.6	501.3	506.0	510.8
8.2	515.6	520.4	525.3	530.3	535.3	540.3	545.4	550.6	555.7	561.0
8.3	566.3	571.6	577.0	582.4	587.9	593.4	599.0	604.7	610.4	616.1
8.4	621.9	627.8	633.7	639.7	645.7	651.8	658.0	664.2	670.5	676.8
8.5	683.2	689.6	696.1	702.7	709.3	716.0	722.8	729.6	736.5	743.4
8.6	750.5	757.5	764.7	771.9	779.2	786.6	794.0	801.5	809.1	816.7
8.7	824.4	332.2	840.1	848.0	856.1	864.2	872.3	880.6	888.9	897.3
8.8	095.8	914.4	923.0	931.7	940.6	949.5	958.4	967.5	976.7	985.9
8.9	995.2	1005	1014	1024	1033	1043	1053	1063	1073	1083
9.0	1094	1104	1114	1125	1136	1146	1157	1168	1179	1190
9.1	1202	1213	1225	1236	1248	1260	1272	1284	1296	1308
9.2	1321	1333	1346	1359	1371	1384	1398	1411	1424	1438
9.3	1451	1465	1479	1493	1507	1522	1536	1551	1565	1580
9.4	1595	1610	1626	1641	1657	1673	1688	1704	1721	1737
9.5	1753	1770	1787	1804	1821	1838	1856	1874	1891	1909
9.6	1927	1946	1964	1983	2002	2021	2040	2060	2079	2099
9.7	2119	2139	2159	2180	2201	2222	2243	2264	2286	2307
9.8	2329	2352	2374	2397	2419	2442	2466	2489	2513	2537
9.9	2561	2585	2610	2635	2660	2685	2711	2737	2763	2789

贝塞耳函数表

$I_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0050	0100	0150	0200	0250	0300	0350	0400	0450
0.1	0501	0551	0601	0651	0702	0752	0803	0853	0904	0954
0.2	1005	1056	1107	1158	1209	1260	1311	1362	1414	1455
0.3	1517	1569	1621	1673	1725	1777	1829	1882	1935	1987
0.4	2040	2093	2147	2200	2254	2307	2361	2415	2470	2524
0.5	0.2579	2634	2689	2744	2800	2855	2911	2967	3024	3080
0.6	3137	3194	3251	3309	3367	3425	3483	3542	3600	3659
0.7	3719	3778	3838	3899	3959	4020	4081	4142	4204	4266
0.8	4329	4391	4454	4518	4581	4646	4710	4775	4840	4905
0.9	4971	5038	5104	5171	5239	5306	5375	5443	5512	5582
1.0	0.5652	5722	5793	5864	5935	6008	6080	6153	6227	6300
1.1	6375	6450	6525	6601	6677	6754	6832	6910	6988	7067
1.2	7147	7227	7308	7389	7470	7553	7636	7719	7803	7888
1.3	7973	8059	8146	8233	8321	8409	8498	8588	8678	8769
1.4	8861	8953	9046	9140	9235	9330	9426	9522	9620	9718
1.5	0.9817	9916	1.002	1.012	1.022	1.032	1.043	1.053	1.064	1.074
1.6	1.085	1.096	1.106	1.117	1.128	1.139	1.151	1.162	1.173	1.185
1.7	1.196	1.208	1.220	1.232	1.244	1.256	1.268	1.280	1.292	1.305
1.8	1.317	1.330	1.343	1.355	1.368	1.381	1.395	1.408	1.421	1.435
1.9	1.448	1.462	1.476	1.490	1.504	1.518	1.532	1.547	1.561	1.576
2.0	1.591	1.606	1.621	1.636	1.651	1.666	1.682	1.698	1.713	1.729
2.1	1.745	1.762	1.778	1.795	1.811	1.828	1.845	1.862	1.879	1.897
2.2	1.914	1.932	1.950	1.968	1.986	2.004	2.022	2.041	2.060	2.079
2.3	2.098	2.117	2.136	2.156	2.176	2.196	2.216	2.236	2.257	2.277
2.4	2.298	2.319	2.340	2.362	2.383	2.405	2.427	2.449	2.471	2.494
2.5	2.517	2.540	2.563	2.586	2.610	2.633	2.657	2.682	2.706	2.731
2.6	2.755	2.780	2.806	2.831	2.857	2.883	2.909	2.935	2.962	2.989
2.7	3.016	3.043	3.071	3.099	3.127	3.155	3.184	3.213	3.242	3.271
2.8	3.301	3.331	3.361	3.392	3.422	3.453	3.485	3.516	3.548	3.580
2.9	3.613	3.645	3.678	3.712	3.745	3.779	3.813	3.848	3.883	3.918
3.0	3.953	3.989	4.025	4.062	4.098	4.136	4.173	4.211	4.249	4.287
3.1	4.326	4.365	4.405	4.445	4.485	4.526	4.567	4.608	4.650	4.692
3.2	4.734	4.777	4.820	4.864	4.908	4.953	4.997	5.043	5.088	5.134
3.3	5.181	5.228	5.275	5.323	5.371	5.420	5.469	5.519	5.569	5.619
3.4	5.670	5.722	5.773	5.826	5.879	5.932	5.986	6.040	6.095	6.150

贝塞耳函数表

$I_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	6.206	6.262	6.319	6.376	6.434	6.493	6.552	6.611	6.671	6.732
3.6	6.793	6.854	6.917	6.979	7.043	7.107	7.171	7.237	7.302	7.369
3.7	7.436	7.503	7.572	7.640	7.710	7.780	7.851	7.922	7.994	8.067
3.8	8.140	8.215	8.289	8.365	8.441	8.518	8.595	8.674	8.753	8.832
3.9	8.913	8.994	9.076	9.159	9.242	9.326	9.411	9.497	9.584	9.671
4.0	9.759	9.848	9.938	10.03	10.12	10.21	10.31	10.40	10.50	10.59
4.1	10.69	10.79	10.88	10.98	11.08	11.18	11.29	11.39	11.49	11.60
4.2	11.71	11.81	11.92	12.03	12.14	12.25	12.36	12.48	12.59	12.71
4.3	12.82	12.94	13.06	13.18	13.30	13.42	13.54	13.67	13.79	13.92
4.4	14.05	14.17	14.30	14.44	14.57	14.70	14.84	14.97	15.11	15.25
4.5	15.39	15.53	15.67	15.82	15.96	16.11	16.26	16.41	16.56	16.71
4.6	16.86	17.02	17.17	17.33	17.49	17.65	17.81	17.98	18.14	18.31
4.7	18.48	18.65	18.82	18.99	19.17	19.35	19.52	19.70	19.88	20.07
4.8	20.25	20.44	20.63	20.82	21.01	21.20	21.40	21.60	21.80	22.00
4.9	22.20	22.40	22.61	22.82	23.03	23.24	23.46	23.67	23.89	24.11
5.0	24.34	24.56	24.79	25.02	25.25	25.48	25.72	25.95	26.19	26.44
5.1	26.68	26.93	27.18	27.43	27.68	27.94	28.20	28.46	28.72	28.99
5.2	29.25	29.53	29.80	30.07	30.35	30.63	30.92	31.20	31.49	31.79
5.3	32.08	32.38	32.68	32.98	33.29	33.59	33.91	34.22	34.54	34.86
5.4	35.18	35.51	35.84	36.17	36.51	36.85	37.19	37.53	37.88	38.23
5.5	38.59	38.95	39.31	39.67	40.04	40.41	40.79	41.17	41.55	41.94
5.6	42.33	42.72	43.12	43.52	43.93	44.33	44.75	45.16	45.58	46.01
5.7	46.44	46.87	47.30	47.74	48.19	48.64	49.09	49.55	50.01	50.48
5.8	50.95	51.42	51.90	52.38	52.87	53.37	53.86	54.36	54.87	55.38
5.9	55.90	56.42	56.95	57.48	58.02	58.56	59.10	59.66	60.21	60.77
6.0	61.34	61.91	62.49	63.08	63.67	64.26	64.86	65.47	66.08	66.70
6.1	67.32	67.95	68.58	69.22	69.87	70.53	71.18	71.85	72.52	73.20
6.2	73.89	74.58	75.27	75.98	76.69	77.41	78.13	78.86	79.60	80.35
6.3	81.10	81.86	82.63	83.40	84.18	84.97	85.77	86.57	87.38	88.20
6.4	89.03	89.86	90.70	91.55	92.41	93.28	94.15	95.04	95.93	96.83
6.5	97.74	98.65	99.58	100.5	101.5	102.4	103.4	104.3	105.3	106.3
6.6	107.3	108.3	109.3	110.4	111.4	112.4	113.5	114.6	115.6	116.7
6.7	117.8	118.9	120.0	121.2	122.3	123.5	124.6	125.8	127.0	128.2
6.8	129.4	130.6	131.8	133.1	134.3	135.6	136.9	138.1	139.4	140.8
6.9	142.1	143.4	144.8	146.1	147.5	148.9	150.3	151.7	153.1	154.6

贝塞耳函数表

$I_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.0	156.0	157.5	159.0	160.5	162.0	163.5	165.1	166.6	168.2	169.8
7.1	171.4	173.0	174.6	176.3	177.9	179.6	181.3	183.0	184.7	186.5
7.2	188.3	190.0	191.8	193.6	195.5	197.3	199.2	201.0	202.9	204.9
7.3	206.8	208.7	210.7	212.7	214.7	216.7	218.8	220.9	222.9	225.0
7.4	227.2	229.3	231.5	233.7	235.9	238.1	240.4	242.6	244.9	247.2
7.5	249.6	251.9	254.3	256.7	259.2	261.6	264.1	266.6	269.1	271.7
7.6	274.2	276.8	279.4	282.1	284.8	287.4	290.2	292.9	295.7	298.5
7.7	301.3	304.2	307.0	310.0	312.9	315.9	318.8	321.9	324.9	328.0
7.8	331.1	334.2	337.4	340.6	343.8	347.1	350.4	353.7	357.1	360.4
7.9	363.9	367.3	370.8	374.3	377.9	381.4	385.1	388.7	392.4	396.1
8.0	399.9	403.7	407.5	411.4	415.3	419.2	423.2	427.2	431.3	435.4
8.1	439.5	443.7	447.9	452.1	456.4	460.7	465.1	469.5	474.0	478.5
8.2	483.0	487.6	492.3	496.9	501.7	506.4	511.2	516.1	521.0	526.0
8.3	531.0	536.0	541.1	546.2	551.4	556.7	562.0	567.3	572.7	578.2
8.4	583.7	589.2	594.8	600.5	606.2	611.9	617.8	623.6	629.6	635.6
8.5	641.6	647.7	653.9	660.1	666.4	672.7	679.1	685.6	692.1	698.7
8.6	705.4	712.1	718.9	725.7	732.6	739.6	746.7	753.8	760.9	768.2
8.7	775.5	782.9	790.4	797.0	805.5	813.2	820.9	828.7	836.6	844.6
8.8	852.7	860.8	869.0	877.3	885.6	894.1	902.6	911.2	919.9	928.7
8.9	937.5	946.5	955.5	964.6	973.8	983.1	992.5	1002	1012	1021
9.0	1031	1041	1051	1061	1071	1081	1091	1102	1112	1123
9.1	1134	1144	1155	1166	1178	1189	1200	1212	1223	1235
9.2	1247	1259	1271	1283	1295	1307	1322	1332	1345	1358
9.3	1371	1384	1397	1411	1424	1438	1452	1465	1479	1494
9.4	1508	1522	1537	1552	1566	1581	1596	1612	1627	1643
9.5	1658	1674	1690	1707	1723	1739	1756	1773	1790	1807
9.6	1824	1842	1859	1877	1895	1913	1931	1950	1969	1987
9.7	2006	2026	2045	2065	2084	2104	2125	2145	2165	2186
9.8	2207	2228	2250	2271	2293	2315	2337	2359	2382	2405
9.9	2428	2451	2475	2498	2522	2547	2571	2596	2621	2646

贝塞耳函数表

$K_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	4.721	4.028	3.624	3.337	3.114	2.933	2.780	2.647	2.531
0.1	2.427	2.333	2.248	2.170	2.097	2.030	1.967	1.909	1.854	1.802
0.2	1.753	1.706	1.662	1.620	1.580	1.542	1.505	1.470	1.436	1.404
0.3	1.372	1.342	1.314	1.286	1.259	1.233	1.208	1.183	1.160	1.137
0.4	1.115	1.093	1.072	1.052	1.032	1.013	0.9943	9761	9584	9412
0.5	0.9244	9081	8921	8766	8614	8466	8321	8180	8042	7907
0.6	7775	7646	7520	7397	7277	7159	7043	6930	6820	6711
0.7	6605	6501	6399	6300	6202	6106	6012	5920	5829	5740
0.8	5653	5568	5484	5402	5321	5242	5165	5088	5013	4940
0.9	4867	4796	4727	4658	4591	4524	4459	4396	4333	4271
1.0	0.4210	4151	4092	4034	3977	3922	3867	3813	3760	3707
1.1	3656	3605	3556	3507	3459	3411	3365	3319	3273	3229
1.2	3185	3142	3100	3058	3017	2976	2936	2897	2858	2820
1.3	2782	2746	2709	2673	2638	2603	2569	2535	2502	2469
1.4	2437	2405	2373	2342	2312	2282	2252	2223	2194	2166
1.5	0.2138	2111	2083	2057	2030	2004	1979	1953	1928	1904
1.6	1880	1856	1832	1809	1786	1763	1741	1719	1697	1676
1.7	1655	1634	1614	1593	1573	1554	1534	1515	1496	1478
1.8	1459	1441	1423	1406	1388	1371	1354	1337	1321	1305
1.9	1288	1273	1257	1242	1226	1211	1196	1182	1167	1153
2.0	0.1139	1125	1111	1098	1084	1071	1058	1045	1033	1020
2.1	1008	*9956	*9836	*9717	*9600	*9484	*9370	*9257	*9145	*9035
2.2	0.08927	8820	8714	8609	8506	8404	8304	8204	8106	8010
2.3	7914	7820	7726	7634	7544	7454	7365	7278	7191	7106
2.4	7022	6939	6856	6775	6695	6616	6538	6461	6384	6309
2.5	0.06235	6161	6089	6017	5946	5877	5808	5739	5672	5606
2.6	5540	5475	5411	5348	5285	5223	5162	5102	5042	4984
2.7	4926	4868	4811	4755	4700	4645	4592	4538	4485	4433
2.8	4382	4331	4281	4231	4182	4134	4086	4039	3992	3946
2.9	3901	3856	3811	3767	3724	3681	3638	3597	3555	3514
3.0	0.03474	3434	3395	3356	3317	3279	3241	3204	3168	3131
3.1	3095	3060	3025	2990	2956	2922	2889	2856	2824	2791
3.2	2759	2728	2697	2666	2636	2606	2576	2547	2518	2489
3.3	2461	2433	2405	2378	2351	2325	2298	2272	2246	2221
3.4	2196	2171	2146	2122	2098	2074	2051	2028	2005	1982

贝塞耳函数表

$K_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	0.01960	1938	1916	1894	1873	1852	1831	1810	1790	1770
3.6	1750	1730	1711	1692	1673	1654	1635	1617	1599	1581
3.7	1563	1546	1528	1511	1494	1477	1461	1445	1428	1412
3.8	1397	1381	1366	1350	1335	1320	1306	1291	1277	1262
3.9	1248	1234	1221	1207	1194	1180	1167	1154	1141	1129
4.0	0.01116	1104	1091	1079	1067	1055	1044	1032	1021	1009
4.1	0.009980	9869	9760	9652	9549	9439	9334	9231	9128	9027
4.2	8927	8829	8731	8634	8539	8444	8351	8259	8167	8077
4.3	7988	7900	7813	7726	7641	7557	7473	7391	7309	7229
4.4	7149	7070	6992	6915	6839	6764	6689	6616	6543	6471
4.5	0.006400	6329	6260	6191	6123	6056	5989	5923	5858	5794
4.6	5730	5668	5605	5544	5483	5423	5363	5305	5246	5189
4.7	5132	5076	5020	4965	4911	4857	4804	4751	4699	4648
4.8	4597	4547	4497	4448	4399	4351	4304	4257	4210	4164
4.9	4119	4074	4030	3986	3942	3899	3857	3814	3773	3732
5.0	0.003691	3651	3611	3572	3533	3494	3456	3419	3382	3345
5.1	3308	3272	3237	3202	3167	3132	3098	3065	3031	2998
5.2	2966	2934	2902	2870	2839	2808	2778	2748	2718	2688
5.3	2659	2630	2602	2574	2546	2518	2491	2464	2437	2411
5.4	2385	2359	2333	2308	2283	2258	2234	2210	2186	2162
5.5	0.002139	2116	2093	2070	2048	2026	2004	1982	1961	1939
5.6	1918	1898	1877	1857	1837	1817	1798	1778	1759	1740
5.7	1721	1703	1684	1666	1648	1630	1613	1595	1578	1561
5.8	1544	1528	1511	1495	1479	1463	1447	1432	1416	1401
5.9	1386	1371	1356	1342	1327	1313	1299	1285	1271	1258
6.0	0.001244	1231	1217	1204	1191	1179	1166	1153	1141	1129
6.1	1117	1105	1093	1081	1070	1058	1047	1035	1024	1013
6.2	1002	*9918	*9811	*9706	*9602	*9499	*9398	*9297	*9197	*9099
6.3	0.0009001	8905	8810	8715	8622	8530	8438	8348	8259	8171
6.4	8083	7997	7911	7827	7743	7660	7578	7497	7417	7338
6.5	0.0007259	7182	7105	7029	6954	6880	6806	6734	6662	6591
6.6	6520	6451	6382	6314	6246	6180	6114	6048	5984	5920
6.7	5857	5795	5733	5672	5611	5551	5492	5434	5376	5318
6.8	5262	5206	5150	5095	5041	4987	4934	4882	4830	4778
6.9	4728	4677	4627	4578	4529	4481	4434	4386	4340	4294

贝塞耳函数表

$K_0(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.0	0.0004248	4203	4158	4114	4070	4027	3984	3942	3900	3858
7.1	3817	3777	3737	3697	3658	3619	3580	3542	3505	3468
7.2	3431	3394	3358	3323	3287	3253	3218	3184	3150	3117
7.3	3084	3051	3019	2987	2955	2924	2893	2862	2832	2802
7.4	2772	2742	2713	2685	2656	2628	2600	2573	2545	2518
7.5	0.0002492	2465	2439	2413	2388	2363	2338	2313	2288	2264
7.6	2240	2216	2193	2170	2147	2124	2102	2079	2057	2036
7.7	2014	1993	1972	1951	1930	1910	1890	1870	1850	1830
7.8	1811	1792	1773	1754	1736	1717	1699	1681	1664	1646
7.9	1629	1611	1594	1578	1561	1545	1528	1512	1496	1480
8.0	0.0001465	1449	1434	1419	1404	1389	1374	1360	1346	1331
8.1	1317	1303	1290	1276	1263	1249	1236	1223	1210	1198
8.2	1185	1172	1160	1148	1136	1124	1112	1100	1089	1077
8.3	1066	1055	1043	1032	1022	1011	10002	*9897	*9793	*9690
8.4	0.00009588	9487	9387	9288	9191	9094	8998	8904	8810	8717
8.5	0.00008626	8535	8445	8356	8269	8182	8096	8011	7926	7843
8.6	7761	7679	7598	7519	7439	7361	7284	7208	7132	7057
8.7	6983	6909	6837	6765	6694	6624	6554	6485	6417	6350
8.8	6283	6217	6152	6088	6024	5961	5898	5836	5775	5714
8.9	5654	5595	5536	5478	5420	5364	5307	5252	5197	5142
9.0	0.00005088	5035	4982	4930	4878	4827	4776	4726	4677	4628
9.1	4579	4531	4484	4437	4390	4344	4299	4254	4209	4165
9.2	4121	4078	4036	3993	3951	3910	3869	3829	3789	3749
9.3	3710	3671	3632	3594	3557	3519	3483	3446	3410	3374
9.4	3339	3304	3270	3235	3202	3168	3135	3102	3070	3038
9.5	0.00003006	2974	2943	2912	2882	2852	2822	2793	2763	2734
9.6	2706	2678	2650	2622	2595	2567	2541	2514	2488	2462
9.7	2436	2411	2385	2360	2336	2311	2287	2263	2240	2216
9.8	2193	2170	2148	2125	2103	2081	2059	2038	2017	1995
9.9	1975	1954	1934	1913	1894	1874	1854	1835	1816	1797

贝塞耳函数表

$K_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	99.97	49.95	33.27	24.92	19.91	16.56	14.17	12.37	10.97
0.1	9.854	8.935	8.169	7.519	6.962	6.477	6.053	5.678	5.345	5.046
0.2	4.776	4.532	4.309	4.106	3.919	3.747	3.588	3.440	3.303	3.175
0.3	3.056	2.944	2.839	2.740	2.647	2.559	2.476	2.397	2.323	2.252
0.4	2.184	2.120	2.059	2.001	1.945	1.892	1.840	1.792	1.745	1.700
0.5	1.656	1.615	1.575	1.536	1.499	1.464	1.429	1.396	1.364	1.333
0.6	1.303	1.274	1.246	1.219	1.192	1.167	1.142	1.118	1.095	1.072
0.7	1.050	1.029	1.008	9852	9666	9496	9311	9130	8955	8784
0.8	0.8618	8456	8298	8144	7993	7847	7704	7564	7428	7295
0.9	7165	7039	6915	6794	6675	6560	6447	6336	6228	6122
1.0	0.6019	5918	5819	5722	5627	5534	5443	5354	5267	5181
1.1	5098	5016	4935	4856	4779	4703	4629	4556	4485	4415
1.2	4346	4279	4212	4147	4084	4021	3960	3900	3841	3782
1.3	3725	3670	3615	3561	3508	3455	3404	3354	3305	3256
1.4	3208	3161	3115	3070	3026	2982	2939	2897	2855	2814
1.5	0.2774	2734	2695	2657	2620	2583	2546	2510	2475	2440
1.6	2406	2373	2340	2307	2275	2244	2213	2182	2152	2123
1.7	2094	2065	2037	2009	1982	1955	1928	1902	1876	1851
1.8	1826	1802	1777	1754	1730	1707	1684	1662	1640	1618
1.9	1597	1575	1555	1534	1514	1494	1474	1455	1436	1417
2.0	0.1399	1380	1362	1345	1327	1310	1293	1276	1260	1244
2.1	1227	1212	1196	1181	1166	1151	1136	1121	1107	1093
2.2	1079	1065	1032	1038	1025	1012	*9993	*9867	*9742	*9620
2.3	0.09498	9379	9261	9144	9029	8916	8804	8694	8586	8478
2.4	8372	8268	8165	8063	7963	7864	7767	7670	7575	7482
2.5	0.07389	7298	7208	7119	7031	6945	6859	6775	6692	6609
2.6	6528	6448	6369	6292	6215	6139	6064	5990	5917	5845
2.7	5774	5704	5634	5566	5498	5432	5366	5301	5237	5174
2.8	5111	5050	4989	4929	4369	4811	4753	4696	4639	4584
2.9	4529	4474	4421	4368	4316	4264	4213	4163	4113	4064
3.0	0.04016	3968	3921	3874	3828	3782	3738	3693	3649	3606
3.1	3563	3521	3480	3438	3398	3358	3318	3279	3240	3202
3.2	3164	3127	3090	3054	3018	2983	2948	2913	2879	2845
3.3	2812	2779	2746	2714	2682	2651	2620	2589	2559	2529
3.4	2500	2471	2442	2414	2385	2358	2330	2303	2276	2250

贝塞耳函数表

$K_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.5	0.02224	2198	2173	2147	2123	2098	2074	2050	2026	2003
3.6	1979	1957	1934	1912	1890	1868	1846	1825	1804	1783
3.7	1763	1743	1722	1703	1683	1664	1645	1626	1607	1589
3.8	1571	1553	1535	1517	1500	1483	1466	1449	1432	1416
3.9	1400	1384	1368	1353	1337	1322	1307	1292	1277	1263
4.0	0.01248	1234	1220	1206	1193	1179	1166	1152	1139	1126
4.1	1114	1101	1089	1076	1064	1052	1040	1028	1017	1005
4.2	0.009938	9826	9715	9605	9497	9390	9284	9179	9076	8973
4.3	8872	8772	8674	8576	8479	8384	8290	8196	8104	8013
4.4	7923	7834	7746	7659	7573	7488	7404	7321	7239	7158
4.5	0.007078	6999	6920	6843	6766	6691	6616	6542	6469	6397
4.6	6325	6254	6185	6116	6047	5980	5913	5847	5782	5717
4.7	5654	5591	5529	5467	5406	5346	5286	5228	5169	5112
4.8	5055	4999	4943	4889	4834	4781	4727	4675	4623	4572
4.9	4521	4471	4421	4372	4324	4276	4229	4182	4136	4090
5.0	0.004045	4000	3956	3912	3869	3826	3784	3742	3700	3660
5.1	3619	3579	3540	3501	3462	3424	3386	3349	3312	3275
5.2	3239	3204	3168	3133	3099	3065	3031	2998	2965	2932
5.3	2900	2868	2836	2805	2774	2744	2714	2684	2655	2625
5.4	2597	2568	2540	2512	2485	2457	2430	2404	2377	2351
5.5	0.002326	2300	2275	2250	2225	2201	2177	2153	2130	2106
5.6	2083	2060	2038	2016	1994	1972	1950	1929	1908	1887
5.7	1866	1846	1826	1806	1786	1767	1748	1729	1710	1691
5.8	1673	1654	1636	1619	1601	1584	1566	1549	1532	1516
5.9	1499	1483	1467	1451	1435	1419	1404	1389	1374	1359
6.0	0.001344	1329	1315	1301	1286	1273	1259	1245	1232	1218
6.1	1205	1192	1179	1166	1154	1141	1129	1116	1104	1092
6.2	1081	1069	1057	1046	1034	1023	1012	1001	*9904	*9797
6.3	0.0009691	9586	9483	9380	9279	9178	9079	8981	8884	8788
6.4	8693	8599	8506	8414	8324	8234	8145	8057	7970	7884
6.5	0.0007799	7715	7632	7549	7468	7387	7308	7229	7151	7074
6.6	6998	6922	6848	6774	6701	6629	6558	6487	6417	6348
6.7	6280	6212	6145	6079	6014	5949	5885	5822	5759	5697
6.8	5636	5576	5516	5456	5398	5340	5282	5226	5170	5114
6.9	5059	5005	4951	4898	4845	4793	4742	4691	4641	4591

贝塞耳函数表

$K_1(x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
7.0	0.0004542	4493	4445	4397	4350	4304	4257	4212	4167	4122
7.1	4078	4034	3991	3948	3906	3864	3823	3782	3741	3701
7.2	3662	3623	3584	3545	3508	3470	3433	3396	3360	3324
7.3	3288	3253	3219	3184	3150	3116	3083	3050	3018	2985
7.4	2953	2922	2891	2860	2829	2799	2769	2740	2710	2682
7.5	0.0002653	2625	2597	2569	2542	2514	2488	2461	2435	2409
7.6	2383	2358	2333	2308	2283	2259	2235	2211	2188	2164
7.7	2141	2118	2096	2074	2051	2030	2008	1987	1966	1945
7.8	1924	1903	1883	1863	1843	1824	1804	1785	1766	1747
7.9	1729	1710	1692	1674	1656	1639	1621	1604	1587	1570
8.0	0.0001554	1537	1521	1505	1489	1473	1457	1442	1427	1411
8.1	1396	1382	1367	1352	1338	1324	1310	1296	1282	1269
8.2	1255	1242	1229	1216	1203	1190	1177	1165	1153	1140
8.3	1128	1116	1105	1093	1081	1070	1058	1047	1036	1025
8.4	1014	10036	*9930	*9825	*9721	*9618	*9516	*9415	*9316	*9217
8.5	0.00009120	9023	8928	8833	8740	8648	8556	8466	8376	8288
8.6	8200	8113	8028	7943	7859	7776	7694	7612	7532	7452
8.7	7374	7296	7219	7142	7067	6992	6918	6845	6773	6702
8.8	6631	6561	6492	6423	6355	6288	6222	6156	6091	6027
8.9	5964	5901	5838	5777	5716	5656	5596	5537	5479	5421
9.0	0.00005364	5307	5251	5196	5141	5087	5033	4980	4928	4876
9.1	4825	4774	4723	4674	4624	4576	4528	4480	4433	4386
9.2	4340	4294	4249	4204	4160	4116	4073	4030	3988	3946
9.3	3904	3863	3822	3782	3742	3703	3664	3626	3587	3550
9.4	3512	3476	3439	3403	3367	3332	3297	3262	3228	3194
9.5	0.00003160	3127	3094	3062	3029	2998	2966	2935	2904	2874
9.6	2843	2814	2784	2755	2726	2697	2669	2641	2613	2586
9.7	2559	2532	2505	2479	2453	2427	2402	2377	2352	2327
9.8	2302	2278	2254	2231	2207	2184	2161	2139	2116	2094
9.9	2072	2050	2029	2008	1987	1966	1945	1925	1905	1885

28. 正态分布表

正态概率积分表

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	x
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	−0.0
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247	−0.1
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859	−0.2
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483	−0.3
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121	−0.4
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776	−0.5
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451	−0.6
−0.7	.2420	.2889	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148	−0.7
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867	−0.8
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611	−0.9
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379	−1.0
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170	−1.1
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.09853	−1.2
−1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226	−1.3
−1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811	−1.4
−1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592	−1.5
−1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551	−1.6
−1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673	−1.7
−1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938	−1.8
−1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330	−1.9

−2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831	−2.0
−2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426	−2.1
−2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101	−2.2
−2.3	.01072	.01044	.01017	$.0^{2}9903$	$.0^{2}9642$	$.0^{2}9387$	$.0^{2}9137$	$.0^{2}8894$	$.0^{2}8656$	$.0^{2}8424$	−2.3
−2.4	$.0^{2}8198$	$.0^{2}7976$	$.0^{2}7760$	$.0^{2}7549$	$.0^{2}7344$	$.0^{2}7143$	$.0^{2}6947$	$.0^{2}6756$	$.0^{2}6569$	$.0^{2}6387$	−2.4
−2.5	$.0^{2}6210$	$.0^{2}6037$	$.0^{2}5868$	$.0^{2}5703$	$.0^{2}5543$	$.0^{2}5386$	$.0^{2}5234$	$.0^{2}5085$	$.0^{2}4940$	$.0^{2}4799$	−2.5
−2.6	$.0^{2}4661$	$.0^{2}4527$	$.0^{2}4396$	$.0^{2}4269$	$.0^{2}4145$	$.0^{2}4025$	$.0^{2}3907$	$.0^{2}3793$	$.0^{2}3681$	$.0^{2}3573$	−2.6
−2.7	$.0^{2}3467$	$.0^{2}3364$	$.0^{2}3264$	$.0^{2}3167$	$.0^{2}3072$	$.0^{2}2980$	$.0^{2}2890$	$.0^{2}2803$	$.0^{2}2718$	$.0^{2}2635$	−2.7
−2.8	$.0^{2}2555$	$.0^{2}2477$	$.0^{2}2401$	$.0^{2}2327$	$.0^{2}2256$	$.0^{2}2186$	$.0^{2}2118$	$.0^{2}2052$	$.0^{2}1988$	$.0^{2}1926$	−2.8
−2.9	$.0^{2}1866$	$.0^{2}1807$	$.0^{2}1750$	$.0^{2}1695$	$.0^{2}1641$	$.0^{2}1589$	$.0^{2}1538$	$.0^{2}1489$	$.0^{2}1441$	$.0^{2}1395$	−2.9
−3.0	$.0^{2}1350$	$.0^{2}1306$	$.0^{2}1264$	$.0^{2}1223$	$.0^{2}1183$	$.0^{2}1144$	$.0^{2}1107$	$.0^{2}1070$	$.0^{2}1035$	$.0^{2}1001$	−3.0
−3.1	$.0^{3}9676$	$.0^{3}9354$	$.0^{3}9043$	$.0^{3}8740$	$.0^{3}8447$	$.0^{3}8164$	$.0^{3}7888$	$.0^{3}7622$	$.0^{3}7364$	$.0^{3}7114$	−3.1
−3.2	$.0^{3}6871$	$.0^{3}6637$	$.0^{3}6410$	$.0^{3}6190$	$.0^{3}5976$	$.0^{3}5770$	$.0^{3}5571$	$.0^{3}5377$	$.0^{3}5190$	$.0^{3}5009$	−3.2
−3.3	$.0^{3}4834$	$.0^{3}4665$	$.0^{3}4501$	$.0^{3}4342$	$.0^{3}4189$	$.0^{3}4041$	$.0^{3}3897$	$.0^{3}3758$	$.0^{3}3624$	$.0^{3}3495$	−3.3
−3.4	$.0^{3}3369$	$.0^{3}3248$	$.0^{3}3131$	$.0^{3}3018$	$.0^{3}2909$	$.0^{3}2803$	$.0^{3}2701$	$.0^{3}2602$	$.0^{3}2507$	$.0^{3}2415$	−3.4
−3.5	$.0^{3}2326$	$.0^{3}2241$	$.0^{3}2158$	$.0^{3}2078$	$.0^{3}2001$	$.0^{3}1926$	$.0^{3}1854$	$.0^{3}1785$	$.0^{3}1718$	$.0^{3}1653$	−3.5
−3.6	$.0^{3}1591$	$.0^{3}1531$	$.0^{3}1473$	$.0^{3}1417$	$.0^{3}1363$	$.0^{3}1311$	$.0^{3}1261$	$.0^{3}1213$	$.0^{3}1166$	$.0^{3}1121$	−3.6
−3.7	$.0^{3}1078$	$.0^{3}1036$	$.0^{4}9961$	$.0^{4}9574$	$.0^{4}9201$	$.0^{4}8842$	$.0^{4}8496$	$.0^{4}8162$	$.0^{4}7841$	$.0^{4}7532$	−3.7
−3.8	$.0^{4}7235$	$.0^{4}6948$	$.0^{4}6673$	$.0^{4}6407$	$.0^{4}6152$	$.0^{4}5906$	$.0^{4}5669$	$.0^{4}5442$	$.0^{4}5223$	$.0^{4}5012$	−3.8
−3.9	$.0^{4}4810$	$.0^{4}4615$	$.0^{4}4427$	$.0^{4}4247$	$.0^{4}4074$	$.0^{4}3908$	$.0^{4}3747$	$.0^{4}3594$	$.0^{4}3446$	$.0^{4}3304$	−3.9
−4.0	$.0^{4}3167$	$.0^{4}3036$	$.0^{4}2910$	$.0^{4}2789$	$.0^{4}2673$	$.0^{4}2561$	$.0^{4}2454$	$.0^{4}2351$	$.0^{4}2252$	$.0^{4}2157$	−4.0
−4.1	$.0^{4}2066$	$.0^{4}1978$	$.0^{4}1894$	$.0^{4}1814$	$.0^{4}1737$	$.0^{4}1662$	$.0^{4}1591$	$.0^{4}1523$	$.0^{4}1458$	$.0^{4}1395$	−4.1
−4.2	$.0^{4}1335$	$.0^{4}1277$	$.0^{4}1222$	$.0^{4}1168$	$.0^{4}1118$	$.0^{4}1069$	$.0^{4}1022$	$.0^{5}9774$	$.0^{5}9345$	$.0^{5}8934$	−4.2
−4.3	$.0^{5}8540$	$.0^{5}8163$	$.0^{5}7801$	$.0^{5}7455$	$.0^{5}7124$	$.0^{5}6807$	$.0^{5}6503$	$.0^{5}6212$	$.0^{5}5934$	$.0^{5}5668$	−4.3
−4.4	$.0^{5}5413$	$.0^{5}5169$	$.0^{5}4935$	$.0^{5}4712$	$.0^{5}4498$	$.0^{5}4294$	$.0^{5}4098$	$.0^{5}3911$	$.0^{5}3732$	$.0^{5}3561$	−4.4
−4.5	$.0^{5}3398$	$.0^{5}3241$	$.0^{5}3092$	$.0^{5}2949$	$.0^{5}2813$	$.0^{5}2682$	$.0^{5}2558$	$.0^{5}2489$	$.0^{5}2325$	$.0^{5}2216$	−4.5
−4.6	$.0^{5}2112$	$.0^{5}2013$	$.0^{5}1919$	$.0^{5}1828$	$.0^{5}1742$	$.0^{5}1660$	$.0^{5}1581$	$.0^{5}1506$	$.0^{5}1434$	$.0^{5}1366$	−4.6
−4.7	$.0^{5}1301$	$.0^{5}1239$	$.0^{5}1179$	$.0^{5}1123$	$.0^{5}1069$	$.0^{5}1017$	$.0^{6}9680$	$.0^{6}9211$	$.0^{6}8765$	$.0^{6}8339$	−4.7
−4.8	$.0^{6}7933$	$.0^{6}7547$	$.0^{6}7178$	$.0^{6}6827$	$.0^{6}6492$	$.0^{6}6173$	$.0^{6}5869$	$.0^{6}5580$	$.0^{6}5304$	$.0^{6}5042$	−4.8
−4.9	$.0^{6}4792$	$.0^{6}4554$	$.0^{6}4327$	$.0^{6}4111$	$.0^{6}3906$	$.0^{6}3711$	$.0^{6}3525$	$.0^{6}3348$	$.0^{6}3179$	$.0^{6}3019$	−4.9

正态分布表

正态概率积分表

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	x
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	0.0
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753	0.1
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141	0.2
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517	0.3
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879	0.4
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224	0.5
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549	0.6
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852	0.7
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133	0.8
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389	0.9
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621	1.0
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830	1.1
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.90147	1.2
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774	1.3
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189	1.4
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408	1.5
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449	1.6
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327	1.7
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062	1.8
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670	1.9

2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169	2.0
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574	2.1
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899	2.2
2.3	.98928	.98956	.98983	$.9^{2}0097$	$.9^{2}0358$	$.9^{2}0613$	$.9^{2}0863$	$.9^{2}1106$	$.9^{2}1344$	$.9^{2}1576$	2.3
2.4	$.9^{2}1802$	$.9^{2}2024$	$.9^{2}2240$	$.9^{2}2451$	$.9^{2}2656$	$.9^{2}2857$	$.9^{2}3053$	$.9^{2}3244$	$.9^{2}3431$	$.9^{2}3613$	2.4
2.5	$.9^{2}3790$	$.9^{2}3963$	$.9^{2}4132$	$.9^{2}4297$	$.9^{2}4457$	$.9^{2}4614$	$.9^{2}4766$	$.9^{2}4915$	$.9^{2}5060$	$.9^{2}5201$	2.5
2.6	$.9^{2}5339$	$.9^{2}5473$	$.9^{2}5604$	$.9^{2}5731$	$.9^{2}5855$	$.9^{2}5975$	$.9^{2}6093$	$.9^{2}6207$	$.9^{2}6319$	$.9^{2}6427$	2.6
2.7	$.9^{2}6533$	$.9^{2}6636$	$.9^{2}6736$	$.9^{2}6833$	$.9^{2}6928$	$.9^{2}7020$	$.9^{2}7110$	$.9^{2}7197$	$.9^{2}7282$	$.9^{2}7365$	2.7
2.8	$.9^{2}7445$	$.9^{2}7523$	$.9^{2}7599$	$.9^{2}7673$	$.9^{2}7744$	$.9^{2}7814$	$.9^{2}7882$	$.9^{2}7948$	$.9^{2}8012$	$.9^{2}8074$	2.8
2.9	$.9^{2}8134$	$.9^{2}8193$	$.9^{2}8250$	$.9^{2}8305$	$.9^{2}8359$	$.9^{2}8411$	$.9^{2}8462$	$.9^{2}8511$	$.9^{2}8559$	$.9^{2}8605$	2.9
3.0	$.9^{2}8650$	$.9^{2}8694$	$.9^{2}8736$	$.9^{2}8777$	$.9^{2}8817$	$.9^{2}8856$	$.9^{2}8893$	$.9^{2}8930$	$.9^{2}8965$	$.9^{2}8999$	3.0
3.1	$.9^{3}0324$	$.9^{3}0646$	$.9^{3}0957$	$.9^{3}1260$	$.9^{3}1553$	$.9^{3}1836$	$.9^{3}2112$	$.9^{3}2378$	$.9^{3}2636$	$.9^{3}2886$	3.1
3.2	$.9^{3}3129$	$.9^{3}3363$	$.9^{3}3590$	$.9^{3}3810$	$.9^{3}4024$	$.9^{3}4230$	$.9^{3}4429$	$.9^{3}4623$	$.9^{3}4810$	$.9^{3}4991$	3.2
3.3	$.9^{3}5166$	$.9^{3}5335$	$.9^{3}5499$	$.9^{3}5658$	$.9^{3}5811$	$.9^{3}5959$	$.9^{3}6103$	$.9^{3}6242$	$.9^{3}6376$	$.9^{3}6505$	3.3
3.4	$.9^{3}6631$	$.9^{3}6752$	$.9^{3}6869$	$.9^{3}6982$	$.9^{3}7091$	$.9^{3}7197$	$.9^{3}7299$	$.9^{3}7398$	$.9^{3}7493$	$.9^{3}7585$	3.4
3.5	$.9^{3}7674$	$.9^{3}7759$	$.9^{3}7842$	$.9^{3}7922$	$.9^{3}7999$	$.9^{3}8074$	$.9^{3}8146$	$.9^{3}8215$	$.9^{3}8282$	$.9^{3}8347$	3.5
3.6	$.9^{3}8409$	$.9^{3}8469$	$.9^{3}8527$	$.9^{3}8583$	$.9^{3}8637$	$.9^{3}8689$	$.9^{3}8739$	$.9^{3}8787$	$.9^{3}8834$	$.9^{3}8879$	3.6
3.7	$.9^{3}8922$	$.9^{3}8964$	$.9^{4}0039$	$.9^{4}0426$	$.9^{4}0799$	$.9^{4}1158$	$.9^{4}1504$	$.9^{4}1838$	$.9^{4}2159$	$.9^{4}2468$	3.7
3.8	$.9^{4}2765$	$.9^{4}3052$	$.9^{4}3327$	$.9^{4}3593$	$.9^{4}3848$	$.9^{4}4094$	$.9^{4}4331$	$.9^{4}4558$	$.9^{4}4777$	$.9^{4}4988$	3.8
3.9	$.9^{4}5190$	$.9^{4}5385$	$.9^{4}5573$	$.9^{4}5753$	$.9^{4}5926$	$.9^{4}6092$	$.9^{4}6253$	$.9^{4}6406$	$.9^{4}6554$	$.9^{4}6696$	3.9
4.0	$.9^{4}6833$	$.9^{4}6964$	$.9^{4}7090$	$.9^{4}7211$	$.9^{4}7327$	$.9^{4}7439$	$.9^{4}7546$	$.9^{4}7649$	$.9^{4}7748$	$.9^{4}7843$	4.0
4.1	$.9^{4}7934$	$.9^{4}8022$	$.9^{4}8106$	$.9^{4}8186$	$.9^{4}8263$	$.9^{4}8338$	$.9^{4}8409$	$.9^{4}8477$	$.9^{4}8542$	$.9^{4}8605$	4.1
4.2	$.9^{4}8665$	$.9^{4}8723$	$.9^{4}8778$	$.9^{4}8832$	$.9^{4}8882$	$.9^{4}8931$	$.9^{4}8978$	$.9^{5}0226$	$.9^{5}0655$	$.9^{5}1066$	4.2
4.3	$.9^{5}1460$	$.9^{5}1837$	$.9^{5}2199$	$.9^{5}2545$	$.9^{5}2876$	$.9^{5}3193$	$.9^{5}3497$	$.9^{5}3788$	$.9^{5}4066$	$.9^{5}4332$	4.3
4.4	$.9^{5}4587$	$.9^{5}4831$	$.9^{5}5065$	$.9^{5}5288$	$.9^{5}5502$	$.9^{5}5706$	$.9^{5}5902$	$.9^{5}6089$	$.9^{5}6268$	$.9^{5}6439$	4.4
4.5	$.9^{5}6602$	$.9^{5}6759$	$.9^{5}6908$	$.9^{5}7051$	$.9^{5}7187$	$.9^{5}7318$	$.9^{5}7442$	$.9^{5}7561$	$.9^{5}7675$	$.9^{5}7784$	4.5
4.6	$.9^{5}7888$	$.9^{5}7987$	$.9^{5}8081$	$.9^{5}8172$	$.9^{5}8258$	$.9^{5}8340$	$.9^{5}8419$	$.9^{5}8494$	$.9^{5}8566$	$.9^{5}8634$	4.6
4.7	$.9^{5}8699$	$.9^{5}8761$	$.9^{5}8821$	$.9^{5}8877$	$.9^{5}8931$	$.9^{5}8983$	$.9^{6}0320$	$.9^{6}0789$	$.9^{6}1235$	$.9^{6}1661$	4.7
4.8	$.9^{6}2067$	$.9^{6}2453$	$.9^{6}2822$	$.9^{6}3173$	$.9^{6}3508$	$.9^{6}3827$	$.9^{6}4131$	$.9^{6}4420$	$.9^{6}4696$	$.9^{6}4958$	4.8
4.9	$.9^{6}5208$	$.9^{6}5446$	$.9^{6}5673$	$.9^{6}5889$	$.9^{6}6094$	$.9^{6}6289$	$.9^{6}6475$	$.9^{6}6652$	$.9^{6}6821$	$.9^{6}6981$	4.9

α 值与 K_α 值对应表 I

$$\int_{K_\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\alpha$$

表中数字为 α 值

K_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.80	0.09
0.0	0.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	0.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	0.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	0.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	0.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0328	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139

K_α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3	.00135	$.0^{3}968$	$.0^{3}687$	$.0^{3}483$	$.0^{3}357$	$.0^{3}233$	$.0^{3}159$	$.0^{3}108$	$.0^{4}723$	$.0^{4}481$
4	$.0^{4}317$	$.0^{4}207$	$.0^{4}133$	$.0^{5}854$	$.0^{5}541$	$.0^{5}340$	$.0^{5}211$	$.0^{5}130$	$.0^{6}793$	$.0^{6}479$
5	$.0^{6}287$	$.0^{6}170$	$.0^{7}996$	$.0^{7}579$	$.0^{7}333$	$.0^{7}190$	$.0^{7}107$	$.0^{8}599$	$.0^{8}332$	$.0^{8}182$
6	$.0^{9}987$	$.0^{9}530$	$.0^{9}282$	$.0^{9}149$	$.0^{10}777$	$.0^{10}402$	$.0^{10}206$	$.0^{10}104$	$.0^{11}523$	$.0^{11}260$

α 值与 K_α 值对应表 Ⅱ

$$\int_{K_\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\alpha$$

表中数字为 K_α 值

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.32635	2.05375	1.88079	1.75069	1.64485	1.55477	1.47579	1.40507	1.34076
0.1	1.28155	1.22653	1.17499	1.12639	1.08032	1.03643	0.99446	0.95417	0.91537	0.87790
0.2	0.84162	0.80642	0.77219	0.73885	0.70630	0.67449	0.64335	0.61281	0.58284	0.55338
0.3	0.52440	0.49585	0.46770	0.43991	0.41246	0.38532	0.35846	0.33185	0.30548	0.27932
0.4	0.25335	0.22754	0.20189	0.17637	0.15097	0.12566	0.10043	0.07527	0.05015	0.02507

$K_{0.5}=0$，当 $\alpha>0.5$，$K_\alpha=-K_{1-\alpha}$.

α	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
K_α	∞	3.09023	2.87816	2.74778	2.65207	2.57583	2.51214	2.45726	2.40892	2.36562

29. χ^2 分

$$\int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} \chi^2(n)$$

表中数字为 χ_α^2 值

n \ α	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50
1	0.0^3157	0.0^3628	0.0^2393	0.0158	0.0642	0.148	0.455
2	0.0201	0.0404	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336

布 表

$dv = \alpha$

0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	α / n
1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.828	1
2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.816	2
3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.266	3
4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	12.277	18.467	4
6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.068	20.515	5
7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.458	6
8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322	7
9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125	8
10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877	9
11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588	10
12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264	11
14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909	12
15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528	13
16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123	14
17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697	15
18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252	16
19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790	17
20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312	18
21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820	19
22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315	20
23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797	21
24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268	22
26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728	23
27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179	24
28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.618	25
29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052	26
30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476	27
31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.893	28
32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.301	29
33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703	30

30. t 分

$$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} t(n)dv =$$

表中数字为 t_α 值

α \ n	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963
2	.142	.289	.445	.617	0.816	1.061	1.386
3	.137	.277	.424	.584	.765	0.978	1.250
4	.134	.271	.414	.569	.741	.941	1.190
5	.132	.267	.408	.559	.727	.920	1.156
6	.131	.265	.404	.553	.718	.906	1.134
7	.130	.263	.402	.549	.711	.896	1.119
8	.130	.262	.399	.546	.706	.889	1.108
9	.129	.261	.393	.543	.703	.883	1.100
10	.129	.260	.397	.542	.700	.879	1.093
11	.129	.260	.396	.540	.697	.876	1.088
12	.128	.259	.395	.539	.695	.873	1.083
13	.128	.259	.394	.538	.694	.870	1.079
14	.128	.258	.393	.537	.692	.868	1.076
15	.128	.258	.393	.536	.691	.866	1.074
16	.128	.258	.392	.535	.690	.865	1.071
17	.128	.257	.392	.534	.689	.863	1.069
18	.127	.257	.392	.534	.688	.862	1.067
19	.127	.257	.391	.533	.688	.861	1.066
20	.127	.257	.391	.533	.687	.860	1.064
21	.127	.257	.391	.532	.686	.859	1.063
22	.127	.256	.390	.532	.686	.858	1.061
23	.127	.256	.390	.532	.685	.858	1.060
24	.127	.256	.390	.531	.685	.857	1.059
25	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058
26	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058
27	.127	.256	.389	.531	.684	.855	1.057
28	.127	.256	.389	.530	.683	.855	1.056
29	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055
30	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055
40	.126	.255	.388	.529	.681	.851	1.050
60	.126	.254	.387	.527	.679	.848	1.046
120	.126	.254	.386	.526	.677	.845	1.041
∞	.126	.253	.385	.524	.674	.842	1.036

布 表

$1-\alpha$

0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001	α / n
3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619	1
1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598	2
1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924	3
1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610	4
1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859	5
1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	6
1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405	7
1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041	8
1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	9
1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587	10
1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437	11
1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318	12
1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221	13
1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140	14
1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073	15
1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015	16
1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965	17
1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922	18
1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883	19
1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850	20
1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819	21
1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792	22
1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767	23
1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745	24
1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725	25
1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707	26
1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690	27
1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674	28
1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659	29
1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646	30
1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551	40
1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460	60
1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373	120
1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291	∞

31. *F* 分布表

$$\int_0^{F_\alpha} F(m,n)dv = 1-\alpha$$

表中数字为 F_α 值

$\alpha = 0.25$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	60	∞
1	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.41	9.49	9.58	9.76	9.85
2	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.41	3.43	3.46	3.48
3	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.47	2.47
4	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
5	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.87	1.87
6	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.74	1.74
7	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.68	1.68	1.67	1.65	1.65
8	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.59	1.58
9	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53
10	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.50	1.48
11	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.47	1.45
12	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.44	1.42
13	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.42	1.40
14	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.40	1.38
15	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.38	1.36
16	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.43	1.41	1.40	1.36	1.34
17	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.41	1.40	1.39	1.35	1.33
18	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.40	1.39	1.38	1.34	1.32
19	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.38	1.37	1.33	1.30
20	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.32	1.29

21	1.40	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.31	1.28
22	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.37	1.36	1.34	1.30	1.28
23	1.39	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.30	1.27
24	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.36	1.35	1.33	1.29	1.26
25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.28	1.25
30	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.30	1.26	1.23
40	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.28	1.22	1.19
60	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.25	1.19	1.15
120	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.26	1.24	1.22	1.16	1.10
∞	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.22	1.19	1.12	1.00

$\alpha = 0.05$

1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	252.2	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.48	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.57	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.69	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.43	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.74	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.30	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.01	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.79	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.62	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.49	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.38	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.30	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.22	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.16	2.07

F 分布表

$$\int_0^{F_\alpha} F(m,n)dv = 1-\alpha$$

表中数字为 F_α 值

$\alpha = 0.05$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	60	∞
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.11	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.06	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.02	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	1.98	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	1.95	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	1.92	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	1.89	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	1.36	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.84	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.82	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.74	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.64	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.53	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.43	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.32	1.00

$\alpha = 0.01$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	60	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6313	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.48	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.32	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.65	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.40	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.20	9.02

6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.06	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	5.82	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.03	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.48	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.08	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	3.78	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.54	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.34	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.18	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.05	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	2.93	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	2.83	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	2.75	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.67	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.61	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.55	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.50	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.45	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.40	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.36	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.21	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.02	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	1.84	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.66	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.47	1.00

32. 正交表

$L_4(2^3)$

试验号 \ 列号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1
组	1	2	

$L_8(2^7)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
组	1	2		3			

$L_8(2^7)$二列间的交互作用

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
	(1)	3	2	5	4	7	6
		(2)	1	6	7	4	5
			(3)	7	6	5	4
				(4)	1	2	3
					(5)	3	2
						(6)	1
							(7)

$L_8(2^7)$表头设计

因素个数 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
3	A	B	$A\times B$	C	$A\times C$	$B\times C$	
4	A	B	$A\times B$ $C\times D$	C	$A\times C$ $B\times D$	$B\times C$ $A\times D$	D
4	A	B $C\times D$	$A\times B$	C $B\times D$	$A\times C$	D $B\times C$	$A\times D$
5	A $D\times E$	B $C\times D$	$A\times B$ $C\times E$	C $B\times D$	$A\times C$ $B\times E$	D $A\times E$ $B\times C$	E $A\times D$

$L_8(4\times2^4)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2
4	2	2	2	1	1
5	3	1	2	1	2
6	3	2	1	2	1
7	4	1	2	2	1
8	4	2	1	1	2

$L_8(4\times2^4)$表头设计

因素个数 \ 列号	1	2	3	4	5
2	A	B	$(A\times B)_1$	$(A\times B)_2$	$(A\times B)_3$
3	A	B	C		
4	A	B	C	D	
5	A	B	C	D	E

$L_{12}(2^{11})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1

$L_{16}(2^{15})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1
组	1	2			3						4				

$L_{16}(2^{15})$二列间的交互作用

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
		(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
			(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
				(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
					(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
						(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9
							(7)	15	14	13	12	11	10	9	8
								(8)	1	2	3	4	5	6	7
									(9)	3	2	5	4	7	6
										(10)	1	6	7	4	5
											(11)	7	6	5	4
												(12)	1	2	3
													(13)	3	2
														(14)	1

$L_{16}(2^{15})$表头设计

因素个数 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	A	B	$A\times B$	C	$A\times C$	$B\times C$		D	$A\times D$	$B\times D$		$C\times D$			
5	A	B	$A\times B$	C	$A\times C$	$B\times C$	$D\times E$	D	$A\times D$	$B\times D$	$C\times E$	$C\times D$	$B\times E$	$A\times E$	E
6	A	B	$A\times B$ $D\times E$	C	$A\times C$ $D\times F$	$B\times C$ $E\times F$		D	$A\times D$ $B\times E$ $C\times F$	$B\times D$ $A\times E$	E	$C\times D$ $A\times F$	F		$C\times E$ $B\times F$
7	A	B	$A\times B$ $D\times E$ $F\times G$	C	$A\times C$ $D\times F$ $E\times G$	$B\times C$ $E\times F$ $D\times G$		D	$A\times D$ $B\times E$ $C\times F$	$B\times D$ $A\times E$ $C\times G$	E	$C\times D$ $A\times F$ $B\times G$	F	G	$C\times E$ $B\times F$ $A\times G$
8	A	B	$A\times B$ $D\times E$ $F\times G$ $C\times H$	C	$A\times C$ $D\times F$ $E\times G$ $B\times H$	$B\times C$ $E\times F$ $D\times G$ $A\times H$	H	D	$A\times D$ $B\times E$ $C\times F$ $G\times H$	$B\times D$ $A\times E$ $C\times G$ $F\times H$	E	$C\times D$ $A\times F$ $B\times G$ $E\times H$	F	G	$C\times E$ $B\times F$ $A\times G$ $D\times H$

$L_{16}(4\times 2^{12})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	3	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	3	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	3	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	3	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	4	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	4	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	4	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	4	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

$L_{16}(4\times 2^{12})$表头设计

因素个数 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
3	A	B	$(A\times B)_1$	$(A\times B)_2$	$(A\times B)_3$	C	$(A\times C)_1$
4	A	B	$(A\times B)_1$ $C\times D$	$(A\times B)_2$	$(A\times B)_3$	C	$(A\times C)_1$ $B\times D$
5	A	B	$(A\times B)_1$ $C\times D$	$(A\times B)_2$ $C\times E$	$(A\times B)_3$	C	$(A\times C)_1$ $B\times D$

因素个数 \ 列号	8	9	10	11	12	13
3	$(A\times C)_2$	$(A\times C)_3$	$B\times C$			
4	$(A\times C)_2$	$(A\times C)_3$	$B\times C$ $(A\times D)_1$	D	$(A\times D)_3$	$(A\times D)_2$
5	$(A\times C)_2$ $B\times E$	$(A\times C)_3$	$B\times C$ $(A\times D)_1$ $(A\times E)_2$	D $(A\times E)_3$	E $(A\times D)_3$	$(A\times E)_1$ $(A\times D)_2$

$L_9(3^4)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1
组	1		2	

注　任意二列间的交互作用为另外二列.

$L_{18}(2\times3^7)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

$L_{27}(3^{13})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2
组	1		2						3				

$L_{27}(3^{13})$表头设计

因素个数 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
3	A	B	$(A\times B)_1$	$(A\times B)_2$	C	$(A\times C)_1$	$(A\times C)_2$
4	A	B	$(A\times B)_1$ $(C\times D)_2$	$(A\times B)_2$	C	$(A\times C)_1$ $(B\times D)_2$	$(A\times C)_2$

因素个数 \ 列号	8	9	10	11	12	13
3	$(B\times C)_1$			$(B\times C)_2$		
4	$(B\times C)_1$ $(A\times D)_2$	D	$(A\times D)_1$	$(B\times C)_2$	$(B\times D)_1$	$(C\times D)_1$

$L_{16}(4^2 \times 2^9)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	3	2	2	2	1	1	1	2	2	2
4	1	4	2	2	2	2	2	2	1	1	1
5	2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2
6	2	2	1	2	2	2	1	1	2	1	1
7	2	3	2	1	1	1	2	2	2	1	1
8	2	4	2	1	1	2	1	1	1	2	2
9	3	1	2	1	2	2	1	2	2	1	2
10	3	2	2	1	2	1	2	1	1	2	1
11	3	3	1	2	1	2	1	2	1	2	1
12	3	4	1	2	1	1	2	1	2	1	2
13	4	1	2	2	1	2	2	1	2	2	1
14	4	2	2	2	1	1	1	2	1	1	2
15	4	3	1	1	2	2	2	1	1	1	2
16	4	4	1	1	2	1	1	2	2	2	1

$L_{16}(4^3 \times 2^4)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	1	1	2	2	2	2
3	1	3	3	2	2	1	1	2	2
4	1	4	4	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	2	2	1	2	1	2
6	2	2	1	2	2	2	1	2	1
7	2	3	4	1	1	1	2	2	1
8	2	4	3	1	1	2	1	1	2
9	3	1	3	1	2	2	2	2	1
10	3	2	4	1	2	1	1	1	2
11	3	3	1	2	1	2	2	1	2
12	3	4	2	2	1	1	1	2	1
13	4	1	4	2	1	2	1	2	2
14	4	2	3	2	1	1	2	1	1
15	4	3	2	1	2	2	1	1	1
16	4	4	1	1	2	1	2	2	2

$L_{16}(4^4 \times 2^3)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	1	2	2
3	1	3	3	3	2	1	2
4	1	4	4	4	2	2	1
5	2	1	2	3	2	2	1
6	2	2	1	4	2	1	2
7	2	3	4	1	1	2	2
8	2	4	3	2	1	1	1
9	3	1	3	4	1	2	2
10	3	2	4	3	1	1	1
11	3	3	1	2	2	2	1
12	3	4	2	1	2	1	2
13	4	1	4	2	2	1	2
14	4	2	3	1	2	2	1
15	4	3	2	4	1	1	1
16	4	4	1	3	1	2	2

$L_{16}(4^5)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	2	1	2	3	4
6	2	2	1	4	3
7	2	3	4	1	2
8	2	4	3	2	1
9	3	1	3	4	2
10	3	2	4	3	1
11	3	3	1	2	4
12	3	4	2	1	3
13	4	1	4	2	3
14	4	2	3	1	4
15	4	3	2	4	1
16	4	4	1	3	2
组	1	2			

$L_{16}(8\times 2^8)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	3	1	1	2	2	1	1	2	2
6	3	2	2	1	1	2	2	1	1
7	4	1	1	2	2	2	2	1	1
8	4	2	2	1	1	1	1	2	2
9	5	1	2	1	2	1	2	1	2
10	5	2	1	2	1	2	1	2	1
11	6	1	2	1	2	2	1	2	1
12	6	2	1	2	1	1	2	1	2
13	7	1	2	2	1	1	2	2	1
14	7	2	1	1	2	2	1	1	2
15	8	1	2	2	1	2	1	1	2
16	8	2	1	1	2	1	2	2	1

$L_{20}(2^{19})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1
3	2	1	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2
4	1	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2
5	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1
6	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1
7	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2
8	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2
10	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2
11	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1
12	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2
13	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2	1
14	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2	1	2
15	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1
16	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1
17	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1
18	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1
19	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2
20	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2

$L_{27}(3^{13})$二列间的交互作用

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	(1)	3 4	2 4	2 3	6 7	5 7	5 6	9 10	8 10	8 9	12 13	11 13	11 12
		(2)	1 4	1 3	8 11	9 12	10 13	5 11	6 12	7 13	5 8	6 9	7 10
			(3)	1 2	9 13	10 11	8 12	7 12	5 13	6 11	6 10	7 8	5 9
				(4)	10 12	8 13	9 11	6 13	7 11	5 12	7 9	5 10	6 8
					(5)	1 7	1 6	2 11	3 13	4 12	2 6	4 10	3 9
						(6)	1 5	4 13	2 12	3 11	3 10	2 9	4 8
							(7)	3 12	4 11	2 13	4 9	3 8	2 10
								(8)	1 10	1 9	2 5	3 7	4 6
									(9)	1 8	4 7	2 6	3 5
										(10)	3 6	4 5	2 7
											(11)	1 13	1 12
												(12)	1 11

$L_{25}(5^6)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4	4
5	1	5	5	5	5	5
6	2	1	2	3	4	5
7	2	2	3	4	5	1
8	2	3	4	5	1	2
9	2	4	5	1	2	3
10	2	5	1	2	3	4
11	3	1	3	5	2	4
12	3	2	4	1	3	5
13	3	3	5	2	4	1
14	3	4	1	3	5	2
15	3	5	2	4	1	3
16	4	1	4	2	5	3
17	4	2	5	3	1	4
18	4	3	1	4	2	5
19	4	4	2	5	3	1
20	4	5	3	1	4	2
21	5	1	5	4	3	2
22	5	2	1	5	4	3
23	5	3	2	1	5	4
24	5	4	3	2	1	5
25	5	5	4	3	2	1
组	1	2				

$L_{32}(2^{31})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
4	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
6	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1
7	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
8	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
9	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
10	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
11	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
12	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2
13	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
14	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2
15	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
16	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1

17	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
18	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
19	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
20	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2
21	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
22	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2
23	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
24	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1
25	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
26	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
27	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
28	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1
29	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
30	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1
31	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1
32	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2
组	1	2		3				4								5															

$L_{32}(2^{31})$表头设计

因素个数 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
5	A	B	AB	C	AC	BC		D	AD	BD		CD				E	AE	BE		CE				DE							
6	A	B	AB	C	AC	BC		D	AD	BD		CD			EF	E	AE	BF		CE			DF	DE			CF		BF	AF	F
7	A	B	AB FG	C	AC	BC		D	AD	BD		CD	EF	EG		E	AE	BE		CE	DF	DG		DE	CF	CG		AF BG	F	G	BF AG
8	A	B	AB FG	C	AC GH	BC FH		D	AD	BD	EH	CD	EF	EG		E	AE	BE	DH	CE	DF	DG		DE	CF BH	AH CG	H	AF BG	F	G	BF AG CH
9	A	B	AB FG GI	C	AC GH BI	BC FH AI	I	D	AD	BD	EH	CD	EF	EG	DI	E	AE	BE	DH	CE	DF	DG	EI	DE	CF BH GI	CG AH FI	H	AF BG HI	F	G	BF AG CH
10	A	B	AB FG	C	AC GH	BC FH	EI DJ	D	AD GI	BD FI	EH CJ	CD HI	EF BJ	EG AJ	J	E	AE GJ	BF FJ	DH CI	CE HJ	DF BI	DG AI	I	DE IJ	CF BH	CG AH	H	AF BG	F	G	BF AG CH DI EJ

$L_{32}(2^{31})$二列间的交互作用

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30
		(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29
			(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12	19	18	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28
				(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	20	21	22	23	16	17	18	19	28	29	30	31	24	25	26	27
					(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	21	20	23	22	17	16	19	18	29	28	31	30	25	24	27	26
						(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9	22	23	20	21	18	19	16	17	30	31	28	29	26	27	24	25
							(7)	15	14	13	12	11	10	9	8	23	22	21	20	19	18	17	16	31	30	29	28	27	26	25	24
								(8)	1	2	3	4	5	6	7	24	25	26	27	28	29	30	31	16	17	18	19	20	21	22	23
									(9)	3	2	5	4	7	6	25	24	27	26	29	28	31	30	17	16	19	18	21	20	23	22
										(10)	1	6	7	4	5	26	27	24	25	30	31	28	29	18	19	16	17	22	23	20	21
											(11)	7	6	5	4	27	26	25	24	31	30	29	28	19	18	17	16	23	22	21	20
												(12)	1	2	3	28	29	30	31	24	25	26	27	20	21	22	23	16	17	18	19
													(13)	3	2	29	28	31	30	25	24	27	26	21	20	23	22	17	16	19	18
														(14)	1	30	31	28	29	26	27	24	25	22	23	20	21	18	19	16	17
															(15)	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
																(16)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
																	(17)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
																		(18)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
																			(19)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
																				(20)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
																					(21)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
																						(22)	1	14	15	12	13	10	11	8	9
																							(23)	15	14	13	12	11	10	9	8
																								(24)	1	2	3	4	5	6	7
																									(25)	3	2	5	4	7	6
																										(26)	1	6	7	4	5
																											(27)	7	6	5	4
																												(28)	1	2	3
																													(29)	3	2
																														(30)	1

数学符号

$+$	加，正号
$-$	减，负号
$\times$或$\cdot$	乘（在字母或括号前可略）
$a\div b$或$\frac{a}{b}$或a/b	b除a，或a除以b
$a\|b$	a整除b
$=$	等于
$\neq$	不等于
$\equiv$	恒等于
$<$	小于
$>$	大于
$\leqslant$	小于或等于，不大于
$\geqslant$	大于或等于，不小于
$\ll$	远小于
$\approx$	约等于
$\propto$	成正比
$\pm$	正或负
$\mp$	负或正
$a:b$	a比b
a^c	a的c次方（c不限是正整数）
$\sqrt{a}$	a开平方
$\sqrt[n]{a}$	a开n次方（n为正整数）
$\|a\|$	a的绝对值
$n!$	n的阶乘，即$1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$
$(2n)!!$	$2n$的双阶乘，即$2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)$
$(2n+1)!!$	$(2n+1)$的双阶乘，即$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)$
$(a)_n$	即$a(a+1)\cdots(a+n-1)$（a为实数）
$\binom{a}{n}$	即$\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$（$a$为实数）

$\binom{n}{k}$ 或 C_n^k	二项系数(即从 n 个元素中每次取出 k 个元素所有不同组合的总数) 即 $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot n}$
Σ	总和
Π	连乘
$3.1\dot{2}83\dot{2}$	循环小数 (即 3.12832832…)
i	虚数单位 (即 $i^2=-1$, 在电工技术上常用 j)
$\mathrm{Re}\, z$	z 的实部
$\mathrm{Im}\, z$	z 的虚部
$\lvert z \rvert$	z 的模
$\arg z$	z 的辐角
$\bar{z}$	z 的(复)共轭 (物理中常用 z^*)
%	百分比
∞	无穷大
( )	圆括号
[ ]	方括号，数论中表示整数部分
{ }	花括号，数论中表示分数部分
$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$	最小公倍数
$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$	最大公因数
(a, b)	开区间
$[a, b]$	闭区间
$\sim$	数字范围

AB	自 A 至 B 的直线段
$\overline{AB}$	AB 线段的长 (有时也用 AB 表示)
$\angle$	平面角
$^\circ$	度 (例 21°)
$'$	分 (例 21°23′)
$''$	秒 (例 21°23′18″)
$\overset{\frown}{AB}$	弧
π	圆周率

$\triangle$	三角形
$\varparallelogram$	平行四边形
$\square$	矩形
$\perp$	垂直
$/\!/$	平行
$\sim$	相似
$\cong$	全同
$\because$	因为
$\therefore$	所以
$\operatorname{sgn} x$	符号函数，即 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$
$\sin x$	正弦
$\cos x$	余弦
$\operatorname{tg} x$	正切　（有时用 $\tan x$）
$\operatorname{ctg} x$	余切　（有时用 $\cot x$）
$\sec x$	正割
$\csc x$	余割
$\sin^m x$	$\sin x$ 的 m 次方　（其他三角函数类似）
$\operatorname{arc}\sin x$　（或 $\sin^{-1}x$）	反正弦主值，一般值 $\operatorname{Arc}\sin x$
$\operatorname{arc}\cos x$　（或 $\cos^{-1}x$）	反余弦主值，一般值 $\operatorname{Arc}\cos x$
$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$　（或 $\operatorname{tg}^{-1}x$）	反正切主值，一般值 $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$
$\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$　（或 $\operatorname{ctg}^{-1}x$）	反余切主值，一般值 $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{arc}\sec x$　（或 $\sec^{-1}x$）	反正割主值，一般值 $\operatorname{Arc}\sec x$
$\operatorname{arc}\csc x$　（或 $\csc^{-1}x$）	反余割主值，一般值 $\operatorname{Arc}\csc x$
$\operatorname{sh} x$	双曲正弦
$\operatorname{ch} x$	双曲余弦
$\operatorname{th} x$	双曲正切
$\operatorname{cth} x$	双曲余切
$\operatorname{sech} x$	双曲正割
$\operatorname{csch} x$	双曲余割

$\mathrm{Ar\,sh}\,x$	反双曲正弦
$\mathrm{Ar\,ch}\,x$	反双曲余弦
$\mathrm{Ar\,th}\,x$	反双曲正切
$\mathrm{Ar\,cth}\,x$	反双曲余切
$\mathrm{Ar\,sech}\,x$	反双曲正割
$\mathrm{Ar\,csch}\,x$	反双曲余割
$\log_a x$	以 a 为底的对数
$\lg x$	以 10为底的对数(称为常用对数)
$\ln x$	以 e 为底的对数 (称为自然对数,数论中常用 $\log x$ 表示)
e	自然对数的底
e^x或 $\exp x$	指数函数(以 e 为底)
$\Gamma(z)$	伽马函数(Γ-函数)
$\gamma(\nu, z)$	不完全伽马函数
$\mathrm{B}(p, q)$	贝塔函数(B-函数)
$\psi(z)$	普西函数(ψ-函数)
$S(z)$	菲涅耳函数
$C(z)$	同　上
$\mathrm{erf}(z)$	概率积分(或误差函数)
$\Phi(z)$	正态概率积分
$\mathrm{erfc}\,z$	余概率积分(或余误差函数)
$\mathrm{Si}(z)$	正弦积分
$\mathrm{si}(z)$	同　上
$\mathrm{Ci}(t)$	余弦积分
$\mathrm{ci}(z)$	同　上
$\mathrm{Ei}(z)$	指数积分
$\overline{\mathrm{Ei}}(z)$	同　上
$\mathrm{En}(z)$	同　上
$\mathrm{li}(z)$	对数积分
$F(k, \varphi)$	第一类椭圆积分
$E(k, \varphi)$	第二类椭圆积分

$\Pi(k,\varphi)$ 第三类椭圆积分

$K=K(k)$ 第一类完全椭圆积分

$E=E(k)$ 第二类完全椭圆积分

外尔斯特拉斯椭圆积分

$P_n(z)$ 勒让德多项式

$T_n(x)$ 第一类契贝谢夫多项式

$U_n(x)$ 第二类契贝谢夫多项式

$L_n^{(\alpha)}(z)$ 拉盖尔多项式

$L_n(x)$

$H_n(x)$ 埃尔米特多项式

雅可比多项式

盖根堡多项式

${}_pF_q(\alpha_1,\cdots,\alpha_p;\beta_1,\cdots,\beta_q;z)$ 一般超几何函数

$F(\alpha,\beta;\gamma;z)={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 超几何函数

$F(\alpha;\gamma;z)={}_1F_1(\alpha;\gamma;z)$ 库默尔函数

(合流超几何函数)

$P_\nu(z)$, $P_n(z)$ 第一类勒让德函数

$Q_\nu(z)$, $Q_n(z)$ 第二类勒让德函数

$P_\nu^\mu(z)$, $Q_\nu^\mu(z)$ 一般勒让德函数

$J_\nu(z)$, $J_n(z)$ 第一类贝塞耳函数

$N_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ 诺伊曼函数

(第二类贝塞耳函数)

$H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ 第一,二类汉克尔函数

(第三类贝塞耳函数)

$I_\nu(z)$ 第一类变型贝塞耳函数

$K_\nu(z)$ 白塞特函数

(第二类变型贝塞耳函数)

$\mathrm{sn}\, z$ 椭圆正弦

$\mathrm{cn}\, z$ 椭圆余弦

$\mathrm{am}\, z$ 振幅函数

sn z cn$z$ dn$z$	雅可比椭圆函数
$\wp(z)$	外尔斯特拉斯椭圆函数
$\zeta(z)$	黎曼 ζ-函数
B_n, b_n	伯努利数
E_n	欧拉数
γ	欧拉常数
$\delta(x)$	δ-函数 (狄拉克函数)
$\uparrow(\downarrow)$	单调上升(单调下降)
$\rightarrow$	收敛于,趋于
lim	极限
$\overline{\lim}$	上极限
$\underline{\lim}$	下极限
sup	上确界
inf	下确界
l.i.m.	均方收敛
max	最大
min	最小
Δx	x 的有限增量
$\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$	$f(x)$的导数
$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, $f''(x)$	$f(x)$的二阶导数
$\frac{d^nf(x)}{dx^n}$, $f^{(n)}(x)$	$f(x)$的 n 阶导数
$\frac{\partial F}{\partial x}$, F_x	F 对于 x 的偏导数
$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, F_{xy}	F 对于 x, y 的混合偏导数
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, F_{xx}	F 对于 x 的二阶偏导数
$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}$, $F_{x^m y^n}$	先对 y 求 n 次偏导数,再对 x 求 m 次偏导数

df	f 的全微分
Δf	f 的差分
$\Delta^2 f$	f 的二阶差分
$\Delta^n f$	f 的 n 阶差分
δx	x 的变差
$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$, $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$	u, v, w 对 x, y, z 的雅可比式，即 $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$
$\int_a^b f(x)dx$	$f(x)$ 对 x 自 a 至 b 的积分
$F'(x)\Big\|_a^b$	等于 $F'(b)-F'(a)$
$\mathrm{P.V.}\int_a^b f(x)dx$	柯西主值
$\iint\limits_S f(x,y)dxdy$	$f(x,y)$ 在集合 S 上的二重积分
$\boldsymbol{a}$, $\vec{a}$	矢量(或称向量)
$\overrightarrow{AB}$	矢量(始点为 A，终点为 B)
$\|\boldsymbol{a}\|$	矢量的模(绝对值，长度)
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$(或 $\boldsymbol{ab}$)	标量积(或内积，点积)
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	矢量积(或外积，叉积)
$(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$	混合积
$\mathrm{grad}\,\varphi$, $\nabla\varphi$	φ 的梯度
$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$, $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$ 的散度
$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$, $\nabla\times\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$ 的旋度
$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$	φ 的方向导数
$\nabla\varphi$	哈密顿算子
$\Delta\varphi$, $\nabla^2\varphi$	拉普拉斯算子
$A=(a_{ij})$	矩阵(a_{ij} 为第 i 行第 j 列元素)

$\det A = \lvert A \rvert$	方阵 A 的行列式
$\operatorname{rank} A$	矩阵 A 的秩
$\operatorname{tr} A$	矩阵 A 的迹
A^{-1}	非异方阵 A 的逆
$\operatorname{adj} A$, A^*	方阵 A 的伴随矩阵
E	单位矩阵
$\varnothing$	空集
$\forall i$	对一切 j
$\exists j$	存在 j
$\in$	属于
$\subset$	包含于
$\supset$	包含
$\cap$	通集(交)
$\cup$	和集(并)
$\setminus$	差集
$\times$	直接积(笛卡儿积)
R^n	n 维实数空间
C^n	n 维复数空间
E^n	n 维欧几里得空间

常见外国数学家译名表

Abel, N.H.	阿贝耳(挪) 1802—1829
Adams, J.C.	阿达姆斯(英) 1819—1892
Apollonius(of Perga)	阿波罗尼(希) 纪元前 260—200
Appell, P.	阿倍耳(法) 1855—1930
Archimedes	阿基米德(希) 纪元前 287—212
Artin, E.	阿廷(奥地利) 1898—1962
Arzelà	阿尔采拉
Ascoli, G.	阿斯可里
Bairstow	伯斯陶
Banach, S.	巴拿赫(波) 1892—1945
Barnes	巴恩斯
Basset	白塞特
Bayes, T.	贝叶斯 —1761
Beltrami, E.	贝尔特拉米(意) 1835—1900
Bendixson, I.O.	班狄克生
Bernays, P.	贝尔内斯 1888—
Bernoulli, Jacob	伯努利·雅各(瑞士) 1654—1705
Bernoulli, Johann	伯努利·约翰(瑞士) 1667—1748
Bernoulli, Nicolaus	伯努利·尼古拉(瑞士) 1695—1726
Bernoulli, Daniel	伯努利·丹尼尔(瑞士) 1700—1784
Bernstein	伯恩斯坦
Bessel, F.W.	贝塞耳(德) 1784—1846
Bianchi, C.	皮安奇(意) 1856—1928
Bire	贝 尔
Birkhoff, G.D.	伯克霍夫·乔治(美) 1884—1944
Birkhoff, Garrett	伯克霍夫·加勒特(美) 1911—
Bolyai, J.	波 约(匈) 1802—1860

Bolzano, B.	波尔查诺(奥地利) 1781—1848
Bonnet, O.	波恩涅(法) 1819—1892
Boole, G.	布　尔(英) 1815—1864
Borel, E.	波雷尔(法) 1871—1956
Brauer, R.	布劳尔
Briggs, H.	布立格(英) 1556—1631
Brouwer, L. E. J.	布劳韦尔(荷) 1881—1966
Brown	布　朗
Budan, F. D.	布　当
Cantor, G.	康　托(德) 1845—1918
Cardan	卡尔丹(意) 1501—1576
Carnot, L. N. M.	卡　诺(法) 1753—1823
Cartan, E. J.	嘉　当(法) 1869—1951
Cassini, J. D.	卡西尼(法) 1625—1712
Cauchy, A. L.	柯　西(法) 1789—1857
Cayley, A.	凯　莱(英) 1821—1895
Cesáro, E.	蔡查罗(意) 1859—1906
Charpit, P.	恰　比　—1784
Chasles, M.	夏　耳(法) 1793—1880
Christoffel, E. B.	克里斯托弗尔(德) 1829—1900
Clairaut, A. C.	克莱罗(法) 1713—1765
Clifford, W. K.	克里福特(英) 1845—1879
Codazzi	柯达奇
Copernicus, N.	哥白尼(波) 1473—1543
Cotes, R.	柯特斯(英) 1682—1716
Courant, R.	库　朗(德) 1888—1970
Cramer, G.	克莱姆(瑞士) 1704—1752
D'Alembert, J. L. R.	达兰贝尔(法) 1717—1783
Darboux, J. G.	达　布(法) 1842—1917
Dedekind, J. W. R.	戴德金(德) 1831—1916
Delambre, J. B. J.	德兰布　1749—1822
De Morgan, A.	德·摩根(英) 1806—1871

De Moivre, A.	德·莫弗(英) 1667—1754
Descartes, R.	笛卡尔(法) 1596—1650
Dini, U.	狄　　尼. 1849—1918
Diophantus	丢番图(希) 246—330
Dirac, P.A.M.	狄拉克(英) 1902—
Dirichlet, P.G.L.	狄利克莱(德) 1805—1859
Dupin, F.P.C.	杜　　班(法) 1784—1873
Einstein, A.	爱因斯坦(德→美) 1878—1955
Eisenstein, F.G.M.	爱森斯坦(德) 1823—1852
Enneper, A.	爱涅勃(德) 1830—1885
Erathosthenes	爱拉托斯散(希) 纪元前 276—195
Euclid	欧几里得(希) 纪元前 4—3 世纪
Euler, L.	欧　　拉(瑞士) 1707—1783
Fejér, L.	费　　叶(尔)(匈) 1880—1959
Feller, W.	费　　勒(美) 1903—1970
Fermat, P. de	费(尔)马(法) 1601—1665
Fermi, E.	费　　米(意) 1901—1954
Fibonacci	费波那奇(意) 1175—1250
Fisher, R.A.	费谢尔(英) 1890—1962
Fourier, J.B.J.	傅立叶(法) 1768—1830
Frenet, F.	弗莱纳　 1816—1868
Fréchet, M.	弗雷谢(法) 1878—1973
Fresnel, A.J.	菲涅耳(法) 1788—1827
Frobenius, F.G.	弗罗比尼乌斯(德) 1849—1917
Fredholm, E.J.	弗雷德霍姆(瑞典) 1866—1927
Fubini, G.	傅比尼(意) 1879—1943
Fuchs, I.L.	富克斯(德) 1833—1902
Galilo, G.	伽利略(意) 1564—1642
Galois, E.	伽罗瓦(法) 1811—1832
Gauss, K.F.	高　　斯(德) 1777—1855
Gegenbauer, L.	盖根堡
Gibbs, J.W.	吉布斯(美) 1839—1903

Goldbach, C.	古德巴赫(德) 1690—1764
Goursat, E.	古　沙(法) 1858—1936
Grassmann, H.G.	格拉斯曼(德) 1809—1877
Green, G.	格　林(英) 1793—1841
Hadamard, J.S.	阿达玛(法) 1865—1963
Hamilton, W.R.	哈密顿(爱尔兰) 1805—1865
Hankel, H.	汉克尔(德) 1839—1873
Hardy, G.H.	哈　代(英) 1877—1947
Harnack, A.	哈拉克
Hasse, H.	哈　塞(德) 1898—
Hausdorff, F.	豪斯道夫(德) 1868—1942
Heaviside, O.	海维赛德(英) 1850—1925
Heine, H.E.	海　涅(德) 1821—1881
Hermite, C.	埃尔米特(法) 1822—1901
Hesse, L.O.	黑　塞(德) 1811—1874
Hilbert, D.	希尔伯特(德) 1862—1943
Hölder, O.	赫尔德(德) 1859—1937
Horner, W.G.	和　纳(英) 1773—1827
Hurwitz, A.	胡尔威茨(瑞士) 1859—1919
Huygens, C.	惠更斯(荷) 1629—1695
Jacobi, C.G.J.	雅可比(德) 1804—1851
Jensen	詹　生
Jordan, C.	若　当(法) 1838—1922
Kalman	卡尔曼
Kelvin, L.	开尔文(凯尔文)(英) 1824—1907
Kepler, J.	开普勒(刻卜勒)(德) 1571—1630
Kirchhoff, G.R.	克希霍夫(德) 1824—1887
Klein, F.	克莱因(德) 1849—1925
Kronecker, L.	克罗内克尔(德) 1823—1891
Kummer, E.E.	库默尔(德) 1810—1893
Kutta, W.	库　塔(德) (1867—1944)
Lagrange, J.L.	拉格朗日(法) 1736—1813

Laguerre, E.N.	拉盖尔(法) 1834—1886
Lambert, J.H.	兰 伯 特(德) 1728—1777
Lamé, G.	拉　梅(法) 1795—1870
Landau, E. G.H.	兰　道(德) 1877—1938
Landen, J.	兰　登(英) 1719—1790
Laplace, P.S.M.	拉普拉斯(法) 1749—1827
Laurent, P.M.H.	罗　朗(法) 1813—1854
Lebesgue, H.L.	勒贝格(法) 1875—1941
Legendre, A.M.	勒让德(法) 1752—1833
Leibniz, G.W.	莱布尼茨(德) 1646—1716
Levi-Civita, T.	勒维-奇维塔(意) 1873—1941
Levy, M.	列　维(法) 1838—1910
Levy, P.	列　维(法) 1886—1971
L'Hospital, G.F.	洛 比 达(法) 1661—1704
Lie, M.S.	李　(挪) 1842—1899
Lindelöf, E.	林德略夫 1870—1946
Liouville, J.	刘维尔(法) 1809—1882
Lipschitz, R.O.S.	李普希茨(德) 1832—1903
Littlewood, J.E.	李特伍德(英) 1885—
Lobatto	洛贝陶
Lorentz, H.A.	罗仑兹(荷) 1853—1928
Mach, E.	马　赫(奥地利) 1838—1916
Maclaurin, C.	马克劳林(英) 1698—1746
Mathieu, E.L.	马提厄(法) 1835—1890
Maxwell, J.C.	麦克斯韦(英) 1831—1879
Mellin, R.H.	梅　林 1854—1933
Mersenne, M.	麦　森(法) 1588—1648
Meusnier, J.B.	梅 尼 埃(法) 1754—1793
Méray, C.	梅　锐(法) 1835—1911
Minkowski, H.	闵可夫斯基(俄→德) 1864—1909
Möbius, A.F.	麦比乌斯(德) 1790—1868
Morera, G.	莫 累 拉(意) 1856—1909

Monge, G.	蒙　　日(法) 1746—1818
Muller	穆　　勒
Murphy	末　　菲
Napier, J.	耐普尔(英) 1550—1617
Neumann, C.G.	诺伊曼(德) 1832—1925
Newton, I.	牛　顿(英) 1642—1727
Nicomedes(of Girasa)	尼哥米德(希) 纪元前 180—
Noether, A.E.	诺　　特(德) 1882—1935
Osgood, W.F.	奥斯古德 1864—1943
Parseval, M.A.	帕塞法耳(德) 1861—1942
Pascal, B.	帕 斯 卡(法) 1623—1662
Pauli, W.	泡　　利(瑞士) 1900—1958
Peano, G.	皮 亚 诺(意) 1858—1932
Pearson, K.	皮 尔 逊(英) 1857—1936
Peirce, B.	皮 尔 斯(美) 1809—1880
Perron, O.	派　　朗 1880—
Pfaff, J.F.	发　　甫(德) 1765—1825
Picard, C. E.	皮　　卡(尔)(法) 1856—1941
Planck, M.	普 朗 克(德) 1858—1947
Plücker, J.	普 吕 克(德) 1801—1868
Poincaré, H.	庞 卡 莱(法) 1854—1912
Poisson, S.D.	泊　　松(法) 1781—1840
Poncelet, J.V.	彭 赛 列(法) 1788—1867
Pythagoras	毕达哥拉斯(希) 纪元前 582—497
Raabe, J.L.	拉 阿 伯(瑞士) 1801—1859
Radon, J.	拉　　东(奥地利) 1887—1956
Rayleigh, J.W.S.	瑞　　利(英) 1842—1919
Riccati, J.F.	黎 卡 提(意) 1676—1754
Ricci, C.G.	李　　奇(意) 1853—1925
Riemann, G.F.B.	黎　　曼(德) 1826—1866
Ritz, W.	里　　兹(瑞士) 1878—1907
Rodrigues, O.	罗得里克(法) 1794—1851

Rouché, E.	儒 歇(法)	1832—1910
Rolle, M.	洛 尔(法)	1652—1719
Runge, J.	龙 格(德)	1856—1927
Russell, B.A.W.	罗 素(英)	1872—1970
Schlömilch, O.	施勒密赫(德)	1823—1901
Schmidt, E.	施 密 特(德)	1876—1959
Schur, F.	舒 尔	
Schwarz, H.A.	施瓦兹(德)	1843—1921
Seidel, P.L.	赛 得 尔	1821—1896
Serret, J.A.	雪 列	1819—1885
Siegel, C.L.	西 格 耳(德)	1896—
Simpson, T.	辛 卜 生(英)	1710—1761
Smith, H.J.S.	史 密 斯(英)	1826—1883
Steiner, J.	史坦纳(瑞士)	1796—1863
Stevin, S.	斯蒂文(比利时)	1548—1620
Stieltjes, T. J.	斯蒂尔吉斯(荷)	1856—1894
Stirling, J.	斯 特 林(英)	1692—1770
Stokes, G.G.	斯托克斯(英)	1819—1903
Stolz, O.	施 笃 兹	1842—1905
Sturm, J.C.F.	斯 图 姆(瑞士)	1803—1855
Sylvester, J.J.	西尔维斯特(英)	1814—1897
Szauder, J.	邵 德 尔(英)	1899—1943
Taylor, B.	泰 勒(英)	1685—1731
Vandermonde, A.T.	范 德 蒙	1735—1796
Van der Waerden, B.L.	范德瓦尔登(荷)	
Viète, F.	维 叶 特(法)	1540—1603
Volterra, V.	沃尔泰拉(意)	1860—1940
Von Neumann, J.L.	冯·诺伊曼(匈→美)	1903—1957
Von Mises, R.	冯·米泽斯	
Wallis, J.	华(瓦)里斯(英)	1616—1703
Waring, E.	华 林(英)	1734—1798
Weber, H.	韦 伯(德)	1842—1913

Weber, W.	韦　　伯(德) 1804—1891
Weierstrass, K.	外尔斯特拉斯(德) 1815—1897
Weingarten, L.G.J.J.	外因格尔登(德) 1836—1910
Weil, A.	威　　尔(法→美) 1906—
Weyl, C.H.H	外　　尔(德) 1885—1955
Whittaker, E.T.	惠 特 克(英) 1873—1956
Wiener, N.	维　　纳(美) 1894—1964
Witt, J.	维　　特(荷) 1625—1672
Wronski, H.J.M.	朗 斯 基　1778—1853
Zermelo, E.	策 莫 洛(德) 1871—1953
zorn	仓恩
Александров, П.С	亚历山大罗夫(苏) 1896—
Бернштейн, С.Н.	伯恩斯坦(德→苏) 1880—1968
Виноградов, И.М.	维纳格拉道夫(苏) 1891—
Боголюбов, Н.Н.	博古留波夫(苏)
Буняковский, В.Я.	布尼亚可夫斯基(苏) 1879—1943
Галёркин, Б.Г.	伽辽金(苏)
Гельфанд, И.М.	盖尔芳特(苏) 1906—1968
Егоров, Д.Ф.	叶果罗夫(苏) 1869—1931
Канторович, Л.В.	康特罗维奇(苏)
Ковалевская, С.В.	柯娃列夫斯卡娅(俄) 1850—1891
Колмогоров, А.Н.	柯尔莫哥罗夫(苏) 1903—
Крейн, М.Г.	克列茵(俄)
Крылов, А.Н.	克雷洛夫(苏) 1863—1945
Лаврентьев, А.М.	拉弗连捷夫(俄)
Лобачевский, Н.И.	罗巴切夫斯基(俄) 1793—1856
Лузин, Н.Н.	鲁　　金(苏) 1883—1950
Ляпунов, А.М.	李雅普诺夫(俄) 1857—1918
Марков, А.А.	马尔科夫(苏) 1856—1922
Михлин, С.Г.	米赫林(苏)
Остроградский, М.В.	奥斯特洛格拉特斯基(俄) 1801—1861
Понтрягин, Л.С.	邦特列雅金(苏) 1908—
Соболев, С.Л.	索伯列夫(苏) 1908—

Тихонов	吉洪诺夫
Хинчин, А.Я.	辛　　钦(苏) 1894—1959
Чебышев, П.Л.	契贝谢夫(俄) 1821—1894